COMPOSITIO MATHEMATICA

TOKUI SATO

Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$

Compositio Mathematica, tome 12 (1954-1956), p. 157-177
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1954-1956__12__157_0>

Sur l'équation aux dérivées partielles

$$\varDelta z = f(x, y, z, p, q)$$

Par

Tokui Satō

(Kōbe).

TABLE DES MATIÈRES.

1. Introduction.

J'ai entrepris d'étudier systématiquement le problème aux limites pour les équations quasi linéaires aux dérivées partielles du second ordre et j'ai déjà publié les résultats [1]) relatifs à l'équation

$$s = f(x, y, z, p, q) \qquad (s = z''_{xy},\ p = z'_x,\ q = z'_y).$$

Dans cette note je donnerai des résultats obtenus relatifs à l'équation

$$\varDelta z = f(x, y, z, p, q).$$

Soit $z(x, y)$ une fonction continue dans un domaine D. On sait que, l'opération $\varDelta$ définie par

$$(1) \quad \varDelta z(x, y) = \lim_{r \to +0} 2\pi^{-1} r^{-2} \int_0^{2\pi} \{z(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta) - z(x, y)\}\, d\theta \qquad (x, y) \in D,$$

jouit des propriétés suivantes.

1) Si les dérivées partielles du second ordre de $z(x, y)$ sont continues, on a

$$\varDelta z(x, y) = z''_{xx}(x, y) + z''_{yy}(x, y).$$

2) Si

$$u(x, y) = \iint_D z(\xi, \eta) \log \frac{1}{r}\, d\xi d\eta \qquad (x, y) \in D,$$

r désignant la distance du point (ξ, η) au point (x, y), on a

$$\Delta u(x, y) = -2\pi z(x, y).$$

Nous dirons que $z(x, y)$ *est une fonction régulière dans* D, *lorsqu'elle satisfait aux conditions suivantes*:

i) $z(x, y)$ *ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre sont continues dans* D.

ii) *Il existe la limite* (1).

2. Théorèmes de comparaison.

Désignons par D un domaine borné dans le plan des variables x, y, et par C sa frontière. Soit $\bar{\omega}(x, y)$ une fonction continue dans $\bar{D}$ $(= D + C)$ et régulière dans D, et $f(x, y, z, p, q)$ une fonction définie dans $\mathscr{D}$ $(= \bar{D} \times \Delta)$, où Δ est un ensemble de points dans l'espace des variables z, p, q.

Supposons que l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta z = f(x, y, z, p, q) \qquad (p = z'_x,\ q = z'_y) \tag{2}$$

admette une solution $z = z(x, y)$ régulière dans D et qui prend des valeurs données sur C. Dans quelles conditions peut-on affirmer que l'inégalité

$$\bar{\omega}(x, y) \geqq z(x, y) \tag{3}$$

sur la frontière C entraîne la même inégalité à l'intérieur de D?

Si l'inégalité (3) ne subsiste pas dans D, la fonction continue $\bar{\omega}(x, y) - z(x, y)$ atteint son minimum en un point (x_1, y_1) de D. On a alors

$$\bar{\omega}(x, y) < z(x, y)$$

$$\bar{\omega}'_x(x, y) = z'_x(x, y), \quad \bar{\omega}'_y(x, y) = z'_y(x, y),$$

$$\Delta\bar{\omega}(x, y) \geqq \Delta z(x, y)$$

au point (x_1, y_1). Il en découle

$$\Delta\bar{\omega}(x, y) \geqq f(x, y, z(x, y), \bar{\omega}'_x(x, y), \bar{\omega}'_y(x, y))$$

au point (x_1, y_1), à cause de l'équation (2). On a donc le théorème suivant.

Théorème 1. *Supposons que l'inégalité*

$$\Delta\bar{\omega}(x, y) < f(x, y, z, \bar{\omega}'_x(x, y), \bar{\omega}'_y(x, y)) \tag{4}$$

subsiste pour $(x, y) \in D$, $\bar{\omega}(x, y) < z$, $(z, \bar{\omega}'_x(x, y), \bar{\omega}'_y(x, y)) \in \Delta$, *et que l'équation aux dérivées partielles* (2) *admettent une solution* $z = z(x, y)$ *régulière dans* D *et continue dans* $\bar{D}$.

Si l'on a l'inégalité (3) *sur* C, *elle subsiste aussi dans* D.

On peut démontrer de la même manière le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Dans les mêmes hypothèses qu'au théorème* 1, *si l'inégalité*

$$\bar{\omega}(x, y) > z(x, y)$$

subsiste sur C, *elle subsiste aussi dans* D.

Soit $\bar{f}(x, y, z, p, q)$ une fonction définie dans $\mathscr{D}$. Si $\bar{z} = \bar{\omega}(x, y)$ est une solution de

$$\Delta\bar{z} = \bar{f}(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}),$$

l'inégalité $\bar{f}(x, y, \bar{z}, p, q) < f(x, y, z, p, q)$ $(\bar{z} < z)$ entraîne (4). On obtient donc les théorèmes suivants.

THÉORÈME 3. *Supposons que l'on ait l'inégalité*

$$\bar{f}(x, y, \bar{z}, p, q) < f(x, y, z, p, q)$$

pour $\bar{z} < z$, (x, y, z, p, q), $(x, y, \bar{z}, p, q) \in D$ *et que les équations aux dérivées partielles*

$$\Delta\bar{z} = \bar{f}(x, y, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}), \quad \Delta z = f(x, y, z, p, q)$$

admettent respectivement des solutions

$$\bar{z} = \bar{z}(x, y), \quad z = z(x, y)$$

qui sont régulières dans D *et continues dans* $\bar{D}$.

Si l'inégalité

$$\bar{z}(x, y) \geqq z(x, y)$$

subsiste sur C, *on a aussi cette inégalité dans* D.

THÉORÈME 4. *Dans les mêmes hypothèses qu'au théorème* 3, *si l'inégalité*

$$\bar{z}(x, y) > z(x, y)$$

subsiste sur C, *elle subsiste aussi dans* D.

Il est clair que l'on peut obtenir des théorèmes analogues aux théorèmes 1, 2, 3, 4 en intervertissant les inégalités.

Si D est un domaine borné et régulier relativement au problème de Dirichlet dans le plan des variables x, y, *l'équation aux dérivées partielles*

$$\Delta z = -1$$

admet une solution et une seule [2]) $z = \psi(x, y)$ *qui est régulière dans* D *et qui s'annule sur* C. *On a l'inégalité dans* D

$$0 \leqq \psi(x, y) \leqq R^2/4 \tag{5}$$

où R *est le diametre de* D.

En effet, l'équation $\Delta z = 1$ admet la solution

$$z = \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4}$$

qui est régulière dans D. Par hypothèse l'équation de Laplace

$$\Delta z = 0$$

admet la solution harmonique dans D et qui prend la valeur

$$z(x, y) = \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4}$$

sur C. Désignons-la par

$$z = h(x, y).$$

On a alors

$$\psi(x, y) = h(x, y) - \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4}.$$

Désignons par ϱ_1 et ϱ_2 respectivement la plus petite et la plus grande des distances du point (x_0, y_0) aux points de C. D'après le théorème 3, on a dans D l'inégalité

$$h(x, y) \geqq \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4}.$$

Puisqu'on a

$$\varrho_1^2/4 \leqq h(x, y) \leqq \varrho_2^2/4,$$

$$\varrho_1^2/4 \leqq \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4} \leqq \varrho_2^2/4$$

dans D, on a l'inégalité (5) dans D.

THÉORÈME 5. *Soit D un domaine borné et régulier relativement au problème de Dirichlet dans le plan des variables x, y. Supposons que les fonctions $f(x, y, z, p, q)$ et $F(x, y, z, p, q)$ soient définies dans $(x, y) \in \overline{D}$, $-\infty < z, p, q < +\infty$ et satisfassent aux inégalités*

$$f(x, y, z, p, q) \begin{cases} \leqq 0 \text{ pour } z \leqq 0, \\ \geqq 0 \text{ pour } z \geqq 0, \end{cases}$$

$$| F(x, y, z, p, q) | \leqq M \quad (M\text{: const.}).$$

Si l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta z = f(x, y, z, p, q) + F(x, y, z, p, q)$$

admet une solution

$$z = z(x, y)$$

qui est régulière dans D et s'annule sur C, on a l'inégalité

$$| z(x, y) | \leqq M\psi(x, y)$$

dans $\overline{D}$.

Posons

$$v(x, y) = z(x, y) - M'\psi(x, y),$$

où M' est une constante quelconque plus grande que M. $v(x, y)$ est alors une solution régulière dans D de l'équation

$$\Delta v = f(x, y, v + M'\psi(x, y), v'_x + M'\psi'_x(x, y), v'_y + M'\psi'_y(x, y))$$
$$+ F(x, y, v + M'\psi(x, y), v'_x + M'\psi'_x(x, y), v'_y + M'\psi'_y(x, y)) + M'.$$

Par hypothèse on a

$$0 < f(x, y, v + M'\psi(x, y), M'\psi'_x(x, y), M'\psi'_y(x, y))$$
$$+ F(x, y, v + M'\psi(x, y), M'\psi'_x(x, y), M'\psi'_y(x, y)) + M',$$
$$\text{pour } v > 0,$$

d'où

$$v(x, y) \leqq 0,$$

c'est-à-dire

$$z(x, y) \leqq M'\psi(x, y).$$

De même on a

$$- M'\psi(x, y) \leqq v(x, y).$$

On a donc dans $\overline{D}$

$$| z(x, y) | \leqq M'\psi(x, y).$$

M' pouvant être supposé aussi voisin de M que l'on veut, il subsiste dans $\overline{D}$ l'inégalité

$$| z(x, y) | \leqq M\psi(x, y).$$

Nous arrivons tout de suite au corollaire suivant.

Corollaire. *Dans les mêmes hypothèses qu'au théorème* 5, *on a l'inégalité*

$$| z(x, y) | \leqq MR^2/4$$

dans $\overline{D}$, où R est le diamètre de D.

3. Conditions d'unicité.

Donnons d'abord un lemme. Soit $f(x, y, z, p, q)$ une fonction définie dans $\mathscr{D}$: $(x, y) \in \overline{D}, - \infty < z, p, q < + \infty$.

Lemme. *Si l'on a*

$$f(x, y, z, 0, 0) \begin{cases} < 0 \ \textit{pour}\ z < 0, \\ > 0 \ \textit{pour}\ z > 0, \\ = 0 \ \textit{pour}\ z = 0, \end{cases}$$

l'équation aux dérivées partielles (2) *admet alors une solution et une seule*

$$z(x, y) \equiv 0$$

qui est régulière dans D et s'annule sur la frontière C.

Le théorème 1 montre que l'on a $z(x, y) \leqq 0$ dans $\overline{D}$ si l'on désigne par $z(x, y)$ une solution quelconque de l'équation (2). On n'a qu'à prendre pour $\overline{\omega}(x, y)$ une fonction qui est égale à zéro dans $\overline{D}$. On aura de même $z(x, y) \geqq 0$. On a donc

$$z(x, y) \equiv 0.$$

THÉORÈME 6. *L'équation aux dérivées partielles* (2) *admet au plus une solution régulière dans D et qui prend des valeurs données sur C, si l'une des conditions suivantes est remplie*:

i) $$f(x, y, z, p, q) < f(x, y, \bar{z}, p, q);$$

ii) $$f(x, y, z, p, q) \leqq f(x, y, \bar{z}, p, q) \text{ et}$$

(6) $$-L(\bar{p} - p) \leqq f(x, y, z, \bar{p}, q) - f(x, y, z, p, q) \quad (L\text{: const. positive});$$

iii) $$f(x, y, z, p, q) \leqq f(x, y, \bar{z}, p, q) \text{ et}$$
$$f(x, y, z, \bar{p}, q) - f(x, y, z, p, q) \leqq L(\bar{p} - p);$$

iv) $\overline{D}$ *est contenu dans la bande* $\alpha < x < \beta$; $-\infty < y < +\infty$ *et*

(7) $$|f(x, y, z_1, p_1, q) - f(x, y, z_2, p_2, q)| \leqq \frac{A(x, y)\,|z_1 - z_2|}{(x - \alpha)(\beta - x)} + \frac{B(x, y)\,|p_1 - p_2|}{|2x - \alpha - \beta|}$$

$$0 \leqq A(x, y),\ B(x, y),\ A(x, y) + B(x, y) < 2;$$

où $$(x, y) \in \overline{D} \text{ et } z < \bar{z},\ p < \bar{p}.$$

i) Soient $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$ deux solutions prenant les même valeurs sur C. L'application du lemme entraîne immédiatement i), si l'on met $z(x, y) = z_1(x, y) - z_2(x, y)$.

ii) De plus posons $z = \varphi(x)w$, $\varphi(x)$ désignant une fonction telle que $\varphi(x) > 0$, $\varphi'(x) > 0$ dans $\overline{D}$. L'équation en w devient

$$\Delta w = g(x, y, w, w'_x, w'_y),$$

où

$$g(x, y, w, w'_x, w'_y) = \{f(x, y, \varphi w, \varphi' w + \varphi w'_x, \varphi w'_y) - 2\varphi'(x)w'_x - \varphi''(x)w\}/\varphi(x).$$

Après un calcul facile on voit, en tenant compte de (6),

$$g(x, y, w, w'_x, w'_y) - g(x, y, \bar{w}, w'_x, w'_y) \leqq (L\varphi'(x) + \varphi''(x))(\bar{w} - w)/\varphi(x)$$

pour $w < \bar{w}$. Si donc on peut déterminer la fonction $\varphi(x)$ de manière que l'on ait

$$L\varphi'(x) + \varphi''(x) < 0,$$

la démonstration du cas actuel s'ensuivra immédiatement de i). Or l'inégalité ci-dessus est vérifiée si l'on pose

$$\varphi(x) = A - e^{-\alpha x},$$

α et A désignant des constantes telles que l'on ait

$$L < \alpha \text{ et } A > e^{-\alpha x} \text{ pour } (x, y) \in \bar{D}.$$

ii) est donc établi.

iii) En changeant le signe de x on déduit immédiatement iii).

iv) Si l'on fait le changement de variables $z = \varphi(x)w$, $\varphi(x) = (x - \alpha)(\beta - x)$, on arrive à iv).

Remarque. On peut remplacer (7) par [4])

$$| f(x, y, z_1, p_1, q) - f(x, y, z_2, p_2, q) |$$
$$\leqq \frac{A(x, y) \mid z_1 - z_2 \mid}{(x - \alpha)(\beta - x)} + \frac{B(x,y) \mid p_1 - p_2 \mid}{\mid 2x - \alpha - \beta \mid}$$

$$0 \leqq A(x, y),\ B(x, y),\ A(x, y) + B(x, y) \leqq 2,\ B(x, y) < 2.$$

Posons

$$A(x, y) = \bar{A}(x - \alpha)(\beta - x),\ B(x, y) = \bar{B} \mid 2x - \alpha - \beta \mid,$$

on a facilement le

Corollaire. *Supposons que l'on ait l'inégalité*

$$| f(x, y, z_1, p_1, q) - f(x, y, z_2, p_2, q) | \leqq \bar{A} \mid z_1 - z_2 \mid + \bar{B} \mid p_1 - p_2 \mid,$$

où $\bar{A}$, $\bar{B}$ sont des constantes. Soit X la racine positive de l'équation

$$\bar{A}\xi^2 + 4\bar{B}\xi - 8 = 0,$$

et supposons que $\bar{D}$ est contenu dans la bande $\alpha < x < \beta$, $-\infty < y < +\infty$, $(0 < \beta - \alpha < X)$. Alors l'équation (2) admet au plus une solution régulière dans D et prenant des valeurs données sur C.

4. Continuité et dérivabilité,

D et $\mathscr{D}$ ont ici les mêmes significations qu'au no. précédent. Nous désignerons par Λ un intervalle de la variable λ.

Théorème 7. *Soit $f(x, y, z, p, q, \lambda)$ une fonction continue dans $\mathscr{D} \times \Lambda$ satisfaisant aux conditions:*

i) *$f(x, y, z, p, q, \lambda)$ considérée comme fonction de λ est également continue dans Λ pour $(x, y, z, p, q) \in \mathscr{D}$;*

ii) *on peut faire correspondre à un nombre positif quelconque assez petit* ε *un nombre positif* $\delta(>0)$ *de manière que*

$$\delta \leqq f(x, y, \bar{z}, p, q, \lambda) - f(x, y, z, p, q, \lambda) \tag{8}$$

pour $\varepsilon \leqq \bar{z} - z$, $(x, y) \in \overline{D}$, $\lambda \in \Lambda$.

Si l'équation

$$\Delta z = f(x, y, z, p, q, \lambda) \tag{9}$$

admet pour chaque $\lambda(\in \Lambda)$ *une solution*

$$z = z(x, y, \lambda)$$

qui est régulière dans D et prend des valeurs données (indépendantes de λ*),* $z(x, y, \lambda)$ *est continue dans* $D \times \Lambda$.

D'après le théorème 6 l'équation (9) n'admet qu'une telle solution $z = z(x, y, \lambda)$ pour chaque $\lambda(\in \Lambda)$. D'après i) nous pouvons prendre $\varrho(>0)$ de manière que l'on ait l'inégalité

$$| f(x, y, z, p, q, \lambda_1) - f(x, y, z, p, q, \lambda_2) | < \delta/2$$

pour $(x, y) \in \overline{D}$, $| \lambda_1 - \lambda_2 | < \varrho$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. La différence

$$u(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = z(x, y, \lambda_1) - z(x, y, \lambda_2)$$

est alors une solution régulière de l'équation

$$\Delta u = g(x, y, u, u'_x, u'_y, \lambda_1, \lambda_2) + g_0(x, y, \lambda_1, \lambda_2),$$

où

$$\begin{aligned} g(x, y, u, u'_x, u'_y, \lambda_1, \lambda_2) & \\ = f(x, y, u + z(x, y, \lambda_2), u'_x + z'_x(x, y, \lambda_2), u'_y + z'_y(x, y, \lambda_2), \lambda_1) & \\ - f(x, y, z(x, y, \lambda_2), z'_x(x, y, \lambda_2), z'_y(x, y, \lambda_2)\lambda_1), & \\ g_0(x, y, \lambda_1, \lambda_2) & \\ = f(x, y, z(x, y, \lambda_2), z'_x(x, y, \lambda_2), z'_y(x, y, \lambda_2), \lambda_1) & \\ - f(x, y, z(x, y, \lambda_2), z'_x(x, y, \lambda_2), z'_y(x, y, \lambda_2), \lambda_2). & \end{aligned}$$

On a donc

$$| g_0(x, y, \lambda_1, \lambda_2) | < \delta/2.$$

Par définition, $u(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$ est régulière dans D et s'annule sur C. On a donc

$$0 < g(x, y, u, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2) + g_0(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$$

pour $\varepsilon < u$, d'où

$$u(x, y, \lambda_1, \lambda_2) \leqq \varepsilon \qquad \text{pour } (x, y) \in \overline{D}.$$

De même

$$-\varepsilon \leqq u(x, y, \lambda_1, \lambda_2) \qquad \text{pour } (x, y) \in \overline{D}.$$

Par suite

$$| z(x, y, \lambda_1) - z(x, y, \lambda_2) | \leqq \varepsilon$$

pour $(x, y) \in \overline{D}$, $| \lambda_1 - \lambda_2 | < \varrho$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$.

La famille des fonctions $z(x, y, \lambda)$ étant également continue dans Λ pour $(x, y) \in D$, $z(x, y, \lambda)$ est continue dans le domaine $D \times \Lambda$ [5]).

THÉORÈME 8. *Soit D un domaine borné et régulier relatif au problème de Dirichlet: Supposons que $f(x, y, z, \lambda)$, $f'_z(x, y, z, \lambda)$ et $f'_\lambda(x, y, z, \lambda)$ soient continues dans $(x, y) \in \overline{D}$, $-\infty < z < +\infty$, $\lambda \in \Lambda$, et que l'on y ait*

i) $$| f'_\lambda(x, y, z, \lambda) | \leqq M,$$

ii) $$f'_z(x, y, z, \lambda) \geqq \sigma > 0,$$

où M, σ sont des constantes.

Si l'équation

$$\Delta z = f(x, y, z, \lambda) \tag{10}$$

admet pour chaque $\lambda \in \Lambda$ une solution

$$z = z(x, y, \lambda)$$

qui est régulière dans D et prend des valeurs données (indépendantes de λ) sur C, $z'_\lambda(x, y, \lambda)$ est régulière dans D.

Puisque les conditions i), ii) entraînent les conditions i), ii) du théorème 7, $z = z(x, y, \lambda)$ est continue dans $D \times \Lambda$.

S'il existe la dérivée $z'_\lambda(x, y, \lambda)$ régulière dans D,

$$u(x, y, \lambda) = z'_\lambda(x, y, \lambda)$$

s'annule sur C et satisfait à l'équation

$$\Delta u = f'_z(x, y, z(x, y, \lambda), \lambda)u + f'_\lambda(x, y, z(x, y, \lambda), \lambda). \tag{11}$$

L'équation linéaire (11) admet une seule solution régulière dans D et s'annulant sur C. Désignons-la par

$$u = \psi(x, y, \lambda).$$

D'après le corollaire du théorème 5, on a

$$| \psi(x, y, \lambda) | < MR^2/4,$$

où R est le diamètre de D. Donnons à λ une valeur quelconque dans Λ mais déterminée λ_0. Posons

$$w(x, y, \lambda, \lambda_0) = z(x, y, \lambda) - z(x, y, \lambda_0) - (\lambda - \lambda_0)\psi(x, y, \lambda_0).$$

On a alors

$$w(x, y, \lambda, \lambda_0) = 0 \qquad \text{pour } (x, y) \in C$$

et

$$\Delta w(x, y, \lambda, \lambda_0) = f'_z(x, y, \bar{z}, \bar{\lambda}) w(x, y, \lambda, \lambda_0)$$
$$+ (\lambda - \lambda_0)\{(f'_z(x, y, \bar{z}, \bar{\lambda}) - f'_z(x, y, z_0, \lambda_0))\psi(x, y, \lambda_0)$$
$$+ f'_\lambda(x, y, \bar{z}, \bar{\lambda}) - f'_\lambda(x, y, z_0, \lambda_0)\},$$

où.

$$z_0 = z(x, y, \lambda_0),$$
$$\bar{z} = z(x, y, \lambda_0) + \theta(z(x, y, \lambda) - z(x, y, \lambda_0)),$$
$$\bar{\lambda} = \lambda_0 + \theta(\lambda - \lambda_0) \qquad 0 < \theta < 1.$$

Puisque $|\psi(x, y, \lambda_0)| \leqq MR^2/4$, à un nombre positif quelconque ε on peut faire correspondre δ de manière que

$$|(f'_z(x, y, \bar{z}, \bar{\lambda}) - f'_z(x, y, z_0, \lambda_0))\psi(x, y, \lambda_0)$$
$$+ f'_\lambda(x, y, \bar{z}, \bar{\lambda}) - f'_\lambda(x, y, z_0, \lambda_0)| \leqq \sigma\varepsilon/2$$

pour $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, $\lambda \in \Lambda$. On a donc

$$0 < f'_z(x, y, \bar{z}, \bar{\lambda}) w + (\lambda - \lambda_0)\{(f'_z(x, y, \bar{z}, \bar{\lambda}) - f'_z(x, y, z_0, \lambda_0))$$
$$\times \psi(x, y, \lambda_0) + f'_\lambda(x, y, \bar{z}, \bar{\lambda}) - f'_\lambda(x, y, z_0, \lambda_0)\}$$

pour $\varepsilon|\lambda - \lambda_0| < w$. D'après le théorème 1, nous obtenons l'inégalité

$$w(x, y, \lambda, \lambda_0) \leqq \varepsilon|\lambda - \lambda_0| \qquad (x, y) \in \overline{D}.$$

De même

$$-\varepsilon|\lambda - \lambda_0| \leqq w(x, y, \lambda, \lambda_0).$$

On a donc

$$z'_z(x, y, \lambda_0) = \psi(x, y, \lambda_0).$$

5. Théorèmes d'existence I.

Désignons par D un domaine appartenant à la classe A_h [6]) et par C sa frontière. Soit $f(x, y, z, p, q)$ une fonction bornée et continue dans $x(, y) \in \overline{D}$, $-\infty < z, p, q < +\infty$.

Cherchons dans quelles conditions l'équation aux dérivées partielles (2) admet une solution régulière dans D et prend des valeurs continues données sur C.

Nous supposons que les valeurs données sont nulles. Sinon, il suffit de considérer l'équation en $u = z - h(x, y)$, $h(x, y)$ désignant la fonction harmonique prenant les mêmes valeurs sur C.

Soit $G(x, y; \xi, \eta)$ la fonction de Green relative au domaine D. La solution

$$z = z(x, y)$$

satisfait alors à l'équation intégro-différentielle

$$(12) \quad z(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_D G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, z(\xi, \eta), z'_x(\xi, \eta), z'_y(\xi, \eta))\, d\xi d\eta,$$

et réciproquement.

Nous nous proposons donc le problème suivant: *Cherchons dans quelles conditions l'équation intégro-différentielle* (12) *admet une solution régulière dans D et s'annulant sur C.*

Avant d'aller plus loin établissons un lemme.

Lemme. *A $\varepsilon(>0)$ donné à l'avance, on peut faire correspondre $\delta(>0)$ de manière que*

$$\iint_D \left| \frac{\xi - x_1}{r_1^2} - \frac{\xi - x_2}{r_2^2} \right| d\xi d\eta < \varepsilon, \tag{13}$$

$$r_j = \sqrt{(\xi - x_j) + (\eta - y_j)} \qquad (j = 1, 2),$$

où (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux points arbitraires de D tels que $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$.

Soit γ un cercle de centre (x_1, y_1) et de rayon $\varrho(>\delta)$. On a alors

$$\iint_\gamma \left| \frac{\xi - x_1}{r_1^2} - \frac{\xi - x_2}{r_2^2} \right| d\xi d\eta \leqq 6\pi\varrho,$$

D'autre part on a

$$|(\xi - x_1)r_2^2 - (\xi - x_2)r_1^2| = |(\xi - x_1)(r_2^2 - r_1^2) - (x_1 - x_2)r^* r_1^2| < 3\delta R^2$$

et par suite

$$\iint_{D\text{-}\gamma} \left| \frac{\xi - x_1}{r_1^2} - \frac{\xi - x_2}{r_2^2} \right| d\xi d\eta \leqq 3\delta R^4/\varrho^4,$$

R désignant le diamètre de D. On peut déterminer ϱ et δ de manière que

$$6\pi\varrho + 3\delta R^4/\varrho^4 < \varepsilon.$$

Le lemme est donc établi.

D'après l'hypothèse relative au domaine D on a les inégalités bien connues

$$| G(x, y; \xi, \eta) | < K | \log r |,$$

$$| G'_x(x, y; \xi, \eta) | < K/r, \quad | G'_y(x, y; \xi, \eta) | < K/r,$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

où K est une constante ne dépendante que du domaine D.

Soit α une constante telle que $1 < \alpha < 2$. Les fonctions

$$\psi_0(x, y) = \left\{ \iint_D | \log r |^\alpha d\xi d\eta \right\}^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$\psi_1(x, y) = \left\{ \iint_D \frac{1}{r^\alpha} d\xi\, d\eta \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

sont continues dans $\overline{D}$.

Soit $f(x, y, z, p, q)$ une fonction continue dans $\mathscr{D}(=\overline{D}\times\Delta)$, Δ étant une région dans l'espace des variables z, p, q.

Supposons que $\mathscr{D}$ contient le domaine fermé $\mathscr{D}_0$: $(x, y)\in\overline{D}$, $|z|\leqq\Gamma\psi_0(x, y)$, $|p|$, $|q|\leqq\Gamma\psi_1(x, y)$ (Γ: constante). $\mathscr{D}_0$ étant borné

$$|f(x, y, z, p, q)|\leqq M$$

dans $\mathscr{D}_0$.

Désignons par $\mathscr{F}$ la famille des fonctions $\varphi(x, y)$ régulières dans D et satisfaisant aux inégalités

$$\text{(14)}\qquad \begin{aligned} &|\varphi(x, y)|\leqq\Gamma\psi_0(x, y),\\ &|\varphi'_x(x, y)|,\quad |\varphi'_y(x, y)|\leqq\Gamma\psi_1(x, y). \end{aligned}$$

Il est clair que la fonction identiquement nulle appartient à $\mathscr{F}$.

Si $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)\in\mathscr{F}$, $\lambda+\mu=1$, $\lambda, \mu\geqq 0$, on a aussi $\lambda\varphi_1(x, y)+\mu\varphi_2(x, y)\in\mathscr{F}$.

Faisons correspondre à $\varphi(x, y)\in\mathscr{F}$ la fonction $\bar{\varphi}(x, y)$ définie par l'égalité

$$\bar{\varphi}(x, y)=-\frac{1}{2\pi}\iint_D G(x, y;\xi,\eta)f(\xi,\eta,\varphi(\xi,\eta),\varphi'_x(\xi,\eta),\varphi'_y(\xi,\eta))d\xi d\eta.$$

On a alors

$$\bar{\varphi}'_x(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\iint_D G'_x(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta,\varphi(\xi,\eta),\varphi'_x(\xi,\eta),\varphi'_y(\xi,\eta))d\xi d\eta,$$

$$\bar{\varphi}'_y(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\iint_D G'_y(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta,\varphi(\xi,\eta),\varphi'_x(\xi,\eta),\varphi'_y(\xi,\eta))d\xi d\eta,$$

et par l'inégalité de Hölder on a

$$|\bar{\varphi}(x, y)|\leqq\frac{MKD^{\frac{1}{\beta}}}{2\pi}\,\psi_0(x, y),$$

$$|\bar{\varphi}'_x(x, y)|,\ |\bar{\varphi}'_y(x, y)|\leqq\frac{MKD^{\frac{1}{\beta}}}{2\pi}\,\psi_1(x, y),$$

où β est la constante telle que $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$ et $D=\displaystyle\iint_D d\xi d\eta$.

Désignons par $\overline{\mathscr{F}}$ la famille des fonctions transformées $\bar{\varphi}(x, y)$.

Si l'on a l'inégalité

$$\frac{MKD^{\frac{1}{\beta}}}{2\pi}\leqq\Gamma,$$

$\varphi(x, y)$ appartient à $\mathscr{F}$, c'est-à-dire $\overline{\mathscr{F}}\subseteqq\mathscr{F}$.

Si une suite $\{\varphi_n(x, y)\}$ extraite de $\mathscr{F}$ est convergente uniformément dans D ainsi que celles de leurs dérivées partielles $\{\varphi'_{nx}(x, y)\}$, $\{\varphi'_{ny}(x, y)\}$, la fonction limite $\varphi(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x, y)$ admet des dérivées partielles qui coïncident avec $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi'_{nx}(x, y)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi'_{ny}(x, y)$ [7]). On voit sans peine que la suite des fonctions transformées $\{\bar{\varphi}_n(x, y)\}$ et celles de leurs dérivées convergent respectivement vers la fonction transformée $\bar{\varphi}(x, y)$ de $\varphi(x, y)$ et ses dérivées partielles $\bar{\varphi}'_x(x, y)$, $\bar{\varphi}'_y(x, y)$.

Nous allons montrer que la famille des fonctions transformées et celles de leurs dérivées partielles sont normales dans D. On verra aisément que $|\bar{\varphi}(x, y)|$, $|\bar{\varphi}'_x(x, y)|$, $|\bar{\varphi}'_y(x, y)| \leqq GMKD^{\frac{1}{\beta}}/2\pi$, G désignant $\max\limits_{(xy)\in\bar{D}} \{\psi_0(x, y), \psi_1(x, y)\}$. La famille des fonctions $\{\bar{\varphi}(x, y)\}$ est donc également continue.

Soit $(x_0, y_0) \in D$. D'après le lemme on peut prendre $\delta(> 0)$ de manière que le cercle fermé γ: $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leqq \delta$ soit contenu dans D et que l'on ait

$$\frac{M}{2\pi} \iint_D \left| \frac{\xi - x}{r^2} - \frac{\xi - x_0}{r_0^2} \right| d\xi\, d\eta < \varepsilon,$$

$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$, $r_0 = \sqrt{(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2}$, $\varepsilon\ (> 0)$ étant un nombre donné à l'avance. On peut prendre un domaine fermé D_0 de manière que

$$\gamma \subset D_0 \subset D,$$

$$\frac{M}{2\pi} \iint_{D-D_0} \left| g'_x(x, y; \xi, \eta) \right| d\xi d\eta < \varepsilon/4 \qquad (x, y) \in \gamma,$$

où $G(x, y; \xi, \eta) = \log \dfrac{1}{r} - g(x, y; \xi, \eta)$. Puisque $g'_x(x, y; \xi, \eta)$ est continue en (x, y), $(\xi, \eta) \in D$, on peut prendre δ_0 tel que

$$| g'_x(x, y; \xi, \eta) - g'_x(x_0, y_0; \xi, \eta) | < \varepsilon\pi/MD$$

pour $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leqq \delta_0$, $(\xi, \eta) \in D_0$. On a donc pour $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \leqq \delta_0$

$$\frac{M}{2\pi} \iint_D \left| G'_x(x_1, y_1; \xi, \eta) - G'_x(x_0, y_0; \xi, \eta) \right| d\xi\, d\eta$$

$$\leqq \frac{M}{2\pi} \iint_D \left| \frac{\xi - x_1}{r_1^2} - \frac{\xi - x_0}{r_0^2} \right| d\xi\, d\eta$$

$$+\frac{M}{2\pi}\iint_{D-D_0}\left\{\left|g'_x(x_1, y_1; \xi, \eta)\right| + \left|g'_x(x_0, y_0; \xi, \eta)\right|\right\} d\xi d\eta$$

$$+\frac{M}{2\pi}\iint_{D_0}\left| g'_x(x_1, y_1; \xi, \eta) - g'_x(x_0, y_0; \xi, \eta)\right| d\xi d\eta.$$

Les termes au second membre sont inférieurs à ε, $\varepsilon/2$, $\varepsilon/2$ respectivement. Nous avons donc l'inégalité

$$|\bar{\varphi}'_x(x_1, y_1) - \bar{\varphi}'_x(x_0, y_0)| < 2\varepsilon$$

pour $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \leqq \delta_0$. Par suite la famille des fonctions $\bar{\varphi}'_x(x, y)$ est normale dans D.

De même la famille $\{\bar{\varphi}'_y(x, y)\}$ est normale dans D.

D'après le théorème d'existence du point invariant dans l'espace fonctionnel [8]) l'équation (12) admet une solution $z = \varphi(x, y)$.

Il nous reste à montrer que cette fonction $\varphi(x, y)$ tend vers 0, lorsque le point $(x, y) \in D$ tend vers un point de la frontière C. Or, on a

$$\left|\varphi(x, y)\right| \leqq \frac{M}{2\pi}\iint_D G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Le second membre de cette inégalité est la solution de

$$\Delta z + M = 0$$

qui est régulière dans D et s'annule sur C. La proposition est donc démontrée.

Nous donnons ici une définition pour simplifier l'exposition.

DÉFINITION. *Soit $f(x, y, z, p, q)$ une fonction continue dans $\mathscr{D}$ $(= \bar{D} \times \Delta)$, $\mathscr{D}_0$ étant le domaine défini ci-dessus.*

Nous dirons que $f(x, y, z, p, q)$ satisfait à la condition (E) dans $\mathscr{D}$, si l'on a $\mathscr{D}_0 \subseteqq \mathscr{D}$ et

$$\frac{MKD^{\frac{1}{\beta}}}{2\pi} \leqq \Gamma,$$

la signification de M, K, D étant la même que plus haut.

Alors le théorème fondamental que nous avons établi s'énonce comme il suit.

THÉORÈME 9. *Si $f(x, y, z, p, q)$ est continue et satisfait à la condition (E) dans $\mathscr{D}$, l'équation aux dérivées partielles (2) admet au moins une solution $z = z(x, y)$ régulière dans D et s'annulant sur C pour laquelle on a*

$$|z(x, y)| \leqq \Gamma\psi_0(x, y),$$

$$|z'_x(x, y)|, \qquad |z'_y(x, y)| \leqq \Gamma\psi_1(x, y) \qquad (x, y) \in D.$$

6. Théorèmes d'existence II.

Soient $\underline{\omega}(x, y)$, $\overline{\omega}(x, y)$ des fonctions continues dans $\overline{D}$ et régulières dans D. Supposons de plus les inégalités

$$\underline{\omega}(x, y) \leqq 0 \leqq \overline{\omega}(x, y) \text{ pour } (x, y) \in C,$$
$$\underline{\omega}(x, y) < \overline{\omega}(x, y) \text{ pour } (x, y) \in D.$$

Soit $\mathscr{D}$ le domaine défini par

$$(x, y) \in \overline{D}, \quad \underline{\omega}(x, y) \leqq z \leqq \overline{\omega}(x, y), \quad -\infty < p, q < +\infty.$$

Théorème 10. *Soit $f(x, y, z, p, q)$ une fonction continue et satisfaisant à la condition (E) dans $\mathscr{D}$.*

Si l'on a les inégalités

$$(15) \qquad \begin{aligned} \Delta\underline{\omega}(x, y) &> f(x, y, \underline{\omega}(x, y), \underline{\omega}'(x, y), \underline{\omega}'_y(x, y)), \\ \Delta\overline{\omega}(x, y) &< f(x, y, \overline{\omega}(x, y), \overline{\omega}'_x(x, y), \overline{\omega}'_y(x, y)) \end{aligned}$$

dans D, l'équation aux dérivées partielles (2) *admet au moins une solution $z = z(x, y)$ régulière dans D et s'annulant sur C, pour laquelle on a les inégalités*

$$(16) \qquad \underline{\omega}(x, y) \leqq z(x, y) \leqq \overline{\omega}(x, y)$$

dans $\overline{D}$.

Posons

$$(17) \qquad F(x, y, z, p, q) = f(x, y, \bar{z}, p, q),$$

où

$$\bar{z} = \begin{cases} \underline{\omega}(x, y) & \text{pour } z < \underline{\omega}(x, y), \\ z & \text{pour } \underline{\omega}(x, y) \leqq z \leqq \overline{\omega}(x, y), \\ \overline{\omega}(x, y) & \text{pour } \overline{\omega}(x, y) < z. \end{cases}$$

On a alors

$$\Delta\underline{\omega}(x, y) > F(x, y, z, \underline{\omega}'_x(x, y), \underline{\omega}'_y(x, y)) \text{ pour } z < \underline{\omega}(x, y),$$
$$\Delta\overline{\omega}(x, y) < F(x, y, z, \overline{\omega}'_x(x, y), \overline{\omega}'_y(x, y)) \text{ pour } z > \overline{\omega}(x, y),$$

et la fonction $F(x, y, z, p, q)$ satisfait à la condition (E) dans $(x, y) \in \overline{D}$, $-\infty < z, p, q < +\infty$. Le théorème 9 montre que l'équation

$$\Delta z = F(x, y, z, p, q)$$

admet au moins une solution $z = z(x, y)$ régulière dans D et s'annulant sur C. Le théorème 1 montre ensuite que l'on a les inégalités (16) dans D. On en conclut que $z = z(x, y)$ est la solution de l'équation (2).

On peut vérifier sans peine que *si $f(x, y, z, p, q)$ est continue et bornée dans $\mathscr{D}$, la fonction $F(x, y, z, p, q)$ définie par* (17) *satisfait à la condition (E)*. Donc

COROLLAIRE. *Soit $f(x, y, z, p, q)$ une fonction continue et bornée dans $\mathcal{D}$. Si les inégalités* (15) *subsistent dans D, l'equation* (2) *admet au moins une solution $z = z(x, y)$ régulière dans D, s'annulant sur C et satisfaisant aux inégalités* (16) *dans D.*

THÉORÈME 11. *Soit $f(x, y, z, p, q)$ une fonction continue et satisfaisant à la condition (E) dans $\mathcal{D}$. Si l'on a les inégalités*

$$\Delta\overline{\omega}(x, y) < 0 < \Delta\underline{\omega}(x, y),$$

$$\Delta\underline{\omega}(x, y) \geqq f(x, y, \underline{\omega}(x, y), \underline{\omega}'_x(x, y), \underline{\omega}'_y(x, y)),$$

$$\Delta\omega(x, y) \leqq f(x, y, \overline{\omega}(x, y), \overline{\omega}'_x(x, y), \overline{\omega}'_y(x, y))$$

dans D, l'équation (2) *admet une solution $z = z(x, y)$ régulière dans D, s'annulant sur C et satisfaisant aux inégalités* (16) *dans D.*

Par hypothèse on a les inégalités

$$\Delta\underline{\omega}(x, y) > \lambda\Delta\underline{\omega}(x, y) \geqq \lambda f(x, y, \underline{\omega}(x, y), \underline{\omega}'_x(x, y), \underline{\omega}'_y(x, y)),$$

$$\Delta\overline{\omega}(x, y) < \lambda\Delta\overline{\omega}(x, y) \leqq \lambda f(x, y, \overline{\omega}(x, y), \overline{\omega}'_x(x, y), \overline{\omega}'_y(x, y))$$

pour $0 < \lambda < 1$. D'après le théorème 10 l'équation

$$\Delta z = \lambda f(x, y, z, p, q) \qquad (0 < \lambda < 1),$$

admet au moins une solution $z = z(x, y, \lambda)$ régulière dans D, s'annulant sur C et satisfaisant dans $\overline{D}$ aux inégalités

$$\underline{\omega}(x, y) \leqq z(x, y, \lambda) \leqq \overline{\omega}(x, y) \qquad (0 < \lambda < 1).$$

Prenons une suite $\{\lambda_n\}$ telle que $\lambda_n \uparrow 1$ $(0 < \lambda_n)$, et posons $z_n(x, y) = z(x, y, \lambda_n)$. On peut supposer que

$$z_n(x, y) \to z(x, y),$$

$$z'_{nx}(x, y) \to z'_x(x, y), \qquad z'_{ny}(x, y) \to z'_y(x, y)$$

uniformément dans D, en prenant, s'il est nécessaire, une suite partielle. $z(x, y)$ est la solution dont nous voulions démontrer l'existence.

Il est clair que nous obtenons un corollaire du théorème 11 analogue à celui du théorème 10.

THÉORÈME 12. *Soient $f(x, y, z, p, q)$ continue dans $(x, y) \in \overline{D}$, $-\infty < z, p, q < +\infty$ et $f(x, y, 0, p, q)$ bornée dans $(x, y) \in \overline{D}$, $-\infty < p, q < +\infty$. Si l'inégalité*

$$(18) \qquad 0 \leqq f(x, y, \bar{z}, p, q) - f(x, y, z, p, q) \leqq A(\bar{z} - z)^\lambda$$

subsistent pour $(x, y) \in \overline{D}$, $z < \bar{z}$, où A, λ (< 1) sont des constantes positives, l'équation (2) *admet une solution régulière dans D et s'annulant sur C.*

(18) entraîne

(19) $$| f(x, y, z, p, q) | \leqq M + A \, | z |^{\lambda}$$

où $| f(x, y, 0, p, q) | \leqq M$. On peut déterminer les constantes positives α, H de manière que l'on ait $\frac{1}{2}\alpha^2 H \geqq M + AH^{\lambda}$ et $\cos \alpha(x + y) \geqq \frac{1}{2}$ pour $(x, y) \in \overline{D}$.

Posons

$$\overline{\omega}(x, y) = -\underline{\omega}(x, y) = H \cos \alpha(x + y),$$

on a alors dans $\overline{D}$

$$\underline{\omega}(x, y) < \overline{\omega}(x, y), \quad \Delta\overline{\omega}(x,y) < 0 < \Delta\underline{\omega}(x, y),$$

$$\Delta\underline{\omega}(x, y) \geqq f(x, y, \underline{\omega}(x, y), \underline{\omega}'_x(x, y), \underline{\omega}'_y(x, y)),$$

$$\Delta\overline{\omega}(x, y) \leqq f(x, y, \overline{\omega}(x, y), \overline{\omega}'_x(x, y), \overline{\omega}'_y(x, y)).$$

(19) montre que $f(x, y, z, p, q)$ est bornée dans $(x, y) \in \overline{D}$, $\underline{\omega}(x, y) \leqq z \leqq \overline{\omega}(x, y)$, $-\infty < p, q < +\infty$. D'après le corollaire du théorème 10 l'équation (2) admet au moins une solution satisfaisant aux conditions données.

7. La plus grande solution régulière.

Nous donnons seulement un théorème correspondant au théorème 12. Nous pourrons obtenir aisément d'autres théorèmes correspondants aux théorèmes 10, 11, lorsque $f(x, y, z, p, q)$ est croissante par rapport à z.

THÉORÈME 13. *Dans les mêmes hypothèses qu'au théorème* 12, *l'équation aux dérivées partielles* (2) *admet la plus grande et la plus petite solutions régulières dans D et s'annulant sur C, lorsque $f(x, y, z, p, q)$ est croissante par rapport à z.*

Soit $\{\varepsilon_n\}$ la suite de nombres tels que $\varepsilon_n \downarrow 0$. D'après le théorème 12 l'équation

$$\Delta z = f(x, y, z, p, q) - \varepsilon_n$$

admet au moins une solution régulière dans D et s'annulant sur C. Désignons-la par

$$z = z_n(x, y)$$

et par

$$z = z(x, y)$$

une solution quelconque de l'équation (2) qui est régulière dans D et s'annule sur C. On voit d'après le théorème 3 que l'on a dans D

(20) $$z_n(x, y) \geqq z(x, y)$$

et

$$z_n(x, y) \geqq z_{n+1}(x, y).$$

Les familles des dérivées partielles $\{z'_{nx}(x, y)\}$, $\{z'_{ny}(x, y)\}$ sont normales dans D. On peut donc supposer que

$$z_n(x, y) \to \bar{z}(x, y),$$
$$z'_{nx}(x, y) \to \bar{z}'_x(x, y), \quad z'_{ny}(x, y) \to \bar{z}'_y(x, y)$$

uniformément dans D. $z = z(x, y)$ est la solution de l'équation (2). Les inégalités (20) entraînent l'inégalité

$$\bar{z}(x, y) \geqq z(x, y) \qquad (x, y) \in \overline{D}.$$

De même on peut démontrer l'existence de la plus petite solution.

Exemple 1). Soit D le domaine

$$0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi,$$

C est alors formée des quatre segments:

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad y = 0; \qquad 0 \leqq x \leqq \pi, \quad y = \pi;$$
$$x = 0, \quad 0 \leqq y \leqq \pi; \qquad x = \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \pi.$$

Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta z = -2z. \tag{21}$$

Cette équation admet la solution

$$z = K \sin x \sin y \qquad (K\colon \text{const.}),$$

qui est régulière dans D et s'annule sur C. L'équation (21) n'admet pas donc la plus grande et la plus petite solutions qui sont régulières dans D et s'annulent sur C.

Remarquons que dans ce cas $f'_z = -2 < 0$.

Exemple 2). Soit D l'intérieur de la courbe C: $x^4 + y^4 - 1=0$.

Posons

$$f(p, q) = 3\sqrt[3]{4}\left\{\lambda(p \mid -4, 4)^{\frac{2}{3}} + \lambda(q \mid -4, 4)^{\frac{2}{3}}\right\},$$

où

$$\lambda(t, \mid a, b) = \begin{cases} a & t < a, \\ t & a \leqq t \leqq b, \\ b & b < t, \end{cases}$$

$f(p, q)$ est bornée et continue dans $-\infty < p, q < +\infty$.

Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta z = f(p, q). \tag{22}$$

D'après le théorème 13, l'équation (22) admet la plus grande et la plus petite solutions qui sont régulières dans D et s'annulent sur C. Ce sont

$$z = 0, \qquad z = x^4 + y^4 - 1.$$

Montrons par exemple que $z = 0$ est la plus grande solution. Posons

$$\bar{\omega}(x, y) = \varepsilon \cos \alpha x,$$

où α est un nombre positif tel que

$$\cos \alpha x \geqq \delta > 0 \quad \text{pour} \quad (x, y) \in \bar{D},$$

et ε nombre positif arbitraire. On a alors

$$\Delta\bar{\omega}(x, y) = -\varepsilon\alpha^2 \cos \alpha x \leqq -\varepsilon\alpha^2\delta < 0,$$

$$f(\bar{\omega}'_x(x, y), \bar{\omega}'_y(x, y)) \geqq 0.$$

On a donc l'inégalité

$$\Delta\bar{\omega}(x, y) < f(\bar{\omega}'_x(x, y), \bar{\omega}'_y(x, y)) \qquad (x, y) \in D,$$

et

$$z(x, y) = 0 < \varepsilon\delta \leqq \bar{\omega}(x, y) \qquad (x, y) \in C,$$

où $z = z(x, y)$ est une solution quelconque de l'équation (22) qui est régulière dans D et s'annule sur C. D'après le théorème 1 on a dans $\bar{D}$

$$z(x, y) \leqq \varepsilon \cos \alpha x.$$

ε (> 0) étant arbitraire, on a

$$z(x, y) \leqq 0.$$

On en conclut que $z = 0$ est la plus grande solution de l'équation (22) régulière dans D et s'annulant sur C.

8. Théorème de Harnack.

Nous allons étendre le théorème de Harnack relatif aux fonctions harmoniques au cas des solutions régulières de l'équation aux dérivées partielles (2).

Soit D un domaine borné dans le plan des variables x, y et C sa frontière.

THÉORÈME 14. *Soit $f(x, y, z, p, q)$ une fonction définie pour $(x, y) \in D$, $-\infty < z, p, q < +\infty$, et satisfaisant à l'inégalité*

$$f(x, y, z, p, q) < f(x, y, \bar{z}, p, q)$$

pour $(x, y) \in D$, $z < \bar{z}$. Soit $\{z_n(x, y)\}$ une suite de solutions régulières dans D de l'équation (2).

Si la suite $\{z_n(x, y)\}$ converge uniformément sur C, elle converge aussi uniformément dans D.

Posons

$$u(x, y) = z_{n+p}(x, y) - z_n(x, y).$$

$u(x, y)$ est une solution régulière dans D de l'équation

$$\Delta u = g(x, y, u, u'_x, u'_y), \tag{23}$$

où

$$g(x, y, u, u'_x, u'_y) = f(x, y, u+z_n(x, y), u'_x+z'_{nx}(x, y), u'_y+z'_{ny}(x, y))$$
$$-f(x, y, z_n(x, y), z'_{nx}(x, y), z'_{ny}(x, y)).$$

Par hypothèse on a

$$g(x, y, u, 0, 0) \begin{cases} < 0 \text{ pour } u < 0, \\ > 0 \text{ pour } u > 0, \end{cases}$$

et à un nombre ε (> 0) donné à l'avance on peut faire correspondre N de manière que

$$-\varepsilon \leqq z_{n+p}(x, y) - z_n(x, y) \leqq \varepsilon, \quad n \geqq N, \quad (x, y) \in C.$$

En appliquant le théorème 1 à l'équation (23), ou à l'équation en $-u$ on obtient les inégalités

$$|z_{n+p}\ (x, y) - z_n(x, y)| \leqq \varepsilon \quad \mathrm{n} \geqq N, \quad (x, y) \in D,$$

ce qui montre la convergence uniforme de la suite $\{z_n(x, y)\}$ dans D.

A l'aide de la transformation utilisée dans la démonstration du théorème 6, nous pourrons déduire aisément le corollaire suivant.

COROLLAIRE. *Soit $f(x, y, z, p, q)$ une fonction définie pour $(x, y) \in D$, $-\infty < z, p, q < +\infty$, et satisfaisant aux inégalités*

$$f(x, y, z, p, q) \leqq f(x, y, \bar{z}, p, q)$$

pour $(x, y) \in D$, $z < \bar{z}$, et

$$-L(\bar{p}-p) \leqq f(x, y, z, \bar{p}, q) - f(x, y, z, p, q) \qquad (L;\ \text{const positive})$$

ou

$$f(x, y, z, \bar{p}, q) - f(x, y, z, p, q) \leqq L(\bar{p}-p)$$

pour $(x, y) \in D$, $p < \bar{p}$. Soit $\{z_n(x, y)\}$ une suite de solutions régulières dans D de l'équation (2).

Si la suite $\{z_n(x, y)\}$ converge uniformément sur C, elle converge aussi uniformément dans D.

THÉORÈME 15. *Soient D un domaine appartenant à la classe A_h dans le plan des variables x, y et $f(x, y, z)$ une fonction continue pour $(x, y) \in \overline{D}$, $-\infty < z < +\infty$, et satisfaisant à l'inégalité*

$$0 \leqq f(x, y, \bar{z}) - f(x, y, z)$$

pour $(x, y) \in \overline{D}$, $z < \bar{z}$. Soit $\{z_n(x, y)\}$ une suite de solutions régulières dans D de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta z = f(x, y, z). \tag{24}$$

Si la suite $\{z_n(x, y)\}$ converge uniformément sur C, elle converge *aussi uniformément dans D et sa fonction limite $z(x, y)$ est la solution régulière dans D.*

D'après le corollaire du théorème 14 on verra aisément que la suite $\{z_n(x, y)\}$ converge vers $z(x, y)$ uniformément dans $\overline{D}$. Nous allons donc montrer que $z = z(x, y)$ est la solution régulière dans D de l'équation (24).

Soient $z = h(x, y)$ et $z = h_n(x, y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ les fonctions harmoniques dans D et prenant les mêmes valeurs $z(x, y)$ et $z_n(x, y)$ sur C. D'après le théorème bien connu de Harnack la suite $\{h_n(x, y)\}$ converge vers $h(x, y)$ uniformément dans D. Posons $u(x, y) = z(x, y) - h(x, y)$, $u_n(x, y) = z_n(x, y) - h_n(x, y)$. Alors $\{u_n(x, y)\}$ converge vers $u(x, y)$ uniformément dans D.

Puisque

$$u_n(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_D G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, u_n(\xi, \eta) + h_n(\xi, \eta))\, d\xi\, d\eta,$$

on a pour $n \to \infty$

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_D G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, u(\xi, \eta) + h(\xi, \eta))\, d\xi\, d\eta,$$

ce qui montre que la fonction limite $z\,(x, y)$ est une solution de l'équation (24).

Ajoutons une remarque: *On peut aisément étendre les résultats obtenus dans cette note à l'équation différentielle ordinaire*

$$y'' = f(x, y, y').$$

16 novembre 1951,
l'université de Kōbe.

(Oblatum 26-1-53).

[1]) T. Satō, Sur l'équation aux dérivées partielles hyperbolique $s = f(x, y, z, p, q)$, Mem. Fac. Sc. Kyūsyū Imp. Univ., Ser. A, 2 (1943), 107—123.

——, Sur l'équation aux dérivées partielles du type hyperbolique, Rep. Fac. Sc. Kyūsyū Imp. Univ., 1 (1945), 203—249, (en japonais).

[2]) Voir le théorème 6.

[3]) Voir les exemples dans no. 7.

[4]) Voir T. Satō kaj S. Ōhasi, pri la unikeco de la regula sovo de laŭparta diferenciala ekvacio $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$, Funkcialaj Ekvacioj, E (1947), 29—32.

[5]) Lemme p. 225 dans [1]).

[6]) Ce qui est la nomensclature de L. Lichtentein. L. Lichtenstein; Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, II C 3 (1918).

[7]) T. Satō, Pri la limo de funkcisekvaĵo, Mem. Fac. Sc. Kyūsyū Imp. Univ., Ser. A, 4 (1949), 23—27.

[8]) T. Satō, Pri fikspunta teoremo, Mem. Fac. Sc. Kyūsyū Univ. Ser. A, 4 (1949), 33—44.

——, Fikspunkta teoremo en funkciala spaco, ibid., 5 (1950), 65—67.