COMPOSITIO MATHEMATICA

TOKUI SATO

Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$ II

Compositio Mathematica, tome 14 (1959-1960), p. 152-171
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1959-1960__14__152_0>

Sur l'équation aux dérivées partielles
$\Delta z = f(x, y, z, p, q)$ II

par

Tokui Satō

1. Introduction.

Dans un article antérieur [1]) j'ai étudié le problème de Dirichlet pour l'équation $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$. Dans cet article je rechercherai ce problème plus profondément.

D'abord nous donnons quelques remarques qui seront utiles dans la suite.

Nous dirons que $z(x, y)$ est une fonction régulière dans un domaine D, si $z(x, y)$ ainsi que ses dérivées partielles $\partial_x z(x, y)$, $\partial_y z(x, y)$ du premier ordre sont continues dans D.

Soit $z(x, y)$ une fonction continue dans un voisinage d'un point (x, y). Posons $\underline{\Delta} z(x, y)$, $\bar{\Delta} z(x, y)$ et $\Delta z(x, y)$ respectivement

$$\underline{\Delta} z(x, y) = \varliminf_{r\to 0} \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \{z(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta)-z(x, y)\}d\theta,$$

$$\bar{\Delta} z(x, y) = \varlimsup_{r\to 0} \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \{z(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta)-z(x, y)\}d\theta,$$

$$\Delta z(x, y) = \lim_{r\to 0} \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \{z(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta)-z(x, y)\}d\theta.$$

Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans un ensemble E. Posons $\underline{f}(x_0, y_0)$, $\bar{f}(x_0, y_0)$ respectivement

$$\underline{f}(x_0, y_0) = \varliminf f(x, y) \quad \text{pour} \quad (x, y) \to (x_0, y_0),\ (x, y) \in E,$$

$$\bar{f}(x_0, y_0) = \varlimsup f(x, y) \quad \text{pour} \quad (x, y) \to (x_0, y_0),\ (x, y) \in E,$$

où (x_0, y_0) est un point de $\bar{E}$ $(= E \cup E')$.

Soient D_1 et D_2 un ensemble de l'espace à m dimensions et celui à n dimensions respectivement, et soit $f(x; y)$ une fonction définie dans $D_1 \times D_2$, où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in D_1$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D_2$. Soit D_0 un ensemble borné et fermé quelconque contenu dans D_2. Si $f(x; y)$ est bornée dans $D_1 \times D_0$, nous dirons que $f(x; y)$ est *bornée au sens généralisé par rapport à* y dans $D_1 \times D_2$.

Soit C une courbe de Jordan fermée, désignons par (C) l'intérieur de la courbe C et par $[C]$ le domaine fermé $(C) \cup C$.

2. La plus grande solution.

D'abord nous donnons une des propriétés fondamentalles de l'opérateur Δ.

THÉORÈME 1. *Supposons qu'une suite $\{z_n(x, y)\}$ de fonctions continues converge uniformément dans (C_ρ) vers une fonction continue $z(x, y)$, où C_ρ est un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon ρ. Si les suites $\{\underline{\Delta} z_n(x, y)\}$ et $\{\bar{\Delta} z_n(x, y)\}$ convergent uniformément dans (C_ρ) vers une fonction continue $\tilde{z}(x, y)$, on a*

$$\Delta z(x, y) = \tilde{z}(x, y) \qquad (x, y) \in (C_\rho).$$

Soit ρ' un nombre tel que $0 < \rho' < \rho$. On peut prendre une suite $\{f_n(x, y)\}$ de polynomes convergant uniformément dans $[C_{\rho'}]$ vers la fonction $\tilde{z}(x, y)$.

Il existe donc N_1 tel que

$$(1) \qquad |f_n(x, y) - \tilde{z}(x, y)| < \varepsilon/2 \qquad n \geqq N_1,$$

pour $\varepsilon (> 0)$ donné à l'avance.

Par hypothèse on peut prendre N_2 tel que

$$|\underline{\Delta} z_n(x, y) - \tilde{z}(x, y)| < \varepsilon/2, \quad |\bar{\Delta} z_n(x, y) - \tilde{z}(x, y)| < \varepsilon/2 \quad n \geqq N_2.$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$, les inégalités

$$(2) \qquad |\underline{\Delta} z_n(x, y) - f_n(x, y)| < \varepsilon, \quad |\bar{\Delta} z_n(x, y) - f_n(x, y)| < \varepsilon \quad n \geqq N$$

subsistent dans $[C_{\rho'}]$.

D'après (1) la suite $\{f_n(x, y)\}$ est bornée dans $[C_{\rho'}]$.
L'équation

$$\Delta z = f_n(x, y)$$

admet donc une et une seule solution régulière dans $(C_{\rho'})$ et prenant les valeurs $z_n(x, y)$ sur $C_{\rho'}$, qui sera désignée par $z = \zeta_n(x, y)$. On a donc

$$\zeta_n(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{(C_{\rho'})} G(x, y; \xi, \eta) f_n(\xi, \eta) d\xi d\eta + h_n(x, y),$$

où $G(x, y; \xi, \eta)$ est la fonction de Green, et $h_n(x, y)$ la fonction harmonique dans $(C_{\rho'})$ et prenant les valeurs $z_n(x, y)$ sur $C_{\rho'}$.

D'après le théorème de Harnack, la suite $\{h_n(x, y)\}$ converge uniformément dans $(C_{\rho'})$ vers $h(x, y)$. On a donc

$$\zeta(x, y) = \lim_{n\to\infty} \zeta_n(x, y)$$

$$(3) \qquad = -\frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \iint_{(C_{\rho'})} G(x, y; \xi, \eta) f_n(\xi, \eta) d\xi d\eta + h(x, y)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \iint_{(C_{\rho'})} G(x, y; \xi, \eta) \tilde{z}(\xi, \eta) d\xi d\eta + h(x, y).$$

Les inégalités (2) entraînent

$$\underline{\Delta} z_n(x, y) - \varepsilon < f_n(x, y) \qquad n \geqq N$$

dans $(C_{\rho'})$.

D'après le théorème de comparaison, on a

$$z_n(x, y) + \varepsilon\psi(x, y) \geqq \zeta_n(x, y) \qquad n \geqq N$$

dans $[C_{\rho'}]$, où $\psi(x, y)$ est la solution de l'équation $\Delta z = -1$ régulière dans $(C_{\rho'})$ et s'annulant sur $C_{\rho'}$. De même on a

$$z_n(x, y) - \varepsilon\psi(x, y) \leqq \zeta_n(x, y) \qquad n \geqq N$$

dans $[C_{\rho'}]$. On a donc

$$\zeta(x, y) - \varepsilon\rho'^2 \leqq z(x, y) \leqq \zeta(x, y) + \varepsilon\rho'^2.$$

$\varepsilon(> 0)$ étant arbitraire, on obtient

$$z(x, y) = \zeta(x, y).$$

La relation (3) entraîne

$$\Delta z(x, y) = \tilde{z}(x, y), \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Donnons un lemme qui est un corollaire des théorèmes 1 et 11 de l'article susmentionné [2]).

Dans ce numéro, nous désignons par D un domaine appartenant à la classe A_h et par C la frontière de D.

Soient $\underset{\sim}{\omega}(x, y)$ et $\tilde{\omega}(x, y)$ des fonctions régulières dans D et continues dans $\bar{D}$. Supposons de plus les inégalités

$$\underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq 0 \leqq \tilde{\omega}(x, y), \qquad (x, y) \in C,$$

$$\underline{\Delta}\tilde{\omega}(x, y) < 0 < \bar{\Delta}\underset{\sim}{\omega}(x, y) \quad (x, y) \in D.$$

D'après le théorème de comparaison, on a les inégalités

$$\underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq 0 \leqq \tilde{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Lemme 1. *Soit $F(x, y, z, p, q)$ une fonction continue et bornée dans $(x, y) \in \bar{D}$, $\underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq z \leqq \tilde{\omega}(x, y)$, $-\infty < p, q < +\infty$.*

Si l'on a les inégalités

$$\underline{\Delta}\tilde{\omega}(x, y) \leqq F(x, y, \tilde{\omega}(x, y), \partial_x\tilde{\omega}(x, y), \partial_y\tilde{\omega}(x, y)),$$

$$\bar{\Delta}\underset{\sim}{\omega}(x, y) \geqq F(x, y, \underset{\sim}{\omega}(x, y), \partial_x\underset{\sim}{\omega}(x, y), \partial_y\omega(x, y)),$$

l'équation

$$\Delta z = F(x, y, z, p, q) \tag{4}$$

admet une solution $z = z(x, y)$ *régulière dans* D *s'annulant sur* C *et satisfaisant aux inégalités*

$$\underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq z(x, y) \leqq \tilde{\omega}(x, y)$$

dans D.

THÉORÈME 2. *Soit* $f(x, y, z, p, q)$ *une fonction continue, bornée au sens généralisé et non décroissante par rapport à* z *dans* $(x, y) \in \bar{D}$, $-\infty < z, p, q < +\infty$. *L'équation*

$$\Delta z = f(x, y, z, p, q) \tag{5}$$

admet la plus grande et la plus petite solutions régulières dans D *et s'annulant sur* C.

Si l'équation (5) admet une solution $z = z(x, y)$ régulière dans D et s'annulant sur C, on a

$$|z(x, y)| \leqq MR^2/4,$$

où R est le diamètre de D et $|f(x, y, 0, p, q)| \leqq M$.

Posons

$$g(x, y, z, p, q) = \begin{cases} f(x, y, -\Gamma, p, q) & z < -\Gamma, \\ f(x, y, z, p, q) & -\Gamma \leqq z \leqq \Gamma, \\ f(x, y, \Gamma, p, q) & \Gamma < z, \end{cases}$$
$$\Gamma = (M+1)R^2/4;$$

$g(x, y, z, p, q)$ est bornée dans $(x, y) \in \bar{D}$, $-\infty < z, p, q < +\infty$. Soit $\{\varepsilon_n\}$ la suite de nombres tels que $\varepsilon_n \downarrow 0 (\varepsilon_1 < 1)$.

Posons

$$\underset{\sim}{\omega}(x, y) = -G\psi(x, y), \quad \tilde{\omega}(x, y) = G\psi(x, y),$$

où $\psi(x, y)$ est la solution de $\Delta z = -1$ régulière dans D et s'annulant sur C, et que $|g(x, y, z, p, q)|+1 \leqq G$.

D'après le lemme 1, l'équation

$$\Delta z = g(x, y, z, p, q) - \varepsilon_n$$

admet au moins une solution régulière dans D et s'annulant sur C, qui sera désignée par $z = z_n(x, y)$. On a

$$|z_n(x, y)| \leqq (M+1)R^2/4.$$

D'après le théorème de comparaison, on a

$$z_n(x, y) \geqq z_{n+1}(x, y) \geqq z(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}. \tag{6}$$

Les familles des dérivées partielles $\{\partial_x z_n(x,y)\}$, $\{\partial_y z_n(x, y)\}$ sont normales dans D. On peut donc supposer que

$$z_n(x, y) \to \tilde{z}(x, y),$$

$$\partial_x z_n(x, y) \to \partial_x \tilde{z}(x, y), \quad \partial_y z_n(x, y) \to \partial_y \tilde{z}(x, y)$$

uniformément dans D, en prenant, s'il est nécessaire, une suite partielle [4]).

Par définition, on a

$$\Delta z_n(x, y) = g(x, y, z_n(x, y), \partial_x z_n(x, y), \partial_y z_n(x, y)) - \varepsilon_n.$$

D'après le théorème 1, on obtient

$$\Delta \tilde{z}(x, y) = f(x, y, \tilde{z}(x, y), \partial_x \tilde{z}(x, y), \partial_y \tilde{z}(x, y)).$$

Les inégalités (6) entraînent

$$\tilde{z}(x, y) \geqq z(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

De même on peut démontrer l'existence de la plus petite solution régulière.

D'une manière analogue nous obtenans le corollaire suivant.

COROLLAIRE. *Soient $F(x, y, z, p, q)$ une fonction définie dans $(x, y) \in \bar{D}$, $-\infty < z, p, q < +\infty$ et $f(x, y, z, p, q)$ une fonction satisfaisant à l'hypothèse du théorème 2.*

Supposons que l'on ait l'inégalité

$$f(x, y, z_0, p, q) \leqq F(x, y, z, p, q)$$

pour $(x, y) \in \bar{D}$, $z_0 < z$, et que l'équation (4) admette une solution $z = z(x, y)$ qui est régulière dans D et continue dans $\bar{D}$.

Si l'on a l'inégalité

$$(7) \qquad \tilde{z}(x, y) \geqq z(x, y) \qquad (\underset{\sim}{z}(x, y) \leqq z(x, y))$$

sur C, l'inégalité (7) subsiste aussi dans D, où $z = \tilde{z}(x, y)$ $(z = \underset{\sim}{z}(x, y))$ est la plus grande (petite) solution de (5) régulière dans D et prenant les valeurs continues $z(x, y)$ sur C.

THÉORÈME 3. *Dans les mêmes hypothèses qu'au théorème 2, l'équation (5) admet la plus petite et la plus grande solutions régulières dans D et s'annulant sur C, qui seront désignées par $z = \underset{\sim}{z}(x, y)$ et $z = \tilde{z}(x, y)$ respectivement. Soit (x_0, y_0) un point dans D, et soit z_0 une valeur telle que $\underset{\sim}{z}(x_0, y_0) \leqq z_0 \leqq \tilde{z}(x_0, y_0)$. Alors il existe une solution $z = z(x, y)$ régulière dans D telle que*

$$z(x_0, y_0) = z_0,$$
$$\underset{\sim}{z}(x, y) \leqq z(x, y) \leqq \tilde{z}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Posons, en effet,

$$z = u + \underset{\sim}{z}(x, y).$$

L'équation en u devient

$$(8) \qquad \Delta u = g(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u),$$

où

$$g(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u)$$
$$= f(x, y, u+\underset{\sim}{z}(x, y), \partial_x u+\partial_x \underset{\sim}{z}(x, y), \partial_y u+\partial_y \underset{\sim}{z}(x, y))$$
$$-f(x, y, \underset{\sim}{z}(x, y), \partial_x \underset{\sim}{z}(x, y), \partial_y \underset{\sim}{z}(x, y)).$$

Il suffit donc de montrer que l'équation (8) admet une solution $u = u_0(x, y)$ régulière dans D et s'annulant sur C telle que

$$u_0(x_0, y_0) = u_0,$$
$$0 \leqq u_0(x, y) \leqq \tilde{z}(x, y)-\underset{\sim}{z}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Posons

$$h(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u) = \begin{cases} g(x, y, 0, \partial_x u, \partial_y u) & u < 0, \\ g(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u) & 0 \leqq u \leqq \Gamma, \\ g(x, y, \Gamma, \partial_x u, \partial_y u) & \Gamma < u, \end{cases}$$
$$\Gamma = (2M+1)R^2/4,$$

où

$$|f(x, y, \underset{\sim}{z}(x, y), p, q)| \leqq M.$$

$h(x, y, u, p, q)$ est bornée et continue dans $(x, y) \in \bar{D}$, $-\infty < u, p, q < +\infty$. Considérons l'équation

$$(9) \qquad \Delta u = h(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u).$$

Puisqu'une solution quelconque $u = u(x, y)$ régulière dans D et s'annulant sur C de l'équation (8) satisfait aux inégalités

$$0 \leqq u(x, y) \leqq \Gamma \qquad (x, y) \in \bar{D},$$

$u = u(x, y)$ est une solution de l'équation (9). La réciproque est d'ailleurs exacte.

Soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite de nombres tels que $\varepsilon_n \downarrow 0$, $\varepsilon_1 < 1$.

Considérons l'équation

$$(10) \qquad \Delta u = h(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u)+\varepsilon_n(\tan^{-1} u-\pi/2)/\pi,$$

où $\tan^{-1} 0 = 0$. D'après le théorème d'existence et celui d'unicité, l'équation (10) admet une et une seule solution $u = \tilde{u}_n(x, y)$ régulière dans D et s'annulant sur C. D'après le théorème de comparaison, on a

$$0 \leqq u(x, y) \leqq \tilde{u}_n(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D},$$

où $u = u(x, y)$ est une solution régulière dans D et s'annulant sur C de l'équation (9).

Considérons l'équation

$$\Delta u = h(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u)+\varepsilon_n(\tan^{-1} u-\pi/2)/\pi+\lambda \qquad 0 \leqq \lambda \leqq \varepsilon_1.$$

Cette équation admet une et une seule solution $u = u(x, y, \lambda)$

régulière dans D et s'annulant sur C. D'après le théorème de continuité [5]), $u(x, y, \lambda)$ est une fonction continue par rapport aux variables x, y, λ. Par définition on obtient

$$u(x, y, 0) = \tilde{u}_n(x, y), \qquad u(x, y, \varepsilon_n) \leqq 0 \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Il existe donc un nombre λ_n tel que

$$u(x_0, y_0, \lambda_n) = u_0, \qquad 0 \leqq \lambda_n \leqq \varepsilon_n.$$

Désignons par $u = u_n(x, y)$ la solution régulière et s'annulant sur C de l'équation

$$\Delta u = h(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u) + \varepsilon_n(\tan^{-1} u - \pi/2)/\pi + \lambda_n.$$

Par suite $u_n(x, y)$ s'exprime comme suit:

$$\begin{aligned} u_n(x, y) & \\ = -\frac{1}{2\pi}\iint_D & G(x, y; \xi, \eta)\{h(\xi, \eta, u_n(\xi, \eta), \partial_x u_n(\xi, \eta), \partial_y u_n(\xi, \eta)) \\ & + \varepsilon_n(\tan^{-1} u_n(\xi, \eta) - \pi/2)/\pi + \lambda_n\} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Les familles $\{u_n(x, y)\}$, $\{\partial_x u_n(x, y)\}$ et $\{\partial_y u_n(x, y)\}$ sont donc normales. On peut supposer que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, y) = u_0(x, y),$$
$$\lim_{n\to\infty} \partial_x u_n(x, y) = \partial_x u_0(x, y), \qquad \lim_{n\to\infty} \partial_y u_n(x, y) = \partial_y u_0(x, y)$$

uniformément dans D, en prenant, s'il est nécessaire, une suite partielle.

Par définition on a

$$\begin{aligned} \Delta u_n(x, y) = h(x, y, u_n(x, y), \partial_x u_n(x, y), \partial_y u_n(x, y)) & \\ + \varepsilon_n(\tan^{-1} u_n(x, y) - \pi/2)/\pi + \lambda_n, & \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & u_0(x_0, y_0) = u_0, \\ & \quad \Delta u_0(x, y) = h(x, y, u_0(x, y), \partial_x u_0(x, y), \partial_y u_0(x, y)), \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

3. Théorème de Harnack généralisé.

Nous étendrons le théorème 15 dans l'article susmentionné.

THÉORÈME 4. *Soient D un domaine appartenant à la classe A_h et $f(x, y, z, p, q)$ une fonction continue, bornée au sens généralisé et non décroissante par rapport à z dans $(x, y) \in \bar{D}$, $-\infty < z, p, q < +\infty$. Supposons que l'équation* (5) *admette au plus une solution régulière dans D et prenant des valeurs données et continues sur C.*

Soit $\{z_n(x, y)\}$ une suite de solutions de l'équation (5) *régulière dans D et continues dans $\bar{D}$.*

Si la suite $\{z_n(x, y)\}$ converge uniformément sur C, elle converge uniformément (au sens strict) dans D. Désignons par $z(x, y)$ sa fonction limite. $z(x, y)$ est une solution de l'équation (5) *régulière dans D et continue dans $\bar{D}$, et on a*

$$\lim_{n\to\infty} \partial_x z_n(x, y) = \partial_x z(x, y), \quad \lim_{n\to\infty} \partial_y z_n(x, y) = \partial_y z(x, y),$$

la convergence étant uniforme dans D.

Soit $h_n(x, y)$ une fonction harmonique dans D et prenant les valeurs $z_n(x, y)$ sur C. Posons

$$z_n(x, y) = u_n(x, y) + h_n(x, y);$$

$u_n(x, y)$ est une solution régulière dans D et s'annulant sur C de l'équation en u

$$\text{(11)}\quad \Delta u = f(x, y, u + h_n(x, y), \partial_x u + \partial_x h_n(x, y), \partial_y u + \partial_y h_n(x, y)).$$

Puisque $|z_n(x, y)| \leqq K (n = 1, 2, \ldots)$ sur C, on a $|h_n(x, y)| \leqq K (n = 1, 2, \ldots)$ dans $\bar{D}$. On a donc

$$\begin{aligned} f(x, y, u + h_n(x, y), \partial_x u + \partial_x h_n(x, y), \partial_y u + \partial_y h_n(x, y)) \\ - f(x, y, h_n(x, y), \partial_x u + \partial_x h_n(x, y), \partial_y u + \partial_y h_n(x, y)) \\ \begin{cases} \leqq 0 & \qquad\qquad u \leqq 0, \\ \geqq 0 & \qquad\qquad u \geqq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$|f(x, y, h_n(x, y), \partial_x u + \partial_x h_n(x, y), \partial_y u + \partial_y h_n(x, y))| \leqq M.$$

Par suite on obtient

$$|u_n(x, y)| \leqq MR^2/4 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

dans $\bar{D}$, où R est le diamètre de D.

Par la méthode utilisée dans la démonstration du théorème 2 on peut supposer sans perdre la généralité que $f(x, y, u + h_n(x, y), \partial_x u + \partial_x h_n(x, y), \partial_y u + \partial_y h_n(x, y))$ $(n = 1, 2, \ldots)$ soient bornées dans $(x, y) \in \bar{D}$, $-\infty < u, p, q < +\infty$. Par hypothèse $u_n(x, y)$ s'exprime comme suit:

$$\begin{aligned} u_n(x, y) \\ = -\frac{1}{2\pi} \iint_D G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, u_n(\xi, \eta) + h_n(\xi, \eta), \\ \partial_x u_n(\xi, \eta) + \partial_x h_n(\xi, \eta), \partial_y u_n(\xi, \eta) + \partial_y h_n(\xi, \eta)) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Les familles $\{u_n(x, y)\}$, $\{\partial_x u_n(x, y)\}$, $\{\partial_y u_n(x, y)\}$ sont donc normales. On peut prendre une suite partielle $\{u_{n_j}(x, y)\}$ qui tend vers $u(x, y)$ uniformément (au sens strict) dans D. On a donc

$$\lim_{j\to\infty} \partial_x u_{n_j}(x, y) = \partial_x u(x, y), \quad \lim_{j\to\infty} \partial_y u_{n_j}(x, y) = \partial_y u(x, y),$$

la convergence étant uniforme dans D.

Par suite $u(x, y)$ est une solution de l'équation (11) régulière dans D et s'annulant sur C.

Soit $\{u_{n_k}(x, y)\}$ une suite partielle quelconque de $\{u_n(x, y)\}$. Si $\{u_{n_k}(x, y)\}$ tend vers $u_0(x, y)$ uniformément dans D, $u_0(x, y)$ est de même une solution de l'équation (11) régulière dans D et s'annulant sur C. Par hypothèse on a

$$u(x, y) = u_0(x, y),$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, y) = u(x, y),$$

$$\lim_{n\to\infty} \partial_x u_n(x, y) = \partial_x u(x, y), \qquad \lim_{n\to\infty} \partial_y u_n(x, y) = \partial_y u(x, y),$$

la convergence étant uniforme dans D. Donc si l'on pose

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \lim_{n\to\infty} z_n(x, y) = \lim_{n\to\infty} (u_n(x, y)+h_n(x, y)) \\ &= u(x, y)+h(x, y), \end{aligned}$$

$z(x, y)$ est une solution de l'équation (5) régulière dans D et continue dans $\bar{D}$, C.Q.F.D.

Soient D un domaine et D_0 un domaine quelconque appartenant à A_h dont la fermeture $\bar{D}_0$ est contenue dans D. Si l'équation (5) admet au plus une solution régulière dans D_0 et prenant des valeurs données et continues sur la frontière de D_0, nous dirons que l'équation (5) satisfait à *la condition* (U) *dans* D.

Théorème 5. *Soient D un domaine dans le plan des variables x, y et $f(x, y, z, p, q)$ une fonction bornée et continue dans $(x, y) \in D$, $-\infty < z, p, q < +\infty$. Supposons que l'équation* (5) *satisfasse à la condition* (U) *dans* D.

Si une suite $\{z_n(x, y)\}$ de solutions de l'équation (5) *régulières dans D est non décroissante et que la suite des nombres $\{z_n(x_0, y_0)\}$ $((x_0, y_0) \in D)$ est bornée, la suite $\{z_n(x, y)\}$ converge uniformément dans D vers une solution $z = z(x, y)$ régulière dans D de l'équation* (5), *et on a*

$$\lim_{n\to\infty} \partial_x z_n(x, y) = \partial_x z(x, y), \qquad \lim_{n\to\infty} \partial_y z_n(x, y) = \partial_y z(x, y),$$

la convergence étant uniforme dans D.

On peut prendre un domaine D_0 appartenant à A_h tel que $\bar{D}_0 \subset D$. Désignons par $h_n(x, y)$ la fonction harmonique prenant $z_n(x, y)$ sur la frontière C_0 de D_0, et posons

$$z_n(x, y) = u_n(x, y)+h_n(x, y).$$

Alors $u_n(x, y)$ est une solution de l'équation (11) régulière dans D_0 et s'annulant sur C_0.

Soit $|f(x, y, z, p, q)| \leqq M$ dans $(x, y) \in D$, $-\infty < z, p, q < +\infty$; on obtient les inégalités

$$|u_n(x, y)| \leqq MR^2/4 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

dans $\bar{D}_0$, où R est le diamètre de D_0. La suite $\{h_n(x, y)\}$ est donc non décroissante. Pour démontrer qu'elle soit bornée, il suffit de montrer que la suite de nombres $\{h_n(x_0, y_0)\}$ est bornée. Si l'on avait $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x_0, y_0) = +\infty$, on aurait

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty} \{u_n(x_0, y_0)+h_n(x_0, y_0)\} = +\infty,$$

ce qui est absurde.

D'après le second théorème de Harnack, on a

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x, y) = h(x, y),$$

$$\lim_{n\to\infty} \partial_x h_n(x, y) = \partial_x h(x, y), \qquad \lim_{n\to\infty} \partial_y h_n(x, y) = \partial_y h(x, y),$$

la convergence étant uniformé dans D_0.

Par la méthode utilisée dans la démonstration du théorème précédent, on peut conclure que les suites $\{u_n(x, y)\}$, $\{\partial_x u_n(x, y)\}$ et $\{\partial_y u_n(x, y)\}$ convergent respectivement vers $u(x, y)$, $\partial_x u(x, y)$ et $\partial_y u(x, y)$ uniformément dans D_0. Par suite $u(x, y)$ est une solution de l'équation (11) régulière dans D_0 et s'annulant sur C_0. On a donc

$$z(x, y) \equiv \lim_{n\to\infty} z_n(x, y) = u(x, y)+h(x, y).$$

D_0 étant un domaine quelconque appartenant à A_h tel que $\bar{D}_0 \subset D$, $z(x, y)$ est une solution régulière dans D de l'équation (5), et on a

$$\lim_{n\to\infty} \partial_x z_n(x, y) = \partial_x z(x, y), \qquad \lim_{n\to\infty} \partial_y z_n(x, y) = \partial_y z(x, y),$$

la convergence étant uniforme dans D, C.Q.F.D.

4. Théorème de Perron généralisé.

Dans la suite nous considérons le cas où le domaine D est borné dans le plan des variables x, y et que $f(x, y, z)$ est *une fonction définie et non décroissante par* rapport à z dans $\mathscr{D}$: $(x, y) \in D$, $-\infty < z < +\infty$. (C désigne la frontière de D).

Nous étendrons d'abord les notions "fonctions majorantes, fonctions quasi-supérieures etc." dans la théorie des équations différentielles ordinaires [6]) au cas de l'équation

$$\Delta z = f(x, y, z). \tag{12}$$

Une fonction $\omega(x, y)$ continue dans un domaine D sera dite *fonction majorante* dans $\bar{D}(= D \cup C)$ de l'équation (12), si l'on a l'inégalité

$$\omega(x, y) \geqq z(x, y) \qquad (x, y) \in D$$

pour toute solution $z = z(x, y)$ de l'équation (12) régulière dans D et satisfaisant à l'inégalité

$$\varliminf_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (\omega(x, y)-z(x, y)) \geqq 0 \quad (x, y) \in D, \quad (x_0, y_0) \in C.$$

Si l'on a $\omega(x, y) \leqq z(x, y)$ $(x, y) \in D$ pour toute solution $z = z(x, y)$ de l'équation (12) régulière dans D et satisfaisant à l'inégalité $\varlimsup_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (\omega(x, y)-z(x, y)) \leqq 0$ $(x, y) \in D$, $(x_0, y_0) \in C$, $\omega(x, y)$ sera dite *fonction minorante* dans $\bar{D}$ de l'équation (12).

Une fonction $\omega(x, y)$ continue dans un voisinage d'un point (x, y) sera appelée *fonction supérieure au point* (x, y) de l'équation (12), si l'on a l'inégalité

$$\bar{\varDelta}\omega(x, y) < f(x, y, \omega(x, y)) \tag{13}$$

au point (x, y). Si $\omega(x, y)$ satisfait à l'inégalité

$$\underline{\varDelta}\omega(x, y) > f(x, y, \omega(x, y))$$

au lieu de (13), elle sera dite *fonction inférieure au point* (x, y), de l'équation (12).

Si $\omega(x, y)$ est une fonction supérieure (inférieure) à tous les points de D, $\omega(x, y)$ sera dite *fonction supérieure* (*inférieure*) *dans* D.

Une fonction $\omega(x, y)$ continue dans un voisinage d'un point (x, y) satisfait à l'inégalité

$$\bar{\varDelta}\omega(x, y) \leqq f(x, y, \omega(x, y)) \tag{14}$$

au lieu de (13), elle sera dite fonction quasi-supérieure au point (x, y). On définira de même *fonction quasi-inférieure.* Si $\omega(x, y)$ est une fonction quasi-supérieure (inférieure) à tous les points de D, elle sera dite *fonction quasi-supérieure* (*inférieure*) *dans* D.

Remarque. Par définition on voit aisément que une fonction sur-(sous-) harmonique est une fonction quasi-supérieure (inférieure) de $\varDelta z = 0$.

On aura immédiatement le théorème suivant.

Théorème 6. *Une solution continue de l'équation* (12) *est une fonction quasi-supérieure et quasi-inférieure dans* D *de l'équation* (12).

D'après le théorème de comparaison, on a

Théorème 7. *Une fonction continue et supérieure dans D est majorante dans D.*

Théorème 8. *Une fonction continue et quasi-supérieure dans D est majorante dans $\bar{D}$.*

En effet, soit $\omega(x, y)$ une fonction continue et quasi-supérieure dans D. Posons

$$\Omega(x, y) = \omega(x, y) + \varepsilon \cos \alpha x,$$

où α est une constante positive telle que

$$\cos \alpha x > 0 \qquad (x, y) \in \bar{D},$$

et ε un nombre positif arbitraire. On a alors

$$\bar{\Delta}\Omega(x, y) = \bar{\Delta}\omega(x, y) - \varepsilon\alpha^2 \cos \alpha x$$
$$< f(x, y, \Omega(x, y)) \qquad (x, y) \in D.$$

Si l'on a

$$\underline{\lim}_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (\omega(x, y) - z(x, y)) \geqq 0 \qquad (x_0, y_0) \in C,$$

on obtient

$$\underline{\lim}_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (\Omega(x, y) - z(x, y)) > 0 \qquad (x_0, y_0) \in C.$$

D'après le théorème 7, l'inégalité

$$\Omega(x, y) = \omega(x, y) + \varepsilon \cos \alpha x \geqq z(x, y) \qquad (x, y) \in D$$

subsiste. $\varepsilon(> 0)$ étant arbitraire, on obtient

$$\omega(x, y) \geqq z(x, y) \qquad (x, y) \in D.$$

Théorème 9. *Soient $\omega(x, y)$ une fonction quasi-supérieure de l'équation* (12) *et $\tilde{\omega}(x, y)$ une fonction continue dans D.*

Si l'on a $\tilde{\omega}(x, y) \leqq \omega(x, y)$ dans D et $\tilde{\omega}(x_0, y_0) = \omega(x_0, y_0)$ $((x_0, y_0) \in D)$, $\tilde{\omega}(x, y)$ est une fonction quasi-supérieure au point (x_0, y_0) de l'équation (12).

Par hypothèse, on a

$$\begin{aligned}
&\bar{\Delta}\tilde{\omega}(x_0, y_0)\\
&\quad = \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{2}{\pi r^2}\int_0^{2\pi} \{\tilde{\omega}(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - \tilde{\omega}(x_0, y_0)\} d\theta\\
&\quad \leqq \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{2}{\pi r^2}\int_0^{2\pi} \{\omega(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - \omega(x_0, y_0)\} d\theta\\
&\quad = \bar{\Delta}\omega(x_0, y_0) \leqq f(x_0, y_0, \omega(x_0, y_0))\\
&\quad = f(x_0, y_0, \tilde{\omega}(x_0, y_0)), \qquad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

On a aisément le corollaire suivant.

Corollaire. *Si* $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$, . . ., $\omega_n(x, y)$ *sont des fonctions quasi-supérieures* (*inférieures*) *dans* D *de l'équation* (12), *la fonction*

$$\omega(x, y) = \min\{\omega_1(x, y), \omega_2(x, y), \ldots, \omega_n(x, y)\},$$
$$(\omega(x, y) = \max\{\omega_1(x, y), \omega_2(x, y), \ldots, \omega_n(x, y)\})$$

est aussi une fonction quasi-supérieure (*inférieure*) *dans* D *de l'équation* (12).

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction définie et bornée sur la frontière C de D.

Une fonction $\omega(x, y)$ sera dite $\bar{\Omega}_\varphi$-($\underline{\Omega}_\varphi$-) *fonction* dans $\bar{D}$ de l'équation (12), si elle satisfait aux conditions suivantes:

i) $\omega(x, y)$ est une fonction continue dans $\bar{D}$ et quasi-supérieure (inférieure) dans D de l'équation (12),

ii) $\omega(x, y) \geqq \bar{\varphi}(x, y)$ $(\omega(x, y) \leqq \underline{\varphi}(x, y))$ sur C.

Lemme 2. *Soient* $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$, . . ., $\omega_n(x, y)$ *des* $\bar{\Omega}_\varphi$-/Ω_φ-*fonctions dans* $\bar{D}$. *Alors*

$$\omega(x, y) = \min\{\omega_1(x, y), \omega_2(x, y), \ldots, \omega_n(x, y)\}$$

est aussi une $\bar{\Omega}_\varphi$-*fonction dans* $\bar{D}$.

D'après le corollaire du théorème 9, la fonction $\omega(x, y)$ est quasi-supérieure dans D. $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$, . . ., $\omega_n(x, y)$ étant continues dans D, $\omega(x, y)$ est aussi continue dans $\bar{D}$. On a aisément

$$\omega(x, y) \geqq \bar{\varphi}(x, y) \qquad (x, y) \in C.$$

Lemme 3. *Soient* $\tilde{\omega}(x, y)$ *une* $\bar{\Omega}_\varphi$-*fonction et* $\underset{\sim}{\omega}(x, y)$ *une* $\underline{\Omega}_\varphi$-*fonction dans* $\bar{D}$ *de l'équation* (12). *Alors on a l'inégalité*

$$\underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq \tilde{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Posons

$$\tilde{\Omega}(x, y) = \tilde{\omega}(x, y) + \varepsilon \cos \alpha x,$$

où α est une constante positive telle que

$$\cos \alpha x > 0 \qquad (x, y) \in \bar{D},$$

et ε un nombre positif arbitraire. On a alors

$$\Delta\tilde{\Omega}(x, y) = \Delta\tilde{\omega}(x, y) - \varepsilon\alpha^2 \cos \alpha x < f(x, y, \tilde{\omega}(x, y)) \qquad (x, y) \in D,$$

et

$$\tilde{\Omega}(x, y) > \bar{\varphi}(x, y) \geqq \underline{\varphi}(x, y) \qquad (x, y) \in C.$$

Si l'inégalité $\underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq \tilde{\Omega}(x, y)$ ne subsistait pas dans $\bar{D}$, on aurait un point (x_0, y_0) dans D tel que

$$\underset{\sim}{\omega}(x_0, y_0) > \tilde{\Omega}(x_0, y_0) = \tilde{\omega}(x_0, y_0) + \varepsilon \cos \alpha x_0,$$
$$\underline{\Delta}\underset{\sim}{\omega}(x_0, y_0) \leqq \Delta\tilde{\Omega}(x_0, y_0).$$

On a donc

$$f(x_0, y_0, \tilde{\omega}(x_0, y_0)) > \bar{\Delta}\tilde{\omega}(x_0, y_0) - \varepsilon\alpha^2 \cos \alpha x_0$$
$$\geqq \underline{\Delta}\underset{\sim}{\omega}(x_0, y_0) \geqq f(x_0, y_0, \underset{\sim}{\omega}(x_0, y_0)),$$

ce qui est absurde.

On a donc

$$\tilde{\Omega}(x, y) = \tilde{\omega}(x, y) + \varepsilon \cos \alpha x \geqq \underset{\sim}{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

$\varepsilon(>0)$ étant arbitraire, on a

$$\tilde{\omega}(x, y) \geqq \underset{\sim}{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Nous dirons que l'équation (12) satisfait à la *condition* (S) *par rapport à* $\varphi(x, y)$, s'il existe au moins une $\bar{\Omega}_\varphi$-fonction et une $\underline{\Omega}_\varphi$-fonction de l'équation (12).

Si $f(x, y, z,)$ est bornée dans $\mathscr{D}$, l'équation (12) satisfait à la condition (S) par rapport à $\varphi(x, y)$.

En effet, soient $|f(x, y, z,)| \leqq M$, $\gamma \leqq \varphi(x, y) \leqq \Gamma$. Posons

$$\underset{\sim}{\omega}(x, y) = \gamma - M(R^2-(x^2+y^2))/4,$$
$$\tilde{\omega}(x, y) = \Gamma + M(R^2-(x^2+y^2))/4$$

où R est une constante telle que

$$R^2-(x^2+y^2) \geqq 0 \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Alors $\underset{\sim}{\omega}(x, y)$ est une $\underline{\Omega}_\varphi$-fonction et $\tilde{\omega}(x,y)$ une $\bar{\Omega}_\varphi$-fonction.

Dans la suite nous supposons de plus que $f(x, y, z)$ *est continue et bornée au sens généralisé et l'équation* (12) *satisfait à la condition* (S) *par rapport à* $\varphi(x, y)$.

Désignons par $z(x, y)$ la fonction inférieure de la famille des $\bar{\Omega}_\varphi$-fonctions $u(x, y)$ dans $\bar{D}$ de l'équation (12). D'après le lemme 3, $z(x, y)$ est bornée dans $\bar{D}$.

Soient $u(x,y)$ une fonction continue dans $\bar{D}$ et K un cercle tel que $[K] \subset D$. D'après les théorèmes d'existence et d'unicité, on obtient une et une seule solution $z = z(x, y)$ de l'équation (12) qui est régulière dans (K) et prend $u(x, y)$ sur K.

Poson

$$u_K(x, y) = \begin{cases} z(x, y) & (x, y) \in (K), \\ u(x, y) & (x, y) \in \bar{D}-(K). \end{cases}$$

Lemme 4. *Si* $\omega(x, y)$ *est une* $\bar{\Omega}_\varphi$-*fonction dans* $\bar{D}$, $\omega_K(x, y)$ *est aussi une* $\bar{\Omega}_\varphi$-*fonction dans* $\bar{D}$.

D'après le théorème 9, $u_K(x, y)$ est une fonction quasi-supérieure dans D de l'équation (12). Par définition, $\omega_K(x, y)$ est continue dans $\bar{D}$, et on a l'inégalité

$$\omega_K(x, y) = \omega(x, y) \geqq \bar{\varphi}(x, y) \qquad (x, y) \in C.$$

Lemme 5. *Soit $\{(x_i, y_i)\}$ une suite de points intérieurs de D. Il existe une suite $\{u_n(x, y)\}$ de $\bar{\Omega}_\varphi$-fonctions telle que*

i) $\tilde{\omega}(x, y) \geqq u_1(x, y) \geqq u_2(x, y) \geqq \ldots \geqq u_n(x, y) \geqq \ldots$
$$(x, y) \in D,$$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x_i, y_i) = z(x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$

où $\tilde{\omega}(x, y)$ est une $\bar{\Omega}_\varphi$-fonction donnée à l'avance.

Par définition on peut prendre une suite $\{u_n^{(i)}(x, y)\}$ de $\bar{\Omega}_\varphi$-fonctions telle que

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{(i)}(x_i, y_i) = z(x_i, y_i).$$

Posons

$$u_n(x, y) = \min\{\tilde{\omega}(x, y), u_k^{(i)}(x, y)\} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

D'après le lemme 2, $u_n(x, y)$ est une $\bar{\Omega}_\varphi$-fonction, et on a

$$\tilde{\omega}(x, y) \geqq u_n(x, y) \geqq u_{n+1}(x, y) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$u_n^{(i)}(x, y) \geqq u_n(x, y) \geqq z(x, y) \qquad (n \geqq i).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n^{(i)}(x_i, y_i) = z(x_i, y_i)$ ayant lieu, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x_i, y_i) = z(x_i, y_i).$$

Lemme 6. *Soit $\{(x_i, y_i)\}$ une suite de points de (K). Alors il existe une fonction $z_0(x, y)$ qui est une solution régulière dans (K) de l'équation (12) et telle que $z_0(x_i, y_i) = z(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$.*

L'équation (12) satisfaisant à la condition (S), il existe au moins une $\bar{\Omega}_\varphi$-fonction et une $\underline{\Omega}_\varphi$-fonction. Désignons ces fonctions par $\tilde{\omega}(x, y)$ et $\underset{\sim}{\omega}(x, y)$ respectivement.

D'après le lemme 5, on obtient une suite $\{u_n(x, y)\}$ de $\bar{\Omega}_\varphi$-fonctions telle que

$$\tilde{\omega}(x, y) \geqq u_1(x, y) \geqq u_2(x, y) \geqq \ldots \geqq u_n(x, y) \geqq \ldots,$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n(x_i, y_i) = z(x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

D'après le lemme 4, $u_{n,K}(x, y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sont $\bar{\Omega}_\varphi$-fonctions dans $\bar{D}$ et on a les inégalités

$$\tilde{\omega}(x, y) \geqq u_{1,K}(x, y) \geqq u_{2,K}(x, y) \geqq \ldots \geqq u_{n,K}(x, y) \geqq \ldots.$$

$u_n(x_i, y_i) \geqq u_{n,K}(x_i, y_i) \geqq z(x_i, y_i)$ ayant lieu, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_{n,K}(x_i, y_i) = z(x_i, y_i).$$

D'après le lemme 3, on a les inégalités

$$\underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq u_{n,K}(x, y) \leqq \tilde{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Posons

$$g(x, y, v) = \begin{cases} f(x, y, \underset{\sim}{\omega}(x, y)) & v < \underset{\sim}{\omega}(x, y), \\ f(x, y, v) & \underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq v \leqq \tilde{\omega}(x, y), \\ f(x, y, \tilde{\omega}(x, y)) & \tilde{\omega}(x, y) < v, \end{cases}$$

on a alors

$$|g(x, y, v)| \leqq M$$

dans $(x, y) \varepsilon D$, $-\infty < v < +\infty$.

Si l'équation

$$(15) \qquad \Delta v = g(x, y, v)$$

admet une solution $v = v(x, y)$ régulière dans (K) telle que

$$(16) \qquad \underset{\sim}{\omega}(x, y) \leqq v(x, y) \leqq \tilde{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D},$$

$v = v(x, y)$ est une solution régulière dans D de l'équation (12) qui satisfait aux inégalités (16) dans $[K]$. La réciproque est d'ailleurs exacte.

D'après le théorème 5, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_{n,K}(x, y) = z_0(x, y),$$

où $z_0(x, y)$ est une solution de l'équation (15) qui est régulière dans (K) et satisfait aux inégalité (16). On en conclut que $z_0(x, y)$ est une solution de l'équation (12) régulière dans (K) qui satisfait à

$$z_0(x_i, y_i) = z(x_i, y_i), \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Soient $\{(x_i, y_i)\}$ une suite dense de points de (K), et (ξ, η) un point quelconque dans (K). D'après le lemme 6 il existe une solution $z = u(x, y)$ régulière dans (K) telle que

$$u(x_i, y_i) = z(x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

De même on a une solution $z = u_0(x, y)$ régulière dans (K) telle que

$$u_0(x_i, y_i) = z(x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$
$$u_0(\xi, \eta) = z(\xi, \eta).$$

$\{(x_i, y_i)\}$ étant dense dans (K), et (ξ, η) un point arbitraire, on a

$$u(x, y) = z(x, y).$$

Nous arrivons donc au théorème suivant.

THÉORÈME 10 [7]. *Soient $f(x, y, z)$ une fonction continue, bornée au sens généralisé et non décroissante par rapport à z dans le domaine $\mathscr{D}$ et $\varphi(x, y)$ une fonction bornée définie sur C.*

Si l'équation (12) *satisfait à la condition* (S) *par rapport à*

$\varphi(x, y)$, $z = z(x, y)$ *est une solution de l'équation* (12) *régulière dans* D, *où* $z(x, y)$ *est la fonction inférieure de la famille de* $\bar{\Omega}_\varphi$*-fonctions.*

Une fonction $w(x, y)$ sera appelée *barrière* à un point (x_0, y_0) $(\epsilon\, C)$ par rapport à $\varphi(x, y)$ de l'équation (12), s'il satisfait aux conditions suivantes:

1) $w(x, y)$ est continue et non négative dans $\bar{D} \cap [K_\varphi]$,

2) $w(x_0, y_0) = 0,$
$$w(x, y) \geqq \alpha > 0 \qquad (x, y) \in \bar{D} \cap K_\varphi,$$

3) $$\Delta w(x, y) \leqq -M \qquad (x, y) \in D \cap (K_\varphi),$$

où K est une cercle de centre $(x_0, y_0) \in C$ et de rayon ρ et α est une constante, et que

$$M = \sup_{(x, y) \in D} \{|f(x, y, \underline{\varphi}(x_0, y_0))|, |f(x, y, \bar{\varphi}(x_0, y_0))|\}.$$

Théorème 11. *Les conditions* 1), 2), 3) *sont équivalentes aux conditions*

1°) $w(x, y)$ *est continue et non négative dans* $\bar{D}$,

2°) $w(x_0, y_0) = 0,$
$$w(x, y) \geqq \alpha > 0 \qquad (x, y) \in \bar{D} - (K_\varphi),$$

3°) $$\Delta w(x, y) \leqq -M \qquad (x, y) \in D.$$

Soit $\omega(x, y)$ une barrière à un point $(x_0, y_0) \in C$ par rapport à $\varphi(x, y)$ de l'équation (12).

D étant un domaine borné, il existe une courbe de Jordan Γ telle que $\bar{D} \subset (\Gamma)$. L'équation $\Delta z = -M$ admet une solution régulière dans (Γ) et prenant la valeur α sur Γ. Désignons cette solution par

$$z = k(x, y),$$

elle est continue dans $[\Gamma]$ et

$$k(x, y) \geqq \alpha \qquad (x, y) \in [\Gamma].$$

On peut prendre une constante A telle que

$$A\alpha > \max_{(x, y) \in [\Gamma]} k(x, y).$$

Posons

$$w(x, y) = \begin{cases} \min\{A\omega(x, y), k(x, y)\} & (x, y) \in \bar{D} \cap [K_\varphi], \\ k(x, y) & (x, y) \in \bar{D} - [K_\varphi], \end{cases}$$

alors $w(x, y)$ est une fonction non négative et continue.

Il est clair que

$$w(x_0, y_0) = \min\{A\omega(x_0, y_0), k(x_0, y_0)\} = 0,$$
$$w(x, y) \geqq \alpha > 0 \qquad (x, y) \in \bar{D} - (K_\varphi).$$

Par définition on a

$$\Delta w(x, y) = -M \qquad (x, y) \in D-(K_\varphi),$$

et

$$\bar{\Delta} w(x, y) \leqq -M \qquad (x, y) \in D \,.\, (K_\varphi).$$

On a donc

$$\bar{\Delta} w(x, y) \leqq -M \qquad (x, y) \in D.$$

La réciproque est évidente.

THÉORÈME 12. *Avec la même hypothèse du théorème* 10 *concernant les fonctions $f(x, y, z)$ et $\varphi(x, y)$, s'il existe une barrière $w(x, y)$ à un point $(x_0, y_0)(\in C)$ par rapport à $\varphi(x, y)$, l'équation* (12) *satisfait à la condition (S) par rapport à $\varphi(x, y)$, et on les inégalités*

$$\underline{\varphi}(x_0, y_0) \leqq \underline{z}(x_0, y_0) \leqq \bar{z}(x_0, y_0) \leqq \bar{\varphi}(x_0, y_0),$$

où $z = z(x, y)$ la solution régulière de l'équation (12) *donnée par le théorème* 10.

Soit ε un nombre positif quelconque mais détérminé. Posons

$$\tilde{\omega}(x, y) = \bar{\varphi}(x_0, y_0) + \varepsilon + \Gamma_1 w(x, y) \qquad (\Gamma_1 \geqq 1).$$

Si l'on prend ρ assez petit, on a les inégalités

$$\varphi(x,y) < \bar{\varphi}(x_0, y_0) + \varepsilon \leqq \tilde{\omega}(\xi, \eta) \quad (x,y) \in C \cap [K_\rho], \quad (\xi, \eta) \in \bar{D} \cap [K_\rho],$$

et

$$\varphi(x, y) \leqq \bar{\varphi}(x_0, y_0) + \varepsilon + \alpha \Gamma_1 \leqq \tilde{\omega}(\xi, \eta), (x, y) \in C \cap [K_\rho]^c, \quad (\xi, \eta) \in \bar{D}, [K_\rho]^c$$

pour Γ_1 assez grand.

On a donc

$$\varphi(x, y) \leqq \tilde{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in C, \tag{17}$$

$$\varphi(x_0, y_0) \leqq \tilde{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in \bar{D}.$$

Soit (x_1, y_1) un point arbitraire sur C, on obtient

$$\bar{\varphi}(x_1, y_1) \leqq \overline{\lim_{(x, y) \to (x_1, y_1)}} \tilde{\omega}(x, y) = \tilde{\omega}(x_1, y_1) \quad (x, y) \in C.$$

(x_1, y_1) étant arbitraire, on a

$$\bar{\varphi}(x, y) \leqq \tilde{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in C.$$

Par définition on a

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\omega}(x, y) = \Gamma_1 \Delta w(x, y) &\leqq -\Gamma_1 M \leqq -M \\ &\leqq f(x, y, \bar{\varphi}(x_0, y_0)). \end{aligned}$$

D'après (17) on a

$$\bar{\Delta} \tilde{\omega}(x, y) \leqq f(x \;\; y \;\; \tilde{\omega}(x \;\; y)).$$

$\tilde{\omega}(x\ y)$ est donc une $\bar{\Omega}_\varphi$-fonction.

De même posons

$$\underset{\sim}{\omega}(x\ y) = \underline{\varphi}(x_0\ y_0) - \varepsilon - \Gamma_2 w(x\ y) \qquad (\Gamma_2 \geqq 1)$$

où Γ_2 est un nombre positif assez grand. Alors $\underset{\sim}{\omega}(x, y)$ est une $\underline{\Omega}_\varphi$-fonction.

Par suite l'équation (12) satisfait à la condition (S) par rapport à $\varphi(x, y)$.

D'après le lemme 3 on a l'inégalité

$$\omega(x, y) \geqq \underset{\sim}{\omega}(x, y)$$

où $\omega(x, y)$ est une $\bar{\Omega}_\varphi$-fonction quelconque. $z(x, y)$ étant la fonction inférieure de la famille de $\bar{\Omega}_\varphi$-fonctions, on a l'inégalité

$$z(x, y) \geqq \underline{\varphi}(x_0, y_0) - 2\varepsilon \qquad (x, y) \in \bar{D} \cap (K_{\rho'})$$

où ρ' est une constante assez petite pour que $0 < \rho' < \rho$.

$\varepsilon(> 0)$ étant arbitraire, on obtient

$$\underline{z}(x_0, y_0) \geqq \underline{\varphi}(x_0, y_0).$$

De même on a

$$\bar{z}(x_0, y_0) \leqq \bar{\varphi}(x_0, y_0), \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Théorème 13. *Soit D un domaine régulier au sens du problème de Dirichlet. Si $f(x, y, z)$ est une fonction continue, bornée au sens généralisé et non décroissante par rapport à z dans $\mathscr{D}$, l'équation* (12) *admet une solution régulière dans D et prenant $\varphi(x, y)$ sur C, où $\varphi(x, y)$ est une fonction continue sur C.*

Soit (x_0, y_0) un point arbitraire sur C. Posons

$$M = \sup_{(x, y) \in D} |f(x, y, \varphi(x_0, y_0))|,$$

on a alors $0 \leqq M < +\infty$.

D étant un domaine régulier au sens du problème de Dirichlet, l'équation

$$\Delta u = -(M+\varepsilon) \quad (\varepsilon : \text{constante positive})$$

admet une solution régulière dans D et s'annulant sur C. Désignons cette solution par

$$u = u(x, y),$$

et posons

$$w(x, y) = u(x, y) + \varepsilon\{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\}/4.$$

Alors $w(x, y)$ est une barrière à un point (x_0, y_0) par rapport à $\varphi(x, y)$. D'après le théorème 12, l'équation (12) satisfait à la condition (S) par rapport à $\varphi(x, y)$.

Soit

$$z = z(x, y)$$

la solution régulière dans D de l'équation (12) donnée par la théorème 10. D'après le théorème 12, on a

$$z(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0).$$

(x_0, y_0) étant un point arbitraire sur C, on a

$$z(x, y) = \varphi(x, y) \quad (x, y) \in C, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

RÉFÉRENCES

T. Satō

1) Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$, Comp. Math. **12** (1954), 157–177.
2) loc. cit.
3) loc. cit.
4) Pri la limo de funkcisekvaĵo, Mem. Fac. Sc. Kyūsyū Imp. Univ., Ser. A, 4 (1949), 23–27.
5) Le théorème 7 dans l'article précédent (loc. lit.) subsiste aussi au cas suivant: la fonction est définie dans $(x, y) \in \bar{D}$, $|z| \leqq \Gamma$, $-\infty < p, q < +\infty$, $\lambda \in \Lambda$ au lieu $(x, y)\, \bar{D}$, $-\infty < z, p, q < +\infty$, $\lambda \in \Lambda$.

M. Hukuhara

6) Théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles ordinaires. I, Mem. Fac. Sc. Kyūsyū Imp. Univ. Ser. A, 1 (1941), 111–127.

O. Perron

7) Eine neuere Bemerkung der ersten Randwertaufgaben für $\Delta u = 0$, Math. Zeits. 18 (1923).

(Oblatum 24-12-'57).