ARTHUR MOÓR

# Über eine Verallgemeinerung der Schouten-Haantjesschen Räume

*Compositio Mathematica*, tome 19, nº 2 (1968), p. 83-94
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1968__19_2_83_0>

# Über eine Verallgemeinerung der Schouten-Haantjesschen Räume

von

Arthur Moór

## Einleitung

J. A. Schouten und J. Haantjes begründeten im Jahre 1936 (vgl. [6]) eine metrische Übertragungstheorie in denjenigen Mannigfaltigkeiten, deren Grundelemente ko- bzw. kontravariante Vektordichten $u_i$ bzw. $u^i$ vom Gewicht $(-p)$ bzw. $(+p)$ sind. Diese Übertragungstheorie wurde in mehreren Arbeiten weiter entwickelt; ausser unserer Arbeit [5] verweisen wir in erster Reihe auf die Untersuchungen von E. T. Davies und R. S. Clark, die diese fundamentale Theorie der Übertragungen wesentlich weiter entwickelt haben (vgl. [1], [2]).

In dieser Arbeit wollen wir eine solche Verallgemeinerung der Schouten-Haantjesschen Räume der Vektordichten durchführen, die vom geometrischen Standpunkt aus sowohl als ein Basisraum von allgemeineren Grundelementen, als auch derselbe Raum, aber mit einer allgemeineren Transformationsgruppe interpretiert werden kann. Diese Verallgemeinerung erreichen wir nähmlich dadurch, dass wir zu den Grundtransformationen $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x)$, welche im Schouten-Haantjesschen Raum Punkttransformationen waren, noch eine Transformation der Richtungen der Vektordichten $\hat{u} = \hat{u}(\bar{u})$ hinzufügen, die aber homogen von erster Ordnung sein sollen. Für eine gewissermassen ähnliche Verallgemeinerung der Finslerräume, die unter den Schouten-Haantjesschen Räumen durch $p = 0$ gekennzeichnet sind, verweisen wir auf die Arbeiten von A. Kawaguchi und S. Hokari [3], [4].

Das Ziel unserer Arbeit ist nun die Bestimmung der Parameter einer linearen affinen Übertragungstheorie der Vektoren und Vektordichten vom Gewicht: $h$, die dann auch für beliebige Tensordichten erweitert werden kann. Dann wollen wir zeigen, wie in gewissen Fällen diese Übertragungsparameter der Vektordichten vom Gewicht: $h$ aus den Übertragungsparametern der Vektoren gebildet werden können.

Bezüglich der Bezeichnungen bemerken wir, dass wir durch $(x^i, u_i)$ bzw. $(x^i, u^i)$ immer die Grundelemente — die also den Transformationsformeln (1.2a) bzw. (1.2b) genügen (vgl. den nächsten §) — bezeichnen wollen. Ist das Grundelement eine kovariante Vektordichte, so bezeichnen wir diesen Fall durch (a). Entsprechend werden wir den Fall der kontravarianten Vektordichten immer durch (b) bezeichnen.

## 1. Grundtransformationen

Zu Grunde gelegt sei eine $(2n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit der ko- bzw. kontravarianten Vektordichten $(x^i, u_i)$ bzw. $(x^i, u^i)$ vom Gewicht $(-p)$ bzw. $(+p)$. Nach einer differenzierbaren Punkttransformation

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i\,(x^1, \ldots, x^n), \qquad \Delta \overset{\text{def}}{=} \left(\operatorname{Det}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right)\right)^{-1} \neq 0,$$

verändern sich die Grundelemente nach den Transformationsformeln

$$\text{(1.1a)} \quad \bar{u}_i = \Delta^{-p}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}u_r \quad \text{bzw.} \quad \text{(1.1b)} \quad \bar{u}^i = \Delta^p\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}u^r.$$

Nach diesen Punkttransformation führen wir noch eine Transformation der Grössen $\bar{u}$ durch, so dass für die Grundelemente $(x^i, u_i)$ bzw. $(x^i, u^i)$ die folgenden Grundtransformationen entstehen:

$$\text{(1.2a)} \quad \begin{aligned} &\hat{x}^i \equiv \bar{x}^i = \bar{x}^i\,(x^1, \ldots, x^n), \quad \hat{u}_i = \hat{u}_i\,(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n), \\ &\bar{u}_i = \Delta^{-p}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}u_r, \end{aligned}$$

$$\text{(1.2b)} \quad \begin{aligned} &\hat{x}^i \equiv \bar{x}^i = \bar{x}^i\,(x^1, \ldots, x^n), \quad \hat{u}^i = \hat{u}^i(\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^n), \\ &\bar{u}^i = \Delta^p\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}u^r. \end{aligned}$$

Bezüglich der Transformationen $\hat{u}(\bar{u})$ wollen wir voraussetzen, dass sie homogen von erster Ordnung, hinreichend oft differenzierbar und ausserdem umkehrbar sind, d.h. $\operatorname{Det}(\partial\hat{u}/\partial\bar{u}) \neq 0$.

Nach den gestellten Forderungen bezüglich der Transformationen (1.2) existieren auch die inverse Transformationen, und diese haben die Form:

$$\text{(1.3a)} \quad x^i = x^i(\bar{x}) \equiv x^i(\hat{x}), \quad u_i = \Delta^p\frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^i}\bar{u}_s(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_n),$$

$$(1.3b) \qquad x^i = x^i(\bar{x}) \equiv x^i(\hat{x}), \quad u^i = \Delta^{-p} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^s} \bar{u}^s (\hat{u}^1, \ldots, \hat{u}^n),$$

wo die Funktionen $\bar{u}(\hat{u})$ homogen von erster Ordnung sind. [1]

Der Basisraum unserer nachfolgenden Untersuchungen ist somit die Mannigfaltigkeit der Grundelemente $(x^i, u_i)$ bzw. $(x^i, u^i)$ die dem Transformationsgesetz (1.2) genügen. $(x^i, u_i)$ bzw. $(x^i, u^i)$ kann als eine Verallgemeinerung der ko- bzw. kontravarianten Vektordichten betrachtet werden, da für $\hat{u} \equiv \bar{u}$ die Transformationsformeln (1.2) eben in die Transformationsformeln (1.1) übergehen. Für $\hat{u} \equiv \bar{u}$ erhält man hiernach den Basisraum der Schouten-Haantjesschen Theorie.

## 2. Vektoren- und Tensorenbegriff

In diesen Paragraphen definieren wir den Begriff der Vektoren und Tensoren bezüglich der Transformationen (1.2).

Definition. *Die $n$ Funktionen $\xi^i(x, u)$ bzw. $\xi_i(x, u)$ sind die Komponenten einer kontra- bzw. kovarianten Vektordichte vom Gewicht: $h$, falls im Falle* (a) *bzw.* (b) *die folgenden Transformationsgesetze gelten:*

$$(2.1a) \qquad \hat{\xi}^i = \Delta^{h-p} \frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i} \xi^r, \qquad \hat{\xi}_i = \Delta^{h+p} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial u_r} \xi_r,$$

$$(2.1b) \qquad \hat{\xi}^i = \Delta^{h-p} \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^r} \xi^r, \qquad \hat{\xi}_i = \Delta^{h+p} \frac{\partial u^r}{\partial \hat{u}^i} \xi_r.$$

Auf Grund der Transformationsformeln (1.2) bzw. (1.3) kann unmittelbar verifiziert werden, dass die Formeln (2.1) in die gewöhnlichen Transformationsformeln der Vektordichten übergehen, falls $\hat{u} \equiv \bar{u}$ gilt.

Aus den Formeln (2.1) sieht man schon, wie der Tensorbegriff bezüglich der Transformationen (1.2) definiert werden muss. Im Transformationsgesetz einer gemischten Tensordichte kommt mit jedem kontra- bzw. kovarianten Index je ein $\Delta^{-p}$ bzw. $\Delta^{p}$-Faktor hinzu. Z.B. im Falle (a) hat man:

$$\hat{T}^i_{jk} = \Delta^{h+p} \frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_s} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial u_t} T^r_{st}.$$

[1] Ist nämlich $u_i = \varphi_i (v_1, \ldots, v_n)$ ein Gleichungssystem, wo die $\varphi_i(v)$ homogen von erster Ordnung sind, existiert ferner die Lösung $v_k = \psi_k (u_1, \ldots, u_n)$ so ist auch $\psi_k$ wegen

$$\psi_k(\rho u) = \psi_k(\rho\varphi(v)) = \psi_k(\varphi(\rho v)) = \rho v_k = \rho\psi_k(u)$$

eine homogene Funktion erster Ordnung.

## 3. Das invariante Differential für kontravariante und kovariante Vektordichten

Das invariante Differential der kontravarianten Vektordichten vom Gewicht: $h$ habe die Form:

$$(3.1a) \qquad D\xi^i = d\xi^i + L_j{}^i{}_k\, \xi^j\, dx^k + M_j{}^{ik}\, \xi^j\, du_k,$$

$$(3.1b) \qquad D\xi^i = d\xi^i + L_j{}^i{}_k\, \xi^j\, dx^k + M_j{}^i{}_k\, \xi^j\, du^k,$$

wo die Übertragungsparameter $L$ bzw. $M$ in den $u$ homogen von nullter bzw. $(-1)$-ter Ordnung sind, es sollen ferner die Relationen

$$\text{(a)} \quad M_i{}^{jk}\, u_k = 0 \qquad \text{(b)} \quad M_i{}^j{}_k\, u^k = 0$$

bestehen.

Die Transformationsformeln der Übertragungsparameter $L$ und $M$ erhält man aus der Forderung, dass $D\xi^i$ wieder eine kontravariante Vektordichte vom Gewicht: $h$ sein soll. Beachten wir, dass nach (2.1)

$$\text{(a)} \quad d\hat{\xi}^i = \Delta^{h-p}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i}\, d\xi^r + \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i}\right)\xi^r\, dx^k + \frac{\partial^2 u_r}{\partial \hat{u}_i\, \partial \hat{u}_j}\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_k}\,\xi^r\, du_k \right.$$
$$\left. + (h-p)\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k}\frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i}\,\xi^r\, dx^k\right),$$

$$\text{(b)} \quad d\hat{\xi}^i = \Delta^{h-p}\left(\frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^r}\, d\xi^r + \frac{\partial^2 \hat{u}^i}{\partial u^r\, \partial x^k}\,\xi^r\, dx^k + \frac{\partial^2 \hat{u}^i}{\partial u^r\, \partial u^k}\,\xi^r\, du^k \right.$$
$$\left. + (h-p)\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k}\frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^r}\,\xi^r\, dx^k\right),$$

ferner $d\bar{x}^k = \partial \bar{x}^k / \partial x_l\, dx^l$ und

$$\text{(a)} \quad d\hat{u}_t = \frac{\partial \hat{u}_t}{\partial x^k}\, dx^k + \frac{\partial \hat{u}_t}{\partial u_k}\, du_k \qquad \text{(b)} \quad d\hat{u}^t = \frac{\partial \hat{u}^t}{\partial x^k}\, dx^k + \frac{\partial \hat{u}^t}{\partial u^k}\, du^k$$

bestehen, so wird auf Grund der Relationen

$$(3.2a) \quad \frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_j}\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial u_r} = \delta^j_i, \qquad (3.2b) \quad \frac{\partial \hat{u}^j}{\partial u^r}\frac{\partial u^r}{\partial \hat{u}^i} = \delta^j_i,$$

wenn wir noch die Koeffizienten von $dx^k$ und $du_k$ bzw. $du^k$ in den Formeln

$$\text{(a)} \quad D\hat{\xi}^i = \Delta^{h-p}\frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i}\, D\xi^r \qquad \text{(b)} \quad D\hat{\xi}^i = \Delta^{h-p}\frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^r}\, D\xi^r$$

gleichsetzen:

$$(3.3\text{a})\quad \hat{L}_{j\ t}^{\ i}\frac{\partial \hat{x}^t}{\partial x^k} = L_{r\ k}^{\ s}\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_r}\frac{\partial u_s}{\partial \hat{u}_i} - \hat{M}_j^{\ it}\frac{\partial \hat{u}_t}{\partial x^k} - \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i}\right)\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_r} + (p-h)\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k}\delta_j^i$$

$$(3.3\text{b})\quad \hat{L}_{j\ t}^{\ i}\frac{\partial \hat{x}^t}{\partial x^k} = L_{r\ k}^{\ s}\frac{\partial u^r}{\partial \hat{u}^j}\frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^s} - \hat{M}_{j\ t}^{\ i}\frac{\partial \hat{u}^t}{\partial x^k} - \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^r}\right)\frac{\partial u^r}{\partial \hat{u}^j} + (p-h)\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k}\delta_j^i$$

und

$$(3.4\text{a})\quad \hat{M}_j^{\ ik} = M_r^{\ st}\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_r}\frac{\partial u_s}{\partial \hat{u}_i}\frac{\partial u_t}{\partial \hat{u}_k} - \frac{\partial^2 u_r}{\partial \hat{u}_i \partial \hat{u}_k}\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_r}$$

$$(3.4\text{b})\quad \hat{M}_{j\ k}^{\ i} = M_{r\ t}^{\ s}\frac{\partial u^r}{\partial \hat{u}^j}\frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^s}\frac{\partial u^t}{\partial \hat{u}^k} - \frac{\partial^2 \hat{u}^i}{\partial u^r \partial u^s}\frac{\partial u^r}{\partial \hat{u}^j}\frac{\partial u^s}{\partial \hat{u}^k}.$$

Nun gehen wir zur Bestimmung des invarianten Differentials der kovarianten Vektordichte vom Gewicht: $h$ über. Das invariante Differential soll die Form

$$(3.5\text{a})\qquad D\xi_i = d\xi_i - \Lambda_{i\ k}^{\ j}\,\xi_j\,dx^k - N_i^{\ jk}\,\xi_j\,du_k$$

$$(3.5\text{b})\qquad D\xi_i = d\xi_i - \Lambda_{i\ k}^{\ j}\,\xi_j\,dx^k - N_{i\ k}^{\ j}\,\xi_j\,du^k$$

haben. $\Lambda$ bzw. $N$ sollen in den $u$ homogen von nullter bzw. $(-1)$-ter Ordnung sein. Die Transformationsformeln der Übertragungsparameter $\Lambda$ und $N$ erhält man wieder aus der Forderung, dass $D\xi_i$ wieder eine Tensordichte vom Gewicht: $h$ sei. Wenn wir jetzt — wie vorher — aus (2.1) $d\hat{\xi}_i$ berechnen und die Koeffizienten von $dx^k$, $du_k$, $du^k$ in der Formel

$$(\text{a})\quad D\hat{\xi}_i = \Delta^{h+p}\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial u_r}D\xi_r \qquad (\text{b})\quad D\hat{\xi}_i = \Delta^{h+p}\frac{\partial u^r}{\partial \hat{u}^i}D\xi_r$$

gleichsetzen, so erhalten wir, dass die Transformationsformeln der Übertragungsparameter $N$ mit denen von $M$, d.h. mit (3.4a) bzw. (3.4b) übereinstimmen. Im folgenden werden wir also nur $M_i^{\ jk}$ bzw. $M_{i\ k}^{\ j}$ benützen, auch für die kovarianten Vektordichten. Hingegen hat man für die Übertragungsparameter $\Lambda$:

$$(3.6\text{a})\quad \Lambda_{j\ t}^{\ i}\frac{\partial \hat{x}^t}{\partial x^k} = \Lambda_{r\ k}^{\ s}\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_r}\frac{\partial u_s}{\partial \hat{u}_i} - \hat{M}_j^{\ it}\frac{\partial \hat{u}_t}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i} + (p+h)\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k}\delta_j^i,$$

$$(3.6b)\quad \hat{\Lambda}_j{}^i{}_t \frac{\partial \hat{x}^t}{\partial x^k} = \Lambda_r{}^s{}_k \frac{\partial u^r}{\partial \hat{u}_j} \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^s} - \hat{M}_j{}^i{}_t \frac{\partial \hat{u}^t}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial u^r}{\partial \hat{u}^j}\right) \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^r} + (p+h) \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k} \delta^i_j .$$

Beachten wir noch, dass nach (3.2)

$$(a)\quad \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i}\right) \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_r} = - \frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_r}\right),$$

$$(b)\quad \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^r}\right) \frac{\partial u^r}{\partial \hat{u}^j} = - \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^r} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial u^r}{\partial \hat{u}^j}\right)$$

bestehen, so bekommt man durch Vergleichung von (3.3a) mit (3.6a) bzw. (3.3b) mit (3.6b) den

Satz 1. *Die Transformationsformeln der Übertragungsparameter $L$ der kontravarianten Vektordichten vom Gewicht: $h$, stimmen mit denen der Übertragungsparameter $\Lambda$ der kovarianten Vektordichten vom Gewicht: $(-h)$ überein. Die Transformationsformeln der Übertragungsparameter $M$ und $N$ stimmen für beliebiges $h$ überein.*

Auf Grund dieses Satzes werden wir die Übertragungsparameter immer mit $L$ und $M$ bezeichnen. Dementsprechend bedeutet also (3.3a) bzw. (3.3b) die Transformationsformel der Übertragungsparameter der kontravarianten Vektordichten vom Gewicht $h$ und gleichzeitig die der kovarianten Vektordichten vom Gewicht $(-h)$.

Wir umformen nun noch die Formel des invarianten Differentials. Nach (3.5a) und (3.1b) gilt

$$(3.7a)\quad Du_i = (\delta^k_i - M_i{}^{0k}) du_k - L_i{}^0{}_k\, dx^k \;\;[2]$$

$$(3.7b)\quad Du^i = (\delta^i_k + M_0{}^i{}_k) du^k + L_0{}^i{}_k\, dx^k \;\;[2]$$

wo wir in (3.7a) schon $L$ und $M$ statt $\Lambda$ und $N$ gesetzt haben. Nehmen wir jetzt an, dass

$$(3.8a)\quad (\delta^k_i - M_i{}^{0k}) J_l{}^i = \delta^k_l, \qquad (3.8b)\quad (\delta^i_k + M_0{}^i{}_k) J_i{}^l = \delta^l_k$$

bezüglich $J_b{}^a$ eindeutig lösbar ist. Dann können wir aus (3.7a) bzw. (3.7b) nach einer Überschiebung mit $J_l{}^i$ bzw. $J_i{}^l$ die Grössen $du_l$ bzw. $du^l$ bestimmen. Substituieren wir das in (3.1), so wird:

$$(3.9a)\quad D\xi^i = d\xi^i + M_j{}^{*ik} \xi^j Du_k + L^*{}_j{}^i{}_k \xi^j dx^k$$

$$(3.9b)\quad D\xi^i = d\xi^i + M^*{}_j{}^i{}_k \xi^j Du^k + L^*{}_j{}^i{}_k \xi^j dx^k$$

[2] Der Index „$o$" bedeutet Kontraktion mit $u$.

wo die Übertragungsparameter $M^*$ und $L^*$ durch die folgenden Formeln definiert sind:

$$(3.10a) \qquad M^{*}{}_{j}{}^{ik} \overset{\text{def}}{=} M_{j}{}^{it} J_{t}{}^{k},$$

$$(3.10b) \qquad M^{*}{}_{j}{}^{i}{}_{k} \overset{\text{def}}{=} M_{j}{}^{i}{}_{t} J_{k}{}^{t},$$

$$(3.11a) \qquad L^{*}{}_{j}{}^{i}{}_{k} \overset{\text{def}}{=} L_{j}{}^{i}{}_{k} + M^{*}{}_{j}{}^{it} L_{t}{}^{0}{}_{k},$$

$$(3.11b) \qquad L^{*}{}_{j}{}^{i}{}_{k} \overset{\text{def}}{=} L_{j}{}^{i}{}_{k} - M^{*}{}_{j}{}^{i}{}_{t} L_{0}{}^{t}{}_{k},$$

wo der Index „$o$" die Überschiebung mit $u_i$ bzw. $u^i$ bedeutet.

Wir beweisen noch den

Satz 2. *Die Übertragungsparameter $M$ und $L$ sind durch $M^*$ und $L^*$ eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Da die Gleichungssysteme (3.8a) bzw. (3.8b) nach unserer Annahme bezüglich $J_b{}^a$ eindeutig lösbar sind, muss die Determinante

$$\begin{cases} |\delta_k^i - M_k{}^{0i}| \\ |\delta_k^i + M_0{}^i{}_k| \end{cases}$$

von Null verschieden sein. Nach (3.8) ist aber somit

$$\text{(a)} \quad |\delta_a^b - M_a{}^{0b}| \cdot |J_d{}^c| = 1, \qquad \text{(b)} \quad |\delta_b^a + M_0{}^a{}_b| \cdot |J_d{}^c| = 1$$

gültig, woraus $|J_d{}^c| \neq 0$ folgt. In beiden Fällen existiert also der inverse Tensor von $J_d{}^c$, woraus folgt, dass (3.10) bezüglich $M$ lösbar ist; das bedeutet die erste Hälfte des Satzes.

Aus (3.11) folgt nun nach einer Überschiebung mit $u$:

$$(3.12a) \qquad L^{*}{}_{j}{}^{0}{}_{k} = (\delta_j^t + M^{*}{}_{j}{}^{0t}) L_{t}{}^{0}{}_{k},$$

$$(3.12b) \qquad L^{*}{}_{0}{}^{i}{}_{k} = (\delta_t^i - M^{*}{}_{0}{}^{i}{}_{t}) L_{0}{}^{t}{}_{k}.$$

Auf Grund von (3.8a) bzw. (3.8b) gilt nach wohlbekannten Sätzen der Tensorrechnung, dass auch

$$(3.13a) \quad (\delta_i^k - M_i{}^{0k}) J_k{}^t = \delta_i^t \qquad (3.15b) \quad (\delta_k^i + M_0{}^i{}_k) J_t{}^k = \delta_t^i$$

besteht, woraus im Hinblick auf (3.10a) bzw. (3.10b) folgt, dass

$$(3.14a) \quad M^{*}{}_{i}{}^{0t} = J_i{}^t - \delta_i^t \qquad (3.14b) \quad M^{*}{}_{0}{}^{i}{}_{t} = \delta_t^i - J_t{}^i.$$

Aus (3.12a) und (3.12b) erhält man somit

$$(3.15a) \quad L^{*}{}_{j}{}^{0}{}_{k} = J_j{}^t L_{t}{}^{0}{}_{k} \qquad (3.15b) \quad L^{*}{}_{0}{}^{i}{}_{k} = J_t{}^i L_{0}{}^{t}{}_{k}.$$

Da der inverse Tensor von $J_h{}^t$ — wie wir das schon gezeigt haben — existiert, kann der Übertragungsparameter $L$ aus (3.15) durch $L^*$ ausgedrückt werden.

Bezüglich der Transformationsformeln bemerken wir, dass $M_j^{\ 0k}$ bzw. $M_0{}^i{}_k$ nach (3.4) Tensoren sind, da die Transformationsformeln (1.2) nach der Annahme in dem $u$ homogen von erster Ordnung sind. Auf Grund der Formeln (3.8) bestimmen die $J_k{}^i$ auch Tensoren, da die $\delta_i^{\ k}$ wegen (3.2a) bzw. (3.2b) auch bezüglich der Transformationen (1.2) einen Tensor bestimmen.

Die Transformationsformeln der $L^*$-Übertragungsparameter bekommt man aus (3.3a) bzw. (3.3b), die wir aber nur im nächsten Paragraphen im einem wichtigen Spezialfall berechnen wollen.

## 4. Über die Konstruktion von $L^*$ aus den zum $h = 0$ gehörigen Übertragungsparametern

Wir wollen jetzt denjenigen Fall untersuchen in dem die Formeln

$$\text{(4.1a)} \quad M_i^{\ 0k} = u_i A^k \qquad \text{(4.1b)} \quad M_0{}^i{}_k = u^i A_k$$

gelten, wo $A^k$ bzw. $A_k$ eine kontra- bzw. kovarianten Vektordichte vom Gewicht: $p$ bzw. $(-p)$ bedeutet, für die noch $A^0 = A_0 = 0$ besteht. Dieser Typ der Verallgemeinerung der Schouten-Haantjesschen Räume ist eine unmittelbare Verallgemeinerung, da (4.1a), (4.1b) in den Schouten-Haantjesschen Räumen immer erfüllt sind. Offenbar sind die Relationen (4.1) invariant bezüglich der Grundtransformationen (1.2), wie das nach (3.4) leicht bestätigt werden kann.

Die Lösungen von (3.8a) und (3.8b) sind auf Grund von (4.1a) und (4.1b):

$$\text{(4.2a)} \quad J_l{}^i = \delta_l^i + u_l A^i \qquad \text{(4.2b)} \quad J_i{}^l = \delta_i^l - u^l A_i.$$

Im Hinblick auf (3.10a) bzw. (3.10b) wird jetzt $M^* = M$ bestehen. Die Transformationsformel von $M^*$ ist somit durch (3.4a) bzw. (3.4b) bestimmt.

Für die Bestimmung der Transformationsformeln der Übertragungsparameter $L^*$ beachten wir, dass nach (3.3a) bzw. (3.3b) wegen der Homogenität erster Ordnung der Fundamentaltransformationen (1.2):

$$\text{(4.3a)} \quad \hat{L}_j{}^0{}_t \frac{\partial \hat{x}^t}{\partial x^k} = L_r{}^0{}_k \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_r} - \hat{M}_j{}^{0t} \frac{\partial \hat{u}_t}{\partial x^k} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x^k} + (p-h) \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k} \hat{u}_j$$

$$\text{(4.3b)} \quad \hat{L}_0{}^j{}_t \frac{\partial \hat{x}^t}{\partial x^k} = L_0{}^r{}_k \frac{\partial \hat{u}^j}{\partial u^r} - \hat{M}_0{}^j{}_t \frac{\partial \hat{u}^t}{\partial x^k} - \frac{\partial \hat{u}^j}{\partial x^k} + (p-h) \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k} \hat{u}^j$$

besteht, wo wir bei der Berechnung von (4.3a) auch die Relation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i}\right)\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_r} = -\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i}$$

beachtet haben. Nach den entsprechenden Formeln (3.3), (3.4), (3.11) und (4.3) werden in Hinblick auf

$$\text{(a)}\quad \hat{M}_j{}^{0t} = \hat{u}_j \hat{A}^t \qquad \text{(b)}\quad \hat{M}_0{}^j{}_t = \hat{u}^j \hat{A}_t$$

die Transformationsformeln

$$\text{(4.4a)}\quad \hat{L}^*{}_j{}^i{}_t \frac{\partial \hat{x}^t}{\partial x^k} = L^*{}_r{}^s{}_k \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_r}\frac{\partial u_s}{\partial \hat{u}_i} - L_r{}^0{}_k \frac{\partial \hat{u}_t}{\partial u_r}\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_s}\frac{\partial^2 u_s}{\partial \hat{u}_i \partial \hat{u}_t} + \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i} + (p-h)\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k}\delta^i_j$$

$$\text{(4.4b)}\quad \hat{L}^*{}_j{}^i{}_t \frac{\partial \hat{x}^t}{\partial x^k} = L^*{}_r{}^s{}_k \frac{\partial u^r}{\partial \hat{u}^j}\frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^s} - L_0{}^r{}_k \frac{\partial \hat{u}^t}{\partial u^r}\frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^s}\frac{\partial^2 u^s}{\partial \hat{u}^j \partial \hat{u}^t} - \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^r}\right)\frac{\partial u^r}{\partial \hat{u}^j} + (p-h)\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k}\delta^i_j$$

bestehen.

Wir spezialisieren noch die Grundtransformation (1.2) durch die folgende

*Forderung*: *Die Grundtransformationen* (1.2) *sollen in den $u$ homogen linear sein.*

Nach dieser Forderung sind also die Grundtransformationen die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(4.5a)} \qquad \hat{u}_i = h_i{}^t \bar{u}_t \equiv \Delta^{-p} h_i{}^t \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^t} u_r \\ &\text{(4.5b)} \qquad \hat{u}^i = h_t{}^i \bar{u}^t \equiv \Delta^{p} h_t{}^i \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^r} u^r \end{aligned}\right\} h_b{}^a = \textit{konstant},$$

wo in beiden Fällen

$$\operatorname{Det}(h_j{}^i) \neq 0$$

besteht. Wir beweisen nun den folgenden

Satz 3. *Haben die Grundtransformationen die Form* (4.5), *so sind die Übertragungsparameter $L^*$ der Vektordichten vom Gewicht: $h$ aus den zum Falle $h = 0$ gehörigen Übertragungsparametern bestimmbar.*

*Beweis* Bezeichnen wir die inversen Grössen von $h_b{}^a$ durch $f_b{}^a$, d.h. gelten die Relationen:

$$(4.6) \qquad h_i{}^t f_m{}^i = \delta^t_m, \qquad h_t{}^i f_i{}^s = \delta^s_t,$$

bezeichnen wir ferner die zum Falle $h = 0$ gehörigen Übertragungsparameter durch $\lambda_i{}^j{}_k$, so wird auf Grund von (4.4)—(4.6):

$$(4.7a) \qquad \hat{\lambda}_j{}^i{}_t \frac{\partial \hat{x}^t}{\partial x^k} = \lambda_r{}^s{}_k \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_r} \frac{\partial u_s}{\partial \hat{u}_i} + h_j{}^t \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^t \partial \bar{x}^s} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^k} f_m{}^i \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^r},$$

$$(4.7b) \qquad \hat{\lambda}_j{}^i{}_t \frac{\partial \hat{x}^t}{\partial x^k} = \lambda_r{}^s{}_k \frac{\partial u^r}{\partial \hat{u}^j} \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^s} - h_t{}^i \frac{\partial^2 \bar{x}^t}{\partial x^r \partial x^k} f_j{}^s \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}.$$

Verjüngung bezüglich der Indizes $i$, $j$ gibt im Hinblick auf

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^t}{\partial x^r \partial x^k} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} = - \frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^s \partial \bar{x}^m} \quad [3]$$

in beiden Fällen:

$$(4.8) \begin{pmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix} \qquad \hat{\lambda}_j{}^j{}_t \frac{\partial \hat{x}^t}{\partial x^k} = \lambda_r{}^r{}_k + \frac{\partial \log \varDelta}{\partial x^k}.$$

Beachten wir jetzt die aus (4.5a) und (4.5b) leicht verifizierbaren Relationen:

$$(\mathrm{a}) \qquad h_j{}^t \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^t \partial \bar{x}^s} \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^k} f_m{}^i \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^r} = \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial u_r}\right) \frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i} + p \frac{\partial \log \varDelta}{\partial x^k} \delta^i_j,$$

$$(\mathrm{b}) \qquad -h_t{}^i \frac{\partial^2 \bar{x}^t}{\partial x^r \partial x^k} f_j{}^s \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} = - \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^r}\right) \frac{\partial u^r}{\partial \hat{u}^j} + p \frac{\partial \log \varDelta}{\partial x^k} \delta^i_j,$$

so folgt aus (4.7a), (4.7b) und (4.8), dass die Grössen

$$(4.9a) \quad \lambda_j{}^i{}_k - h \delta^i_j \lambda_t{}^t{}_k \qquad (4.9b) \quad \lambda_j{}^i{}_k - h \delta^i_j \lambda_t{}^t{}_k$$

dieselbe Transformationsformeln haben, wie $L^*{}_j{}^i{}_k$ bezüglich der Transformationen (4.5a) und (4.5b). Das kann nach (4.4a) und (4.4b) unmittelbar verifiziert werden. Das beweist aber unseren Satz, da jetzt bestimmen die Ausdrücke (4.9) eben die Übertragungsparameter $L^*{}_j{}^i{}_k$.

## 5. Die fundamentalen kovarianten Ableitungen

Die fundamentalen kovarianten Ableitungen erhält man aus der Formel (3.9a) bzw. (3.9b) des invarianten Differentials, wenn

[3] Diese Relation folgt aus

$$\frac{\partial \bar{x}^t}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} = \delta^t_s$$

nach partieller Ableitung nach $x^k$.

(a) $d\xi^i = \partial_{x^k}\xi^i dx^k + \partial_{u_k}\xi^i du_k$ (b) $d\xi^i = \partial_{x^k}\xi^i dx^k + \partial_{u^k}\xi^i du^k$

gesetzt wird, und $du$ mittels (3.7) durch $Du$ ausgedrückt wird. Eine Überschiebung von (3.7a) bzw. (3.7b) mit $J_l^{\ i}$ bzw. $J_i^{\ l}$ bestimmt $du_l$ bzw. $du^l$. Das invariante Differential wird somit die Form

$$D\xi^i = \nabla_k \xi^i dx^k + \nabla^{*k}\xi^i Du_k \tag{5.1a}$$

$$D\xi^i = \nabla_k \xi^i dx^k + \nabla^*_k \xi^i Du^k \tag{5.1b}$$

haben, wo im Hinblick auf die Formeln (3.10) und (3.15)

$$\nabla_k \xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_{x^k}\xi^i + \partial_{u_t}\xi^i L^{*\ 0}_{t\ k} + L^{*\ i}_{j\ k}\xi^j, \tag{5.2a}$$

$$\nabla_k \xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_{x^k}\xi^i - \partial_{u^t}\xi^i L^{*\ t}_{0\ k} + L^{*\ i}_{j\ k}\xi^j, \tag{5.2b}$$

$$\nabla^{*k}\xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_{u_t}\xi^i J_t^{\ k} + M_j^{\ *ik}\xi^j \equiv (\partial_{u_t}\xi^i + M_j^{\ it}\xi^j)J_t^{\ k}, \tag{5.3a}$$

$$\nabla^*_k \xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_{u^t}\xi^i J_k^{\ t} + M^{*\ i}_{j\ k}\xi^j \equiv (\partial_{u^t}\xi^i + M_{j\ t}^{\ i}\xi^j)J_k^{\ t}. \tag{5.3b}$$

Wir bemerken, dass (5.3a) eine kontravariante Ableitung bestimmt. Die Transformationsformeln dieser Grössen können aus (5.1a) bzw. (5.1b) bestimmt werden, wenn man beachtet, dass $D\xi^i$ eine kontravariante Vektordichte vom Gewicht: $h$ sein muss und ferner auf Grund der entsprechenden Formeln von (2.1)

$$d\hat{x}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^r} dx^r, \qquad D\hat{u}_k = \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial u_t} Du_t, \qquad D\hat{u}^k = \frac{\partial \hat{u}^k}{\partial u^t} Du^t$$

gilt, da $u$ und $Du$ dasselbe Gewicht haben müssen. Die Transformationsformeln der Grundelemente sind nämlich

$$\text{(a)} \quad \hat{u}_i = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial u_r} u_r, \qquad \text{(b)} \quad \hat{u}^i = \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^r} u^r.$$

Es wird somit

$$\nabla_k \hat{\xi}^i = \Delta^{h-p} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i} \nabla_t \xi^r, \tag{5.4a}$$

$$\nabla_k \hat{\xi}^i = \Delta^{h-p} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^r} \nabla_t \xi^r, \tag{5.4b}$$

$$\nabla^{*k} \hat{\xi}^i = \Delta^{h-p} \frac{\partial u_s}{\partial \hat{u}_k} \frac{\partial u_r}{\partial \hat{u}_i} \nabla^{*s} \xi^r, \tag{5.5a}$$

$$\nabla^*_k \hat{\xi}^i = \Delta^{h-p} \frac{\partial u^s}{\partial \hat{u}^k} \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial u^r} \nabla_s \xi^r. \tag{5.5b}$$

## LITERATUR

R. S. CLARK,

[1] The conformal geometry of a general differential metric space. Proc. London Math. Soc. (2) 53 (1951), 294—309.

E. T. DAVIES,

[2] On metric spaces based on a vector density. Proc. London Math. Soc. (2) 49 (1947), 241—259.

S. HOKARI,

[3] Über die Übertragungen, die der erweiterten Transformationsgruppe angehören. Journal Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. 3 (1935), 15—26.

A. KAWAGUCHI,

[4] The foundation of the theory of displacement II. Proc. Imperial Academy 10 (1934), 45—48.

A. MOÓR,

[5] Konformgeometrie der verallgemeinerten Schouten-Haantjesschen Räume. I.II. Indag. Math. 20 (1958), 94—113.

J. A. SCHOUTEN und J. HAANTJES,

[6] Über die Festlegung von allgemeinen Massbestimmungen und Übertragungen in bezug auf ko- und kontravariante Vektordichten. Monatshefte für Math. und Phys. 43 (1936), 161—176.

(Oblatum 27-6-1966).

Szeged
Bolyai-Institut der Universität