A. KIRCHHOFF

Beiträge zur topologischen linearen Algebra

Compositio Mathematica, tome 11 (1953), p. 1-36

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1953__11__1_0>

Beiträge zur topologischen linearen Algebra

von

A. Kirchhoff

Zürich

Einleitung.

Ist die Geometrie eines Raumes R durch die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$ von R definiert, so sind diejenigen Eigenschaften einer Selbstabbildung A von R als geometrische zu betrachten, die mit A auch allen konjugierten Abbildungen TAT^{-1}, $T \in \mathfrak{A}$, zukommen. Ist R ein n-dimensionaler Vektorraum, so ist $\mathfrak{A}$ die Gruppe der regulären linearen Selbstabbildungen. Ist R ein orientierter Vektorraum über dem Körper K, so besteht $\mathfrak{A}$ aus den linearen Selbstabbildungen, die die Orientierung erhalten. Von orientierungserhaltenden Abbildungen kann gesprochen werden, wenn in der multiplikativen Gruppe des Körpers K eine Untergruppe P vom Index 2 ausgezeichnet ist; orientierungserhaltende lineare Selbstabbildungen sind dann solche, deren Determinanten Elemente von P sind. Ist K der Körper der reellen Zahlen, so bilden die positiven reellen Zahlen eine solche Untergruppe P. Die linearen Selbstabbildungen des orientierten Vektorraumes V^n über dem Körper der reellen Zahlen bilden den Gegenstand des ersten Teiles der vorliegenden Arbeit. Die ersten Definitionen und Sätze sind allerdings von dieser speziellen Wahl des Grundkörpers unabhängig, und die Beweise sind so geführt, daß sie sich auf den allgemeinen Fall übertragen lassen.

Da der Vektorraum V^n aus dem Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen durch Einführung des Strukturelementes der Orientierung hervorgeht, wird es sich darum handeln, die dadurch neu hinzukommenden geometrischen Eigenschaften von Abbildungen zu untersuchen (dabei bedeute „Abbildung" nun stets „lineare Selbstabbildung"). Zwei Abbildungen A, B nennen wir ähnlich, wenn es eine reguläre Abbildung T gibt, sodaß $A = TBT^{-1}$, positiv ähnlich, wenn es einen Automorphismus (d.h. eine orientierungserhaltende Abbildung) T gibt, sodaß $A = TBT^{-1}$. In der Geometrie des orientierten Vektorraumes sind die Abbildungen auf Grund der positiven Ähnlichkeit zu klassifizieren; jede Klasse positiv ähnlicher Abbildungen ist ganz in einer Klasse ähnlicher

Abbildungen enthalten, und zwar bildet sie entweder für sich allein oder zusammen mit einer weiteren Klasse eine volle Ähnlichkeitsklasse. Positive Ähnlichkeitsklassen der ersten Art (und ihre Abbildungen) nennen wir zweiseitig, solche der zweiten Art (und ihre Abbildungen) einseitig. Einseitige Klassen treten paarweise auf, und die Abbildungen der Klassen eines Paares sind nur als Abbildungen eines orientierten Vektorraumes geometrisch unterscheidbar. Ist A einseitig, T eine Abbildung, die die Orientierung umkehrt, so sind A und TAT^{-1} nicht positiv ähnlich. Insbesondere ist eine einseitige Abbildung mit keiner orientierungsumkehrenden Abbildung vertauschbar (jede orientierungsumkehrende Abbildung also zweiseitig); umgekehrt ist jede zweiseitige Abbildung mit einer gewissen orientierungsumkehrenden Abbildung vertauschbar.

Wir wollen nun zeigen, daß es auch einseitige Klassen gibt. Dazu betrachten wir Links- und Rechtsdrehung der Ebene, d.h. A: $e_1 \to e_2$, $e_2 \to e_1$; B: $e_1 \to - e_2$, $e_2 \to e_1$. A und B sind ähnlich aber nicht positiv ähnlich, ihre Klassen daher einseitig. Ist nämlich T die Abbildung, die e_1 und e_2 vertauscht, so ist $A = TBT^{-1}$. Daß A und B nicht positiv ähnlich sind, ergibt sich folgendermaßen: Ist $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, $x \neq 0$, so ist die Determinante der Vektoren x, Ax gleich $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$, also positiv, dasselbe gilt für die Vektoren x, $TAT^{-1}x$, falls T die Orientierung erhält. Die Determinante der Vektoren x, Bx dagegen ist gleich $-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$, also negativ.

Bei ungerader Dimensionszahl des Raumes ist jede Abbildung zweiseitig; mit $A = TBT^{-1}$ ist nämlich auch $A = (-T)B(-T)^{-1}$ und es erhält genau eine der beiden Abbildungen T, $-T$ die Orientierung. Etwas verallgemeinert ergibt diese Schlußweise, daß eine Abbildung, die komplementäre Fixräume ungerader Dimension besitzt, zweiseitig ist. Diese letzte Bedingung ist auch notwendig für Zweiseitigkeit: Eine Abbildung ist genau dann einseitig, wenn sie keine komplementären Fixräume ungerader Dimension besitzt. (Für die Gültigkeit dieses Satzes ist wesentlich, daß der zugrunde gelegte Körper reell abgeschlossen ist.)

Um die beiden Klassen einer vollen Ähnlichkeitsklasse geometrisch zu charakterisieren, ordnen wir wie im Falle der Drehungen der Ebene jeder einseitigen Abbildung des Raumes eine Orientierung des Raumes zu; diese Zuordnung besitzt die Eigenschaft, daß zwei ähnlichen Abbildungen genau dann dieselbe Orientierung entspricht, wenn sie positiv ähnlich sind. Gibt es zu der einseitigen Abbildung A von V^n einen Vektor x, sodaß die Vektoren x, $Ax, \ldots, A^{n-1}x$ linear unabhängig sind, so ist die zugeordnete Orientierung die Orientierung dieses n-Tupels von Vektoren. Die so definierte Orientierung ist unabhängig von der Wahl des Vektors x. Ist nämlich y ein zweiter solcher Vektor, T die Abbildung, die $A^k x$ auf $A^k y$ abbildet ($k = 0, \ldots, n-1$), so ist T mit der einseitigen Abbildung A vertauschbar, erhält also die Orientierung. Es ist nun zwar nicht jede Abbildung eine solche zyklische Abbildung; doch gibt es zu jeder Abbildung ein System von komplementären Fixräumen mit der Eigenschaft, daß die in ihnen induzierten Abbildungen zyklisch sind (Hauptsatz der abelschen Gruppen). Damit ist zunächst jedem solchen Fixraum eine Orientierung zugeordnet; die Dimensionen dieser Fixräume sind gerade, ihre Orientierungen bestimmen daher eindeutig eine Orientierung des ganzen Raumes. Die so erklärte Orientierung ist unabhängig von der Wahl des Fixraumsystems und gestattet, ähnliche aber nicht positiv ähnliche Abbildungen zu unterscheiden (Satz I).

Wir haben gesehen, daß einseitige Abbildungen dadurch gekennzeichnet sind, daß sie keine komplementären Fixräume ungerader Dimension besitzen. Abbildungen, die überhaupt keine ungerad-dimensionalen Fixräume haben, sind somit einseitig. Solche Abbildungen nennen wir I-Abbildungen; sie sind auch charakterisierbar als Abbildungen, die keinen reellen Eigenvektor besitzen. Abbildungen mit dieser Eigenschaft sind von H. Hopf betrachtet worden bei der Untersuchung komplexer Strukturen in den Tangentialräumen von Mannigfaltigkeiten [1]). Der m-dimensionale Vektorraum C^m über dem Körper der komplexen Zahlen kann nämlich in natürlicher Weise aufgefaßt werden als $2m$-dimensionaler Vektorraum R^{2m} über dem Körper der reellen Zahlen. Der Multiplikation eines Vektors von C^m mit der imaginären Einheit i entspricht eine Selbstabbildung I von R^{2m}, deren Quadrat jeden Vektor x auf $-x$ abbildet: $I^2 = -E$. Eine solche Abbildung bildet nur den Nullvektor auf ein (reelles) Vielfaches von sich ab und ist daher eine I-Abbildung. Abbildungen I mit $I^2 = -E$ nennen wir spezielle I-Abbildungen; je zwei sind ähnlich.

Soll umgekehrt die Multiplikation von reellen Zahlen und Vektoren des reellen Vektorraumes R^n zu einer Multiplikation von komplexen Zahlen und Vektoren des R^n erweitert werden,

---

[1]) Vgl. [8]; es werden dort auch Scharen von nichtlinearen I-Abbildungen betrachtet.

so genügt es, die Abbildung I: $x \to ix$ als spezielle I-Abbildung zu definieren. Die Zuordnung $(\lambda + i\mu) \to (\lambda E + \mu I)$ ist dann eine treue Darstellung des Körpers der komplexen Zahlen und $(\lambda + i\mu)x = \lambda x + \mu I x$ ergibt die gewünschte Erweiterung. Sie ist nur bei gerad-dimensionalen Räumen möglich, da nur solche Räume I-Abbildungen besitzen. Eine solche Erklärung des Körpers der komplexen Zahlen als Operatorenbereich von R^{2m} nennen wir auch eine komplexe Struktur von R^{2m}.

Um auch einer beliebigen I-Abbildung des R^n eine komplexe Struktur zuordnen zu können, definieren wir eine Funktion ϱ_n, bei der einer I-Abbildung eine spezielle I-Abbildung entspricht. Diese Funktion wird folgende Eigenschaften haben: Für eine spezielle I-Abbildung I ist $\varrho_n(I) = I$; I und $\varrho_n(I)$ bestimmen dieselbe Orientierung des R^n; ähnlichen I-Abbildungen entsprechen ähnliche Abbildungen, I und $\varrho_n(I)$ sind somit vertauschbar.

Ist eine I-Abbildung I in einem Koordinatensystem des reellen orientierten Vektorraumes V^n durch eine schiefsymmetrische Matrix dargestellt, so ist die I entsprechende Orientierung gleich dem Vorzeichen des — geeignet normierten — Pfaffschen Aggregates. In einem zweiten Koordinatensystem ist die darstellende Matrix nicht notwendigerweise schiefsymmetrisch; dies ist aber sicher dann der Fall, wenn die beiden Systeme durch eine orthogonale Koordinatentransformation auseinander hervorgehen. Führen wir daher im Vektorraum V^n eine orthogonale Struktur ein, so ist die Eigenschaft einer Abbildung, durch eine schiefsymmetrische Matrix dargestellt zu werden, unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems; wir können daher von schiefsymmetrischen Abbildungen sprechen. Eine solche Abbildung ist auch dadurch gekennzeichnet, daß Vektor und Bildvektor orthogonal sind. In orientierten orthogonalen Vektorräumen ist das Pfaffsche Aggregat der Matrix einer Abbildung unabhängig vom Koordinatensystem und wir sprechen vom Pfaffschen Aggregat einer schiefsymmetrischen Abbildung. Eine schiefsymmetrische Abbildung ist genau dann eine spezielle I-Abbildung, wenn sie orthogonal ist; umgekehrt ist eine spezielle I-Abbildung genau dann schiefsymmetrisch, wenn sie orthogonal ist.

Eine schiefsymmetrische I-Abbildung I besitzt ein System von zweidimensionalen Fixräumen, welche paarweise orthogonal sind; ist $e_1, \ldots, e_m$ $(e_i \neq 0)$ ein System, das aus jeder dieser Fixebenen genau einen Vektor enthält, so stimmt die Orientierung der Vektoren $e_1, Ie_1, e_2, Ie_2, \ldots, e_m, Ie_m$ mit der I zugeordneten Orientierung und daher mit dem Vorzeichen des Pfaffschen Aggregates von I überein. Haben die Vektoren e_i alle die Länge 1, so ist das Pfaffsche Aggregat selbst gleich dem Volumen des von den Vektoren $e_1, Ie_1, \ldots, e_m, Ie_m$ aufgespannten Parallelotops (Satz II).

Jede reguläre Abbildung A eines orthogonalen Vektorraumes ist das Produkt einer orthogonalen Abbildung G und einer symmetrischen positiv definiten Abbildung P: $A = GP$. (Eine Abbildung heisse symmetrisch, wenn sie in jedem orthogonalen Koordinatensystem durch eine symmetrische Matrix dargestellt wird.) G (und auch P) ist dabei durch A eindeutig bestimmt: $G = \chi_n(A)$. Wir werden zeigen, daß χ_n einer speziellen I-Abbildung eine schiefsymmetrische Abbildung zuordnet (Satz III); $\chi_n(I)$ ist als orthogonale schiefsymmetrische Abbildung ebenfalls eine spezielle I-Abbildung. Die Funktion $\chi_n \varrho_n$ ordnet somit jeder I-Abbildung eine schiefsymmetrische Abbildung zu; das Vorzeichen des Pfaffschen Aggregates von $\chi_n \varrho_n(I)$ ist gleich der von I induzieren Orientierung. Damit haben wir für I-Abbildungen die Invariante von positiven Ähnlichkeitsklassen auf eine zweite Art definiert: Zwei ähnliche I-Abbildungen I, J sind genau dann positiv ähnlich, wenn die Pfaffschen Aggregate von $\chi_n \varrho_n(I)$ und $\chi_n \varrho_n(J)$ dasselbe Vorzeichen haben.

In einem zweiten Teil betrachten wir die Selbstabbildungen des n-dimensionalen reellen Vektorraumes als Punkte eines topologischen Raumes. Die zugrunde gelegte Topologie ist die übliche: Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß die vermöge eines Koordinatensystems vermittelte Zuordnung von Abbildungen und Matrizen (Punkten des n^2-dimensionalen Euklidischen Raumes) ein Homöomorphismus ist. Die Gesamtheit $\mathfrak{J}_n$ der I-Abbildungen ist eine offene Menge im Raume der Abbildungen. Sie ist der offene Kern der Menge der einseitigen Abbildungen; die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{J}_n$ enthält jedoch außer den einseitigen Abbildungen z.B. auch die Nullabbildung. Die Untersuchung der Zusammenhangsverhältnisse von $\mathfrak{J}_n$ bildet im wesentlichen den Inhalt des zweiten Teiles der Arbeit.

Die Ähnlichkeitsklasse einer Abbildung besteht aus höchstens zwei Komponenten; eine Klasse positiv ähnlicher Abbildungen ist nämlich zusammenhängend: Ist $A = TBT^{-1}$ (T orientierungserhaltend), so gibt es einen Weg $T(s)$, $0 \leqq s \leqq 1$, $T(s)$ regulär, $T(0) = T$, $T(1) = E$; $A(s) = T(s)BT(s)^{-1}$ ist dann ein Weg von A nach B, der ganz in einer Menge ähnlicher Abbildungen verläuft. Die Ähnlichkeitsklasse einer zweiseitigen Abbildung besteht somit aus einer Komponente. Wir werden zeigen, daß hinreichend benachbarte ähnliche Abbildungen positiv ähnlich sind: Die Ähnlichkeitsklasse einer einseitigen Abbildung besteht aus zwei Komponenten. Die Menge $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ der speziellen I-Abbildungen ($I^2 = - E$) ist eine solche Klasse.

Die den Abbildungen von $\mathfrak{J}_n$ zugeordneten Orientierungen bewirken eine Zerlegung von $\mathfrak{J}_n$ in zwei Teilmengen $\mathfrak{J}_n^+$ und $\mathfrak{J}_n^-$. Wir zeigen, daß sie offene Teilmengen von $\mathfrak{J}_n$ (und damit auch des Raumes der Abbildungen) sind, d.h. daß die Orientierung eine stetige Funktion auf $\mathfrak{J}_n$ ist. Zu diesem Zweck betrachten wir die im ersten Teil definierte Funktion ϱ_n: $\mathfrak{J}_n \to \mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ und weisen nach, daß sie stetig ist (Satz III) [2]). ϱ_n bildet $\mathfrak{J}_n^+$ auf den Durchschnitt $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ von $\mathfrak{J}_n^+$ und $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ ab; aus der Stetigkeit von ϱ_n folgt, daß $\mathfrak{J}_n^+$ als Urbild der in $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ offenen Menge $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ selbst offen ist in $\mathfrak{J}_n$. Die Funktion ϱ_n läßt sich in $\mathfrak{J}_n^+$ unter Festhaltung auf $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ in die Identität deformieren; $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ ist somit Deformationsretrakt von $\mathfrak{J}_n^+$, $\mathfrak{J}_n^+$ zusammenhängend: Die Menge $\mathfrak{J}_n$ zerfällt in die beiden Komponenten $\mathfrak{J}_n^+$, $\mathfrak{J}_n^-$.

Die Orientierung bewirkt auch eine Zerlegung der Menge der einseitigen Abbildungen in zwei fremde Teilmengen. Doch ist dies nur für $n = 2$ eine Komponentenzerlegung, für $n \geqq 4$ ist die Menge der einseitigen Abbildungen zusammenhängend, die Orientierung also keine stetige Funktion.

Führen wir im Vektorraum eine orthogonale Struktur ein, so bildet die im ersten Teil definierte Funktion χ_n die Menge $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ auf die Menge $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ der orthogonalen speziellen I-Abbildungen positiver Orientierung ab. Die Funktion χ_n ist stetig und kann in $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ unter Festhaltung auf $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ in die Identität deformiert werden. Wird diese Deformation mit der Deformation von $\mathfrak{J}_n^+$ in $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ zusammengesetzt, so ergibt sich $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ als Deformationsretrakt von $\mathfrak{J}_n^+$: Die topologische Untersuchung von $\mathfrak{J}_n^+$ ist damit weitgehend auf jene von $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ zurückgeführt. $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ ist eine geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension $n\,(n - 2)/4$. Sie kann (für $n \geqq 4$) in Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_{n-2}^+$ mit der $(n - 2)$-dimensionalen Sphäre als Basisraum gefasert werden ($\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_4^+$ ist so die 2-Sphäre); die Homologiegruppen und

---

[2]) G. DE RHAM hat ebenfalls eine Funktion definiert, welche $\mathfrak{J}_n$ auf $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ abbildet; auf diese Funktion ϱ_n^* bin ich nachträglich durch Herrn Prof. Dr. ECKMANN aufmerksam gemacht worden. In einem Anhang wird gezeigt, daß ϱ_n^* mit unserer Funktion ϱ_n übereinstimmt. Die Stetigkeit von ϱ_n^* folgt unmittelbar aus der Definition.

einige Homotopiegruppen von $\mathfrak{D}\mathfrak{S}\mathfrak{p}\,\mathfrak{J}_n^+$ sind bekannt (C. Ehresmann [7]).

Im dritten Teil wenden wir die gewonnenen Ergebnisse bei der Untersuchung differenzierbarer Mannigfaltigkeiten an. Eine Mannigfaltigkeit heißt differenzierbar, wenn eine offene Überdeckung existiert, deren Mengen so durch reelle Parameter beschrieben sind, daß die beim Übereinandergreifen zweier Mengen auftretenden Parametertransformationen stetig differenzierbar sind. Die Funktionaldeterminanten dieser Transformationen sind verschieden von Null; haben sie alle positives Vorzeichen, so ist die Mannigfaltigkeit orientierbar. In differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M^n kann von differenzierbaren Kurven und damit von Tangentialvektoren gesprochen werden; die Tangentialvektoren in einem Punkt von M^n bilden einen reellen Vektorraum (den Tangentialraum), dessen Dimension gleich der Dimension von M^n ist. Tangentialräume in benachbarten Punkten können so aufeinander bezogen werden, daß der Begriff einer (stetigen) Schar von Selbstabbildungen eindeutig definierbar ist.

Wir werden uns mit Scharen von I-Abbildungen beschäftigen. Solche I-Scharen sind in komplexen Mannigfaltigkeiten durch die in den Tangentialräumen induzierten komplexen Strukturen erklärt. [1]) Eine Mannigfaltigkeit heißt komplex, wenn eine offene Überdeckung existiert, deren Mengen so durch komplexe Parameter beschrieben sind, daß die beim Übereinandergreifen zweier Mengen auftretenden Parametertransformationen komplex-analytisch sind. In komplexen Mannigfaltigkeiten kann von komplexen Tangentialvektoren gesprochen werden; diese Tangentialvektoren bilden in jedem Punkt einen Vektorraum C^m über dem Körper der komplexen Zahlen. Werden die Parameter $z = x + iy$ einer komplexen Mannigfaltigkeit durch die reellen Parameter x, y ersetzt, so sind die dadurch induzierten reellen Parametertransformationen stetig differenzierbar und von positiver Funktionaldeterminante: Der komplexen Mannigfaltigkeit K^n ist in natürlicher Weise eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit M^n (gerader Dimension) zugeordnet; von orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, die in dieser Rolle auftreten, sagen wir, daß sie eine komplexe Struktur gestatten. Den komplexen Tangentialräumen $C^{n/2}$ von K^n entsprechen die reellen Tangentialräume R^n von M^n, für deren Vektoren daher die Multiplikation mit komplexen Zahlen erklärt ist. Diese Multiplikation und damit auch die in M^n induzierte Schar von speziellen I-Abbildungen ($I^2 = -E$) ist stetig. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit gestattet somit höchstens dann eine komplexe Struktur, wenn auf ihr eine Schar von speziellen I-Abbildungen existiert.

Ist in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine Schar von I-Abbildungen gegeben (was nur bei gerader Dimension möglich ist), so bewirken diese als einseitige Abbildungen Orientierungen der Tangentialräume; diese Orientierungen sind in benachbarten Tangentialräumen gleich (stetige Abhängigkeit der Orientierung auf der Menge der I-Abbildungen) und induzieren daher eine kohärente Orientierung der Mannigfaltigkeit. I-Scharen existieren daher nur auf orientierbaren Mannigfaltigkeiten. [3]) Gibt es zu einer orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^n eine solche I-Schar, daß die in M^n induzierte Orientierung mit der ursprünglich gegebenen übereinstimmt, so nennen wir M^n eine I-Mannigfaltigkeit; sind die Abbildungen der Schar spezielle I-Abbildungen, so nennen wir M^n fast-komplex. [4]) Die einer komplexen Mannigfaltigkeit zugeordnete Mannigfaltigkeit M^n ist fast-komplex.

Die im zweiten Teil besprochene Deformation der I-Abbildungen in spezielle I-Abbildungen deformiert eine I-Schar in eine Schar spezieller I-Abbildungen gleicher Orientierung: Eine I-Mannigfaltigkeit ist fast-komplex. H. Hopf hat gezeigt, daß die der komplexen projektiven Ebene zugeordnete Mannigfaltigkeit M^4 nur in einer der beiden möglichen Orientierungen fast-komplex ist [5]); M^4 ist daher auch nur in einer der beiden Orientierungen I-Mannigfaltigkeit.

In [8] wird ferner eine notwendige Bedingung dafür angegeben, daß die Sphäre der Dimension $4k$ eine I-Mannigfaltigkeit ist; diese Bedingung ist für $k = 1, 2$ nicht erfüllt: S^4 und S^8 sind keine I-Mannigfaltigkeiten. Auf Grund einer elementaren Konstruktion werden wir einer I-Schar in der euklidischen Sphäre S^n ein stetiges Feld von $(n + 1)$ linear unabhängigen Tangentialvektoren einer Sphäre S^{n+1} zuordnen, deren Aequatorsphäre S^n ist: Die n-dimensionale Sphäre ist nur dann I-Mannigfaltigkeit, wenn die $(n + 1)$-dimensionale Sphäre parallelisierbar ist [6]). Einen

[3]) Vgl. [10] Nr. 41.9, S. 212.

[4]) Vgl. [7] S. 3 & [10] S. 209.

[5]) Vgl. [8] S. 182—183.

[6]) Diesen Satz habe ich in [9] bewiesen; er findet sich in [10] S. 216 und [31] S. 97, unter Hinweis auf [9].

Parallelismus von S^{n+1} gibt es höchstens für $n + 1 = 2^k - 1$ [7]; unter den Sphären kommen somit als I-Mannigfaltigkeiten nur jene der Dimensionen $2^k - 2$ (2, 6, 14, ...) in Frage [8]. Die 2-Sphäre kann als komplexe Mannigfaltigkeit aufgefaßt werden: S^2 ist I-Mannigfaltigkeit. Aus einem allgemeinen Satz von Ch. Ehresmann folgt, daß auch S^6 I-Mannigfaltigkeit ist [9]; eine Schar von speziellen I-Abbildungen läßt sich mit Hilfe der Cayleyschen Zahlen explizit angeben, diese fast-komplexe Struktur wird aber nicht durch eine komplexe Struktur von S^6 induziert [10].

Herrn Professor H. Hopf danke ich für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit; ihre endgültige Fassung stützt sich auf Gespräche mit meinem Freunde Ernst Specker.

I. *Die linearen Selbstabbildungen orientierter Vektorräume*

§ 1. Definition des orientierten Vektorraumes. Einseitige Abbildungen.

1.1 Der Vektorraum R^n über dem Körper der reellen Zahlen heißt orientiert, wenn in seinen geordneten n-Tupeln linear unabhängiger Vektoren eine nichtleere Teilmenge $\mathfrak{P}$ so ausgezeichnet ist, daß mit $n \in \mathfrak{P}$ genau diejenigen n-Tupel zu $\mathfrak{P}$ gehören, die aus n durch eine Abbildung positiver Determinante hervorgehen; die Gesamtheit $\mathfrak{P}$ ist durch ein $n \in \mathfrak{P}$ eindeutig bestimmt. (Abbildungen positiver Determinante nennen wir auch orientierungserhaltend.) Der Vektorraum R^n kann auf genau zwei Arten orientiert werden; die beiden orientierten Vektorräume V_1^n, V_2^n von R^n besitzen dieselbe Gruppe von Automorphismen, nämlich die Gruppe der linearen Selbstabbildungen von R^n, welche die Orientierung erhalten. V_1^n und V_2^n sind isomorph. Es sollen die linearen Selbstabbildungen (kurz: Abbildungen) eines orientierten Vektorraumes V^n untersucht werden.

1.2 Zwei Abbildungen A, B von V^n heißen positiv ähnlich, wenn es eine orientierungserhaltende Abbildung T gibt, sodaß $A = TBT^{-1}$. Die Abbildungen von V^n zerfallen in Klassen positiv ähnlicher; die Abbildungstheorie des orientierten Vektorraumes hat geo-

---

[7]) Vgl. [11].

[8]) Auf Grund eines in [3] ausgesprochenen Satzes sind S^2 und S^6 die einzigen I-Mannigfaltigkeiten unter den Sphären.

[9]) Vgl. [7] S. 12.

[10]) Vgl. [6].

metrische Eigenschaften zu definieren, die gestatten, nicht positiv ähnliche Abbildungen zu unterscheiden.

Positiv ähnliche Abbildungen sind ähnlich. (Zwei Abbildungen A, B heißen dabei ähnlich, wenn es ein reguläres T gibt mit $A = TBT^{-1}$) Die geometrische Klassifizierung der Abbildungen nach Ähnlichkeitsklassen ist bekannt (Elementarteilertheorie); es wird sich für uns also darum handeln, den Zerfall einer Ähnlichkeitsklasse in Klassen positiv ähnlicher Abbildungen zu untersuchen.

1.3 Von drei ähnlichen Abbildungen A, B, C sind mindestens zwei positiv ähnlich. Ist nämlich $A = SBS^{-1}$, $B = TCT^{-1}$, so ist $B = (S^{-1}T)C(S^{-1}T)^{-1}$, und von den drei Abbildungen S, T, $S^{-1}T$ ist mindestens eine orientierungserhaltend. Eine Ähnlichkeitsklasse zerfällt somit in eine oder in zwei Klassen positiv ähnlicher Abbildungen.

1.4 Bildet eine Klasse positiv ähnlicher Abbildungen eine volle Ähnlichkeitsklasse, so nennen wir sie und ihre Abbildungen zweiseitig. Eine zweiseitige Abbildung A ist mit jeder ähnlichen Abbildung TAT^{-1} positiv ähnlich: $A = STAT^{-1}S^{-1} = (ST)A(ST)^{-1}$ ($\det S > 0$); durch Wahl einer Abbildung T von negativer Determinante ergibt sich daraus, daß eine zweiseitige Abbildung mit einer Abbildung negativer Determinante vertauschbar ist.

1.5 Bildet eine Klasse positiv ähnlicher Abbildungen erst zusammen mit einer weiteren solchen Klasse eine volle Ähnlichkeitsklasse, so nennen wir sie und ihre Abbildungen einseitig. Die beiden einseitigen Klassen einer Ähnlichkeitsklasse gehen durch Transformation mit einer beliebigen Abbildung negativer Determinante auseinander hervor. Ist A einseitig, T von negativer Determinante, so ist also $A \neq TAT^{-1}$: Eine einseitige Abbildung ist mit keiner Abbildung negativer Determinante vertauschbar. Zusammen mit 1.4 erhalten wir die folgende Charakterisierung der einseitigen Abbildungen: *Eine Abbildung ist genau dann einseitig, wenn sie mit keiner Abbildung negativer Determinante vertauschbar ist.*

1.6 Mit A sind auch λA ($\lambda \neq 0$) und $A + \mu E$ einseitig, denn λA ($\lambda \neq 0$) und $A + \mu E$ sind mit den gleichen Abbildungen vertauschbar wie A. Da jede Abbildung mit sich selbst vertauschbar ist, so kann die Determinante einer einseitigen Abbildung nur positiv oder Null sein; wir werden sehen, daß diese beiden Fälle eintreten.

1.7 Die Abbildung A des orientierten Vektorraumes V^n ist mit der Abbildung $-E$ vertauschbar; die Determinante von $-E$ ist gleich $(-1)^n$: Einseitige Abbildungen gibt es nur in Räumen gerader Dimension.

1.8 In Verallgemeinerung von 1.7 zeigen wir: Komplementäre Fixräume einer einseitigen Abbildung haben gerade Dimensionen. (Ein linearer Teilraum heißt Fixraum der Abbildung A, wenn er durch A in sich abgebildet wird; zwei Teilräume heißen komplementär, wenn sie nur den Nullvektor gemeinsam haben und zusammen den ganzen Raum aufspannen).

Beweis: Die Abbildung A besitze komplementäre Fixräume der Dimensionen p, q $(p + q = n)$. In einem passenden Koordinatensystem wird A durch eine Matrix von folgender Gestalt dargestellt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1p} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pp} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{q1} & \cdots & \beta_{qq} \end{array}\right)$$

Diese Matrix ist vertauschbar mit der Diagonalmatrix (γ_j): $\gamma_j = -1$, $j = 1, 2, \ldots, p$, $\gamma_j = 1$, $j = p + 1, p + 2, \ldots, n$; die Abbildung A folglich mit der dieser Diagonalmatrix entsprechenden Abbildung T. Die Determinante von T hat den Wert $(-1)^p$; ist A einseitig, so ist p gerade.

1.9 Sind R, S komplementäre Fixräume der einseitigen Abbildung A, so ist die von A in R induzierte Abbildung A/R ebenfalls einseitig. Beweis: Sei A/R zweiseitig; es gibt eine mit A vertauschbare Abbildung T, sodaß $T/S = E/S$, T/R orientierungsumkehrend ist. Somit ist T orientierungsumkehrend in V^n, d.h. A ist zweiseitig.

§ 2. Die Orientierung einer einseitigen Abbildung.

2.1 V^n sei ein orientierter Vektorraum, R^n der ihm zugrunde liegende nicht orientierte Vektorraum. Jeder einseitigen Abbildung A von V^n ordnen wir eine Orientierung von R^n zu (Satz I); je nachdem, ob diese Orientierung mit jener von V^n übereinstimmt oder nicht, nennen wir A positiv oder negativ orientiert. Zwei ähnliche einseitige Abbildungen sind genau dann positiv ähnlich, wenn entweder beide positiv oder beide negativ orientiert sind.

Die Definition der Orientierung beruht auf dem Hauptsatz der abelschen Gruppen [11]).

2.2 Sei G eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe mit Operatorenbereich $\mathfrak{O}$ und $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_r$ eine Zerlegung von G in eine direkte Summe zyklischer Untergruppen. Die Operatoren des Bereiches $\mathfrak{O}$ (den wir als Hauptidealring voraussetzen), welche jedem Element eines Summanden G_j das Nullelement der Gruppe G zuordnen, bilden ein Ideal $(f_j) \subset \mathfrak{O}$, das annullierende Ideal der zyklischen Untergruppe G_j.

Zwei Zerlegungen $G = \sum\limits_{j=1}^{r} G_j$ und $G = \sum\limits_{i=1}^{s} G_i'$ nennen wir isomorph, wenn $r = s$ und wenn (bei geeigneter Numerierung) die annullierenden Ideale der einzelnen Summanden übereinstimmen.

Ist jedes der Ideale $(f_1), (f_2), \ldots, (f_r)$ im folgenden enthalten, so nennen wir die Operatoren $f_1, f_2, \ldots, f_r$ die invarianten Faktoren von G, die betreffende Zerlegung eine minimale. Die Gruppe G gestattet stets eine minimale Zerlegung; je zwei sind isomorph. Sind $f_1, f_2, \ldots, f_r$ Primpotenzen in $\mathfrak{O}$, so nennen wir sie die Elementarteiler der Gruppe G, die entsprechende Zerlegung von G eine maximale Zerlegung; maximale Zerlegungen sind isomorph. Ist jeder Summand der Zerlegung $G = \sum\limits_{j=1}^{r} G_j$ in einem Summanden der Zerlegung $G = \sum\limits_{i=1}^{s} G_i'$ enthalten, so nennen wir die zweite Zerlegung eine Verfeinerung der ersten; jede Zerlegung besitzt eine maximale Verfeinerung, eine maximale Zerlegung gestattet jedoch keine echte Verfeinerung. Zwei gegebene Zerlegungen besitzen isomorphe Verfeinerungen: die maximalen; jede Zerlegung ist Verfeinerung einer minimalen Zerlegung.

2.3 A sei eine beliebige Abbildung des Vektorraumes R^n. Wir erklären die reellen Polynome $f(\xi)$ als Operatoren [12]) für die Elemente des — als abelsche Gruppe G^n aufzufassenden — Vektorraumes R^n: Ist f ein Polynom, e ein Vektor, so sei $f \cdot e = f(A)e$. Zu e gehört ein annullierendes Ideal im Ring der reellen Polynome; das erzeugende Element dieses Ideals, dessen höchste Potenz den Koeffizienten 1 hat, nennen wir das A-Minimalpolynom des Vektors e.

2.4 Sei k der Grad des A-Minimalpolynoms von e. Das geordnete System der k in R^n linear unabhängigen Vektoren $e, Ae, A^2e, \ldots, A^{k-1} e$ nennen wir eine Kette, e ihren erzeugenden Vektor;

[11]) Vgl. [12] § 107.

[12]) Vgl. [12] § 109.

der von einer Kette aufgespannte Teilraum von R^n ist ein **Fixraum** der Abbildung A. Bilden die Vektoren $e_1, \ldots, e_r$ eine **Basis** in G^n, so bilden die von ihnen erzeugten Ketten eine **Basis** in R^n; eine solche Basis in R^n nennen wir r-gliedrige Kettenbasis der Abbildung A. Zwei Basissysteme $e_1, \ldots, e_r$ und $e'_1, \ldots, e'_s$ von G^n — und die durch sie erzeugten Kettenbasen vor R^n — nennen wir isomorph, wenn die induzierten Zerlegungen von G^n isomorph sind. In diesem Fall ist $r = s$, und die A-Minimalpolynome von e_j und e'_j stimmen (nach eventueller Umnumerierung) überein ($j = 1, 2, \ldots r$).

Eine r-gliedrige Kettenbasis von A gibt Anlaß zu $r!$ geordneten Kettenbasen von A; sie gehen aus einer von ihnen durch Permutation der einzelnen Ketten hervor.

2.5 Erzeugen die Vektoren $e_1, \ldots, e_r$ eine Kettenbasis der Abbildung A, und sind die Dimensionen der von den einzelnen Ketten aufgespannten Fixräume gerade Zahlen, so sind alle von $e_1, \ldots, e_r$ erzeugten geordneten Kettenbasen gleich orientiert; jede Permutation der Ketten einer geordneten Kettenbasis bewirkt nämlich in diesem Fall eine gerade Permutation der Vektoren dieser Basis.

2.6 Ist A eine einseitige Abbildung, so besitzt jede Kettenbasis von A die Eigenschaft 2.5: Zwei geordnete, von denselben Vektoren $e_1, \ldots, e_r$ erzeugte Kettenbasen der einseitigen Abbildung A sind gleich orientiert.

Diese Aussage verschärfen wir in

2.7 Satz I: *Zwei Kettenbasen einer einseitigen Abbildung A sind gleich orientiert.*

Den Beweis führen wir in drei Schritten:

2.71 $(e_1, \ldots, e_r)$ und $(e'_1, \ldots, e'_r)$ seien erzeugende Vektoren von isomorphen Kettenbasen der Abbildung A. T sei die Abbildung, welche dem Vektor $A^{l_j}e_j$ den Vektor $A^{l_j}e'_j$ zuordnet ($l_j = 0, 1, \ldots, k_j - 1$; $\sum_j k_j = n$; $j = 1, 2, \ldots, r$). Da die A-Minimalpolynome der Vektoren e_j und e'_j übereinstimmen, bildet T auch $A^{k_j}e_j$ auf $A^{k_j}e'_j$ ab, d.h. es gilt $A^{k_j}Te_j = TA^{k_j}e_j$ und daher $(TA)A^{l_j}e_j = A(A^{l_j}Te_j) = A(TA^{l_j}e_j) = (AT)A^{l_j}e_j$ für $l_j = 0, 1, \ldots, k_j - 1$; $j = 1, 2, \ldots, r$. Die Abbildung $(TA - AT)$ bildet jeden Vektor einer Basis auf den Nullvektor ab, es ist also $TA = AT$. **Als** reguläre, mit der einseitigen Abbildung A vertauschbare, Abbildung muß aber T orientierungserhaltend sein: isomorphe Kettenbasen von A sind gleich orientiert.

2.72 Der Vektor e' erzeuge eine Kette der einseitigen Abbildung A; e_1 und e_2 seien erzeugende Vektoren einer Verfeinerung dieser Kette (2.2).

Sind R, R_1, R_2 die zu e', e_1, e_2 gehörenden Fixräume von A, so zeigen wir, daß die in R_1, R_2 induzierten Orientierungen dieselbe Orientierung von R induzieren wie die von e' erzeugte Kette. Sei $e = e_1 + e_2$; wir berechnen die Determinante der Vektoren $e, Ae, \ldots, A^{k-1}e$ ($k = k_1 + k_2$, $k_j = \dim R_j$, $j = 1, 2$) im Koordinatensystem, dessen Grundvektoren $e_1, \ldots, A^{k_1}e_1, e_2, \ldots, A^{k_2}e_2$ sind. f, f_1, f_2 mit den Graden k, k_1, k_2 seien die A-Minimalpolynome der Vektoren e', e_1, e_2; f teilt das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von f_1 und f_2, wegen $k = k_1 + k_2$ sind f_1, f_2 teilerfremd und $f = f_1 \cdot f_2$. Ist $e_2' = f_1(A)e$, so dürfen wir in $\det(e, Ae, \ldots, A^{k-1}e)$ die Vektoren $A^{k_1}e, A^{k_1+1}e, \ldots, A^{k-1}e$ durch die Vektoren $e_2', Ae_2', \ldots, A^{k_2-1}e_2'$ ersetzen, ohne den Wert der Determinante zu ändern, denn der Vektor $A^{k_1}e - e_2'$ ist eine Linearkombination der Vektoren $e, Ae, \ldots, A^{k_1-1}e$:

$$\det(e, Ae, \ldots, A^{k-1}e) = \det(e, Ae, \ldots, A^{k_1-1}e;\ e_2', Ae_2', \ldots, A^{k_2-1}e_2').$$

Da die Polynome f_1, f_2 teilerfremd sind, so ist mit e_2 auch $e_2' = f_1(A)e = f_1(A)e_2$ erzeugend in R_2; in der letzteren Determinante können also wegen $A^je = A^je_1 + A^je_2$ ($j = 1, 2, \ldots$) die Vektoren $e, Ae, \ldots, A^{k_1-1}e$ durch $e_1, Ae_1, \ldots A^{k_1-1}e_1$ ersetzt werden, ohne daß der Wert dieser Determinante geändert wird;

$$\det(e, Ae, \ldots, A^{k-1}e) = \det(e_1, \ldots, A^{k_1-1}) \det(e_2', \ldots, A^{k_2-1}e_2').$$

Die von A in R_2 induzierte Abbildung ist einseitig (1.9), nach 2.71 muß daher $\det(e_2', \ldots, A^{k_2-1}e_2') > 0$ sein; mit $\det(e_1, \ldots, A^{k_1-1}e) = 1$ folgt nun, daß der Vektor $e = e_1 + e_2$ in R eine Kette der Abbildung A/R erzeugt, deren Orientierung übereinstimmt mit der Orientierung der von e_1, e_2 erzeugten Kettenbasis der Abbildung A/R. Wegen der Einseitigkeit von A/R sind auch die von e', e erzeugten Ketten gleich orientiert:

Die Verfeinerungen einer Kettenbasis der einseitigen Abbildung A sind gleich orientiert wie diese Kettenbasis.

2.73 Die Behauptung von Satz I folgt nun aus 2.71 und 2.72 durch Konstruktion isomorpher Verfeinerungen.

2.8 A sei eine einseitige Abbildung. Die Abbildungen λA, $A + \mu E$ (λ, μ reell) sind nach 1.6 ebenfalls einseitig; ist $\lambda > 0$, so sind λA und $A + \mu E$ gleich orientiert wie A. Beweis: Der Vektor e erzeuge eine Kette von A. Die geordneten k-Tupel e, $\lambda Ae, \ldots, \lambda^{k-1}A^{k-1}e$ und $e, (A + \mu E)e, \ldots, (A + \mu E)^{k-1}e$ sind gleich orientiert wie die Kette $e, \ldots, A^{k-1}e$, denn ihre im Koordinatensystem der Grundvektoren $e, \ldots, A^{k-1}e$ berechneten Determinanten sind positiv.

§ 3. Charakterisierung der einseitigen Abbildungen im Reellen.

3.1 Die bisherigen Betrachtungen haben von den Eigenschaften des Körpers der reellen Zahlen nur sehr wenig benutzt; sie lassen sich z.B. ohne weiteres auf Vektorräume über dem Körper der rationalen Zahlen übertragen. Die folgende neue Charakterisierung der einseitigen Abbildungen wird nun wesentlich von der reellen Abgeschlossenheit des Grundkörpers Gebrauch machen (Dies ist erfüllt z.B. für den Körper der reellen algebraischen Zahlen).

3.2 Wir haben gesehen, daß eine einseitige Abbildung keine komplementären Fixräume ungerader Dimension besitzt (1.8). Hiervon gilt auch die Umkehrung: *Eine Abbildung ohne komplementäre Fixräume ungerader Dimension ist einseitig.*

Beweis: A sei zweiseitig; es existiert eine mit A vertauschbare Abbildung negativer Determinante (1.3). Eine solche Abbildung T besitzt einen (negativen) reellen Eigenwert von ungerader Vielfachheit und daher zwei komplementäre Fixräume R_1, R_2 von ungerader Dimension (Ist das charakteristische Polynom g von T das Produkt von zwei teilerfremden Polynomen g_1, g_2, so haben die von $g_1(T)$, $g_2(T)$ annullierten Teilräume nur den Nullvektor gemeinsam, und ihre lineare Hülle ist, da jeder Vektor von $g(T)$ annulliert wird, der ganze Raum). Die von T in R_1 und R_2 induzierten Abbildungen haben teilerfremde Minimalpolynome f_1, f_2, und somit ist $f_1 \cdot f_2$ das Minimalpolynom der Abbildung T. Sei nun $x_1 \in R_1$, $Ax_1 = y_1 + y_2$, $y_1 \in R_1$, $y_2 \in R_2$. $f_1(T)$ bildet nur den Nullvektor von R_2 auf den Nullvektor ab; da A auch mit $f_1(T)$ vertauschbar ist, so folgt aus $0 = Af_1(T)x_1 = f_1(T)Ax_1 = f_1(T)y_2$, daß $y_2 = 0$, d.h. R_2 ist Fixraum von A. Genau so zeigt man, daß auch R_1 Fixraum von A ist: A besitzt komplementäre Fixräume ungerader Dimension.

3.3 Als Korollar ergibt sich aus 3.2, daß eine Abbildung A genau dann einseitig ist, wenn ihre (reellen) Elementarteiler Polynome geraden Grades sind, oder — was gleichbedeutend ist — wenn ihre invarianten Faktoren keine negativen Werte annehmen.

3.4 Sind R_1, R_2 komplementäre Teilräume in R^n, A_1, A_2 einseitige Abbildungen in R_1, R_2, so ist die Abbildung A, welche auf R_j mit A_j $(j = 1, 2)$ übereinstimmt, einseitig; ein Elementarteiler von A ist nämlich zugleich Elementarteiler von A_1 oder A_2, also von geradem Grad.

§ 4. I - Abbildungen.

Wir haben in 3.2 die einseitigen Abbildungen des reellen Vektorraumes R^n dadurch charakterisiert, daß sie keine komplementären Fixräume ungerader Dimension besitzen.

Eine Abbildung ohne Fixräume ungerader Dimension ist einseitig; solche Abbildungen sind von H. Hopf in [8] zur Untersuchung der Tangentialräume komplexer Mannigfaltigkeiten herangezogen worden; wir nennen sie I-Abbildungen. Eine I-Abbildung ist auch charakterisiert durch die Eigenschaft, keinen (reellen) Eigenvektor zu besitzen. A ist genau dann I-Abbildung, wenn das charakteristische Polynom von A keine reellen Wurzeln besitzt, also den Wert 0 nicht annimmt

4.1 Die geordneten m-Tupel komplexer Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ bilden den komplexen Vektorraum C^m.

Ihm ist durch die Relationen $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ in natürlicher Weise ein reeller Vektorraum R^{2m} zugeordnet: die Menge der geordneten $2m$-Tupel $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \eta_m)$. In R^{2m} ist daher die Multiplikation von komplexen Zahlen und Vektoren erklärt: man setze $i(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_m, \eta_m) = (\eta_1, -\xi_1, \ldots, \eta_m, -\xi_m)$, und $(\alpha + i\beta)z = \alpha z + \beta(iz)$, wobei α, β reell, $z = (\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_m, \eta_m) \in R^{2m}$. Eine solche Erklärung der Multiplikation von Vektoren aus R^{2m} mit komplexen Zahlen nennen wir eine komplexe Struktur in R^{2m}.

4.2 Soll umgekehrt in einem reellen Vektorraum R^n eine komplexe Struktur eingeführt werden, so genügt es, die Multiplikation beliebiger Vektoren mit i zu erklären. Diese Multiplikation soll distributiv sein und assoziativ bezüglich der Multiplikation mit reellen Zahlen. Die Zuordnung $x \to ix$ bewirkt also eine lineare Abbildung I, deren Quadrat gleich $-E$ ist. I besitzt keinen vom Nullvektor verschiedenen Eigenvektor, ist also I-Abbildung: komplexe Strukturen gibt es nur bei gerader Dimensionszahl n. I-Abbildungen mit der Eigenschaft $I^2 = -E$ nennen wir spezielle I-Abbildungen, je zwei sind ähnlich. Jede spezielle I-Abbildung I bewirkt eine komplexe Struktur in R^n; die Zuordnung $\alpha + i\alpha \to \alpha E + \beta I$ $(\alpha, \beta$ reell$)$ ist eine treue Darstellung des Körpers der komplexen Zahlen durch Abbildungen der Vektorraumes R^n, aus R^n entsteht durch die Orientierung von I in natürlicher Weise ein orientierter Vektorraum V^n.

4.3 Durch eine komplexe Struktur wird dem reellen Vektorraum R^n in natürlichen Weise ein komplexer Vektorraum $C^{n/2}$ zugeordnet; die definierende spezielle I-Abbildung I wirkt in $C^{n/2}$ als (komplexe) lineare Abbildung iE. Jede Abbildung des R^n, welche in der gegebenen komplexen Struktur als komplexe Abbildung wirkt, ist daher mit I vertauschbar. Umgekehrt wirkt eine Abbildung A des R^n genau in denjenigen komplexen Strukturen als komplexe Abbildung, welche durch die mit A vertauschbaren speziellen I-Abbildungen definiert sind. Eine Abbildung negativer Determinante kann in keiner komplexen Struktur als komplexe Abbildung wirken.

4.4 Jede I-Abbildung ist mit einer speziellen I-Abbildung vertauschbar: wir werden nämlich eine Funktion ϱ_n angeben, welche jeder I-Abbildung I des R^n eine spezielle I-Abbildung $\varrho_n(I)$ des R^n zuordnet, sodaß ähnlichen I-Abbildungen wiederum ähnliche Abbildungen entsprechen; $\varrho_n(I)$ wird also mit I vertauschbar sein.

4.5 Eine I-Abbildung heiße normiert, wenn sie nur die Eigenwerte i und $-i$ hat; $(x^2+1)^m$ ist ihr charakteristisches Polynom $(n = 2m)$. Wir definieren eine Funktion σ_n, welche jeder I-Abbildung I eine normierte I-Abbildung zuordnet: $R_1, R_2, \ldots, R_p$ sei das (eindeutig bestimmte) System von Fixräumen der Abbildung I, für welches die Minimalpolynome der induzierten Abbildungen I/R_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ paarweise teilerfremd sind. Ist $\alpha_j + i\beta_j$ derjenige Eigenwert von I/R_j, dessen Imaginärteil β_j positiv ist, so verstehen wir unter $\sigma_n(I)$ diejenige normierte I-Abbildung, welche auf R_j mit der I-Abbildung $\frac{1}{\beta_j}(I - \alpha_j E)$ übereinstimmt $(j = 1, 2, \ldots p)$. Für reguläres T ist offenbar $\sigma_n(TIT^{-1}) = T\sigma_n(I)T^{-1}$.

4.6 Wir definieren nun eine Funktion τ_n, welche jeder normierten I-Abbildung I eine spezielle I-Abbildung $\tau_n(I)$ zuordnet: Für beliebiges komplexes ξ sei

$$\tau_n(\xi) = \frac{\int\limits_0^{\xi} (1+\eta^2)^{\frac{n}{2}+1}\, d\eta}{\int\limits_0^{\xi} (1-\eta^2)^{\frac{n}{2}+1}\, d\eta} \text{ [13]}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots$$

Integrationsweg sei die von 0 zur komplexen Zahl ξ führende Strecke.

4.61 $\tau_n(i) = i$. Beweis: Die Substitution $\eta = -i\zeta$ (ζ reell) ergibt

$$\int\limits_0^{i} (1+\zeta^2)^{\frac{n}{2}-1}\, d\zeta = i\int\limits_0^{1} (1-\eta^2)^{\frac{n}{2}-1}\, d\eta$$

4.62 Das Polynom $(\xi^2+1)^{n/2}$ ist Teiler des Polynoms $\tau_n^2(\xi)+1$.

---

[13]) $\tau_n(\xi)$ ist Spezialfall eines in [1], S. 247, konstruierten Polynoms.

Beweis: $\frac{d}{d\xi}\tau_n(\xi) = \text{const.}\ (\xi^2+1)^{n/2-1}$. Mit 4.61 folgt, daß i eine m-fache Wurzel von $\tau_n^2(\xi)+1$ ist, $m = \frac{n}{2}$.

4.63 I sei eine normierte I-Abbildung. Aus 4.62 folgt: $\tau_n(I)$ ist eine spezielle I-Abbildung. Ist I selbst schon eine spezielle I-Abbildung, so ergibt sich aus 4.61: $\tau_n(I) = I$ (vgl. 4.2). Für reguläres T ist offenbar $\tau_n(TIT^{-1}) = T\tau_n(I)T^{-1}$.

4.7 Die Funktion $\varrho_n = \tau_n\sigma_n$ ordnet einer I-Abbildung I eine spezielle I-Abbildung zu; ist I selbst schon speziell, so ist $\varrho_n(I)=I$. Für reguläres T gilt $\varrho_n(TIT^{-1}) = T\varrho_n(I)T^{-1}$; setzt man $T = I$, so ergibt sich, daß I mit $\varrho_n(I)$ vertauschbar ist: In der durch $\varrho_n(I)$ definierten komplexen Struktur wirkt I als komplexe Abbildung. Da zwei spezielle I-Abbildungen ähnlich sind, so bildet die Funktion ϱ_n eine volle Klasse ähnlicher I-Abbildungen auf die Gesamtheit der speziellen I-Abbildungen ab, eine Klasse positiv ähnlicher I-Abbildungen auf eine Klasse positiv ähnlicher spezieller I-Abbildungen. Diese Aussage verschärfen wir in

4.8 I und $\varrho_n(I)$ sind gleich orientiert. Den Beweis führen wir in zwei Schritten:

4.81 Aus 2.8 folgt zunächst, daß I und $\sigma_n(I)$ gleich orientiert sind. Ist nunmehr I eine normierte I-Abbildung, und sind $R_1, R_2, \ldots, R_p$ die von den Ketten einer Kettenbasis von I aufgespannten Fixräume, so zeigen wir, daß die induzierten Abbildungen I/R_j und $\tau_n(I)/R_j$ in R_j gleich orientiert sind ($j = 1, 2, \ldots, p$):

4.82 I sei normierte I-Abbildung des R^n ($n = 2m$), e sei erzeugender Vektor einer eingliedrigen Kettenbasis von I. Sei $e_j = (I^2+E)^{j-1}e$, $e_j' = Ie_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Die Determinante der Vektoren $e_1, e_1', e_2, \ldots, e_m, e_m'$ hat im Koordinatensystem mit den Grundvektoren $e, Ie, \ldots, I^{n-1}e$ den Wert 1: die geordneten n-Tupel $e, Ie, \ldots I^{n-1}e$ und $e_1, e_1', e_2, \ldots, e_m, e_m'$ sind gleich orientiert. Sei L_j der von $(I^2+1)^{j-1}$ annullierte Teilraum [14]) von R^n, es gilt $R^n = L_{m+1} \supset L_m \supset \ldots \supset L_2 \supset L_1 = 0$; die Vektoren $e_1 = e$ und e_1' liegen in $L_{m+1} - L_m$, e_2 und e_2' in $L_m - L_{m-1}, \ldots, e_m$ und e_m' in $L_2 - L_1$. Ist $f(\xi)$ ein reelles Polynom, so bildet $f(I)$ den Teilraum L_j entweder auf sich oder in L_{j-1} ab ($j = 2, 3, \ldots, m+1$), je nachdem ob $f(\xi)$ zu (ξ^2+1) teiler-

---

[14]) Unter dem von einer Abbildung A annullierten Teilraum $L \subset R^n$ verstehen wir die Gesamtheit der Vektoren $x \in R^n$, für welche $Ax = 0$; L ist Fixraum der Abbildung A.

fremd ist oder nicht. Ersetzt man den in $L_{m+2-j} - L_{m+1-j}$ liegenden Vektor e_j' durch einen solchen Vektor e_j'', daß $e_j'' - e_j' \in L_{m+1-j}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, so ist auch das n-Tupel $e_1, e_1'', e_2, \ldots, e_m, e_m''$ linear unabhängig und — in dieser Reihenfolge — gleich orientiert wie das geordnete n-Tupel $e_1, e_1', e_2, \ldots, e_m, e_m'$. Setzen wir $e_j'' = \tau_n(I)e_j$, so ist $e_j'' - e_j' = (\tau_n(I) - I)e_j$ und, da $\tau_n(\xi) - \xi$ auf Grund von 4.62 durch $(\xi^2 + 1)$ teilbar ist, $e_j'' - e_j' \in L_{m+1-j}$ $(j = 1, 2, \ldots m)$. Da die Vektoren $e_1, e_j'', \ldots, e_m, e_m''$ eine Kettenbasis der speziellen I-Abbildung $\tau_n(I)$ bilden, folgt daraus, daß I und $\tau_n(I)$ gleich orientiert sind, zusammenfassend also: I und $\varrho_n(I)$ sind gleich orientiert.

4.9 Spezielle I-Abbildungen sind vollreduzibel. (Eine Abbildung nennen wir vollreduzibel, wenn ihre Elementarteiler keine mehrfachen Wurzeln haben.) Eine I-Abbildung ist genau dann vollreduzibel, wenn sie ein System von komplementären Fixebenen besitzt.

4.91 Ist I eine vollreduzible I-Abbildung, so gibt es zu jedem Fixraum R von I einen komplementären Fixraum S. Beweis: $f_1, f_2, \ldots, f_p$ seien die voneinander verschiedenen Elementarteiler von I; die zugehörigen Fixräume $L_1, L_2, \ldots, L_p$ sind komplementär. Sei $R_j = R \cap L_j$, $L_j = I/R_j$; wir zeigen, daß in L_j ein zu R_j komplementärer Fixraum S_j von I_j existiert $(j = 1, 2, \ldots p)$: S ist dann die lineare Hülle aller S_j.

Ist $R_j = L_j$, so besteht S_j nur aus dem Nullvektor. Anderenfalls sei $x \in L_j - R_j$. Da $f_j(\xi) = (\xi - \alpha_j)^2 + \beta^2{}_j$ $(\beta_j \neq 0)$ das Minimalpolynom von I_j ist, bilden x, I_jx eine Kette von I_j; der durch diese Kette aufgespannte Teilraum von L_j hat mit R_j nur den Nullvektor gemeinsam: wäre nämlich $(\lambda E + \mu I_j)x \in R_j$, so müßte, da $\lambda E + \mu I_j$ regulär ist, x in R_j liegen. Wiederholt man dieses Verfahren genügend oft, so gelangt man schließlich zu einem in L_j zu R_j komplementären Fixraum S_j der Abbildung I_j $(j = 1, 2, \ldots p)$.

4.92 I sei vollreduzibel, f das Minimalpolynom von I; $g(\xi)$ sei ein zu $f(\xi)$ teilerfremdes Polynom mit der Eigenschaft, daß der Imaginärteil von $g(\alpha + i\beta)$ positiv ist für jede Wurzel $\alpha + i\beta$ von $f(\xi)$ mit positivem Imaginärteil β. (Diese Voraussetzung ist z.B. erfüllt, wenn $g(\xi) = \lambda + \mu\xi$, $\mu > 0$). Dann gilt $\varrho_n(I) = \varrho_n(g(I))$. Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $\varrho_n(I)x = \varrho_n(g(I))x$ für Vektoren x, die durch einen Primteiler $p(\xi)$ von $f(\xi)$ auf Null abgebildet werden (d.h. $p(I)x = 0$). Ist $p(\xi) = (\xi - \alpha)^2 + \beta^2$, $\beta > 0$, so wird $Ix = \alpha x + \beta\varrho_n(I)x$ und, da $\varrho_n(I)$ in R^n eine komplexe Struktur definiert, $g(I)x = \lambda x + \mu\varrho_n(I)x$, wobei

$\lambda + i\mu = g(\alpha + i\beta)$ gesetzt ist. Aus $\mu > 0$ folgt aber $\varrho_n(g(I))x = \frac{1}{\mu}(g(I)x - \lambda x) = \varrho_n(I)x$.

(Dagegen ist $\varrho_n(-I) = -\varrho_n(I)$ nach 4.5.)

§ 5. I - Abbildungen in orthogonalen Vektorräumen.

5.1 Eine nichtleere Menge $\mathfrak{O}$ von Koordinatensystemen des reellen Vektorraumes R^n nennen wir eine orthogonale Struktur in R^n, wenn mit dem Koordinatensystem der Grundvektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathfrak{O}$ auch sämtliche daraus durch orthogonale Koordinatentransformation hervorgehenden Koordinatensysteme, und nur diese, zu $\mathfrak{O}$ gehören. Ein System aus $\mathfrak{O}$ nennen wir orthogonal.

Sind $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ und $y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j$ Vektoren in R^n, so verstehen wir unter ihrem Skalarprodukt $x \,.\, y$ die reelle Zahl $\sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j$, unter der Länge $|x|$ des Vektors x die nichtnegative Zahl $\sqrt{x \,.\, x}$. Zwei Vektoren x, y heißen orthogonal, wenn $x \,.\, y = 0$; die Grundvektoren eines orthogonalen Koordinatensystems sind paarweise orthogonal und haben gleiche Längen.

5.2 Jeder Abbildung A ist durch die Relation $x \,.\, Ay = A'x \,.\, y$ in eindeutiger Weise eine Abbildung A' zugeordnet: ihre Transponierte. A und A' werden in orthogonalen Koordinatensystemen durch transponierte Matrizen dargestellt. Eine Abbildung heißt symmetrisch, wenn sie mit ihrer Transponierten, orthogonal, wenn sie mit der Inversen ihrer Transponierten übereinstimmt. Die identische Abbildung ist symmetrisch und orthogonal; die Menge der orthogonalen Abbildungen ist eine Gruppe.

5.21 Eine Abbildung A heißt schiefsymmetrisch, wenn $A + A' = 0$; in einem orthogonalen Koordinatensystem wird A durch eine schiefsymmetrische Matrix dargestellt. Aus $A + A' = 0$ folgt $x \,.\, Ax = x \,.\, A'x = -x \,.\, Ax = 0$ für jeden Vektor x, und umgekehrt: Eine Abbildung ist genau dann schiefsymmetrisch, wenn Vektor und Bildvektor stets orthogonal sind.

Ist L ein Fixraum von A, so ist der zu L total-orthogonale Teilraum L' ebenfalls Fixraum von A; ist nämlich $e \in L'$, $x \in L$, so gilt $0 = e \,.\, Ax = -x \,.\, Ae$: $Ae \in L'$.

5.22 Schiefsymmetrische Abbildungen sind vollreduzibel. Beweis: A sei schiefsymmetrisch, $f^r(A)$ singulär, $r > 1$. Die von $f(A)$ auf Null abgebildeten Vektoren bilden einen Fixraum L von A; sei L' wie in 5.21 erklärt. Ist $f^r(A)x = 0$, $x = e + e'$, $e \in L$, $e' \in L'$, so gilt $0 = f^r(A)e' = f(A)f^{r-1}(A)e'$, d.h. $f^{r-1}(A)e' \in L$ und daher $f^{r-1}(A)x = f^{r-1}(A)e' = 0$. Durch Wiederholung dieses Verfahrens gelangt man zum Schluß, daß $f^r(A)x = 0$ genau dann, wenn $f(x)A = 0$: Die Elementarteiler von A sind einfach, A somit vollreduzibel.

5.23 A sei schiefsymmetrisch, x ein (reeller) Eigenvektor von A, d.h. $Ax = \lambda x$. Aus $0 = x \,.\, Ax = \lambda(x \,.\, x)$ folgt, daß entweder $\lambda = 0$ oder $x = 0$: Eine reguläre schiefsymmetrische Abbildung ist I-Abbildung (solche gibt es also nur in Räumen gerader Dimensionszahl).

5.3 U sei eine schiefsymmetrische Matrix, deren unterhalb der Hauptdiagonale stehende Elemente u_{jk} Unbestimmte sind. Bei ungerader Dimensionszahl n verschwindet die Determinante $D(U)$ identisch, bei gerader Dimensionszahl ist sie das Quadrat einer von Null verschiedenen ganzen rationalen Funktion $P(U)$ der Unbestimmten u_{jk} $(j, k = 1, 2, \ldots, n;\ j > k)$. $P(U)$ sei so normiert, daß das Glied $u_{21} \,.\, u_{43} \ldots u_{n,\, n-1}$ den Koeffizienten $+\,1$ hat: $P(U)$ ist das Pfaffsche Aggregat [15]) der Matrix U. Eine reelle schiefsymmetrische Matrix, bzw. ihr Pfaffsches Aggregat, erhält man aus U, bzw. $P(U)$, durch Spezialisierung.

5.31 T sei eine Matrix, deren Elemente t_{jk} Unbestimmte sind $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$, T' ihre Transponierte; mit U ist auch TUT' schiefsymmetrisch.

Wir zeigen, daß $P(TUT') = D(T) \,.\, P(U)$, wobei $D(T) = \det T$.

Beweis: Aus dem Multiplikationssatz der Determinanten folgt zunächst $P^2(TUT') = D^2(T)\, P^2(U)$. $P(U)$, $P(TUT')$, $D(T)$ sind ganze rationale Funktionen der Unbestimmten u_{jk}, t_{jk}; da sie nicht Null sind, so folgt weiter $P(TUT') = \varepsilon D(T) \,.\, P(U)$, $\varepsilon = \pm 1$. Diese Identität bleibt richtig bei beliebiger Spezialisierung der Unbestimmten t_{jk}; setzen wir $T = E$, so ergibt sich $\varepsilon = 1$. Für orthogonales T folgt mit $T' = T^{-1}$, $D(T) = \pm 1$:

$$P(TUT^{-1}) = \operatorname{sign} D(T) \,.\, P(U)$$

5.4 Im orientierten orthogonalen Vektorraum V^n sind nur noch diejenigen orthogonalen Koordinatensysteme zuläßig, deren Grundvektoren die positive Orientierung bestimmen. Zwei solche Koordinatensysteme gehen durch eine orthogonale Koordinatentransformation von positiver Determinante auseinander hervor. Ist A eine reguläre schiefsymmetrische Abbildung (also n gerade), so hat das Pfaffsche Aggregat der darstellenden Matrix in jedem zuläßigen Koordinatensystem den gleichen Wert: wir nennen es das Pfaffsche Aggregat der schiefsymmetrischen Abbildung.

---

[15]) Vgl. [5] Theor. 10.2.

5.5 A sei regulär schiefsymmetrisch; die von A — als einseitiger Abbildung — induzierte Orientierung des Raumes sei die positive. Nach 5.21 und 5.22 besitzt A m paarweise orthogonale Fixebenen ($n = 2m$); ein System von Einheitsvektoren $e_1, e_2, \ldots, e_m$, das aus jeder dieser Ebenen einen Vektor enthält, erzeugt eine orthogonale Kettenbasis $e_1, Ae_1, e_2, \ldots, Ae_m$ von A; zur Berechnung des Pfaffschen Aggregates von A setzen wir $|Ae_j| = \lambda_j$, $e'_j = \frac{1}{\lambda_j} Ae_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Die Vektoren $e_1, e'_1, e_2, \ldots, e_m, e'_m$ bilden in dieser Reihenfolge ein positiv orientiertes orthogonales Koordinatensystem; die A in diesem System darstellende Matrix kann also zur Berechnung des Pfaffschen Aggregates der Abbildung A herangezogen werden. Ihre Elemente sind $\alpha_{2j,\,2j-1} = \lambda_j$, $\alpha_{jk} = 0$ für $j - k \neq \pm 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$, ihr Pfaffsches Aggregat hat somit (5.3) den Wert $\lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3, \ldots \lambda_m$, ist also positiv: das Vorzeichen des Pfaffschen Aggregates der Abbildung A stimmt mit der von A induzierten Orientierung überein.

Die Determinante der orthogonalen Kettenbasis von A ist gleich $\lambda_1 . \lambda_2 \ldots \lambda_m$, somit ergibt sich

Satz II: *Im orientierten orthogonalen Vektorraum ist das Pfaffsche Aggregat einer regulären schiefsymmetrischen Abbildung A gleich dem Volumen einer beliebigen orthogonalen Kettenbasis von A.*

5.6 *Orthogonale spezielle I—Abbildungen*

Die spezielle I-Abbildung I ist genau dann orthogonal, wenn sie schiefsymmetrisch ist; aus $I^2 = -E$ und $I' = I^{-1}$ folgt nämlich $I' = -I$, umgekehrt ergibt sich aus $I^2 = -E$ und $I = -I'$, daß $I' = I^{-1}$.

Zwei orthogonale spezielle I-Abbildungen I_1, I_2 sind orthogonal ähnlich. Beweis: T bilde eine orthogonale Kettenbasis von I_1 auf eine solche von I_2 ab; T ist orthogonal, und es gilt $I_2 = TI_1T^{-1}$.

5.61 Wir definieren eine Funktion χ_n, welche jeder speziellen I-Abbildung I des R^n eine orthogonale spezielle I-Abbildung zuordnet; orthogonal ähnlichen speziellen I-Abbildungen entsprechen dabei wiederum orthogonal ähnliche Abbildungen:

Sei $I = GP$ die (eindeutig bestimmte) Darstellung der speziellen I-Abbildung I als Produkt einer orthogonalen Abbildung G und einer positiv definiten symmetrischen Abbildung P [16]). Wir zeigen, daß G schiefsymmetrisch, also eine orthogonale spezielle I-Abbildung ist.

---

[16]) Vgl. [4] S. 14—16.

Beweis: Es gibt ein orthogonales Koordinatensystem $e_1, e_2, \ldots, e_n$, sodaß $Pe_j = \pi_j e_j$, $\pi_j > 0$ [17]), $j = 1, 2, \ldots, n$. Sei $\gamma_{jk} = e_j \,.\, Ge_k$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$ $(n = 2m)$. Aus $GP = -P^{-1}G'$ folgt $\pi_k \gamma_{jk} = -\frac{1}{\pi_j}\gamma k_j$, $-\frac{1}{\pi_k}\gamma_{jk} = \pi_j \gamma_{kj}$, und daher $\gamma_{jk}^2 = \gamma_{kj}^2$, $\gamma_{jk} = -\gamma_{kj}$: G ist schiefsymmetrisch.

Man setze nun $\chi_n(I) = G$.

5.62 Die Orientierung der Abbildung $\chi_n(I)$ stimmt mit derjenigen von I überein. Beweis: Sei $I = \chi_n(I)P$, die Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$ seien wie in 5.61 gewählt. Unter ihnen gibt es m Vektoren, welche eine Kettenbasis von $\chi_n(I)$ — und damit auch eine solche von I — erzeugen, dies seien etwa die Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_m$ $(m = n/2)$.

Es ist $Ie_j = \chi_n(I)Pe_j = \pi_j \chi_n(I)e_j$. Da $\pi_j > 0$, bestimmen die Vektoren e_j, Ie_j dieselbe Orientierung wie die Vektoren $e_j\, \chi_n(I)e_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

5.63 Ist I eine beliebige I-Abbildung des orientierten orthogonalen Vektorraumes V^n, so wird ihr durch die Funktion $\chi_n \varrho_n$ die orthogonale spezielle I-Abbildung $\chi_n \varrho_n(I) = \chi_n(\varrho_n(I))$ zugeordnet. Nach 4.8, 5.5 und 5.62 ist die Orientierung von I gleich dem Vorzeichen des Pfaffschen Aggregates der Abbildung $\chi_n \varrho_n(I)$.

II. *Die Topologie der einseitigen Abbildungen*

§ 6. Konvergenzeigenschaften von Folgen linearer Abbildungen und ihrer Fixräume.

Durch eine orthogonale Struktur (vgl. § 5) wird der reelle Vektorraum R^n zu einem metrischen Raum: unter dem Abstand der Vektoren x, y verstehe man die reelle Zahl $|x - y|$.

6.1 Sei $\mathfrak{L}_n$ die Menge der linearen Abbildungen des R^n. In $\mathfrak{L}_n$ erklären wir einen Konvergenzbegriff: Die Folge $(A_j) \subset \mathfrak{L}_n$ heiße konvergent, wenn die Folge $A_j x$ für jeden Vektor $x \in R^n$ konvergiert. Ist die Folge $(x_j) \subset R^n$ konvergent, $A = \lim A_j$, $x = \lim x_j$, so gilt $\lim A_j x_j = Ax$. Für konvergente Folgen (A_j), $(B_j) \subset \mathfrak{L}_n$ ist $\lim (A_j \,.\, B_j) = \lim A_j \,.\, \lim B_j$, $\lim (A_j + B_j) = \lim A_j + \lim B_j$, $\lim A_j^{-1} = (\lim A_j)^{-1}$.

(A_j) nennen wir eine E-Folge, wenn $\lim A_j = E$; zwei Folgen (A_j), (B_j) sollen ähnlich heißen, wenn eine E-Folge (T_j) existiert, so daß $B_j = T_j A_j T_j^{-1}$ für $j = 1, 2, \ldots$

---

[17]) Vgl. [4] S. 13, Prop. 4.

6.2 Eine Folge (L_j^p) von p-dimensionalen Teilräumen des R^n nennen wir konvergent zum Limes L^p, wenn eine E-Folge $(A_j) \subset \mathfrak{L}_n$ existiert, derart daß $A_j L_j^p \subset L^p$. Dann und nur dann gilt $\lim L_j^p = L^p$, wenn die Häufungsvektoren einer Folge (x_j), welche aus jedem L_j^p genau einen Vektor enthält, in L^p liegen; insbesondere gibt es in jedem Element einer konvergenten Folge (L_j^p) eine Basis $x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^p$ so, daß die Folgen (x_j^k) konvergent sind, und daß die Vektoren $x^k = \lim x_j^k$ in L^p eine Basis bilden $(k = 1, 2, \ldots, p)$. Jede Folge p-dimensionaler Teilräume enthält eine konvergente Teilfolge.

6.21 (L_j^p), (K_j^q) seien konvergente Folgen komplementärer Teilräume, $L^p = \lim L_j^p$ und $K^q = \lim K_j^q$ seien ebenfalls komplementär; dann existiert eine E-Folge (T_j), für welche $T_j L_j^p \subset L^p$, $T_j K_j^q \subset K^q$. Beweis: Sind $x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^p$ und $y_j^1, y_j^2, \ldots, y_j^q$ konvergente Basissysteme in L_j^p und K_j^q, so streben die Abbildungen $T_j : x_j^k \to \lim x_j^k$, $y_j^l \to \lim y_j^l$, gegen E $(k = 1, 2, \ldots, 3, p;$ $l = 1, 2, \ldots, q;$ $j \to \infty)$.

6.3 Ist $f(\xi)$ ein reelles Polynom, so ist mit (A_j) auch $(f(A_j))$ eine konvergente Folge. L_j^p, L seien die von $f(A_j)$, $f(A)$ annullierten Teilräume, $A = \lim A_j$. Es gilt $\lim L_j^p \subset L$. Beweis: (x_j) sei eine konvergente Folge, welche aus jedem Teilraum L_j^p genau einen Vektor enthält, $x = \lim x_j$; auf Grund von 6.2 ist $\lim f(A_j) x_j = f(A) x$, und aus $x_j \in L_j^p$ folgt, daß $f(A_j) x_j = 0$, $f(A) x = 0$, d.h. $x \in L$.

6.4 (A_j) sei eine konvergente Folge, $A = \lim A_j$. Das charakteristische Polynom f der Abbildung A sei Produkt von zwei teilerfremden Polynomen g, h; L, K seien die von $g(A)$, $h(A)$ annullierten komplementären Fixräume von A. Dann gibt es für $j = j_1 + 1, j_1 + 2, \ldots$ eine Zerlegung des charakteristischen Polynoms f_j von A_j in teilerfremde Polynome g_j, h_j, sodaß die Folgen (L_j), (K_j) der von $g_j(A_j)$, $h_j(A_j)$ annullierten Fixräume von A_j gegen L, K streben.

Beweis: Wir geben Zerlegungen $f_j = g_j h_j$ an, derart daß $\lim g_j = g$, $\lim h_j = h$; für diese Folgen gilt dann auf Grund von 6.3: $\lim L_j = L$, $\lim K_j = K$. (Dabei heißt eine Polynomfolge (f_j) konvergent zum Limes f, wenn die Grade beschränkt sind, und wenn sämtliche Koeffizienten der Polynome $(f_j - f)$ gegen Null streben.) $\mathfrak{P}_r$, $\mathfrak{P}_s$, $\mathfrak{P}_n$ seien die Mengen aller Polynome mit den Graden r, s, n. Für $g \in \mathfrak{P}_r$, $h \in \mathfrak{P}_s$, $n = r + s$, bewirkt die Zuordnung π: $(g, h) \to gh$ eine stetige Abbildung des topologischen Produktes $\mathfrak{P}_r \times \mathfrak{P}_s$ in $\mathfrak{P}_n$. Setzen wir $g(\xi) = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j \xi^j$, $h(\xi) = \sum_{j=0}^{s} \beta_j \xi^j$,

$g(\xi)h(\xi) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \xi^j$, wobei $\gamma_j = \sum_{i=0}^{j} \alpha_i \beta_{j-i}$, $\alpha_i = 0$ für $i < 0$, $i > r$, $\beta_i = 0$ für $i < 0$, $i > s$, so wird $\frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} = \beta_{j-i}$, $\frac{\partial \gamma_j}{\partial \beta_i} = \alpha_{j-i}$; $i, j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Die Funktionaldeterminante von π ist also gleich der Resultante der Polynome g, h. Sind nun $g \in \mathfrak{P}_r$, $h \in \mathfrak{P}_s$ teilerfremde Polynome, so gibt es eine Umgebung von $(g, h) \subset \mathfrak{P}_r \times \mathfrak{P}_s$, welche topologisch auf eine Umgebung von $f = gh \subset \mathfrak{P}_n$ abgebildet wird, d.h. es gibt zu jeder konvergenten Folge $(f_j) \to f$ Zerlegungen der f_j in teilerfremde Faktoren g_j, h_j, so daß $\lim g_j = g$, $\lim h_j = h$.

6.5 $\mathfrak{V}\mathfrak{L}_n \subset \mathfrak{L}_n$ sei die Menge der vollreduziblen Abbildungen (vgl. 4.9). $\mathfrak{V}\mathfrak{L}_n$ ist dicht [18]) in $\mathfrak{L}_n$. Beweis: Für $A \in \mathfrak{L}_n$ seien $e_1, e_2, \ldots, e_p$ erzeugende Vektoren einer Kettenbasis, $f_1, f_2, \ldots, f_p$ ihre Minimalpolynome. Es gibt eine Folge (f_k^j) von Polynomen ohne mehrfache Wurzeln, so daß $\lim f_k^j = f_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$. Wir definieren für $j = 1, 2, \ldots$ Abbildungen A_j mit folgenden Eigenschaften: 1. die durch $e_1, e_2, \ldots, e_p$ erzeugte Kettenbasis von A ist auch eine Kettenbasis von A_j, 2. die Minimalpolynome der zu A_j gehörenden Kettenbasis sind die Polynome $f_1^j, f_2^j, \ldots, f_p^j$: A_j ist vollreduzibel und es gilt $\lim A_j = A$.

§ 7. Zusammenhang der Ähnlichkeitsklassen.

7.1 Eine Klasse positiv ähnlicher Abbildungen ist zusammenhängend. Beweis: Sei $B = TAT^{-1}$, $\det T > 0$; es gibt eine Abbildungsschar $T(s)$, $0 \leqq s \leqq 1$, so daß $T(0) = E$, $T(1) = T$, $T(s)$ regulär und daher $\det T(s) > 0$ [19]). $B(s) = T(s)AT(s)^{-1}$ ist ein Weg, welcher A mit B innerhalb der Klasse positiv ähnlicher Abbildungen verbindet, diese ist also zusammenhängend. Zweiseitige Ähnlichkeitsklassen sind daher zusammenhängend.

7.2 Hinreichend benachbarte ähnliche Abbildungen sind positiv ähnlich. Beweis: $\mathfrak{A}$ sei die Ähnlichkeitsklasse mit den invarianten Faktoren $f_1, f_2, \ldots, f_p$ (2.2), $(A_k) \subset \mathfrak{A}$ eine konvergente Folge, $\lim A_k = A_0 \in \mathfrak{A}$. Sind $e_1, e_2, \ldots, e_p$ erzeugende Vektoren einer minimalen (2.2) Kettenbasis von A_0 und $L_k^1, L_k^2, \ldots, L_k^p$ die durch $f_1(A_k), f_2(A_k), \ldots, f_p(A_k)$ annullierten Fixräume von A_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, so ist $R^n = L_k^1 \supset L_k^2 \supset L_k^3 \supset \ldots \supset L_k^p$. Nach 6.3 gilt $\lim L_k^j = L_0$, $j = 1, 2, \ldots, p$; es gibt daher eine E-Folge

---

[18]) Vgl. [2] S. 46.

[19]) Die Menge der regulären Abbildungen positiver Determinante ist zusammenhängend; vgl. [4] S. 16, Prop. 3.

(T_k) mit $T_k L_k^j = L_0^j$ $(j = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots)$. Sei $B_k = T_k A_k T_k^{-1}$; die Folgen (A_k), (B_k) sind für $k \geqq k'$ positiv ähnlich, und der durch $f_j(B_k)$ annullierte Fixraum von B_k ist L_0^j $(j = 1, 2, \ldots p)$. Für $k \geqq k''$ erzeugen daher die Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_p$ auch eine Kettenbasis von B_k, welche gleich orientiert ist wie diejenige von A_0: Für $k \geqq \max(k', k'')$ ist A_k zu A_0 positiv ähnlich.[33])

7.3 $\mathfrak{A}$ sei eine einseitige Ähnlichkeitsklasse. Nach 7.2 besteht $\mathfrak{A}$ aus zwei disjunkten, in $\mathfrak{A}$ offenen Mengen; mit 7.1 folgt, daß $\mathfrak{A}$ in zwei Komponenten zerfällt [20]).

§ 8. Topologische Eigenschaften der Menge aller I-Abbildungen.

8.1 $\mathfrak{J}_n$ sei die Menge aller I-Abbildungen des R^n. $\mathfrak{J}_n$ ist eine offene Menge in $\mathfrak{L}_n$. Beweis: Ist $I \in \mathfrak{J}_n$, $(A_k) \subset \mathfrak{L}_n$ eine konvergente Folge, $I = \lim A_k$, f_k das charakteristische Polynom von A_k, so konvergiert die Polynomfolge (f_k) gegen das charakteristische Polynom f von I; für $k \geqq k'$ kann f_k daher keine reellen Wurzeln haben (4), d.h. $A_k \in \mathfrak{J}_n$ für $k \geqq k'$: $\mathfrak{J}_n$ ist offen.

8.2 $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ sei die Menge aller speziellen I-Abbildungen; $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ ist eine einseitige Ähnlichkeitsklasse (4.2), nach 7.3 besteht $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ daher aus zwei Komponenten. Ist der Vektorraum orientiert, so nennen wir die beiden Komponenten $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ und $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^-$. Die in 4.4, 4.7 erklärte Funktion ϱ_n bildet $\mathfrak{J}_n$ auf $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ ab.

Satz III: *Die Funktion ϱ_n ist stetig.*

Der Beweis zu Satz III findet sich in § 10.

8.3 Im orientierten Vektorraum V^n bezeichnen wir mit $\mathfrak{J}_n^+$ die Menge der positiv, mit $\mathfrak{J}_n^-$ die Menge der negativ orientierten I-Abbildungen. Nach 4.8 bildet ϱ_n die Menge $\mathfrak{J}_n^+$ auf $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ ab, $\mathfrak{J}_n^-$ auf $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^-$. $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ ist offen in $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ (8.2): $\mathfrak{J}_n^+$ ist offen in $\mathfrak{J}_n$ (und daher auch in $\mathfrak{L}_n$)[21]); $\mathfrak{J}_n$ besteht daher aus mindestens zwei Komponenten.

8.4 Die Anzahl der Komponenten von $\mathfrak{J}_n$ ergibt sich aus

---

[33]) Ist $\mathfrak{A}$ die Ähnlichkeitsklasse von A, so wirkt die Gruppe $\mathfrak{R}\mathfrak{L}_n$ der regulären Abbildungen $\subset \mathfrak{L}_n$ als Transformationsgruppe auf $\mathfrak{A}$. Sei $\mathfrak{N}$ die Isotropiegruppe eines Punktes $A \in \mathfrak{A}$ (also der Normalisator von A); aus 7.2 folgt nun, daß die natürliche Abbildung des Faktorraumes $\mathfrak{R}\mathfrak{L}_n/\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{A}$ eine offene Abbildung und daher ein Homöomorphismus ist. (Vgl. [10], S. 28—30).

[20]) Vgl. [2] S. 47—349.

[21]) Vgl. [2] S. 53, Satz II.

Satz IV: $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ *ist Deformationsretrakt von* $\mathfrak{J}_n$ [22]).

Beweis: Wir konstruieren eine Schar $\varrho_{n,t}$ mit folgenden Eigenschaften: a) $\varrho_{n,0}(I) = I$ für $I \in \mathfrak{J}_n$, b) $\varrho_{n,t}(I) = I$ für $I \in \mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$, $0 \leqq t \leqq 1$, c) $\varrho_{n,t}(I) \in \mathfrak{J}_n$ für $I \in \mathfrak{J}_n$, $0 \leqq t \leqq 1$. Diese Eigenschaften hat die Schar $\varrho_{n,t}(I) = (1-t)I + t\varrho_n(I)$. a), b) sind erfüllt, zum Beweis von c) sei L ein Fixraum von I, für welchen $I/L = (\alpha E + \beta\sigma_n(I))\,/\,L, \beta > 0$ (vgl. 4.5). Es wird $\varrho_{n,t}(I)/L = ((1-t)\alpha E + (t - \beta t + \beta)\sigma_n(I))\,/\,L$. Der Punkt $((1-t)(\alpha + i\beta) + it)$ der komplexen Ebene ist für $0 < t < 1$ innerer Punkt der Verbindungsstrecke der Punkte i und $(\alpha + i\beta)$; daher ist $\varrho_{n,t}(I) \in \mathfrak{J}_n$ für $0 \leqq t \leqq 1$, $I \in \mathfrak{J}_n$.

8.41 $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ ist nach 8.4 Deformationsretrakt von $\mathfrak{J}_n^+$; mit 8.2 ergibt sich, daß $\mathfrak{J}_n^+$ zusammenhängend ist: $\mathfrak{J}_n$ besteht aus den zwei Komponenten $\mathfrak{J}_n^+$, $\mathfrak{J}_n^-$.

8.5 Aus 8.4 ist ersichtlich, daß $\varrho_{n,t}(TIT^{-1}) = T\varrho_{n,t}(I)T^{-1}$. Die Zuordnung ϑ_T: $I \to TIT^{-1}$ ist ein Autohomöomorphismus von $\mathfrak{J}_n$: Die Deformation $\varrho_{n,t}$ ist mit jedem Autohomöomorphismus ϑ_T vertauschbar.

8.6 Sei $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ die Menge der orthogonalen speziellen I-Abbildungen (wir benützen dazu z.B. die in § 6 eingeführte orthogonale Struktur), $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^+$ die Teilmenge der positiv, $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n^-$ die Teilmenge der negativ orientierten unter ihnen. Die in 5.61 eingeführte Funktion χ_n bildet $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ stetig [16]) auf $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ ab; χ_n ist orientierungserhaltend (5.62). Da $\chi_n(I) = I$ für $I \in \mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ (5.61), so ist $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ Retrakt [22]) von $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$. Diese Aussage verschärfen wir in

Satz IV': $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ *ist Deformationsretrakt von* $\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$.

Beweis: Sei $\chi_{n,t}(I) = \varrho_n((1-t)I + t\chi_n(I)), 0 \leqq t \leqq 1$, $I \in \mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$. Es ist $I = \chi_n(I)P$ (P symmetrisch, positiv definit), somit wird $((1-t)I + t\chi_n(I))^2 = -(1-2t+2t^2)E - t(1-t)(P + P^{-1})$. Sind $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ die Eigenwerte von P, so sind $\lambda_k =$

$$-(1-2t+2t^2) - t(1-t)\left(\pi_k + \frac{1}{\pi_k}\right),\ k = 1, 2, \ldots, n, \text{ die Eigenwerte}$$

von $((1-t)I + t\chi_n(I))^2$. Für $0 \leqq t \leqq 1$ ist $\lambda_k < 0$, d.h. $(1-t)I + t\chi_n(I) \in \mathfrak{J}_n$ und daher $\varrho_n((1-t)I + \chi_n(I)) \in \mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$. Da $\chi_{n,0}(I) = \varrho_n(I) = I$ und $\chi_{n,1}(I) = \varrho_n(\chi_n(I)) = \chi_n(I)$, so ist $\chi_{n,t}$

[22]) Ist f stetige Abbildung eines topologischen Raumes R auf eine Teilmenge $X \subset R$, und ist f auf X die Identität, so nennen wir X einen Retrakt von R. Kann f, unter Festhaltung der Werte auf X, in die Identität von R deformiert werden, so nennen wir X einen Deformationsretrakt von R. In diesem Fall sind zwei Punkte $p, q \in R$ genau dann durch einen Weg verbindbar, wenn die Punkte $f(p), f(q)$ es in X sind. Vgl. [10] § 11, Covering Homotopy.

eine Deformation der Funktion χ_n in die Identität auf $\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n$.
8.7 Die Deformation $\chi_{n,t}$ ist mit jedem Autohomöomorphismus ϑ_T (T orthogonal) vertauschbar (vgl. 8.5).
8.8 Durch die Sätze IV und IV' ist die topologische Untersuchung von $\mathfrak{J}_n^+$ weitgehend auf diejenige von $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^+$ zurückgeführt: beide Mengen haben dieselben Homologie- und Homotopieeigenschaften. $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^+$ kann für $n > 2$ in Mengen $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_{n-2}^+$ zerlegt werden: e sei ein Einheitsvektor in R^n, L^{n-1} der zu e totalorthogonale Teilraum von R^n, S^{n-2} die von den Einheitsvektoren in L^{n-1} gebildete $(n-2)$-dimensionale Sphäre. Sei $x \in S^{n-2}$; die orthogonalen speziellen I-Abbildungen von $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^+$, welche e in x überführen, bilden eine zu $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_{n-2}^+$ homöomorphe Teilmenge von $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^+$. $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^+$ ist daher ein Faserbündel [23]) über S^{n-2} mit der Faser $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_{n-2}^+$. Da $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_2^+$ nur aus einem Punkt besteht, ist (für $n > 2$) $\mathfrak{O}\mathfrak{Sp}\,\mathfrak{J}_n^+$ eine geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension $(n^2 - 2n)/4$. Ihre Homologiegruppen sowie einige ihrer Homotopiegruppen sind bekannt [24]).

§ 9. Topologische Eigenschaften der Menge aller einseitigen Abbildungen.

9.1 Da die Grade der Elementarteiler einer einseitigen Abbildung gerade Zahlen sind, so ist jede einseitige Abbildung Limes einer Folge vollreduzibler I-Abbildungen (6.5): Die Menge der einseitigen Abbildungen ist in der abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{J}_n$ enthalten.
9.2 Jede einseitige Abbildung, die nicht I-Abbildung ist, tritt auf als Limes einer Folge vollreduzibler zweiseitiger Abbildungen: $\mathfrak{J}_n$ ist offener Kern der Menge aller einseitigen Abbildungen.
9.3 Mit I ist auch $I_k = \frac{1}{k} I$ eine I-Abbildung. Die Folge (I_k) konvergiert gegen die Nullabbildung; die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{J}}_n$ von $\mathfrak{J}_n$ enthält also zweiseitige Abbildungen: Die Menge der einseitigen Abbildungen ist eine echte Teilmenge von $\overline{\mathfrak{J}}_n$, ihre abgeschlossene Hülle ist $\overline{\mathfrak{J}}_n$.
9.4 Die Menge der einseitigen Abbildungen ist für $n \geqq 4$ zusammenhängend. Beweis: Es genügt zu zeigen, daß eine konvergente Folge negativ orientierter einseitiger Abbildungen des orientierten Vektorraums V^4 existiert, deren Limes eine positiv

---

[23]) Vgl. [10] S. 216, Theor. 41.18.
[24]) Vgl. [7] S. 11—12.

orientierte einseitige Abbildung ist. Für $t \neq 0$ definiert die Matrizenschar [25])

$$\begin{Vmatrix} 0, & t^2, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & t\sqrt{2} \\ 0, & 0, & 0, & t^2 \\ 0, & -t\sqrt{2} & 1, & 0 \end{Vmatrix}$$

eine Schar I_t von I-Abbildungen. Die Abbildung $H = \lim_{t\to 0} I_t$ ist einseitig; die Grundvektoren e_1 und e_3 erzeugen nämlich wegen $H^2 = 0$, $He_1 = e_2$, $He_3 = e_4$ eine Kettenbasis von H, deren Orientierung die positive ist. Für die Abbildung I_t $(t \neq 0)$ gilt jedoch: $I_t e_1 = e_2$, $I_t^2 e_1 = t^2 e_1 - t\sqrt{2}\, e_4$, $I_t^3 e_1 = -t^2 e_2 - t^3\sqrt{2}\, e_3$, $I_t^4 e_1 = -t^4 e_1$; der Vektor e_1 erzeugt also eine Kettenbasis von I_t $(t \neq 0)$, sein I_t-Minimalpolynom ist $\xi^4 + t^4$, $\det(e_1, I_t e_1, I_t^2 e_1, I_t^3 e_1) = -2t^4$: die Kettenbasis von I_t daher negativ orientiert.

9.5 $\mathfrak{M}$ sei eine Menge von einseitigen Abbildungen. Die Orientierung der einseitigen Abbildungen deuten wir als Funktion auf $\mathfrak{M}$ und nennen sie stetig (auf $\mathfrak{M}$), wenn — für jede konvergente Folge $(A_j) \subset \mathfrak{M}$ mit $\lim A_j \in \mathfrak{M}$ — fast alle Abbildungen A_j gleich orientiert sind wie $\lim A_j$.

Nach 7.3 ist die Orientierung stetig auf jeder einseitigen Ähnlichkeitsklasse. Aus 8.3 folgt, daß sie auch stetig ist auf der Menge aller I-Abbildungen, aus 9.4 jedoch, daß die Orientierung für $n \geqq 4$ unstetig ist auf der Menge aller einseitigen Abbildungen.

9.6 Für $n = 2$ ist die Orientierung eine stetige Funktion auf der Menge aller einseitigen Abbildungen des V^2, diese besteht daher aus zwei Komponenten. Beweis: Wir legen ein festes, positiv orientiertes Koordinatensystem zu Grunde und stellen die einseitigen Abbildungen durch Matrizen dar. Sind a_{jk} die Elemente einer einseitigen Matrix A und x_1, x_2 die Komponenten eines Vektors, so ist $a_{21}x_1^2 + (a_{22} - a_{11})x_1 x_2 - a_{12}x_2^2$ die Determinante des Vektorpaars x, Ax. Diese quadratische Form ist wegen der Einseitigkeit von A semidefinit, und zwar positiv, wenn $a_{21} - a_{12} > 0$, negativ für $a_{21} - a_{12} < 0$; das Vorzeichen von $a_{21} - a_{12}$ stimmt mit der Orientierung von A überein, $a_{21} - a_{12}$ ist eine stetige Funktion von A. (Ist A schiefsymmetrisch, so ist $(a_{21} - a_{12})/2$ das Pfaffsche Aggregat von A.)

§ 10. Die Stetigkeit der Funktion ρ_n.

Den Beweis zu Satz III führen wir vollständig im Reellen; in einem Anhang zeigen wir sodann, daß dieser Beweis sich unter

---

[25]) Dieses Beispiel verdanke ich Herrn Dr. E. Specker.

Benutzung der de Rhamschen Definition von ϱ_n [2]) im Komplexen viel einfacher führen läßt.

10.1 Da die Menge der vollreduziblen I-Abbildungen in $\mathfrak{J}_n$ dicht ist (6.5), genügt es zu zeigen, daß jede konvergente Folge vollreduzibler I-Abbildungen (A_k) mit $\lim A_k = I \in \mathfrak{J}_n$ eine Teilfolge (A_{k_j}) besitzt, für welche $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho_n(A_{k_j}) = \varrho_n(I)$. Wegen $\varrho_n(TIT^{-1}) = T\varrho_n(I)T^{-1}$ (4.7) kann die Folge (A_k) durch eine beliebige ähnliche Folge (6.1) (B_k) ersetzt werden; erfüllt das Polynom $f(\xi)$ die Voraussetzung von 4.92, so kann (B_k) durch $\big(f(B_k)\big)$ ersetzt werden.

10.2 Für $n = 2$ ergibt sich der Beweis von Satz III aus der Darstellung

$$\varrho_2(I) = \frac{1}{\sqrt{\det(I) - \frac{1}{4}(sp(I))^2}}\left(I - \tfrac{1}{2}\,sp(I)E\right)$$

$\big(sp(I) = \text{Spur der Abbildung } I\big)$.

10.3 Satz III sei bereits bewiesen für alle I-Abbildungen, deren charakteristisches Polynom f von der Form $((\xi-\alpha)^2+\beta^2)^m$ ist, sowie für alle Dimensionen $< n (n \geqq 4)$. Sei $I \in \mathfrak{J}_n$, $f = ((\xi-\alpha)^2+\beta^2)^{n/2}$, $\beta > 0$, (A_k) eine konvergente Folge vollreduzibler I-Abbildungen, $\lim A_k = I$; auf Grund der Bemerkung am Schluß von 10.1 dürfen wir annehmen, daß $I \in \mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$ $\Big($man wähle $f(\xi) = \tau_n\Big(\frac{1}{\beta}(\xi-\alpha)\Big)\Big)$. Für $k = 1, 2, \ldots$ sei L_k ein $(n-2)$-dimensonaler Fixraum von A_k (4.91); (L_k) enthält eine konvergente Teilfolge (L_{k_j}), und $L = \lim\limits_{j\to\infty} L_{k_j}$ ist ein Fixraum von I (6.2). Es gibt somit eine zu (A_{k_j}) ähnliche Folge (B_j), sodaß $B_jL \subset L$ für $j = 1, 2, \ldots$ Sei S eine zu L komplementäre Fixebene von I, $e_1 \in S$, $e_2 = Ie_1 \in S$. Da $\lim B_je_1 = e_2$, so gibt es eine zu (B_j) ähnliche Folge (I_j) derart, daß $I_jL \subset L$, $I_je_1 = e_2$, $\lim I_j = I$, $j = 1, 2, \ldots$. K_j sei eine zu L komplementäre Fixebene von I_j.

Die Darstellung $e_1 = \alpha_jx_j + \beta_jy_j$, wobei $x_j \in K_j$, $y_j \in L$, $|x_j| = 1$, $|y| = 1$, $\beta_j > 0$, ist eindeutig. Setzt man $z_j = I_jx_j \in K_j$, so wird mit $t_j = I_jy_j \in L$: $e_2 = \alpha_jz_j + \beta_jt_j$, $I_je_2 = -e_1 + \beta_j(y_j + I_jt_j)$. Aus $Ie_2 = -e_1$ folgt $\lim I_je_2 = -e_1$ und somit auch $\lim \beta_j(y_j + I_jt_j) = 0$ oder, was gleichbedeutend ist,

$$(*) \qquad \lim \beta_j(I_j^2 + E)y_j = 0$$

Da I_j mit $\varrho_n(I_j)$ vertauschbar ist, dürfen wir $I_j^2 + E = (I_j + \varrho_n(I_j))(I_j - \varrho_n(I_j))$ setzen. Da $(I_j \pm \varrho_n(I_j))L \subset L$, so gilt $\beta_j(I_j^2+E)y_j = ((I_j + \varrho_n(I_j))/L)\beta_j(I_j - \varrho_n(I_j))y_j$. Laut Induktionsvoraussetzung ist $\lim \varrho_n(I_j)/L = I/L$, woraus wir mit (*) schließen, daß

$$(**) \qquad \lim \beta_j(I_j - \varrho_n(I_j))y_j = 0$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$\varrho_n(I_j)e_1 = e_2 + \beta_j(t_j - \varrho_n(I_j)y_j) = e_2 + \beta_j(I_j - \varrho_n(I_j))y_j,$$
$$\varrho_n(I_j)e_2 = -e_1 + \beta_j(y_j + \varrho_n(I_j)t_j) = -e_1 + \varrho_n(I_j)\beta_j(I_j - \varrho_n(I_j))y_j.$$

Mit (**) folgt endlich $\lim \varrho_n(I_j)/S = I/S$ und somit

$$\lim \varrho_n(I_j) = I$$

10.4 Sei nun I eine beliebige I-Abbildung mit dem charakteristischen Polynom f; $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \ldots f_p$ sei die Zerlegung von f in teilerfremde Faktoren, mit $L_1, L_2, \ldots, L_p$ bezeichnen wir die zu $f_1, f_2, \ldots, f_p$ gehörenden Fixräume von I. (A_k) sei eine konvergente Folge vollreduzibler I-Abbildungen mit dem Limes I. Auf Grund von 6.4 existiert eine zu (A_k) ähnliche Folge (I_k), so daß $I_k L_j \subset L_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$; $k = 1, 2, \ldots$ Für I/L_j und $(I_k)/L_j$ sind die Voraussetzungen von 10.3 erfüllt, somit gilt $\lim \varrho_n(I_k) = \varrho_n(I) : \varrho_n$ ist stetig.

III. *Anwendungen auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten*

§ 11. Orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

11.1 In einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^n sei ein System von Parameterumgebungen gegeben, d.h. eine Ueberdeckung von M^n durch endlich viele offene Mengen $U_1, U_2, \ldots, U_p$ die auf den Einheitswürfel E^n des n-dimensionalen euklidischen Raumes R^n topologisch abgebildet sind, derart daß mit $h_j : U_j \to E^n$ die in den Durchschnitten $U_j \cap U_k \neq 0$ induzierten Abbildungen $h_{jk} = h_j^{-1} h_k$ von E^n auf sich stetig differenzierbar sind und ihre Funktionaldeterminanten nicht verschwinden. Die durch den Homöomorphismus h_j^{-1} in U_j gegebene Beschreibung der Punkte von U_j durch n-Tupel reeller Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nennen wir das zu U_j gehörende Parametersystem. Eine offene Menge $V \subset M^n$, welche auf E^n topologisch abgebildet ist, nennen wir eine zuläßige Parameterumgebung, wenn $U_1, U_2, \ldots, U_n, V$ ein System von Parameterumgebungen bilden. M^n heißt orientierbar, wenn ein System von Parameterumgebungen existiert, so daß die Funktionaldeterminanten der Abbildungen $h_j^{-1} h_k$ alle positiv sind [22]).

[26]) Vgl. [10] S. 21—22.

11.2 Sei $p \in M^n$, U_x eine den Punkt p enthaltende Parameterumgebung, h: $U_x \to E^n$. Einen ganz in U_x verlaufenden Weg $p(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ durch p nennen wir differenzierbare Kurve, wenn die Funktionen $x_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ stetig differenzierbar sind. Den Tangentialvektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ an die Kurve $hp(t) \subset E^n$ im Punkte hp nennen wir den Tangentialvektor a von M^n an die Kurve $p(t)$ im Punkte p, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ seine Komponenten in der Parameterumgebung U_x. Die Tangentialvektoren im Punkte $p \in M^n$ bilden einen n-dimensionalen Vektorraum R^n_p, den Tangentialraum in p. Ein zu U_x gehörendes Koordinatensystem in R^n_p geben wir durch die Grundvektoren $e^U_1, e^U_2, \ldots, e^U_n$ (k-te Komponente von $e^U_j = \delta_{jk}$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$). Eine Schar von linearen Selbstabbildungen A_p der Tangentialräume R^n_p von M^n heißt stetig im Punkte $p_0 \in U_x$, wenn die Matrix, welche A_p im Koordinatensystem von R^n_p $(p \in U_x)$ darstellt, stetig von $x \in E^n = hU_x$ abhängt; stetig auf M^n, wenn sie in jedem Punkt von M^n stetig ist. Eine orientierbare Mannigfaltigkeit M^n gibt Anlaß zu zwei orientierten Mannigfaltigkeiten OM^n_1 und OM^n_2. In einer OM^n gibt es ein System von Parameterumgebungen, so daß die zugehörigen Koordinatensysteme in den Tangentialräumen die Orientierung von OM^n induzieren.

11.3 Im euklidischen R^n sei eine komplexe Struktur gegeben (4.1, 4.2). Eine OM^n $(n = 2m)$ gestattet eine komplexe Struktur, wenn es ein System von zuläßigen Parameterumgebungen gibt, so daß die in den Durchschnitten $U_x \cap U_y \neq 0$ (vermöge der komplexen Struktur in $E^n \subset R^n$) entstehenden komplexen Parametertransformationen komplex-analytisch sind, und wenn die natürlichen Orientierungen der (nunmehr mit komplexer Struktur versehenen) Tangentialräume mit derjenigen von OM^n übereinstimmen (4.2). Die durch die komplexen Strukturen in den Tangentialräumen definierten speziellen I-Abbildungen I_p (4.2) bilden eine stetige Schar in OM^n. Führt man in OM^n an Stelle der reellen Parameter die komplexen ein, so wird OM^n zu einer komplexen Mannigfaltigkeit.

11.4 Eine OM^n heißt I-Mannigfaltigkeit, wenn es eine stetige Schar I_p von I-Abbildungen gibt, welche in den Tangentialräumen die Orientierung von OM^n induziert [27]); fastkomplex [4]), wenn die I_p spezielle I-Abbildungen sind. Eine fastkomplexe OM^n ist I-Mannigfaltigkeit; eine mit der natürlichen Orientierung ver-

[27]) Der Begriff der I-Mannigfaltigkeit findet sich erstmals in [8].

sehene komplexe Mannigfaltigkeit ist eine fastkomplexe OM^n.

11.41 Gibt es in einer M^n eine Schar I_p von I-Abbildungen, so wird M^n durch die Orientierungen der I_p in natürlicher Weise zu einer OM^n [3]).

11.5 Ist eine OM^n I-Mannigfaltigkeit, I_p die gegebene I-Schar, so ist $\varrho_n(I_p)$ eine stetige Schar spezieller I-Abbildungen (Satz III): Eine I-Mannigfaltigkeit ist fastkomplex. Die komplexe projektive Ebene [28]) ist daher nur in einer der beiden Orientierungen I-Mannigfaltigkeit.

11.51 Eine M^n der Dimension $n = 4k + 2$ ist entweder in beiden oder in keiner der beiden Orientierungen I-Mannigfaltigkeit; die I-Abbildungen I und $-I$ sind nämlich für $n = 4k + 2$ verschieden orientiert.

11.6 In jeder OM^n gibt es ein System von zuläßigen Parameterumgebungen, so daß die in den Tangentialräumen R^n_p der Punkte $p \in U_x \cap U_y \neq 0$ induzierten Koordinatentransformationen orthogonal und von positiver Determinante sind [29]). Ist OM^n fastkomplex, I_p die gegebene Schar spezieller I-Abbildungen, so ist $\chi_n(I_p)$ eine stetige Schar orthogonaler spezieller I-Abbildungen (5.6).

Konstruiert man über einer OM^n als Basisraum mit der Faser $\mathfrak{O}\mathfrak{S}\mathfrak{p}\mathfrak{J}_n$ in üblicher Weise [30]) den Faserraum aller in den Tangentialräumen von OM^n wirkenden, positiv orientierten, orthogonalen speziellen I-Abbildungen, so ist die Existenz einer I-Schar in OM^n gleichbedeutend mit der Existenz einer Schnittfläche in diesem Faserraum. Auf Grund der Hindernistheorie [31]) ist das Verschwinden von gewissen Cohomologieklassen der OM^n notwendig (und in einigen Fällen auch hinreichend) für die Existenz einer solchen Schnittfläche. So ist das Verschwinden einer bestimmten dreidimensionalen Cohomologieklasse einer M^6 hinreichend dafür, daß OM^6_1 und OM^6_2 fastkomplex sind [8]); die (beliebig orientierte) Sphäre S^6 ist also I-Mannigfaltigkeit [8]).

§ 12. Fastkomplexe Sphären.

12.1 Die beliebig orientierte 2-Sphäre gestattet (in der üblichen differenzierbaren Struktur) eine komplexe Struktur: S^2 ist fastkomplex.

---

[28]) Die komplexe projektive Ebene (in üblicher reell-differenzierbarer Struktur) ist nur in einer der beiden Orientierungen fastkomplex; vgl. [8] S. 182—183.

[29]) Vgl. [10] S. 57.

[30]) Vgl. [10] S. 22.

[31]) Vgl. [10] S. 177 ff.

Auch S^6 ist fastkomplex (11.6); wir geben eine Schar orthogonaler spezieller I-Abbildungen explizit an:

Wir deuten die Punkte von R^8 als Cayleysche Zahlen; sei R^7 der Teilraum der rein imaginären Cayleyschen Zahlen, $S^6 \subset R^7$ die Teilmenge aller solchen vom Betrag 1. Ist p ein Punkt von S^6, so verstehen wir unter I_p die Linkstranslation $p \cdot x$ von R^8. Da je zwei Elemente von R^8 eine Teilalgebra der Quaternionenalgebra erzeugen, so gilt $p \cdot (p \cdot x) = p^2 x$; aus $p^2 = -1$ folgt $I_p^2 = -E$: I_p ist orthogonale spezielle I-Abbildung des Tangentialraumes R_p^6 im Punkte b von S^6 [32]) [10]).

12.2 Die Frage, ob es außer S^2 und S^6 noch weitere fastkomplexe Sphären gibt [8]), wird durch Satz V in Zusammenhang gebracht mit der Parallelisierung von Sphären. Ein Parallelismus in der Sphäre S^{n+1} ist gleichbedeutend mit der Existenz einer transitiven Schar in der Gruppe der regulären Abbildungen des R^{n+2}, d.h. mit dem Auftreten einer stetigen Schar T_x regulärer Abbildungen aus $\mathfrak{L}_{n+2}$, so daß, bei festem Vektor $e \in R^{n+2}$, stets $T_x e = x$ für beliebigen Vektor $x \in R^{n+2}$.

Satz V: *Ist die Sphäre S^n I-Mannigfaltigkeit, so gibt es in $\mathfrak{L}_{n+2}$ eine transitive Schar* [6]).

Beweis: e sei ein Einheitsvektor in R^{n+2}, $R^{n+1} \subset R^{n+2}$ zu e total-orthogonal, S^n die Menge aller Einheitsvektoren in R^{n+1}, L_p^n der zum Tangentialraum R_p^n im Punkte p von S^n parallele Teilraum von R^{n+1} durch den Nullpunkt von R^{n+2}, I_p die I-Abbildung in R_p^n. Wir definieren für $p \in S^n$:
$T_p e = p$, $T_p p = -e$, $T_p / L_p^n = I_p / R_p^n$; für $x = \alpha e + \beta p \in R^{n+2}$ setzen wir $T_x = \alpha E + \beta T_p : T_x e = \alpha e + \beta p = x$.

12.3 Da nach [11] die Sphäre S^{n+1} höchstens dann parallelisierbar ist, wenn $n = 2^k - 2$, so folgt mit Satz V: Für $n \neq 2^k - 2$ ist die Sphäre S^n nicht I-Mannigfaltigkeit.

ANHANG.

Die de Rhamsche Definition der Funktion ρ_n.

1. Dem reellen Vektorraum R^n wird ein komplexer Vektorraum C^n zugeordnet: Vektoren von C^n seien die komplexen Linearverbindungen der Grundvektoren von R^n. Eine lineare Abbildung von R^n kann in natürlicher Weise als Abbildung von C^n aufgefaßt werden; $\mathfrak{L}_n$ sei die Menge der linearen Abbildungen des Vektorraumes R^n.

[32]) Vgl. [9] & [10] S. 217, Nr. 41.21.

2. Sei $I \in \mathfrak{J}_n \subset \mathfrak{L}_n$, $f(t) = \prod_{j=1}^{m} (t - \lambda_j)(t - \bar{\lambda}_j)$, $(n = 2m)$ das charakteristische Polynom von I; dabei verstehen wir unter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ diejenigen Eigenwerte von I, deren Imaginärteile positiv sind. Wir setzen $g(t) = \prod_{j=1}^{m} (t - \bar{\lambda}_j) : f = g\bar{g}$. Die von $g(I)$, bzw. $\bar{g}(I)$, annullierten Teilräume L_I, bzw. $\bar{L}_I$, sind komplementäre Fixräume von I; jeder Vektor $x \in C^n$ ist daher eindeutig darstellbar als $x = x_I + \bar{x}_I$, $x_I \in L_I$, $\bar{x}_I \in \bar{L}_I$. Wir definieren nun eine Abbildung $\varrho_n^*(I)$ durch folgende Vorschrift:

$$\varrho_n^*(I)x = -i(x_I - \bar{x}_I), \text{ für } x \in R^n.$$

Die Vektoren x_I und $\bar{x}_I$ sind konjugiert-komplex: $\varrho_n^*(I) \in \mathfrak{L}_n$. L_I, $\bar{L}_I$ sind lineare Teilräume von C^n, daher ist $y = -ix_I$ ein Vektor in L_I, $z = i\bar{x}_I$ ein Vektor in $\bar{L}_I$. Es folgt:

$$\varrho_n^*(I)(\varrho_n^*(I)x) = \varrho_n^*(I)y + \varrho_n^*(I)z = -i(y - z) = -x, \text{ d.h.}$$

$\varrho_n^{*2}(I) = -E$: $\varrho_n^*(I)$ ist eine spezielle I-Abbildung.

Behauptung: Die Funktionen ϱ_n^* und ϱ_n sind identisch.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus 4.5 und 4.6; man hat nur zu zeigen, daß $\varrho_n^*(\sigma_n(I)) = \varrho_n^*(I)$ für $I \in \mathfrak{J}_n$, $\varrho_n^*(\tau_n(I)) = \varrho_n^*(I)$ für normiertes $I \in \mathfrak{J}_n$, $\varrho_n^*(I) = I$ für $I \in \mathfrak{Sp}\mathfrak{J}_n$.

3. Der Beweis für die Stetigkeit von ϱ_n^* folgt aus der leicht beweisbaren Eigenschaft der Fixräume L_I und $\bar{L}_I$, stetig von der Abbildung I abzuhängen.

LITERATURVERZEICHNIS.

A. A. Albert

[1] Modern Higher Algebra; Chicago, 1947.

P. Alexandroff & H. Hopf

[2] Topologie I; Berlin, 1935.

A. Borel & J. P. Serre

[3] Détermination des p-puissances réduites de Steenrod dans la cohomologie des groupes classiques. Applications; C.R. Acad. Sci. Paris 233, p. 680—682 (1951).

C. Chevalley

[4] Theory of Lie Groups; Princeton, 1946.

C. C. Mac Duffee

[5] Theory of Matrices; New York, 1946.

B. Eckmann & A. Frölicher

[6] Sur l'intégrabilité des structures presque-complexes; C.R. Acad. Sci. Paris 1951, S. 2284—2286.

Ch. Ehresmann

[7]. Sur la théorie des espaces fibrés; Coll. Topologie Alg., S. 3—15; Paris, 1949.

H. Hopf

[8] Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten; Courant Anniversary Volume 1948, S. 167—185.

A. Kirchhoff

[9] Sur l'existence de certains champs tensoriels dans les sphères à n dimensions; C. R. Acad. Sci. Paris, 1947, S. 1258—1260.

N. Steenrod

[10] The Topology of Fibre Bundles; Princeton, 1951.

N. Steenrod & J. H. C. Whitehead

[11] Vectorfields on the n-Sphere; Proc. Nat. Acad. Sci. Vol. 37, 1951, S. 58—63.

B. L. van der Waerden

[12] Moderne Algebra II; Berlin, 1923.

B. Eckmann

[13] Espaces fibrés et homotopie; Coll. Topologie CBRM. Bruxelles 1950, S. 83—99.

(Oblatum 8-1-53).