COMPOSITIO MATHEMATICA

R. J. NESSEL

A. PAWELKE

Über Favardklassen von Summationsprozessen mehrdimensionaler Fourierreihen

Compositio Mathematica, tome 19, nº 3 (1968), p. 196-212

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1968__19_3_196_0>

Über Favardklassen von Summationsprozessen mehrdimensionaler Fourierreihen

von

R. J. Nessel und A. Pawelke

1. Einleitung

Es sei R^n der n-dimensionale Euklidische Raum, dessen Elemente wir mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ bezeichnen werden. Das innere Produkt zweier Vektoren x, $v \in R^n$ wird durch $\langle x, v\rangle \equiv \sum_{j=1}^n x_j v_j$ gegeben, die Länge eines Vektors x durch $|x| \equiv \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Unter T^n verstehen wir den Kubus $\{x \in R^n : -\pi \leqq x_j < \pi, 1 \leqq j \leqq n\}$. Bedeutet G die Menge aller ganzen Zahlen, so bezeichnen wir mit G^n die Menge aller Gitterpunkte des R^n, d.h. $G^n = \{k \in R^n : k_j \in G, 1 \leqq j \leqq n\}$.

Wir werden eine auf dem R^n definierte Funktion f periodisch nennen, wenn sie in jeder Variablen periodisch mit der Periode 2π ist. Unter C verstehen wir dann die Menge aller periodischen und stetigen Funktionen, während L^p, $1 \leqq p \leqq \infty$, die Menge aller periodischen und Lebesgue-meßbaren Funktionen bedeutet, die für $1 \leqq p < \infty$ zur p-ten Potenz Lebesgue-integrierbar bzw. für $p = \infty$ wesentlich beschränkt sind. Wir führen in diesen Räumen in der üblichen Weise die entsprechende Norm ein durch

$$\begin{aligned} &\|f\|_c \equiv \sup_{u \in T^n} |f(u)|, \\ (1.1)\qquad &\|f\|_p \equiv \left\{(2\pi)^{-n} \int_{T^n} |f(u)|^p du\right\}^{1/p} \qquad (1 \leqq p < \infty), \\ &\|f\|_\infty \equiv \text{wes.} \sup_{u \in T^n} |f(u)|. \end{aligned}$$

Im folgenden werden wir abkürzend unter X einen der Räume C oder L^p, $1 \leqq p < \infty$, verstehen und dann z.B. $\|f\|_X$ schreiben. Schließlich bezeichnen wir mit M die Menge aller beschränkten, periodischen Maße μ und kennzeichnen mit $\|\mu\|_{\mathsf{M}}$ die totale Variation von μ über T^n [8, p. 18].

Im Mittelpunkt dieser Arbeit werden *singuläre Integrale* vom Fourierschen Faltungstyp

$$I_\rho(f; x) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} f(x-u)\chi_\rho(u)du \tag{1.2}$$

stehen, wobei ρ ein positiver Parameter ist und die Funktionen $\{\chi_\rho\}$ den *Kern* des singulären Integrals (1.2) bilden, von dem wir definitionsgemäß annehmen, daß er die folgenden Bedingungen erfüllt [8, p. 20]:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad ||\chi_\rho||_1 \leqq M && (\rho > 0), \\ &\text{(ii)} \quad \int_{T^n} \chi_\rho(u)du = (2\pi)^n && (\rho > 0), \\ &\text{(iii)} \quad \lim_{\rho\to\infty} \int_{\{u\in T^n : |u| \geqq \delta\}} |\chi_\rho(u)|du = 0 && (0 < \delta < \pi). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Unter diesen Voraussetzungen existiert für $f \in X$ das singuläre Integral (1.2) in X — d.h. falls $X = C$ überall und falls $X = L^p$ fast überall — und gehört wieder zu X. Insbesondere gilt:

$$||I_\rho(f; x)||_X \leqq M||f||_X, \tag{1.4}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} ||I_\rho(f; x)-f(x)||_X = 0. \tag{1.5}$$

Die Relation (1.5) wird den Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen bilden. Sie besagt, daß das singuläre Integral (1.2) ein Approximationsprozess für die beliebige Funktion $f \in X$ ist. Es liegt also nahe, Approximationsordnungen für diese Konvergenz zu untersuchen und die Klassen von Funktionen zu charakterisieren, die eine vorgeschriebene Approximationsordnung in (1.5) genau zulassen. Wir werden hier nur den Grenzfall der bestmöglichen Ordnung der Approximation durch ein singuläres Integral, das sog. Saturationsproblem für (1.2), untersuchen, das durch folgende Definition gestellt wird [16]:

Definition 1.6: Es sei ein singuläres Integral $I_\rho(f; x)$ durch (1.2) gegeben und $f \in X$. Existiert dann eine monoton fallende Funktion $\varphi(\rho)$ mit $\lim_{\rho\to\infty} \varphi(\rho) = 0$ und eine Klasse $F \subset X$ derart, daß

a) aus $||I_\rho(f; x)-f(x)||_X = o(\varphi(\rho))$ folgt $f = \text{const.}$ in X,

b) aus $||I_\rho(f; x)-f(x)||_X = O(\varphi(\rho))$ folgt $f \in F$,

c) aus $f \in F$ folgt $||I_\rho(f; x)-f(x)||_X = O(\varphi(\rho))$, (immer $\rho \to \infty$),

so nennen wir das singuläre Integral saturiert mit der Ordnung $\varphi(\rho)$. Die Klasse F bezeichnen wir als die Favard- oder Saturationsklasse von $I_\rho(f; x)$, wobei wir annehmen, daß F mindestens eine von der Konstanten verschiedene Funktion enthält.

Um dieses Problem für ein gegebenes singuläres Integral zu lösen, müssen wir natürlich etwas mehr über seinen Kern $\{\chi_\rho\}$ wissen. Die wohl entwickelte eindimensionale Theorie [10], [11], [19], [15], [12] legt es nun nahe, diese weiteren Bedingungen auch hier im mehrdimensionalen Fall an die Fourierkoeffizienten von $\{\chi_\rho\}$ zu stellen. Denn hier wie dort bedingt die Faltungsstruktur von (1.2), daß eine Anwendung der endlichen Fouriertransformation den Einfluß des Kernes von dem der Funktion f separiert, was im Sinne des Problems liegt, da die Saturation eine Eigenschaft des singulären Integrals, also des Kerns, sein wird.

Dabei verstehen wir unter der endlichen Fouriertransformierten einer Funktion $f \in X$ die Funktion $f^\wedge$, die über G^n definiert und dort gegeben ist durch

$$(1.7) \qquad f^\wedge(k) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} f(u) e^{-i\langle k, u\rangle} du \qquad (k \in G^n),$$

d.h. $f^\wedge(k)$ ist der k-te Fourierkoeffizient von f. Entsprechend ist die endliche Fourier-Stieltjes-Transformierte eines Maßes $\mu \in \mathsf{M}$ definiert durch

$$(1.8) \qquad \mu^\vee(k) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} e^{-i\langle k, u\rangle} d\mu(u) \qquad (k \in G^n).$$

Die für die Behandlung der Saturationsaufgabe benötigte Bedingung an den Kern $\{\chi_\rho\}$ ist nun die folgende: Mit einer Funktion $\varphi(\rho)$, die für $\rho \to \infty$ monoton fallend gegen Null geht, und einer Funktion $\psi(k)$, die über G^n definiert ist und höchstens im Nullpunkt verschwindet, soll gelten:

$$(1.9) \qquad \lim_{\rho\to\infty} \frac{\chi_\rho^\wedge(k)-1}{\varphi(\rho)} = \psi(k) \qquad (k \in G^n).$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so kann Teil a) des Problems 1.6 und der Umkehrsatz — Teil b) von 1.6 — bewiesen werden, was im nächsten Paragraphen geschehen soll. Die folgenden Abschnitte behandeln als Beispiele das verallgemeinerte singuläre Integral von Weierstrass, die Besselpotentiale und das singuläre Integral von Bochner-Riesz, die alle aus Summationsprozessen mehrdimensionaler Fourierreihen herrühren. Dabei werden wir nicht nur die Ergebnisse aus Paragraph 2 anwenden, sondern auch den fehlenden Teil c) aus Definition 1.6 beweisen und damit die Lösung des Saturationsproblems vollständig angeben können.

Die Autoren möchten es nicht versäumen, an dieser Stelle Herrn Professor P. L. Butzer für sein stetes Interesse und seine zahlreichen, fördernden Anregungen zu dieser Arbeit recht herzlich zu danken.

Diese Arbeit wurde im Rahmen eines von der Deutschen Forschungs-Gemeinschaft geförderten Forschungsvorhabens unterstützt.

2. Der Umkehrsatz

In diesem Abschnitt beweisen wir den folgenden Satz:

SATZ 2.1: Es sei $f \in X$ und ein singuläres Integral $I_\rho(f; x)$ durch (1.2) gegeben, dessen Kern $\{\chi_\rho\}$ die Bedingung (1.9) erfüllt. Dann gilt:

a) Existiert eine Funktion $g \in X$ derart, daß

$$\lim_{\rho\to\infty} \left\| \frac{1}{\varphi(\rho)} \{I_\rho(f; x) - f(x)\} - g(x) \right\|_X = 0 \tag{2.2}$$

ist, so folgt

$$\psi(k) f^\wedge(k) = g^\wedge(k) \qquad (k \in G^n). \tag{2.3}$$

Insbesondere erhalten wir aus

$$\|I_\rho(f; x) - f(x)\|_X = o(\varphi(\rho)) \qquad (\rho \to \infty), \tag{2.4}$$

daß $f = \text{const.}$ in X ist.

b) Aus

$$\|I_\rho(f; x) - f(x)\|_X = O(\varphi(\rho)) \qquad (\rho \to \infty) \tag{2.5}$$

folgt $f \in H\,[X; \psi(k)]$, wobei die Funktionenklasse $H[X; \psi(k)] \subseteqq X$ folgendermaßen definiert ist ($k \in G^n$):

$$\tag{2.6} H[X; \psi(k)] =$$
$$\begin{cases} \{f \in C: & \text{Existiert } g \in L^\infty, \text{ so daß } \psi(k) f^\wedge(k) = g^\wedge(k)\} \\ \{f \in L^1: & \text{Existiert } \mu \in \mathsf{M}, \text{ so daß } \psi(k) f^\wedge(k) = \mu^\vee(k)\} \\ \{f \in L^p,\ 1 < p < \infty: & \text{Existiert } g \in L^p, \text{ so daß } \psi(k) f^\wedge(k) = g^\wedge(k)\}. \end{cases}$$

Beweis: *a*): Da für $f \in X$ $\|f\|_1 \leqq \|f\|_X$ gilt, erhalten wir aus der Voraussetzung (2.2)

$$\left| \left[\frac{1}{\varphi(\rho)} \{I_\rho(f; x) - f(x)\} - g(x) \right]^\wedge (k) \right| \leqq \left\| \frac{1}{\varphi(\rho)} \{I_\rho(f; x) - f(x)\} - g(x) \right\|_X = o(1).$$

Da nach dem Faltungssatz $[I_\rho(f; x)]^\wedge(k) = \chi_\rho{}^\wedge(k) \cdot f^\wedge(k)$ gilt, haben wir also

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\chi_\rho{}^\wedge(k)-1}{\varphi(\rho)} f^\wedge(k) = g^\wedge(k) \qquad (k \in G^n),$$

woraus sich (2.3) unmittelbar aus (1.9) ergibt. Der Rest von Teil a) ist der Spezialfall $g = 0$ in X und eine Anwendung des Eindeutigkeitssatzes der endlichen Fouriertransformation [8, p. 28].

b): Die Voraussetzung (2.5) bedeutet, daß eine Konstante K existiert, so daß

$$\left\| \frac{1}{\varphi(\rho)} \{I_\rho(f; x)-f(x)\} \right\|_X \leqq K$$

für alle hinreichend großen ρ gilt. Dann besagt aber der Satz über die schwache* Kompaktkeit im Falle $X = C$, daß eine Teilfolge $\{\rho_j\}$ mit $\lim_{j\to\infty} \rho_j = \infty$ und eine Funktion $g \in L^\infty$ existieren, so daß

$$\lim_{j\to\infty} \int_{T^n} \frac{I_{\rho_j}(f; u)-f(u)}{\varphi(\rho_j)} h(u)du = \int_{T^n} g(u)h(u)du \tag{2.7}$$

für alle $h \in L^1$ gilt. Nimmt man nun speziell

$$h(u) = (2\pi)^{-n} \exp\{-i\langle k, u\rangle\},$$

so bedeutet (2.7) nach dem Faltungssatz gerade

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\chi_{\rho_j}^\wedge(k)-1}{\varphi(\rho_j)} f^\wedge(k) = g^\wedge(k), \tag{2.8}$$

so daß aus (1.9) sofort folgt $f \in H[C; \psi(k)]$. Der Beweis für den Fall $X = L^p$, $1 < p < \infty$, ergibt sich genau so, nur daß jetzt (2.7) für alle $h \in L^q$, $p^{-1}+q^{-1} = 1$, gilt und $g \in L^p$ ist.

Auch der Beweis für $X = L^1$ verläuft analog. Setzen wir nämlich für eine beliebige Lebesgue-meßbare Menge $E \subseteqq T^n$

$$\mu_\rho(E) = (2\pi)^{-n} \int_E \frac{I_\rho(f; u)-f(u)}{\varphi(\rho)} du,$$

so wird hierdurch eine Menge $\{\mu_\rho\}$ von absolut stetigen Maßen aus M definiert, für die nach Voraussetzung (2.5) gilt: $\|\mu_\rho\|_{\mathsf{M}} \leqq K$ für alle hinreichend großen ρ. Nach der mehrdimensionalen Erweiterung des Satzes von Helly-Bray [8, p. 16] folgt hieraus, daß eine Folge $\{\rho_j\}$ mit $\lim_{j\to\infty} \rho_j = \infty$ und ein Maß $\mu \in \mathsf{M}$ derart existieren, daß für alle $h \in C$

$$\lim_{j\to\infty}\int_{T^n}\frac{I_{\rho_j}(f;u)-f(u)}{\varphi(\rho_j)}h(u)du=\int_{T^n}h(u)d\mu(u) \tag{2.7*}$$

gilt. Die Spezialisierung $h(u)=(2\pi)^{-n}\exp\{-i\langle k,u\rangle\}$ und (1.9) führen dann unmittelbar zur Behauptung $f\in H[L^1;\psi(k)]$.

Das Ergebnis von Satz 2.1 legt es nun nahe, daß die Saturationsklasse des singulären Integrals (1.2) durch $H[X;\psi(k)]$ gegeben ist. Der dazu fehlende Teil c) der Definition 1.6 kann von uns für allgemeine Funktionen ψ nicht bewiesen werden, doch scheint es erwähnenswert, daß $H[X;\psi(k)]$ nichttriviale Funktionen enthält. Ist $m\in G^n$ beliebig, so ist z.B. $\exp\{i\langle m,x\rangle\}\in H[X;\psi(k)]$ für beliebige ψ.

3. Das verallgemeinerte singuläre Integral von Weierstrass

Als erstes Beispiel betrachten wir das verallgemeinerte singuläre Integral von Weierstrass einer Funktion $f\in X$:

$$W_t^\kappa(f;x)=(2\pi)^{-n}\int_{T^n}f(x-u)w_t^\kappa(u)du \qquad (0<\kappa\leqq 2;\ t>0), \tag{3.1}$$

wobei κ ein fester Index ist, dessen Werte wir auf $0<\kappa\leqq 2$ beschränken, und die Funktionen $w_t^\kappa(x)$ für $t>0$ durch die absolut und gleichmäßig auf T^n konvergierende Reihe

$$w_t^\kappa(x)=\sum_{k\in G^n}e^{-|k|^\kappa t}e^{i\langle k,x\rangle} \qquad (0<\kappa\leqq 2;\ t>0) \tag{3.2}$$

gegeben sind. Wir haben $\rho=t^{-1/\kappa}$ gesetzt, so daß wir den Grenzwert $(t\to 0+)$ untersuchen werden.

Da für $0<\kappa\leqq 2$ und $t>0$ die Funktionen $w_t^\kappa(x)$ positiv und stetig sind und insbesondere die Eigenschaften (1.3) eines Kernes besitzen [6], existieren die Funktionen $W_t^\kappa(f;x)$ für jedes $f\in X$, $0<\kappa\leqq 2$ und $t>0$ als Elemente aus C, für die die Relationen (1.4) mit $M=1$ und (1.5) für $t\to 0+$ gelten. Auf Grund der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der Reihe können wir für das singuläre Integral (3.1) insbesondere auch schreiben

$$W_t^\kappa(f;x)=\sum_{k\in G^n}e^{-|k|^\kappa t}f^\wedge(k)e^{i\langle k,x\rangle}, \tag{3.3}$$

wodurch ein Summationsverfahren der Fourierreihe einer Funktion $f\in X$ definiert wird ([5], [4]).

Eine andere Form von (3.3) wird durch

$$W_r^\kappa(f;x)=\sum_{k\in G^n}r^{|k|^\kappa}f^\wedge(k)e^{i\langle k,x\rangle} \tag{3.3*}$$

gegeben, indem wir $e^{-t} = r$ setzen und für $0 < r < 1$ den Grenzwert $(r \to 1-)$ betrachten.

Satz 3.4: *Für das verallgemeinerte singuläre Integral* (3.1) *von Weierstrass einer Funktion* $f \in X$ *gilt:*

a) *Aus*

$$\|W_t^\kappa(f; x) - f(x)\|_X = o(t) \qquad (t \to 0+) \tag{3.5}$$

folgt, daß $f = \text{const.}$ *in* X *ist.*

b) *Die Relation*

$$\|W_t^\kappa(f; x) - f(x)\|_X = O(t) \qquad (t \to 0+) \tag{3.6}$$

gilt dann und nur dann, wenn $f \in H[X; -|k|^\kappa]$ *ist. Das verallgemeinerte singuläre Integral* (3.1) *von Weierstrass ist also in* X *saturiert mit der Ordnung* $O(t)$, *und seine Favardklasse wird gegeben durch* $H[X; -|k|^\kappa]$.

Beweis: Da natürlich auf Grund von (3.2)

$$[w_t^\kappa]^\wedge(k) = \exp\{-|k|^\kappa t\}$$

folgt, erhalten wir für (1.9)

$$\lim_{t \to 0+} \frac{e^{-|k|^\kappa t} - 1}{t} = -|k|^\kappa \qquad (k \in G^n), \tag{3.7}$$

d.h. die Bedingung (1.9) ist mit $\rho = t^{-1/\kappa}$ erfüllt für $\varphi(\rho) = \rho^{-\kappa} \equiv t$ und $\psi(k) = -|k|^\kappa$. Mithin liefert Satz 2.1 den Beweis für Teil a) und für die Umkehrrichtung von Teil b).

Sei nun $f \in H[X; -|k|^\kappa]$ und z.B. $X = C$; aus der Darstellung $-|k|^\kappa f^\wedge(k) = g^\wedge(k)$ folgt dann mit dem Faltungssatz für alle $k \in G^n$:

$$\begin{aligned}[W_t^\kappa(f; x) - f(x)]^\wedge(k) &= (e^{-|k|^\kappa t} - 1) f^\wedge(k) = \int_0^t e^{-|k|^\kappa \tau} g^\wedge(k)\, d\tau \\ &= \int_0^t [W_\tau^\kappa(g; x)]^\wedge(k)\, d\tau = \left[\int_0^t W_\tau^\kappa(g; x)\, d\tau\right]^\wedge(k),\end{aligned}$$

wobei die für die letzte Gleichheit maßgebliche Vertauschung der Integrationsordnungen durch

$$\int_0^t \|W_\tau^\kappa(g; x)\|_1\, d\tau \leqq \int_0^t \|g\|_\infty\, d\tau = t\|g\|_\infty$$

und den Satz von Fubini gerechtfertigt ist. Mithin liefert der Eindeutigkeitssatz der endlichen Fouriertransformation für jedes feste $t > 0$

$$W_t^\kappa(f; x) - f(x) = \int_0^t W_\tau^\kappa(g; x)\, d\tau \qquad (x \in T^n), \tag{3.8}$$

woraus sich (3.6) sofort ergibt. Im Falle $X = L^p$, $1 < p < \infty$, führen die gleichen Überlegungen wieder zur Darstellung (3.8), die nun mit einem $g \in L^p$ für jedes feste $t > 0$ fast überall gilt, während wir für $X = L^1$ zu der Relation

$$W_t^\kappa(f; x) - f(x) = \int_0^t W_\tau^\kappa(d\mu; x)\, d\tau \tag{3.8*}$$

gelangen, die wieder bei festem $t > 0$ fast überall gilt. Dabei ist das Maß $\mu \in \mathsf{M}$ durch die Voraussetzung $f \in H[L^1; -|k|^\kappa]$ gegeben und $W_t^\kappa(d\mu; x)$ durch

$$W_t^\kappa(d\mu; x) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} w_t^\kappa(x-u)\, d\mu(u) \tag{3.1*}$$

definiert.

Es sei hier vermerkt, daß der Beweis des direkten Teils des Saturationssatzes 3.4 — Teil c) der Definition 1.6 — im wesentlichen auf der Halbgruppeneigenschaft der Operatoren (3.1) beruht. Für eine allgemeine Behandlung von Approximationsproblemen für Halbgruppen von Operatoren verweisen wir auf [9], [2], [3].

4. Sphärische Mittel

Wir werden in diesem Paragraphen einige weitere Hilfsmittel zusammenstellen, die wir im folgenden benötigen werden. Insbesondere werden wir einen, allerdings sehr einfachen, direkten Approximationssatz für den Fall der Saturation angeben.

Das sphärische Mittel einer Funktion $f \in X$ ist für $r > 0$ definiert durch

$$S_r(f; x) = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \int_{|u|=1} f(x+ru)\, du \qquad (r > 0). \tag{4.1}$$

Obwohl $S_r(f; x)$ kein singuläres Integral im Sinne von (1.2) ist, gilt wie dort: Für $f \in X$ existiert $S_r(f; x)$ in X, gehört wieder zu X und genügt

$$\|S_r(f; x)\|_X \leqq \|f\|_X \qquad (r > 0), \tag{4.2}$$

$$\lim_{r \to 0+} \|S_r(f; x) - f(x)\|_X = 0. \tag{4.3}$$

Mit den bisher benutzten Methoden läßt sich zeigen:

Satz 4.4: Für die sphärischen Mittel (4.1) einer Funktion $f \in X$ gilt:

a) Aus

$$\|S_r(f;x)-f(x)\|_X = o(r^2) \qquad (r \to 0+) \tag{4.5}$$

folgt, daß $f = \text{const.}$ in X ist.

b) Die Relation

$$\|S_r(f;x)-f(x)\|_X = O(r^2) \qquad (r \to 0+) \tag{4.6}$$

gilt dann und nur dann, wenn $f \in H[X; -1/2n\,|k|^2]$ ist.

In der Tat folgt auf Grund des Satzes von Fubini

$$[S_r(f;x)]^\wedge(k) = \left\{\Gamma(n/2)\left(\frac{r|k|}{2}\right)^{-(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(r|k|)\right\} f^\wedge(k) \qquad (k \in G^n), \tag{4.7}$$

wobei J_λ die Besselfunktion λ-ter Ordnung bedeutet. Da

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\Gamma(n/2)\left(\frac{r|k|}{2}\right)^{-(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(r|k|)-1}{r^2} = -\frac{1}{2n}|k|^2, \tag{4.8}$$

ist die zu (1.9) analoge Bedingung erfüllt, so daß sich der Beweis von Satz 2.1 sofort übertragen läßt. Zum Beweis des noch fehlenden Teils von b) gehen wir wie in Abschnitt 3 vor. Anstelle von (3.8) führt die Voraussetzung $f \in H[X; -1/2n\,|k|^2]$ jetzt z.B. für $X = C$ zu der Darstellung

$$S_r(f;x)-f(x) = 2\int_0^r \tau M_\tau(g;x)\,d\tau, \tag{4.9}$$

wobei

$$M_r(f;x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\pi^{n/2} r^n}\int_{|u|\leq r} f(x+u)\,du \qquad (r>0) \tag{4.10}$$

ein singuläres Integral vom Typ (1.2) ist, das in X saturiert ist mit Ordnung $O(r^2)$, $(r \to 0+)$, und dessen Favardklasse durch $H[X; -1/(2(n+2))|k|^2]$ gegeben ist. In [17] wurden die Mittel (4.1) und (4.10) für $f \in L^p(R^n)$, $1 \leqq p \leqq 2$, mit Hilfe der Fouriertransformation genau untersucht, so daß wir es hier bei der skizzierten Behandlung des völlig analogen periodischen Falles bewenden lassen können.

Für das Folgende müssen wir nun kurz auf die Definition eines Kernes im R^n eingehen und auf die Möglichkeit, aus ihm einen periodischen Kern zu gewinnen. Entsprechend zu (1.3) ist mit einem positiven Parameter ρ ein Kern $\{{}^*\chi_\rho\}$ im R^n durch die folgenden Eigenschaften definiert [8, p. 1]:

$$\text{(4.11)}\quad \begin{aligned} &\text{(i)} && (2\pi)^{-n}\int_{R^n}|{}^*\chi_\rho(u)|du \equiv \|{}^*\chi_\rho\|_1 \leqq M && (\rho>0),\\ &\text{(ii)} && \int_{R^n}{}^*\chi_\rho(u)du = (2\pi)^n && (\rho>0),\\ &\text{(iii)} && \lim_{\rho\to\infty}\int_{|u|\geqq\delta}|{}^*\chi_\rho(u)|du = 0 && (\delta>0). \end{aligned}$$

Mit Hilfe eines Kerns $\{{}^*\chi_\rho\}$ im R^n werden, analog zu (1.2), singuläre Integrale im R^n für Funktionen $f \in L^p(R^n)$, $1 \leqq p < \infty$, gebildet [8, p. 2], auf deren Eigenschaften wir aber hier nicht weiter eingehen wollen.

Wir vermerken, daß jede Funktion ${}^*\chi \in L^1(R^n)$, die durch

$$\text{(4.12)}\qquad \int_{R^n}{}^*\chi(u)du = (2\pi)^n$$

normiert ist, durch $\{\rho^n\,{}^*\chi(\rho x)\}$ einen Kern im R^n, d.h. im Sinne von (4.11), definiert. Im Gegensatz zum periodischen Fall besitzen diese besonders übersichtliche Parameterabhängigkeit praktisch alle bekannten Kerne im R^n.

Es sei nun $\{{}^*\chi_\rho\}$ ein Kern im R^n. Setzen wir

$$\text{(4.13)}\qquad \chi_\rho(x) = \sum_{k\in G^n}{}^*\chi_\rho(x+2k\pi),$$

so folgt aus (4.11), (i), daß

$$\text{(4.14)}\qquad \begin{aligned} \int_{T^n}\Big\{\sum_{k\in G^n}|{}^*\chi_\rho(u+2k\pi)|\Big\}du &= \sum_{k\in G^n}\int_{T^n}|{}^*\chi_\rho(u+2k\pi)|du\\ &= \int_{R^n}|{}^*\chi_\rho(u)|du \end{aligned}$$

gilt. Mithin ist die Reihe in (4.13) absolut majorisiert konvergent für fast alle $x \in T^n$ und definiert darüber hinaus einen periodischen Kern im Sinne der Definition (1.3) [8, p.19]. In X gilt dann mit derartigen Kernen $\{\chi_\rho\}$ für jedes $f \in X$

$$\text{(4.15)}\qquad \int_{T^n} f(x-u)\chi_\rho(u)du = \int_{R^n} f(x-u)\,{}^*\chi_\rho(u)du.$$

Insbesondere erhalten wir

$$\text{(4.16)}\qquad \chi_\rho^\wedge(k) = [{}^*\chi_\rho]^\wedge(k) \qquad (k \in G^n),$$

wenn wir die Fouriertransformierte von ${}^*\chi_\rho$ durch

$$\text{(4.17)}\qquad [{}^*\chi_\rho]^\wedge(v) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n}{}^*\chi_\rho(u)e^{-i\langle v,u\rangle}du \qquad (v \in R^n)$$

definieren [8, p. 31]. Als erste Beispiele zur Definition (4.13) bzw.

zur Formel (4.15) erhalten wir für das verallgemeinerte periodische singuläre Integral (3.1) von Weierstrass im Falle $\kappa = 1$ für jedes $f \in X$

$$(4.18) \qquad W_t^1(f;\, x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{R^n} f(x-u)\, \frac{t}{(t^2+|u|^2)^{(n+1)/2}}\, du,$$

was dem singulären Integral von Cauchy-Poisson im R^n entspricht. Ebenso bekommen wir für $\kappa = 2$ den Zusammenhang mit dem speziellen singulären Integral von Weierstrass im R^n:

$$(4.19) \qquad W_t^2(f;\, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{R^n} f(x-u) e^{-|u|^2/4t}\, du \qquad (f \in X)$$

(siehe [8, p. 32]), dessen Saturationsproblem wie das von (4.18), aufgefaßt als Integrale im R^n, in [10], [13] gelöst wurde.

Bevor wir nun in den nächsten Paragraphen weitere Beispiele von periodischen Kernen, die sich mittels der Formel (4.13) aus Kernen im R^n ergeben, betrachten, wollen wir noch den folgenden einfachen direkten Approximationssatz beweisen:

Satz 4.20: Für $f \in X$ sei ein singuläres Integral $I_\rho(f;\, x)$ durch (1.2) gegeben, dessen Kern $\{\chi_\rho\}$ sich mittels (4.13) aus einem Kern $\{{}^*\chi_\rho\}$ im R^n herleiten läßt. Wir nehmen an, daß ${}^*\chi_\rho(x) = \rho^n {}^*\chi(\rho x)$ fast überall gilt, wobei die Funktion ${}^*\chi \in L^1(R^n)$ die Bedingung (4.12) erfüllt und radial ist, d.h. es existiere eine auf $(0, \infty)$ definierte Funktion $\kappa(r)$, so daß ${}^*\chi(x) = \kappa(|x|)$ fast überall gilt. Existiert dann das $(n+1)$-te absolute Moment von κ, so erhalten wir für alle Funktionen $f \in H[X;\, -|k|^2]$

$$(4.21) \qquad \|I_\rho(f;\, x) - f(x)\|_X = O(\rho^{-2}) \qquad (\rho \to \infty).$$

Beweis: (siehe auch [17]). Auf Grund von (4.15) und den Voraussetzungen über den Kern erhalten wir

$$\begin{aligned} I_\rho(f;\, x) - f(x) &= \frac{\rho^n}{(2\pi)^n} \int_{R^n} [f(x-u) - f(x)]\, {}^*\chi(\rho u)\, du \\ &= \frac{\rho^n}{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^\infty \kappa(\rho r) r^{n-1} [S_r(f;\, x) - f(x)]\, dr, \end{aligned}$$

so daß sich auf Grund der Hölder-Minkowski'schen Ungleichung mit einer Konstanten A

$$\|I_\rho(f;\, x) - f(x)\|_X \leqq A\rho^n \int_0^\infty |\kappa(\rho r)| r^{n-1} \|S_r(f;\, x) - f(x)\|_X\, dr$$

ergibt. Nun wissen wir aus Satz 4.4, daß die Voraussetzung

$f \in H[X; -|k|^2]$ äquivalent mit (4.6) ist, so daß wir insgesamt mit einer anderen Konstanten A' auf

$$\begin{aligned} \|I_\rho(f; x)-f(x)\|_X &\leqq A'\rho^n \int_0^\infty |\kappa(\rho r)| r^{n+1} dr \\ &= \left\{A' \cdot \int_0^\infty r^{n+1} |\kappa(r)| dr\right\} \rho^{-2} \end{aligned}$$

schließen.

5. Periodische Besselpotentiale

Wir gehen aus von dem Kern $\{\rho^n {}^*g^\alpha(\rho x)\}$ des Besselpotentials im R^n, der durch die Funktion

$$(5.1) \qquad {}^*g^\alpha(x) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha/2)} \left(\frac{|x|}{2}\right)^{-(n-\alpha)/2} K_{(n-\alpha)/2}(|x|) \qquad (\alpha > 0)$$

bestimmt wird [1, p. 416]. Hierbei ist $K_\lambda(t)$ die modifizierte Besselfunktion dritter Art der Ordnung λ:

$$K_\lambda(t) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\lambda}(t)-I_\lambda(t)}{\sin \lambda\pi}; \qquad I_\lambda(z) = e^{-i\lambda\pi/2} J_\lambda(iz).$$

Die Funktion ${}^*g^\alpha$ hat u.a. folgende Eigenschaften [1], [20]: $(\alpha > 0)$

$$(5.2) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} \ \ {}^*g^\alpha(x) \geqq 0; & \text{(ii)} \ \ {}^*g^\alpha(x) \in L^1(R^n); \\ \text{(iii)} \ \ \int_{R^n} {}^*g^\alpha(u) du = (2\pi)^n; & \text{(iv)} \ \ [{}^*g^\alpha]^\wedge(v) = (1+|v|^2)^{-\alpha/2}. \end{array}$$

Die Eigenschaften (5.2) (i), (ii), (iii) sichern gerade, daß $\{\rho^n {}^*g^\alpha(\rho x)\}$ ein positiver Kern im R^n ist, während wir aus (5.2) (iv) insbesondere für $\rho > 0$

$$(5.3) \qquad [\rho^n {}^*g^\alpha(\rho x)]^\wedge(v) = \left(1+\left|\frac{v}{\rho}\right|^2\right)^{-\alpha/2} \qquad (\alpha > 0)$$

erhalten. Der Kern $\{g_\rho^\alpha\}$ des periodischen Besselpotentials ist nun über (4.13) definiert durch

$$(5.4) \qquad g_\rho^\alpha(x) = \sum_{k \in G^n} \rho^n {}^*g^\alpha(\rho(x+2k\pi)) \qquad (\alpha > 0)$$

und damit das periodische Besselpotential einer Funktion $f \in X$ als das singuläre Integral

$$(5.5) \qquad G_\rho^\alpha(f; x) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} f(x-u) g_\rho^\alpha(u) du \qquad (\alpha > 0).$$

Auf Grund von (4.16) und (5.3) erhalten wir

$$(5.6)\qquad [g_\rho^\alpha]^\wedge(k) = \left(1+\left|\frac{k}{\rho}\right|^2\right)^{-\alpha/2} \qquad (k \in G^n).$$

Weiterhin haben wir für $\alpha > n$

$$(5.7)\qquad g_\rho^\alpha(x) = \sum_{k\in G^n}\left(1+\left|\frac{k}{\rho}\right|^2\right)^{-\alpha/2} e^{i\langle k,x\rangle}$$

und also

$$(5.8)\qquad G_\rho^\alpha(f;x) = \sum_{k\in G^n}\left(1+\left|\frac{k}{\rho}\right|^2\right)^{-\alpha/2} f^\wedge(k)e^{i\langle k,x\rangle} \qquad (\alpha > n),$$

wobei die Reihen in (5.4), (5.7) und (5.8) für $\alpha > n$ absolut und gleichmäßig konvergieren. Die Formel (5.8) unterstreicht die Bedeutung der Besselpotentiale für die Summierung von mehrdimensionalen Fourierreihen.

Bevor wir nun Satz 2.1 und 4.20 auf die periodischen Besselpotentiale (5.5) anwenden, vermerken wir noch den Spezialfall $\alpha = n+1$, für den wir in (5.1) haben

$$(5.9)\qquad {}^*g^{n+1}(x) = \frac{2^{n-1}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)}\, e^{-|x|},$$

so daß wir nach (4.15) für $f \in X$

$$(5.10)\qquad G_\rho^{n+1}(f;x) = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}\Gamma(n)}\,\rho^n \int_{R^n} f(x-u)e^{-\rho|u|}\,du$$

erhalten. Das Integral (5.10), aufgefaßt als singuläres Integral über den Gesamtraum R^n, heißt das singuläre Integral von Picard, dessen Saturation in [10], [17] behandelt wurde.

Satz 5.11: Für die periodischen Besselpotentiale (5.5) einer Funktion $f \in X$ gilt:

a) Aus

$$(5.12)\qquad \|G_\rho^\alpha(f;x)-f(x)\|_X = o(\rho^{-2}) \qquad (\rho\to\infty)$$

folgt, daß $f = \text{const.}$ in X ist.

b) Die Relation

$$(5.13)\qquad \|G_\rho^\alpha(f;x)-f(x)\|_X = O(\rho^{-2}) \qquad (\rho\to\infty)$$

gilt dann und nur dann, wenn $f \in H[X;\, -\alpha/2|k|^2]$ ist. Das periodische Besselpotential (5.5) ist also in X saturiert mit der Ordnung $O(\rho^{-2})$, und seine Favardklasse wird gegeben durch $H[X;\, -\alpha/2|k|^2]$.

Beweis: Auf Grund von (5.6) erhalten wir für alle $k \in G^n$

$$(5.14)\quad \lim_{\rho\to\infty} \frac{[g_\rho^\alpha]^\wedge(k)-1}{\rho^{-2}} = \lim_{\rho\to\infty} \frac{\left(1+\left|\frac{k}{\rho}\right|^2\right)^{-\alpha/2}-1}{\rho^{-2}} = -\frac{\alpha}{2}|k|^2.$$

Mithin ist für den Kern $\{g_\rho^\alpha\}$ die Bedingung (1.9) mit $\varphi(\rho) = \rho^{-2}$ und $\psi(k) = -\alpha/2|k|^2$ erfüllt, was die Anwendung von Satz 2.1 ermöglicht. Außerdem sind nach (5.2) und [1, p. 416]

$$(5.15)\qquad \int_0^\infty r^{n+1}\cdot\{r^{-(n-\alpha)/2}K_{(n-\alpha)/2}(r)\}dr < \infty$$

die Voraussetzungen von Satz 4.20 durch den Kern $\{g_\rho^\alpha\}$ alle erfüllt.

6. Das Summationsverfahren von Bochner-Riesz

Das Summationsverfahren von Bochner-Riesz der Fourierreihe einer Funktion $f \in X$ ist definiert durch

$$(6.1)\qquad B_\rho^\alpha(f;x) = \sum_{|k|\leqq\rho}\left(1-\left|\frac{k}{\rho}\right|^2\right)^\alpha f^\wedge(k)e^{i\langle k,x\rangle} \quad \left(\alpha > \frac{n-1}{2}\right).$$

Da auf der rechten Seite für jedes $\rho > 0$ eine endliche Summe steht, wird durch sie eine Funktion $B_\rho^\alpha(f;x) \in C$ definiert, die wir mit (1.7) auch in Form eines singulären Integrals

$$(6.2)\qquad B_\rho^\alpha(f;x) = (2\pi)^{-n}\int_{T^n} f(x-u)b_\rho^\alpha(u)du \quad \left(\alpha > \frac{n-1}{2}\right)$$

mit

$$(6.3)\qquad b_\rho^\alpha(x) = \sum_{|k|\leqq\rho}\left(1-\left|\frac{k}{\rho}\right|^2\right)^\alpha e^{i\langle k,x\rangle}$$

schreiben können.

Die benötigten Eigenschaften von $\{b_\rho^\alpha\}$ lassen sich nun wieder wie bei den Besselpotentialen besonders einfach über den entsprechenden Kern im R^n herleiten.

Wenn wir

$$(6.4)\quad {}^*b^\alpha(x) = \pi^{n/2}\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{|x|}{2}\right)^{-((n/2)+\alpha)} J_{(n/2)+\alpha}(|x|) \quad \left(\alpha > \frac{n-1}{2}\right)$$

setzen, so wird durch $\{\rho^{n*}b^\alpha(\rho x)\}$ ein Kern im R^n definiert [5], [18], für dessen Fouriertransformierte wir gerade

$$(6.5)\qquad [g^{n*}b^{\alpha}(\rho x)]^{\wedge}(v)=\begin{cases}\left(1-\left|\dfrac{v}{\rho}\right|^{2}\right)^{\alpha} & |v|\leqq\rho\\ & \text{für}\\ 0 & |v|>\rho\end{cases}\qquad (v\in R^{n})$$

erhalten. Nach (4.13) wird nun durch

$$(6.6)\qquad b_{\rho}^{\alpha}(x)=\sum_{k\in G^{n}}\rho^{n*}b^{\alpha}(\rho(x+2k\pi))\qquad \left(\alpha>\frac{n-1}{2}\right)$$

ein periodischer Kern definiert, der mit (6.3) übereinstimmt, da die Fourierkoeffizienten der durch die Reihe in (6.6) definierten Funktion nach (4.16) gerade durch

$$(6.7)\qquad [b_{\rho}^{\alpha}]^{\wedge}(k)=\begin{cases}\left(1-\left|\dfrac{k}{\rho}\right|^{2}\right)^{\alpha} & |k|\leqq\rho\\ & \text{für}\\ 0 & |k|>\rho\end{cases}\qquad (k\in G^{n})$$

gegeben sind, und alle beteiligten Reihen für $\alpha>(n-1)/2$ absolut und gleichmäßig in T^{n} konvergieren [8, p. 34], [18, p. 54]. Mithin

Satz 6.8: Für das singuläre Integral (6.2) von Bochner-Riesz einer Funktion $f\in X$ gilt für $\alpha>(n+3)/2$:

a) Aus

$$(6.9)\qquad ||B_{\rho}^{\alpha}(f;x)-f(x)||_{X}=o(\rho^{-2})\qquad (\rho\to\infty)$$

folgt, daß $f=\text{const.}$ in X ist.

b) Die Relation

$$(6.10)\qquad ||B_{\rho}^{\alpha}(f;x)-f(x)||_{X}=O(\rho^{-2})\qquad (\rho\to\infty)$$

gilt dann und nur dann, wenn $f\in H[X;-\alpha|k|^{2}]$ ist. Für $\alpha>(n+3)/2$ ist also das singuläre Integral (6.2) von Bochner-Riesz in X saturiert mit der Ordnung 0 (ρ^{-2}), und seine Favardklasse wird gegeben durch $H[X;-\alpha|k|^{2}]$.

Beweis: Der Beweis ist erbracht, wenn wir zeigen können, daß die Voraussetzungen von Satz 2.1 und 4.20 erfüllt werden. Dazu haben wir wegen (6.7) einmal

$$(6.11)\qquad \lim_{\rho\to\infty}\frac{[b_{\rho}^{\alpha}]^{\wedge}(k)-1}{\rho^{-2}}=\lim_{\rho\to\infty}\frac{\left(1-\left|\dfrac{k}{\rho}\right|^{2}\right)^{\alpha}-1}{\rho^{-2}}=-\alpha|k|^{2}\qquad (k\in G^{n}),$$

so daß der Kern $\{b_\rho^\alpha\}$ der Bedingung (1.9) mit $\varphi(\rho) = \rho^{-2}$ und $\psi(k) = -\alpha|k|^2$ genügt. Zum anderen gilt

$$(6.12) \qquad \int_0^\infty r^{n+1}\{r^{-((n/2)+\alpha)}|J_{(n/2)+\alpha}(r)|\}dr < \infty \quad \left(\alpha > \frac{n+3}{2}\right),$$

was zu beweisen war.

Abschließend ist zu sagen, daß die bisherige Charakterisierung der Saturationsklassen insofern von indirekter Natur ist, als die Klassen $H[X; \psi(k)]$ durch Bedingungen an die Fourierkoeffizienten der Funktion f festgelegt werden. Es bleibt die Aufgabe, die Favardklassen durch direkte Bedingungen an die zu approximierende Funktion f anzugeben. Als ein erster Beitrag in diese Richtung mag das Ergebnis von Satz 4.4 angesehen werden, das besagt, daß z.B. die Favardklassen des singulären Integrals (6.2) von Bochner-Riesz und der Besselpotentiale (5.5) äquivalent durch die Bedingung (4.6) über die sphärischen Mittel der Funktion f ausgedrückt werden können. Weiterreichende Charakterisierungen von Favardklassen, die insbesondere auch aus Differenzierbaıkeitsbedingungen an f bestehen, sind einer weiteren Arbeit überlassen.

LITERATUR

Aronszajn, N. and Smith, K. T.,

[1] Theory of Bessel potentials. I. Ann. Inst. Fourier 11, (1961), 385—475.

Berens, H.,

[2] Approximationssätze für Halbgruppenoperatoren in intermediären Räumen. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, H. 32 (1964), 1—59.

Berens, H.,

[3] Equivalent representations for the infinitesimal generator of higher orders in semi-group theory. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 68 and Indag. Math. 27 (1965), 497—512.

Berens, H. und Görlich, E.,

[4] Über einen Darstellungssatz für Funktionen als Fourierintegrale und Anwendungen in der Fourieranalysis. Tôhoku Math. Journ. 18 (1966), 429—453.

Bochner, S.,

[5] Summation of multiple Fourier series by spherical means, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 175—207.

Bochner, S.,

[6] Quasi-analytic functions, Laplace operator, positive kernels, Ann. of Math. 51 (1950), 68—91.

Bochner, S.,

[7] Lectures on Fourier integrals. Princeton 1959.

BOCHNER, S.,
[8] Harmonic analysis and the theory of probability. Los Angeles 1960.

BUTZER, P. L.,
[9] Über den Grad der Approximation des Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale. Math. Ann. 133 (1957), 410—425.

BUTZER, P. L.,
[10] Fourier transform methods in the theory of approximation. Arch. Rat. Mech. Anal. 5 (1960), 390—415.

BUTZER, P. L.,
[11] Integral transform methods in the theory of approximation. In: On Approximation theory (Proceedings of the Conference held in the Math. Research Institute at Oberwolfach, 1963). ISNM, vol. 5, Basel (1964), 12—23.

BUTZER, P. L. und GÖRLICH, E.,
[12] Saturationsklassen und asymptotische Eigenschaften trigonometrischer singulärer Integrale. Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes NRW, Bd. 33 (Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß, 1815—1965), Westdt. Verlag, Köln 1966, 339—392.

BUTZER, P. L. and NESSEL, R. J.,
[13] Favard classes for n-dimensional singular integrals. Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 493—498.

BUTZER, P. L. and NESSEL, R. J.,
[14] Contributions to the theory of saturation for singular integrals in several variables. I. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 69 and Indag. Math. 28 (1966), 515—531.

BUTZER, P. L. and SUNOUCHI, G.,
[15] Approximation theorems for the solution of Fourier's problem and Dirichlet's problem. Math. Ann. 155 (1964), 316—330.

FAVARD, J.,
[16] Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Colloque d'Anal. Harmon. Publ. C.N.R.S. Paris 15 (1949), 97—110.

NESSEL, R. J.,
[17] Contributions to the theory of saturation for singular integrals in several variables, II, III. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 70 and Indag Math. 29 (1967), 52—73.

SHAPIRO, V. L.,
[18] Fourier series in several variables. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 48—93.

SUNOUCHI, G. and WATARI, C.,
[19] On determination of the class of saturation in the theory of approximation, I. Proc. Japan. Acad. 34 (1958), 477—481; II, Tôhoku Math. Journ. 11 (1959), 480—488.

TAIBLESON, M. H.,
[20] On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space. J. Math. Mech. 13 (1964), 407—479.

(Oblatum 4-4-1967). Technische Hochschule Aachen