COMPOSITIO MATHEMATICA

ROBERT REMAK

Über Größenbeziehungen zwischen Diskriminante und Regulator eines algebraischen Zahlkörpers

Compositio Mathematica, tome 10 (1952), p. 245-285
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1952__10__245_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Über Größenbeziehungen zwischen Diskriminante und Regulator eines algebraischen Zahlkörpers.

von

Robert Remak †

Einleitung. *)

In einer Arbeit „Über die Abschätzung des absoluten Betrages des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers nach unten" [1]) habe ich eine untere Abschätzung für den absoluten Betrag des Regulators gegeben, die hauptsächlich nur vom Grade n des Körpers abhing. Sie hing zwar noch sehr wesentlich von der Anzahl r der reellen Konjugierten einer erzeugenden Zahl des Körpers ab. Die Abschätzung wuchs für $r = n$ noch langsam ins Unendliche; für $r = 0$ nahm sie rasch gegen 0 ab. Man kann aber die ungünstigste Schranke wählen, die nur noch von n abhängt. Vor allem hing die Abschätzung *nicht* ab von der Körperdiskriminante D. Es liegt nun nahe, zu fragen, ob, wenn R der Regulator, $|R|$ mit $|D|$ ins Unendliche wächst. Es ist $\sqrt{|D|}$ bei der geometrischen Darstellung der ganzen Zahlen des Körpers durch Gitterpunkte [2]) das Volumen des Elementarparallelepipeds. Nach RU S. 360 bilden im logarithmierten Raume die Einheiten ein Punktgitter, dessen Elementarparallelepiped bis auf angebbare Faktoren gleich dem Regulator ist. Die Vermutung liegt nahe, daß ein großes Elementarparallelepiped des einen Punktgitters

---

*) Diese Arbeit wurde von weiland Robert Remak bei den Acta Arithmetica eingereicht am 14. November 1938; von ihm wurde noch die Bogenkorrektur gelesen. Die Erscheinung des betreffenden Heftes aber wurde durch Weltkrieg II verhindert. Nach dem Kriege mußte man feststellen, daß der Satz in Warschau vernichtet war. Der Verfasser hatte aber einen Korrekturbogen in Amsterdam hinterlassen mit Anweisungen für die Publikation im Fall seines Todes.

Robert Remak kam in den dreißiger Jahren als Emigrant nach Amsterdam und wurde 1942 von der deutschen Besatzung nach Annaberg abtransportiert. Es muß angenommen werden, daß sein Leben vor dem Kriegsende (in Auschwitz?) ein Ende fand.

[1]) Remak, Journ. f. Math. Bd. 167 (Henselfestband), 1931, S. 360-378. zitiert RU.

[2]) Remak, „Elementare Abschätzungen von Fundamentaleinheiten und des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers", Journ. f. Math. Bd. 165 (Schottky-festband), 1931, S. 159-179, zitiert RFE. Siehe Anmerkung auf S. 162.

ein großes Elementarparallelepiped des anderen Punktgitters zur Folge hat; d. h. daß, wenn Schranken für $|D|$ gegeben sind, daraus Schranken für $|R|$ hergeleitet werden können und umgekehrt. Wenn $|D|$ gegeben, so sind obere Schranken für $|R|$ bekannt. [3]) Die umgekehrte Aufgabe ist, wenn eine obere Schranke für $|R|$ gegeben ist, eine obere Schranke für $|D|$ herzuleiten, die noch vom Grade n abhängen dürfte. Diese müßte ins Unendliche wachsen, da ja alle Zahlkörper einmal vorkommen müssen und es Zahlkörper n-ten Grades von beliebig großer Diskriminante gibt. In dieser Allgemeinheit ist der Satz, das $|D| < f(|R|, n)$, aber gar nicht richtig. Er gilt nicht allgemein für diejenigen Zahlkörper, die einen „Einheitsdefekt" haben. Das sind diejenigen Körper $\mathfrak{K}$, für die die Anzahl der unabhängigen Einheiten

$$k = r + s - 1, \tag{1}$$

worin s die Anzahl der Paare konjugiert komplexer Konjugierter einer erzeugenden Zahl des Körpers bedeutet, gleich ist derselben Anzahl

$$\hat{k} = \hat{r} + \hat{s} - 1$$

für einen echten Unterkörper $\hat{\mathfrak{K}}$. Ein Körper hat also einen Einheitsdefekt, wenn

$$k = \hat{k}.$$

In § 1 zeige ich, daß ein Körper $\mathfrak{K}$ dann und nur dann einen Einheitsdefekt hat, wenn er total imaginär und vom Relativgrad 2 über einem total reellen Unterkörper $\hat{\mathfrak{K}}$ ist; und daß für Körper mit Einheitsdefekt keine Beziehung $|D| < f(|R|, n)$ gilt.

Der Satz

$$|D| < f(|R|, n)$$

soll in §§ 2—7 für alle algebraischen Zahlkörper mit Ausnahme der Körper mit Einheitsdefekt bewiesen werden. Hierzu muss mit Hilfe des Minkowski'schen Satzes vom konvexen Körper mit Mittelpunkt im Punktgitter, der in der durch Herrn Blichfeldt [4]) verbesserten Form angewandt wird, eine Einheit des Körpers gefunden werden, die gleichzeitig erzeugende Zahl des Körpers ist.

---

[3]) Siehe Landau, Göttinger Nachrichten 1918, S. 478-488. Weniger scharfe Schranken, aber mit elementaren Hilfsmitteln, habe ich in der in Anmerkung [2]) zitierten Arbeit RFE gegeben.

[4]) Blichfeldt, Transactions of the American Mathematical Society 15, (1914), S. 227-235. Remak, Math. Zeitschr. 26, (1927) S. 694-699. Blichfeldt, Math. Annalen 101, (1929), S. 605-608.

Der Gedankengang hat Ähnlichkeit mit demjenigen von Minkowski [5]), durch den er zeigt, daß es zu jedem Wert von D nur endlich viele Zahlkörper geben kann. Der konvexe Körper wird bei Minkowski so gewählt, daß er eine große Ausdehnung in der Richtung einer Konjugierten, eine geringe Ausdehnung in den Richtungen der übrigen Konjugierten hat; wenn zwei Konjugierte einander gleich werden, gerät man in die verbotene Umgebung des Nullpunktes, in der überhaupt keine Gitterpunkte liegen dürfen, weil dort die Norm der ganzen algebraischen Zahl kleiner wäre als 1. Der nach dem Minkowski'schen Satze gewonnene Gitterpunkt liefert eine erzeugende Zahl des Körpers, da nicht je zwei ihrer Konjugierten einander gleich sein können. Ein ähnliches Verfahren wende ich im logarithmierten Raume an, wo es, wie ich in RU gezeigt habe, ebenfalls einen verbotenen Raum um den Nullpunkt gibt.

Ich komme zu dem Ergebnis, daß in allen algebraischen Zahlkörpern mit Ausnahme derjenigen mit Einheitsdefekt

$$\log |D| \leqq n \log n + \frac{|R|}{R_{\min}} \cdot \log 2 \cdot \frac{2n(n-1)}{k+1} \cdot g^{\frac{k-1}{2}}. \tag{2}$$

Hierin is $R_{\min}$ die jeweils beste untere Schranke für $|R|$ aus RU; k ist durch (1) definiert. Ferner ist

$$g = \frac{k + 5 + \sqrt{k^2 + 2k + 17}}{2}.$$

In § 8 wird eine bessere Abschätzung unter der Voraussetzung gebracht, daß der gegebene Körper außer dem Körper der rationalen Zahlen keinen oder höchstens einen imaginär-quadratischen Unterkörper enthält. In § 9 wird der zunächst ausgeschloßene Fall $k = 1$ nachgeholt.

In einer zweiten Mitteilung unter dem Titel: „Über algebraische Zahlkörper mit schwachem Einheitsdefekt" will ich zwischen „starkem" und „schwachem" Einheitsdefekt unterscheiden. Ein Körper $\mathfrak{K}$ hat einen starken Einheitsdefekt, wenn sämtliche Einheiten von $\mathfrak{K}$ in einem echten Unterkörper $\hat{\mathfrak{K}}$ liegen. Ein Einheitsdefekt, der nicht stark ist, heiße schwach. Bei schwachem Einheitsdefekt hat $\mathfrak{K}$ zwar nicht mehr unabhängige Einheiten als $\hat{\mathfrak{K}}$, enthält aber mindestens eine Einheit oder Einheitswurzel, die nicht in $\hat{\mathfrak{K}}$ vorkommt. Für Körper mit schwachem Einheitsdefekt

---

[5]) Minkowski, Diophantische Approximationen, Leipzig 1907, S. 130-133.

läßt sich die Abschätzung (2) retten, so daß nur die Körper mit starkem Einheitsdefekt ausgenommen zu werden brauchen.

Die zweite Mitteilung soll darüber hinaus die Körper mit schwachem Einheitsdefekt aus selbständigem Interesse behandeln.

§ 1.

Ein algebraischer Zahlkörper $\mathfrak{K}$ besitze einen Einheitsdefekt, wenn die Anzahl seiner unabhängigen Einheiten k die gleiche ist wie die eines echten Unterkörpers $\hat{\mathfrak{K}}$. Der Körper $\mathfrak{K}$ hat den Grad n, und zwar r reelle, s Paare konjugiert komplexer Wurzeln einer erzeugenden Gleichung. $n = r + 2s$. Dann ist bekanntlich [6])

$$k = r + s - 1.$$

Für $\hat{\mathfrak{K}}$ mögen $\hat{n}$, $\hat{r}$, $\hat{s}$, $\hat{k}$ die gleiche Bedeutung haben. Ein Einheitsdefekt liegt also vor, wenn

$$k = \hat{k}.$$

Es ist für jeden Körper $\mathfrak{K}$

$$(3) \qquad k = r + s - 1 = \frac{2r + 2s}{2} - 1 \geqq \frac{r + 2s}{2} - 1 = \frac{n}{2} - 1;$$

für jeden Unterkörper $\hat{\mathfrak{K}}$ des Körpers $\mathfrak{K}$

$$(4) \qquad \hat{k} = \hat{r} + \hat{s} - 1 \leqq \hat{r} + 2\hat{s} - 1 = \hat{n} - 1 \leqq \frac{n}{2} - 1,$$

da $\hat{n}$ ein echter Teiler von n ist. Aus (3) und (4) folgt

$$(5) \qquad k \geqq \frac{n}{2} - 1 \geqq \hat{k}.$$

Wenn also in (5) das Gleichheitszeichen stehen soll, so muß auch in (3) und (4) überall das Gleichheitszeichen stehen; d. h. es muß sein

$$r = 0; \quad \hat{s} = 0; \quad \hat{n} = \frac{n}{2}.$$

Wir sind also zu dem Ergebnis gelangt:

Ein Körper $\mathfrak{K}$ besitzt dann und nur dann einen Einheitsdefekt, wenn er total imaginär vom Relativgrad 2 über einem total reellen Körper $\hat{\mathfrak{K}}$ ist.

---

[6]) Beweis siehe z. B. Hecke, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1923, S. 128, oder l. c. Anmerkung [2]).

Es ist in diesem Falle

$$k = \frac{n}{2} - 1 = \hat{n} - 1 = \hat{k}.$$

Es sei

$$\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_1^{(2)}, \ldots, \vartheta_1^{(k)}$$

ein vollständiges System von Fundamentaleinheiten von $\mathfrak{K}$. Es war in RFE S. 164 definiert

$$\begin{aligned} \psi_\nu &= 1, \qquad \text{wenn } \xi_\nu \text{ reell,} \\ \psi_\nu &= 2, \qquad \text{wenn } \xi_\nu \text{ komplex.} \end{aligned}$$

Hierin war ξ_ν die ν-te Konjugierte einer den Körper $\mathfrak{K}$ erzeugenden Zahl ξ_1.

Man setze

$$\Re\, \psi_\nu \log \vartheta_\nu^{(\mu)} = \log\left(\,|\, \vartheta_\nu^{(\mu)}\,|^{\psi_\nu}\right) = a_\nu^{(\mu)}.$$

Da $\mathfrak{K}$ total imaginär ist, so sind sämtliche $\psi_\nu = 2$.

Es ist die k-reihige Determinante

$$(6) \qquad |\, a_\nu^{(\mu)}\,| = R$$

der Regulator des Körpers [7]). Hierbei sind die Konjugierten einer erzeugenden Zahl ξ_1 des Körpers so anzuordnen, daß zuerst sämtliche r reellen Konjugierten kommen, die hier also wegfallen, dann s komplexe Konjugierte, derart daß nicht zwei unter ihnen konjugiert komplex sind, dann die konjugiert komplexen Konjugierten in derselben Reihenfolge. Da in der Determinante R der Index ν nur bis k läuft, kommen nicht zwei konjugiert komplexe Konjugierte vor und eine Konjugierte fehlt wegen $k = \frac{n}{2} - 1$.

Es sei

$$\hat{\vartheta}_1^{(1)}, \hat{\vartheta}_1^{(2)}, \ldots, \hat{\vartheta}_1^{(\hat{k})}$$

ein vollständiges System von Fundamentaleinheiten des Unterkörpers $\hat{\mathfrak{K}}$. Da diese gleichzeitig Einheiten von $\mathfrak{K}$ sind, so sei

$$(7) \qquad \hat{\vartheta}_1^{(\lambda)} = \eta_1\, \vartheta_1^{(1)h_{\lambda 1}}\, \vartheta_1^{(2)h_{\lambda 2}} \ldots \vartheta_1^{(k)h_{\lambda k}}.$$

η_1 bedeutet eine Einheitswurzel. Diese Gleichung gilt auch noch, wenn man zu den n Konjugierten in $\mathfrak{K}$ übergeht. Da links eine reelle Einheit steht, so ergeben die Indices ν und $s + \nu$, die zu konjugiert komplexen Konjugierten gehören, links denselben Wert. Wir können also in (7) den Index 1 durch ν ersetzen und

---

7) Siehe z. B. l. c. Anmerkung 6) S. 131.

ν bis $\hat{n}$ laufen lassen. Da $\hat{\mathfrak{K}}$ ein total reeller Körper, so sind sämtliche $\hat{\psi}_\nu = 1$; geht man zu den Logarithmen der absoluten Beträge über, so erhält man

$$\hat{a}_\nu^{(\lambda)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{k} h_{\lambda\mu}\, a_\nu^{(\mu)}.$$

Es ist also nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten

$$\text{(8)} \qquad \hat{R} = |\, \hat{a}^{(\lambda)} \,| = \frac{1}{2^k} \,|\, h_{\lambda\mu} \,| \cdot |\, a_\nu^{(\mu)} \,| = \frac{1}{2^k} \,|\, h_{\lambda\mu} \,| \cdot R$$

oder

$$\text{(9)} \qquad |\, R \,| = \frac{2^k}{\operatorname{abs} |\, h_{\lambda\mu} \,|} \cdot |\, \hat{R} \,| \leqq 2^k \cdot |\, \hat{R} \,| = 2^{\hat{n}-1} \cdot |\, \hat{R} \,|,$$

da die Determinante $|\, h_{\lambda\mu} |$ eine ganze rationale Zahl $\neq 0$ ist.

Über einem festen total reellen Körper $\hat{\mathfrak{K}}$ kann man beliebig viele verschiedene total imaginäre Körper $\mathfrak{K}$ vom Relativgrad 2 bilden. Es sei q irgend eine Primzahl. Man adjungiere zu $\hat{\mathfrak{K}}$ die rein imaginäre Zahl $\sqrt{-q}$, die sicher noch nicht in $\hat{\mathfrak{K}}$ vorkommt. Der Körper $\hat{\mathfrak{K}}(\sqrt{-q})$ ist genau vom Grade $2\,\hat{n}$. Er enthält den imaginär-quadratischen Körper $P(\sqrt{-q})$. Es ist die Diskriminante vor $\mathfrak{K} = \hat{\mathfrak{K}}\,(\sqrt{-q})$ teilbar [8]) durch die Diskriminante des Unterkörpers $P(\sqrt{-q})$, also teilbar durch q. Durch Wahl verschiedener q lassen sich Körper $\mathfrak{K} = \hat{\mathfrak{K}}(\sqrt{-q})$ in unendlich großer Anzahl mit beliebig großer Diskriminante bilden. Alle diese verschiedenen Körper haben aber nach (9) Regulatoren, die absolut $\leqq 2^{\hat{n}-1} \cdot |\, \hat{R} \,|$. Für diese Körper mit Einheitsdefekt gilt also sicher kein Satz, daß der Regulator mit der Diskriminante ins Unendliche wächst.

Es soll in der in der Einleitung erwähnten zweiten Mitteilung gezeigt werden, daß für die ganzzahlige Determinante $|\, h_{\lambda\mu} |$ nur die Werte

$$|\, h_{\lambda\mu} \,| = \pm 1 \qquad \text{und} \qquad |\, h_{\lambda\mu} \,| = \pm 2$$

in Betracht kommen. Und zwar tritt für den festen total reellen Körper $\hat{\mathfrak{K}}$ der Wert ± 2 nur für endlich viele total imaginäre Oberkörper $\mathfrak{K}$ vom Relativgrade 2 auf. Für alle übrigen total imaginären Oberkörper vom Relativgrad 2 ist $|\, h_{\lambda\mu} | = \pm 1$.

---

[8]) Siehe Hilbert, Theorie der algebraischen Zahlkörper, Bericht, Jahresber. d. Deutsch. Math. Vereing. 4. 1894/95. S. 206.

§ 2.

Hilfssatz 1.: *Es ist*

$$d = \begin{vmatrix} x_0 + x_1, & x_0 \quad, & x_0 \quad, & \ldots\, x_0 \\ x_0 \quad, & x_0 + x_2, & x_0 \quad, & \ldots\, x_0 \\ x_0 \quad, & x_0 \quad, & x_0 + x_3, & \ldots\, x_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_0 \quad, & x_0 \quad, & x_0 \quad, & \ldots\, x_0 + x_n \end{vmatrix}$$

$$= x_1 x_2 \ldots x_n + x_0 x_2 \ldots x_n + x_0 x_1 x_3 \ldots x_n + \ldots + x_0 x_1 \ldots x_{n-1}.$$

Beweis: Es werde zunächst die erste Zeile von allen folgenden Zeilen subtrahiert. Man erhält

$$d = \begin{vmatrix} x_0 + x_1, & x_0, & x_0, & \ldots\, x_0 \\ -x_1, & x_2, & 0\,, & \ldots\, 0 \\ -x_1, & 0\,, & x_3, & \ldots\, 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -x_1, & 0\,, & 0\,, & \ldots\, x_n \end{vmatrix}.$$

Dann wird die zweite bis n-te Zeile mit geeigneten Faktoren versehen zur ersten Zeile addiert, um die erste Zeile vom zweiten Glied ab zu 0 zu machen. Es ergibt sich

$$d = \begin{vmatrix} x_1 + x_0 + \dfrac{x_0 x_1}{x_2} + \dfrac{x_0 x_1}{x_3} + \ldots \dfrac{x_0 x_1}{x_n}, & 0\,, & 0\,, & \ldots\, 0 \\ -x_1 & , x_2, & 0\,, & \ldots\, 0 \\ -x_1 & , 0\,, & x_3, & \ldots\, 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -x_1 & , 0\,, & 0\,, & \ldots\, x_n \end{vmatrix}$$

$$= x_1 x_2 \ldots x_n + x_0 x_2 \ldots x_n + x_0 x_1 x_3 \ldots x_n + x_0 x_1 \ldots x_{n-1}.$$

Hilfssatz 2.: *Es sei*

$$\varDelta = \prod_{\mu<\nu}^{n} (x_\mu - x_\nu)^2$$

das Quadrat des Differenzenprodukts von n komplexen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Die Zahlen seien nach der Größe des absoluten Betrages geordnet.*

(10) $$|x_1| \geqq |x_2| \geqq |x_3| \geqq \ldots \geqq |x_n|.$$

Dann ist

(11) $$|\varDelta| \leqq |x_1|^{2(n-1)} \cdot |x_2|^{2(n-2)} \cdot |x_3|^{2(n-3)} \ldots |x_{n-1}|^2 \cdot n^n.$$

Beweis: Man setze

$$\frac{x_\nu}{x_{\nu-1}} = q_\nu \qquad \text{für} \qquad \nu = 2, 3, \ldots, n.$$

Dann ist nach (10)

$$(12) \qquad | q_\nu | = \frac{| x_\nu |}{| x_{\nu-1} |} \leqq 1.$$

Ferner ist, wenn $\nu > \mu$,

$$(13) \qquad x_\mu - x_\nu = x_\mu \left(1 - \frac{x_\nu}{x_\mu}\right) = x_\mu \left(1 - \prod_{\lambda=\mu+1}^{\nu} q_\lambda\right).$$

Unter Benutzung von (13) ergibt sich

$$(14) \qquad \varDelta = \Pi_1 \cdot \Pi_2.$$

Hierin sei

$$(15) \qquad \Pi_1 = \prod_{\mu=1}^{n-1} x_\mu^{2(n-\mu)},$$

$$(16) \qquad \Pi_2 = \prod_{\mu=1}^{n-1} \left\{ \prod_{\nu=\mu+1}^{n} \left(1 - \prod_{\lambda=\mu+1}^{\nu} q_\lambda\right)^2 \right\},$$

Π_2 ist ein Polynom in den Veränderlichen $q_2, q_3, \ldots, q_n$, deren jede nach (12) auf den Einheitskreis der komplexen Ebene beschränkt ist. Wird das Maximum Π_2' von Π_2 für ein Wertsystem q_ν' erreicht, so denke man sich sämtliche q_ν' bis auf ein q_ϱ festgehalten und dieses eine q_ϱ variabel. Es ist dann Π_2' auch Maximum der Funktion in der einen Variablen q_ϱ. Eine analytische Funktion einer Variablen erreicht aber ihr Maximum nur auf dem Rande des Gebiets für die Variablen. Es wird also das Maximum Π_2' nur angenommen für ein Wertsystem, für das

$$(17) \qquad | q_\nu' | = 1 \qquad \text{für} \qquad \nu = 2, 3, \ldots n.$$

Wenn aber (17) erfüllt ist, so ist

$$| x_1 | = | x_2 | = \ldots = | x_n |.$$

Setzt man noch $| x_1 | = 1$, so wird in (15) das Produkt $| \Pi_1 | = 1$; also nach (14)

$$| \varDelta | = | \Pi_2 |.$$

Es wird also $| \Pi_2 |$ selbst ein absolut genommenes Differenzenprodukt unter der Nebenbedingung

$$| x_\nu | = 1 \qquad \text{für} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Es ist [9])

$$\text{Max}\ |\Pi_2| = n^n. \tag{18}$$

Es ergibt sich also aus (14), (15), (16), (18)

$$|\Delta| \leqq |\Pi_1| \cdot n^n = |x_1|^{2(n-1)} \cdot |x_2|^{2(n-2)} \dots |x_{n-1}|^2 \cdot n^n.$$

Das ist aber die zu beweisende Formel (11).

§ 3.

Es soll in einem algebraischen Zahlkörper ohne Einheitsdefekt eine Einheit bestimmt werden, die gleichzeitig erzeugende Zahl des Körpers ist.

Die folgenden Definitionen stimmen überein mit RU § 1. Buchstaben, die abweichend definiert werden, erhalten ein $\sim$.

Es sei

$$\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_1^{(2)}, \dots, \vartheta_1^{(k)}$$

ein vollständiges System von Fundamentaleinheiten. $\vartheta_\nu^{(\mu)}$ sei die ν-te Konjugierte von $\vartheta_1^{(\mu)}$. Es ist $1 \leqq \nu \leqq n$. Die Anordnung der Konjugierten ist so getroffen, daß, wenn ξ_1 eine erzeugende Zahl des Körpers ist, die Konjugierte

$$\begin{aligned} &\xi_\varrho && \text{reell} \quad \text{für} \quad 1 \leqq \varrho \leqq r, \\ &\xi_{r+\sigma} = \bar{\xi}_{r+\sigma+s} && \text{für} \quad 1 \leqq \sigma \leqq s, \end{aligned} \tag{19}$$

$\bar{a}$ sei die zu a konjugiert komplexe Zahl,

$$n = r + 2s.$$

Es sei

$$\begin{aligned} \psi_\varrho &= 1 \quad \text{für} \quad 1 \leqq \varrho \leqq r, \\ \psi_{r+\sigma} &= 2 \quad \text{für} \quad 1 \leqq \sigma \leqq s. \end{aligned}$$

Man setze $(1 \leqq \nu \leqq r + s)$

$$\psi_\nu \cdot \log \vartheta_\nu^{(\mu)} = a_\nu^{(\mu)} + i\, b_\nu^{(\mu)}. \tag{20}$$

Es werde in Übereinstimmung mit RU (1) gesetzt

---

[9]) Siehe I. Schur, „Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten" Math. Zeitschr. Bd. 1. S. 377—402. Siehe S. 385. (Herr Schur benutzt hier eine Mitteilung von Herrn G. Pólya).

$$
(c_\nu^{(\mu)}) = \left\| \begin{array}{llllllll}
a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \ldots & a_1^{(k)}, & 0, & 0, & 0, & \ldots, 0 \\
a_2^{(1)}, & a_2^{(2)}, & \ldots & a_2^{(k)}, & 0, & 0, & 0, & \ldots, 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_k^{(1)}, & a_k^{(2)}, & \ldots & a_k^{(k)}, & 0, & 0, & 0, & \ldots, 0 \\
b_1^{(1)}, & b_1^{(2)}, & \ldots & b_1^{(k)}, & \psi_1 \cdot \frac{2\pi}{w}, & 0, & 0, & \ldots, 0 \\
b_2^{(1)}, & b_2^{(2)}, & \ldots & b_2^{(k)}, & m_2 \cdot \psi_2 \cdot \frac{2\pi}{w}, & \psi_2 \cdot 2\pi, & 0, & \ldots, 0 \\
b_3^{(1)}, & b_3^{(2)}, & \ldots & b_3^{(k)}, & m_3 \cdot \psi_3 \cdot \frac{2\pi}{w}, & 0, & \psi_3 \cdot 2\pi & \ldots, 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
b_k^{(1)}, & b_k^{(2)}, & \ldots & b_k^{(k)}, & m_k \cdot \psi_k \cdot \frac{2\pi}{w}, & 0, & 0, & \ldots, 0 \\
b_{k+1}^{(1)}, & b_{k+1}^{(2)}, & \ldots & b_{k+1}^{(k)}, & m_{k+1} \cdot \psi_{k+1} \frac{2\pi}{w}, & 0, & 0, & \ldots, \psi_{k+1} \cdot 2\pi
\end{array} \right\|
$$

Hierbei ist zu beachten, daß $k + 1 = r + s$. Bei den Realteilen der Logarithmen fehlt eine Konjugierte, bei den Imaginärteilen keine. Es sei w die höchste, im Körper vorkommende Ordnung einer Einheitswurzel. w ist stets gerade. In der $k + 1$-ten Spalte stehen die ψ_ν-fachen Imaginärteile der Logarithmen sämtlicher Konjugierten der primitiven w-ten Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{w}}$. Diese sind gleich

$$c_{k+\nu}^{(k+1)} = m_\nu \cdot \psi_\nu \cdot \frac{2\pi}{w}.$$

Es ist die Einheitswurzel so gewählt, daß $m_1 = 1$. Im Rechteck rechts oben stehen lauter Nullen. Das Quadrat rechts unten enthält in der Hauptdiagonale von der zweiten Stelle ab $\psi_\nu \,.\, 2\pi$ und sonst lauter Nullen, abgesehen von der ersten Spalte.

Es ist nach (6) die k-reihige Determinante

$$\text{(21)} \qquad | a_\nu^{(\mu)} | = R.$$

Es ist die $2k + 1$-reihige Determinante

$$\text{(22)} \qquad | c_\nu^{(\mu)} | = R \cdot \frac{(2\pi)^{k+1}}{w} \cdot \psi_1 \cdot \psi_2 \ldots \psi_{k+1} = R \cdot \frac{2^n \,.\, \pi^{r+s}}{w}.$$

Setzt man

$$\eta_1 = e^{\frac{2\pi i}{w}},$$

so lassen sich in der Form

$$\varepsilon_1 = \vartheta_1^{(1)\,x^{(1)}}\,\vartheta_1^{(2)\,x^{(2)}} \dots \vartheta_1^{(k)\,x^{(k)}} \cdot \eta_1^{x^{(k+1)}} \tag{23}$$

mit ganzen rationalen $x^{(\mu)}$ alle Einheiten des Körpers darstellen. Man setze

$$\begin{cases} \Re\psi_\nu \,.\, \log \varepsilon_\nu = y_\nu & \text{für} \quad \nu = 1, 2 \dots k, \\ \Im\psi_\nu \,.\, \log \varepsilon_\nu = y_{k+\nu} & \text{für} \quad \nu = 1, 2 \dots k+1, \end{cases} \tag{24}$$

wobei für die Imaginärteile der Logarithmen noch alle möglichen Abänderungen um Vielfache von 2π zuläßig sein sollen. Es lassen sich die y_ν darstellen in der Form

$$y_\nu = \sum_{\mu=1}^{2k+1} c_\nu^{(\mu)}\, x^{(\mu)} \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2 \dots, 2k+1. \tag{25}$$

Die $x^{(k+2)}, \dots, x^{(k+\nu)}, \dots, x^{(2k+1)}$ dienen dazu, die Imaginärteile um Vielfache von 2π abzuändern. Es ist für jede Einheit

$$\sum_{\nu=1}^{r+s} \Re\psi_\nu \cdot \log \varepsilon_\nu = \sum_{\nu=1}^{r+s} \log\left(|\,\varepsilon_\nu\,|^{\psi_\nu}\right) =$$
$$= \log\left(|\,\varepsilon_1| \cdot |\,\varepsilon_2| \dots |\,\varepsilon_n\,|\right) = \log 1 = 0.$$

Es ist also der fehlende Realteil des Logarithmus der $k+1$-ten Konjugierten y (den wir nicht y_{k+1} nennen dürfen)

$$\bar{y} = -\sum_{\nu=1}^{k} y_\nu. \tag{26}$$

Soweit ist alles in genauer Übereinstimmung mit RU § 1.

Es war in RU (8) die quadratische Form gebildet worden

$$\begin{cases} Q(x^{(\mu)}) = \sum\limits_{\nu=1}^{r+s} |\,\psi_\nu \log \varepsilon_\nu\,|^2 = \bar{y}^2 + \sum\limits_{\nu=1}^{2k+1} y_\nu^2 = \\ \qquad = \sum\limits_{\nu,\varrho=1}^{2k+1} \delta_{\nu\varrho}\, y_\nu\, y_\varrho = q(y_\nu). \end{cases} \tag{27}$$

Ich bilde nunmehr eine neue quadratische Form mit Hilfe positiver Größen $\bar{t}$ und t_ν

$$\widetilde{Q}\,(x^{(\mu)}) = \frac{\bar{y}^2}{\bar{t}^2} + \sum_{\nu=1}^{2k+1} \frac{y_\nu^2}{t_\nu^2} = \sum_{\nu,\varrho=1}^{2k+1} \widetilde{\delta}_{\nu\varrho}\, y_\nu\, y_\varrho = \widetilde{q}\,(y_\nu). \tag{28}$$

Es sei $k \geqq 2$; also $r + s \geqq 3$; der Fall $k = 1$ soll später behandelt werden. Es werde festgesetzt

$$t_1 = T; \qquad t_2 = T; \tag{29}$$

$$t_\nu = t \qquad \text{für} \qquad 3 \leqq \nu \leqq k; \tag{30}$$

$$\bar{t} = t; \tag{31}$$

$$T > t. \tag{32}$$

Es wird nach RU S. 372

$$(33) \qquad \frac{n}{\sqrt{r+s}} \cdot \log 2 = A.$$

Man setze ferner

$$(34) \qquad t_{k+\nu} = \mathrm{Min}\,(\psi_\nu \,.\, 2\pi\,(1-\varepsilon),\, A(1-\varepsilon)) \quad \text{für } \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ k+1.$$

$\varepsilon > 0$ sei eine beliebig kleine feste Zahl. Durch diese Festsetzungen wird das Dilatationsverfahren aus RU bereits berücksichtigt.

Über T und t soll folgendermaßen verfügt werden. Einerseits soll das Volumen des Ellipsoids $\widetilde{Q}(x^{(\mu)}) \leqq 1$ so groß werden, daß es nach Herrn Blichfeldt einen vom Nullpunkt verschiedenen Gitterpunkt enthält. Es soll also für das Minimum $\widetilde{M}$ die Bedingung gelten

$$(35) \qquad \widetilde{Q}(x^{(\mu)}) = \widetilde{M} \leqq 1.$$

Die zu $\widetilde{M}$ gehörenden Werte $x^{(\mu)}$ definieren in (23) eingesetzt eine Einheit ε_1. Die Annahme, daß ε_1 einem echten Unterkörper angehört, soll andrerseits zur Folge haben, daß der Gitterpunkt in dem verbotenen Raum um den Nullpunkt liegt, in dem RU (39) nicht erfüllt ist. RU (39) lautete

$$(36) \qquad \sqrt{M} \geqq \frac{1}{\sqrt{r+s}} \cdot S \geqq \frac{n}{\sqrt{r+s}} \cdot \log 2 = A,$$

worin A in Übereinstimmung mit (33) geschrieben ist. Hierin war M das Minimum von $Q(x^{(\mu)})$, das in Übereinstimmung mit (27) definiert war.

Um diesen beiden Anforderungen zu genügen, muß T hinreichend groß und t hinreichend klein gemacht werden.

Es soll durch passende Verfügung über T und t erreicht werden, daß aus (35) bereits in Verbindung mit

$$(37) \qquad \mathrm{sgn}\, y_1 = \mathrm{sgn}\, y_2$$

oder in Verbindung mit

$$(38) \qquad |\, y_1 \,| \leqq |\, y_\nu \,| \qquad \text{oder} \qquad |\, y_2 \,| \leqq |\, y_\nu \,|$$

für irgend ein bestimmtes ν des Intervalls $3 \leqq \nu \leqq k$ oder für

$$(39) \qquad |\, y_1 \,| \leqq |\, \bar{y} \,| \qquad \text{oder} \qquad |\, y_2 \,| \leqq |\, \bar{y} \,|$$

ein Widerspruch zu (36) folgt.

Wenn ε_1 einem echten Unterkörper angehört, so wird ε_1 einer oder mehreren seiner Konjugierten gleich. Es sei zunächst $\psi_1 = 1$, d. h. der Körper $P(\xi_1)$ reell, also ε_1 reell. Wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ und $\psi_2 = 1$, so ist

$$(40) \qquad y_1 = \log|\varepsilon_1| = \log|\varepsilon_2| = y_2.$$

Wenn $P(\xi_2)$ nicht reell ist, so ist $\psi_2 = 2$; also

$$y_2 = \psi_2 \cdot \log|\varepsilon_2| = 2\log|\varepsilon_1| = 2\,y_1.$$

In beiden Fällen ist

$$\operatorname{sgn} y_1 = \operatorname{sgn} y_2,$$

was wegen (37) in Verbindung mit (35) zu einem Widerspruch zu (36) führen soll. Wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_\nu$ für $3 \leqq \nu \leqq k$ oder $\varepsilon_1 = \varepsilon_{k+1}$, so ist, wenn $\psi_\nu = 1$, wieder analog (40)

$$y_1 = y_\nu,$$

wenn $\psi_\nu = 2$,

$$y_1 = \frac{y_\nu}{2}.$$

In beiden Fällen also

$$|y_1| \leqq |y_\nu|$$

(analog für $\bar{y}$). In diesem Falle erhält man aus (38) in Verbindung mit (35) einen Widerspruch gegen (36). Es kann also ε_1 keinem echten Unterkörper angehören. ε_1 wird also, wenn die angekündigten Bedingungen erfüllt sind, eine Einheit, die gleichzeitig erzeugende Zahl des Körpers wird.

.Wenn der Körper total imaginär, so ist bereits $\psi_1 = 2$ und sämtliche $\psi_\nu = 2$. Wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, so wird

$$(41) \quad y_1 = \psi_1 \log|\varepsilon_1| = 2\cdot\log|\varepsilon_1| = 2\cdot\log|\varepsilon_2| = \psi_2\cdot\log|\varepsilon_2| = y_2,$$

also ein Widerspruch wegen (37) usw. Analog, wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_{k+3}$. Wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_\nu$ für $3 \leqq \nu \leqq k+1$, so erhält man analog (41) die Gleichung $y_1 = y_\nu$, also einen Widerspruch wegen (38) bzw. (39), usw. Analog, wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_{k+\nu+1}$.

Es bleibt die Möglichkeit, daß die beiden zu y_1 gehörigen Konjugierten einander gleich werden, d. h. daß ε_1 reell wird. Da ε_1 keiner weiteren Konjugierten gleich werden kann, wäre $P(\varepsilon_1)$ ein reeller Unterkörper vom Relativgrad 2. Wenn einer der konjugierten Körper $P(\xi_1), P(\xi_2), \ldots, P(\xi_n)$ keinen reellen Unterkörper vom Relativgrad 2 besitzt, so bezeichne man diesen fortan als $P(\xi_1)$. Diese Wahl versagt, wenn von den konjugierten Körpern des gegebenen Körpers $P(\xi_1), P(\xi_2), \ldots, P(\xi_n)$ jeder Körper

$P(\xi_\nu)$ einen reellen Unterkörper $P(\gamma_\nu)$ vom Grade $\frac{n}{2}$ besitzt. [10]) Der Körper $P(\gamma_\nu)$ enthält die Gesamtheit der reellen Zahlen in $P(\xi_\nu)$. Denn gäbe es eine reelle Zahl ξ_ν in $P(\xi_\nu)$ außerhalb $P(\gamma_\nu)$, so wäre $P(\gamma_\nu, \xi_\nu)$ reell und umfassender als $P(\gamma_\nu)$, also gleich dem ganzen Körper $P(\xi_\nu)$, also $P(\xi_\nu)$ ein reeller Körper entgegen der Voraussetzung. Es sind also alle reellen Zahlen von $P(\xi_\nu)$ in $P(\gamma_\nu)$ enthalten. Es kann also $P(\xi_\nu)$ höchstens einen reellen Unterkörper $P(\gamma_\nu)$ vom Grade $\frac{n}{2}$ enthalten. Die $P(\gamma_\nu)$ dürfen nicht sämtlich unter einander konjugiert sein; denn dann wäre $P(\gamma_1)$ total reell, also $P(\xi_1)$ total imaginär vom Relativgrad 2 über einem total reellen Körper, also $P(\xi_1)$ ein Körper mit Einheitsdefekt. Dieser Fall war nach Voraussetzung ausgeschloßen worden. Mithin zerfallen die $P(\gamma_\nu)$ in mehrere Klassen unter sich konjugierter Körper. Man numeriere nun die Körper so, das $P(\gamma_1)$ und $P(\gamma_2)$ zu einander nicht konjugierte Körper werden. Würde nun

---

[10]) Dieser Fall hat mir Schwierigkeiten bereitet, bei deren Überwindung mich Herr Speiser unterstützt hat.

Daß der Fall tatsächlich vorkommen kann, lehrt das folgende Beispiel:

$$\mathfrak{K}_1 = P(\sqrt{1+2\sqrt{2}}\,, \quad \sqrt{1-3\sqrt{2}})$$

$\mathfrak{K}_1$ ist das Produkt der beiden Körper

$$P(\sqrt{1+2\sqrt{2}}) = \mathfrak{R}_1\,, \quad P(\sqrt{1-3\sqrt{2}}) = \mathfrak{S}_1,$$

die beide quadratisch, also normal über $P(\sqrt{2})$ sind. $\mathfrak{K}_1$ ist also vom Relativgrad 4 normal über $P(\sqrt{2})$. Also ist $\mathfrak{K}_1$ absolut vom 8-ten Grade. Unter den 8 formal zu $\mathfrak{K}_1$ konjugierten Körpern sind je 4 einander gleich. $\mathfrak{K}_1$ besitzt nur einen wirklich verschiedenen konjugierten Körper

$$\mathfrak{K}_2 = P(\sqrt{1-2\sqrt{2}}\,, \quad \sqrt{1+3\sqrt{2}}).$$

Es ist

$$\mathfrak{S}_2 = P(\sqrt{1-2\sqrt{2}})\,, \quad \mathfrak{R}_2 = P(\sqrt{1+3\sqrt{2}}).$$

Es ist $\mathfrak{R}_1$ reell vom 4-ten Grade, $\mathfrak{S}_1$ imaginär, also $\mathfrak{K}_1$ imaginär. Ebenso is $\mathfrak{R}_2$ reell, $\mathfrak{S}_2$ imaginär, $\mathfrak{K}_2$ imaginär, also $\mathfrak{K}_1$ total imaginär. Es sind $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ *nicht* konjugiert zu einander. Es ist vielmehr

$$\mathfrak{R}_1 \text{ zu } \mathfrak{S}_2\,, \qquad \mathfrak{R}_2 \text{ zu } \mathfrak{S}_1$$

konjugiert. Also sind $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ nicht total reell. Das Beispiel genügt also den gestellten Bedingungen. Jeder der 8 zu $\mathfrak{K}_1$ formal konjugierten Körper 8-ten Grades besitzt einen reellen Unterkörper 4-ten Grades. Diese reellen Körper 4-ten Grades sind aber nicht sämtlich unter einander konjugiert, sondern zerfallen in 2 Klasen unter sich konjugierter Körper, derart daß die Körper der verschiedenen Klassen untereinander *nicht* konjugiert sind. Tatsächlich enthält die eine Klasse nur den Körper $\mathfrak{R}_1$ die andere nur den Körper $\mathfrak{R}_2$.

das gefundene ε_1 einem echten Unterkörper angehören, so wäre dessen Grad $\frac{n}{2}$. Denn

$$|\varepsilon_1|^{\psi_1} = |\varepsilon_\nu|^{\psi_\nu}$$

ist für $2 \leqq \nu \leqq k+1$ bereits unmöglich. Also können nur die beiden Konjugierten, die durch y_1 dargestellt werden, einander gleich werden, d. h. ε_1 reell. Ebenso müßte ε_2 reell werden, da die Indizes 1 und 2 in (37) bis (39) völlig gleichberechtigt sind, ε_2 also keiner anderen Konjugierten gleich werden kann; also müßten die beiden reellen algebraischen Zahlen ε_1 und ε_2 vom Grade $\frac{n}{2}$ einander konjugiert sein. Das widerspricht aber der Voraussetzung, daß $P(\gamma_1)$ und $P(\gamma_2)$ einander nicht konjugierte Körper sein sollten. Es kann also ε_1 nicht reell und überhaupt keiner seiner Konjugierten gleich werden. Also wird ε_1 eine erzeugende Zahl des Körpers.

§ 4.

Es ist nach RU (8), (28), (29), (30), (38), (39), und Gleichung (33) der gegenwärtigen Arbeit

$$(42)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{r+s} |\psi_\nu \cdot \log \varepsilon_\nu|^2 = \bar{y}^2 + \sum\limits_{\nu=1}^{2k+1} y_\nu^2 = \sum\limits_{\nu,\varrho=1}^{2k+1} \delta_{\nu\varrho} y_\nu y_\varrho = \sum\limits_{\nu=1}^{r+s} |\psi_\nu l_\nu|^2 \\ = M \geqq \dfrac{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{r+s} |\psi_\nu l_\nu|\right)^2}{r+s} = \dfrac{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} |l_\nu|\right)^2}{r+s} = \dfrac{S^2}{r+s} \geqq \dfrac{n^2 \cdot \log^2 2}{r+s} = A^2. \end{cases}$$

Hierbei war unter M der kleinste von 0 verschiedene Wert verstanden worden, den

$$\sum_{\nu=1}^{r+s} |\psi_\nu \cdot \log \varepsilon_\nu|^2 = \sum_{\nu=1}^{r+s} |\psi_\nu l_\nu|^2$$

für eine von 1 verschiedene Einheit ε_1 annehmen konnte. Die Beziehung

$$(43)\qquad \sum_{\nu=1}^{r+s} |\psi_\nu l_\nu|^2 = \bar{y}^2 + \sum_{\nu=1}^{2k+1} y_\nu^2 = q(y_\nu) = \sum_{\nu,\varrho}^{2k+1} \delta_{\nu,\varrho} y_\nu y_\varrho \geqq A^2$$

gilt also für alle von 1 verschiedenen Einheiten ε_1. Hierin ist $q(y_\nu)$ zur Abkürzung eingeführt.

Es soll über T und t so verfügt werden, daß, wenn

$$(44)\qquad \overset{\frown}{Q}(x^{(\mu)}) = \overset{\frown}{q}(y_\nu) \leqq 1$$

und $\operatorname{sgn} y_1 = \operatorname{sgn} y_2$, die Ungleichung

$$(45) \qquad q(y_\nu) \leqq A^2(1-\varepsilon)^2$$

gilt und daß, wenn (44) erfüllt ist und $|y_1| \leqq |y_\nu|$ oder $|y_1| \leqq |\bar{y}|$ wird, ebenfalls (45) gilt.

Es werde die Bezeichnung $\Sigma^* y_\nu$ eingeführt, derart daß y_{k+1} durch $\bar{y}$ ersetzt wird. Die alten $y_{k+1}, y_{k+2} \ldots, y_{2k+1}$ werden in Σ^* nicht vorkommen. Dann ist

$$(46) \qquad \sum_{\nu=1}^{k+1}{}^{*}\, y_\nu = 0$$

nach (26). Die Größen $y_1, y_2, \ldots, y_k, \bar{y}$ sind wegen (46) völlig gleichberechtigt.

Es werde zur Abkürzung eingeführt

$$(47) \qquad \sum_{\nu=3}^{k+1}{}^{*}\, y_\nu^2 = B;$$

$$(48) \qquad \sum_{\nu=1}^{k+1}{}^{*}\, y_\nu^2 = C.$$

Es soll A) unter der Voraussetzung (37) oder B) unter der Voraussetzung (38) die Summe C durch ein Vielfaches von B abgeschätzt werden.

Es sei

Fall A): $\qquad \operatorname{sgn} y_1 = \operatorname{sgn} y_2;$

dann ist nach der Schwarz'schen Ungleichung

$$(49) \qquad \begin{cases} C = y_1^2 + y_2^2 + B \leqq |y_1|^2 + |y_2|^2 + 2|y_1|\,|y_2| + B \\ \qquad = (|y_1| + |y_2|)^2 + B = (y_1 + y_2)^2 + B \\ \qquad = (-\sum\limits_{\nu=3}^{k+1}{}^{*}\, y_\nu)^2 + B \leqq (k-1)\,B + B = kB. \end{cases}$$

Fall B): Es sei beispielsweise $\nu = 3$ gesetzt; es möge also sein

$$(50) \qquad |y_2| \leqq |y_3|.$$

Man setze

$$(51) \qquad |y_3| = \varrho\sqrt{B};$$

dann ist nach (47)

$$(52) \qquad \varrho^2 B + \sum_{\nu=4}^{k+1}{}^{*}\, y_\nu^2 = B,$$

also

$$\varrho^2 \leqq 1.$$

Es ist nach der Schwarz'schen Ungleichung unter Benutzung von (50), (51), (52)

$$|y_1|=|y_2+y_3+\sum_{\nu=4}^{k+1}{}^* y_\nu|\leqq|y_2|+|y_3|+|\sum_{\nu=4}^{k+1}{}^* y_\nu|\leqq 2\varrho\sqrt{B}+\sqrt{(1-\varrho^2)(k-2)B};$$

also ist

$$(53)\quad \begin{cases} C = y_1^2 + y_2^2 + B \\ \leqq B[4\varrho^2 + (k-2)(1-\varrho^2) + 4\varrho\sqrt{1-\varrho^2}\sqrt{k-2} + \varrho^2 + 1] \\ = B[6\varrho^2 + (k-1)(1-\varrho^2) + 4\varrho\cdot\sqrt{1-\varrho^2}\cdot\sqrt{k-2}] = C', \end{cases}$$

worin C' zur Abkürzung eingeführt ist. Genau dasselbe Ergebnis kann man bei Vertauschung der Indizes 1 und 2 erhalten unter Benutzung von $|y_1| \leqq |y_3|$.

Man setze die Matrix

$$(54)\quad \begin{pmatrix} 6 & , 2\sqrt{k-2} \\ 2\sqrt{k-2}, & k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, & b \\ b, & c \end{pmatrix}$$

und bilde die charakteristische Gleichung

$$(55)\quad \begin{vmatrix} a-\lambda, & b \\ b & , c-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dann ist

$$(56)\quad \begin{cases} C' = B[a\varrho^2 + 2b\cdot\varrho\sqrt{1-\varrho^2} + c(1-\varrho^2)] \\ = B[\lambda(\varrho^2 + 1 - \varrho^2)] + \\ + B[(a-\lambda)\varrho^2 + 2b\cdot\varrho\sqrt{1-\varrho^2} + (c-\lambda)(1-\varrho^2)]. \end{cases}$$

Setzt man, zunächst ohne Rücksicht auf Realität,

$$a-\lambda = \alpha^2, \qquad c-\lambda = \gamma^2,$$

so ist nach (55)

$$\alpha^2\gamma^2 = b^2,$$

also bei passender Verfügung über die Vorzeichen von α und γ

$$\alpha\gamma = b.$$

Dann lässt sich (56) schreiben

$$(57)\quad \begin{cases} C' = B\lambda + B[\alpha^2\,.\,\varrho^2 + 2\alpha\gamma\,.\,\varrho\sqrt{1-\varrho^2} + \gamma^2\,.\,(1-\varrho^2)] \\ = B\lambda + B(\alpha\varrho + \gamma\sqrt{1-\varrho^2})^2. \end{cases}$$

Setzt man die speziellen Werte (54) ein, so lautet die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - [6 + (k-1)]\lambda + 6(k-1) - 4(k-2) = 0$$

oder

$$\lambda^2 - (k+5)\lambda + 2k + 2 = 0$$

also

$$\lambda = \frac{k+5}{2} \pm \sqrt{\frac{(k+5)^2 - 4(2k+2)}{4}} = \frac{k+5 \pm \sqrt{k^2+10k+25-8k-8}}{2}$$

$$= \frac{k+5 \pm \sqrt{k^2+2k+17}}{2}.$$

Wir benutzen die größere der beiden Wurzeln

$$g = \frac{k+5+\sqrt{k^2+2k+17}}{2}.$$

Es ist für $k \geqq 2$

$$(58) \qquad g \geqq \frac{2+5+\sqrt{4+4+17}}{2} = \frac{2+5+5}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Ferner ist

$$(59) \qquad g > \frac{k+5+\sqrt{k^2+2k+1}}{2} = \frac{k+5+k+1}{2} = \frac{2k+6}{2} = k+3.$$

Es ist also wegen (58)

$$\alpha^2 = a - g = 6 - g \leqq 0;$$

wegen (59)

$$\gamma^2 = c - g = k - 1 - g < (k-1) - (k+3) = -4 < 0;$$

also werden α und γ rein imaginäre Größen. Setzt man

$$\alpha = i\alpha', \qquad \gamma = -i\gamma',$$

so wird

$$\alpha\gamma = i(-i)\alpha'\gamma' = \alpha'\gamma' = b.$$

Da

$$b = 2\sqrt{k-2} \geqq 0,$$

so kann man $\alpha' > 0$, $\gamma' > 0$ annehmen. Es wird also nach (57)

$$(60) \qquad C' = Bg - B(\alpha'\varrho - \gamma'\sqrt{1-\varrho^2})^2$$

mit positiven α' und γ'. Es ist also nach (53) und (60)

$$(61) \qquad C \leqq C' \leqq Bg = B \cdot \frac{k+5+\sqrt{k^2+2k+17}}{2};$$

wegen (59) ist

$$g > k+3 > k.$$

Wenn also (49) erfüllt ist, so ist auch (61) erfüllt. (61) gilt also sowohl im Falle A) $\operatorname{sgn} y_1 = \operatorname{sgn} y_2$ als auch im Falle B)

$$|y_1| \leqq |y_3| \text{ oder } |y_2| \leqq |y_3|.$$

Es war für $k \geqq 2$ bereits bewiesen worden.

$$(58) \qquad g \geqq 6 \qquad \text{und} \qquad (59) \qquad g \geqq k+3.$$

Es mögen auch obere Schranken für g bestimmt werden. Wenn es gelungen ist

$$\sqrt{k^2+2k+17} \leqq k+a$$

zu bestimmen, so wird

$$(62) \qquad g \leqq \frac{(k+5)+(k+a)}{2} = k + \frac{5+a}{2}.$$

Es ist

$$(63) \quad k^2+2k+17 \leqq (k^2+2k+17)+4(k-2) = k^2+6k+9 = (k+3)^2,$$

$$(64) \quad \begin{cases} k^2+2k+17 < (k^2+2k+17)+\left(\dfrac{8}{k+1}\right)^2 = \\ = (k+1)^2+16+\left(\dfrac{8}{k+1}\right)^2 = \left(k+1+\dfrac{8}{k+1}\right)^2. \end{cases}$$

(62) liefert in Verbindung mit (63) bezw. (64)

$$(65) \qquad g \leqq k+4$$

$$(66) \qquad g < k+3+\frac{4}{k+1}.$$

Die Schranke (66) konvergiert für große k gegen $k+3$. Es ist also in Verbindung mit (59)

$$k+3 \leqq g \leqq k+4, \qquad k+3 \leqq g \leqq k+3+\frac{4}{k+1}.$$

Es ist unter der Voraussetzung (37) oder (38) oder (39) nach (28), (29), (30), (31), (34), (47), (48), (61)

$$(67) \quad \begin{cases} \bar{q}(y_\nu) = \dfrac{y_1^2}{T^2}+\dfrac{y_2^2}{T^2}+\dfrac{B}{t^2}+\displaystyle\sum_{\nu=k+1}^{2k+1}\dfrac{y_\nu^2}{t_\nu^2} \geqq \dfrac{C}{T^2}+B\left(\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{T^2}\right)+ \\ +\displaystyle\sum_{\nu=k+1}^{2k+1}\dfrac{y_\nu^2}{A^2(1-\varepsilon)^2} \geqq \dfrac{C}{T^2}+\dfrac{C}{g}\left(\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{T^2}\right)+\displaystyle\sum_{\nu=k+1}^{2k+1}\dfrac{y_\nu^2}{A^2(1-\varepsilon)^2} = \\ = C\cdot\left[\dfrac{1}{T^2}\left(1-\dfrac{1}{g}\right)+\dfrac{1}{g\,t^2}\right]+\displaystyle\sum_{\nu=k+1}^{2k+1}\dfrac{y_\nu^2}{A^2(1-\varepsilon)^2}. \end{cases}$$

Es wird nunmehr die Festsetzung getroffen:

$$\frac{1}{T^2}\left(1-\frac{1}{g}\right)+\frac{1}{gt^2}\geqq\frac{1}{A^2(1-\varepsilon)^2}. \tag{68}$$

(68) ist sicher für jedes T in Verbindung mit einem hinreichend kleinen t erfüllt. Wenn (68) erfüllt ist, dann ist unter der Voraussetzung (37) oder (38) oder (39) wegen (67) und (43)

$$\bar{q}(y_\nu)\geqq\frac{C+\sum\limits_{\nu=k+1}^{2k+1}y_\nu^2}{A^2(1-\varepsilon)^2}=\frac{q(y_\nu)}{A^2(1-\varepsilon)^2}. \tag{68a}$$

Wenn es gelingt, einen Gitterpunkt so zu finden, daß

$$\bar{Q}(x^{(\mu)})=\bar{M}=\bar{q}(y_\nu)\leqq 1 \tag{69}$$

wird, so ist nach (28)

$$\left|\frac{y_\nu}{t_\nu}\right|\leqq 1 \qquad \text{für} \qquad k+1\leqq\nu\leqq 2k+1$$

oder für dieselben Indizes mit Rücksicht auf (34)

$$|\,y_\nu\,|\leqq|\,t_\nu\,|\leqq\psi_{\nu-k}\cdot 2\pi(1-\varepsilon)<\psi_{\nu-k}\cdot 2\pi.$$

Also kann der gefundene, vom Nullpunkt des logarithmierten Raumes verschiedene Gitterpunkt keine Darstellung der Eins sein. Wäre (37) oder (38) oder (39) erfüllt, so wäre nach (68a) und (69)

$$\frac{q(y_\nu)}{A^2(1-\varepsilon)^2}\leqq\bar{q}(y_\nu)\leqq 1$$

oder

$$q(y_\nu)\leqq A^2(1-\varepsilon)^2<A^2,$$

was (43) widersprechen würde. Also kann für den gefundenen, vom Nullpunkt des logarithmierten Raumes verschiedenen Gitterpunkt weder (37) noch (38) noch (39) erfüllt sein; der Gitterpunkt kann also keine Einheit darstellen, die einem echten Unterkörper des gegebenen Körpers angehört. Die gefundene Einheit ist also gleichzeitig erzeugende Zahl des Körpers.

§ 5.

Um den Blichfeldt'schen Satz [11]) auf

$$\bar{Q}(x^{(\mu)})=\sum_{\mu,\sigma=1}^{2k+1}\bar{\varphi}^{(\mu\sigma)}\,x^{(\mu)}\,x^{(\sigma)}$$

---

[11]) Siehe Anmerkung [4]).

anwenden zu können, muß zunächst die Determinante $D(\breve{Q})$ der quadratischen Form $\breve{Q}$ bestimmt werden. Es war

$$(28) \qquad \breve{Q}(x^{(\mu)}) = \frac{\bar{y}^2}{\bar{t}^2} + \sum_{\nu=1}^{2k+1} \frac{y_\nu^2}{t_\nu^2} = \sum_{\nu,\varrho=1}^{2k+1} \breve{\delta}_{\nu\varrho} y_\nu y_\varrho = \breve{q}(y_\nu).$$

Hierin ist einzusetzen

$$(25) \qquad y_\nu = \sum_{\mu=1}^{2k+1} c_\nu^{(\mu)} x^{(\mu)} \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, 2k+1.$$

Es ist

$$\breve{Q}(x^{(\mu)}) = \sum_{\nu,\varrho,\mu,\sigma=1}^{2k+1} \breve{\delta}_{\nu\varrho} c_\nu^{(\mu)} c_\varrho^{(\sigma)} x^{(\mu)} x^{(\sigma)};$$

also

$$\breve{\varphi}^{(\mu\sigma)} = \sum_{\nu,\varrho=1}^{2k+1} \breve{\delta}_{\nu\varrho} c_\nu^{(\mu)} c_\varrho^{(\sigma)};$$

mithin gilt für die Matrizen

$$(\breve{\varphi}^{(\mu\sigma)}) = (c_\nu^{(\mu)})' \, (\breve{\delta}_{\nu\varrho}) \, (c_\varrho^{(\sigma)});$$

$$(70) \qquad D(\breve{Q}) = |\breve{\varphi}^{(\mu\sigma)}| = |\breve{\delta}_{\nu\varrho}| \cdot |c_\nu^{(\mu)}|^2.$$

Es ist

$$(\breve{\delta}_{\nu\varrho}) = \begin{pmatrix} \breve{\varDelta}_1, & 0 \\ 0, & \breve{\varDelta}_2 \end{pmatrix}.$$

Hierin ist nach (28), (26), (29) und (30)

$$\breve{\varDelta}_1 = \underset{\substack{\nu \\ \varrho} = 1, 2, \ldots, k}{(\breve{\delta}_{\nu\varrho})} = \left\Vert \begin{matrix} \frac{1}{t^2} + \frac{1}{T^2}, & \frac{1}{t^2} & , & \frac{1}{t^2}, \ldots, & \frac{1}{t^2} \\ \frac{1}{t^2} & , & \frac{1}{t^2} + \frac{1}{T^2}, & \frac{1}{t^2}, \ldots, & \frac{1}{t^2} \\ \frac{1}{t^2} & , & \frac{1}{t^2} & , & \frac{2}{t^2}, \ldots, & \frac{1}{t^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{t^2} & , & \frac{1}{t^2} & , & \frac{1}{t^2}, \ldots, & \frac{2}{t^2} \end{matrix} \right\Vert$$

$\breve{\varDelta}_2$ ist eine Diagonalmatrix; ausserhalb der Hauptdiagonale stehen Nullen; in der Hauptdiagonale steht an ν-ter Stelle nach (34)

$$\frac{1}{t_{k+\nu}^2} = \frac{1}{\operatorname{Min}\left[(\psi_\nu \cdot 2\pi(1-\varepsilon))^2, \, (A(1-\varepsilon))^2\right]}.$$

Zur Auswertung der Determinante $|\overline{\Delta}_1|$ setze man in Hilfssatz 1

$$x_0 = \frac{1}{t^2}, \quad x_1 = \frac{1}{T^2}, \quad x_2 = \frac{1}{T^2}, \quad x_3 = \frac{1}{t^2}, \quad . \quad . \quad . \quad x_k = \frac{1}{t^2}.$$

Dann wird

$$(71) \qquad \begin{cases} |\overline{\Delta}_1| = \left(\frac{1}{t^2}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{T^2}\right)^2 \cdot [(k-1)t^2 + 2T^2] \\ \qquad = \left(\frac{1}{t^2}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \left(\frac{k-1}{T^2} + \frac{2}{t^2}\right). \end{cases}$$

$$(72) \qquad |\overline{\Delta}_2| = \frac{1}{(1-\varepsilon)^{2(r+s)} \cdot (\mathrm{Min}\,(2\pi, A))^{2r} \cdot (\mathrm{Min}\,(4\pi, A))^{2s}}$$

$$(73) \qquad |\overline{\delta}_{\nu\varrho}| = |\overline{\Delta}_1| \cdot |\overline{\Delta}_2|.$$

Ferner ist nach (22)

$$(74) \qquad |c_\nu^{(\mu)}| = \frac{R \cdot 2^n \cdot \pi^{r+s}}{w}.$$

Es sei

$$(75) \qquad \overline{M} = \mathrm{Min}\, \overline{Q}(x^{(\mu)}),$$

wobei $x^{(\mu)}$ alle ganzzahligen Wertsysteme durchläuft mit Ausnahme des Systems $x^{(\mu)} = 0$ für $\mu = 1, 2, \ldots, 2k+1$. Es bedeute B_n die Blichfeldt'sche Zahl

$$(76) \qquad B_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(2 + \frac{n}{2}\right)}.$$

Dann ist [12])

$$(77) \qquad \left(\sqrt{\overline{M}}\right)^{2k+1} \cdot B_{2k+1} \leqq \sqrt{D(\overline{Q})}.$$

oder

$$\left(\sqrt{\overline{M}}\right)^{2k+1} \leqq \frac{\sqrt{D(\overline{Q})}}{B_{2k+1}}.$$

Damit $\overline{M} \leqq 1$ werde, ist hinreichend, daß

$$(78) \qquad \frac{\sqrt{D(\overline{Q})}}{B_{2k+1}} \leqq 1$$

oder mit Benutzung von (70)

$$(79) \qquad \sqrt{|\overline{\delta}_{\nu\varrho}|} \cdot \mathrm{abs}\,|c_\nu^{(\mu)}| \leqq B_{2k+1}.$$

---

[12]) Siehe l.c. Anmerkung [4]).

Unter Benutzung von (74), (73), (72), (71) erhält man

$$(80)\quad \begin{cases} |R| \cdot \dfrac{2^n \cdot \pi^{r+s}}{w} \\ \leqq B_{2k+1} \cdot (1-\varepsilon)^{r+s} \cdot (\mathrm{Min}\,(2\pi, A))^r \cdot (\mathrm{Min}\,(4\pi, A))^s \cdot \dfrac{t^{k-2} \cdot T}{\sqrt{\dfrac{k-1}{T^2} + \dfrac{2}{t^2}}}. \end{cases}$$

Setzt man

$$(81)\qquad \frac{t}{A \cdot (1-\varepsilon)} = v \quad ; \qquad \frac{T}{A \cdot (1-\varepsilon)} = V,$$

so erhält man aus (80)

$$(82)\quad \begin{cases} |R| \leqq (1-\varepsilon)^{r+s} \cdot B_{2k+1} \cdot w \cdot \dfrac{(\mathrm{Min}\,(2\pi, A))^r \cdot (\mathrm{Min}\,(4\pi, A))^s}{(2\pi)^r \cdot (4\pi)^s} \cdot \\ \cdot A^k \cdot (1-\varepsilon)^k \cdot \dfrac{v^{k-2} \cdot V}{\sqrt{\dfrac{k-1}{V^2} + \dfrac{2}{v^2}}}. \end{cases}$$

Die Ergebnisse des ersten Teiles der Tabelle RU S. 375 „ohne Quadrierung" lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

$$(83)\quad |R| \geqq \frac{B_{2k+1}}{\sqrt{k+1}} \cdot w \cdot A^k \cdot \frac{(\mathrm{Min}\,(2\pi, A))^r \cdot (\mathrm{Min}\,(4\pi, A))^s}{(2\pi)^r \cdot (4\pi)^s} = R_{\min},$$

wobei $r+s=k+1$ benutzt und $R_{\min}$ zur Abkürzung für die rechte Seite eingeführt ist. Unter Benutzung von (83) und der Abkürzung $R_{\min}$ läßt sich (82) in der Gestalt schreiben

$$(84)\qquad \frac{|R|}{R_{\min} \cdot (1-\varepsilon)^{2k+1}} \leqq \sqrt{k+1} \cdot \frac{v^{k-2} \cdot V}{\sqrt{\dfrac{k-1}{V^2} + \dfrac{2}{v^2}}}.$$

Das Quadrierverfahren in RU bedeutete folgendes: es werden die Quadrate der Einheiten benutzt. Sämtliche reellen Konjugierten der Einheiten werden dadurch positiv. Man benutze für die Logarithmen dieser positiven Einheiten nur den reellen Wert und lasse diejenigen $c_v^{(\mu)}$ fort, die den Imaginärteil dieser Logarithmen liefern. Dabei wird R durch $R \cdot 2^k$ ersetzt. An die Stelle von B_{2k+1} tritt wegen der Verringerung der Dimensionszahl um r, da $2k+1-r=n-1$, die Blichfeldt'sche Zahl B_{n-1}. Das Quadrierverfahren ist für total imaginäre Körper, also für $r=0$, stets von Nachteil, da der Verschlechterung um den Faktor 2^k keine Verbesserung gegenübersteht; es ist für kleine r noch von

Nachteil, für grössere r von Vorteil. Für total reelle Körper, $r = n$, war in RU gezeigt worden, dass das Quadrierverfahren stets von Vorteil ist.

Bei Anwendung des Quadrierverfahrens bleibt (71) ungeändert, an die Stelle von (72) tritt

$$|\bar{\Delta}_2| = \frac{1}{(1-\varepsilon)^{2s} \cdot (\operatorname{Min}(4\pi, A))^{2s}}.$$

(73) bleibt ungeändert; an die Stelle von (74) tritt

$$|c_\nu^{(\mu)}| = \frac{R \cdot (4\pi)^s}{w}.$$

In (75) bis (79) steht überall B_{n-1}. An die Stelle von (80) tritt

$$\text{(80Q)} \quad \begin{cases} |R| \cdot 2^k \cdot \dfrac{(4\pi)^s}{w} \leqq \\ \leqq B_{n-1} \cdot (1-\varepsilon)^s \cdot (\operatorname{Min}(4\pi, A))^s \cdot \dfrac{t^{k-2} \cdot T}{\sqrt{\dfrac{k-1}{T^2} + \dfrac{2}{t^2}}}. \end{cases}$$

(81) bleibt ungeändert. An die Stelle von (82) tritt

$$\text{(82Q)} \quad \begin{cases} |R| \leqq (1-\varepsilon)^s \cdot B_{n-1} \cdot w \cdot \dfrac{(\operatorname{Min}(4\pi, A))^s}{(4\pi)^s} \cdot \dfrac{A^k}{2^k} \cdot \\ \cdot (1-\varepsilon)^k \cdot \dfrac{v^{k-2} \cdot V}{\sqrt{\dfrac{k-1}{V^2} + \dfrac{2}{v^2}}}. \end{cases}$$

Die Ergebnisse des zweiten Teils der Tabelle RU S. 375 „mit Quadrierung" lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

$$\text{(83Q)} \quad |R| \geqq \frac{B_{n-1}}{\sqrt{k+1}} \cdot w \cdot \frac{A^k}{2^k} \cdot \frac{(\operatorname{Min}(4\pi, A))^s}{(4\pi)^s} = R_{\min Q}.$$

Unter Benutzung der Abkürzung $R_{\min Q}$ läßt sich (82Q) schreiben

$$\text{(84Q)} \quad \frac{|R|}{R_{\min Q} \cdot (1-\varepsilon)^{n-1}} \leqq \sqrt{k+1} \cdot \frac{v^{k-2} \cdot V}{\sqrt{\dfrac{k-1}{V^2} + \dfrac{2}{v^2}}}.$$

(84) und (84Q) unterscheiden sich nur durch den Exponenten von $1-\varepsilon$ und dadurch, daß $R_{\min}$ ohne Quadrierung, $R_{\min Q}$ mit Quadrierung bestimmt ist. Die rechten Seiten der beiden Ungleichungen stimmen völlig überein. Es sind also t und T oder an ihrer Stelle nach (81) die Größen v und V so zu bestimmen, daß (84) bezw. (84Q) und (68) erfüllt ist.

Setzt man (81) in (68) ein, so lautet die Ungleichung

$$(85)\qquad \frac{1}{V^2}\cdot\left(1-\frac{1}{g}\right)+\frac{1}{v^2}\cdot\frac{1}{g}\geqq 1$$

oder

$$(86)\qquad \frac{1}{v^2}\geqq g-\frac{1}{V^2}\cdot(g-1).$$

§ 6.

Es sei in Übereinstimmung mit (23) ε_1 die darzustellende Einheit. Ihre sämtlichen Konjugierten seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Es werde gesetzt

$$v_\nu = \Re \log \varepsilon_\nu = \log |\varepsilon_\nu| \qquad \text{für} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Dann ist nach (24)

$$(87)\qquad y_\nu = \psi_\nu v_\nu \qquad \text{für} \qquad \nu = 1, \ldots, k.$$

Wir wollen die Gleichung (87) auch für $\nu = k+1$ als gültig ansehen, indem wit y_{k+1} durch $\overline{y}$ ersetzen.

Es sei Δ die Gleichungsdiskriminante von ε_ν, d. h. das Quadrat des Differenzenproduktes der n Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Um Hilfssatz 2. anwenden zu können, muß man die $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \ldots, |\varepsilon_n|$ nach der Größe ordnen. Es seien die Ordnungszahlen, von der kleinsten angefangen, $1, 2, \ldots, n$. Es sei p_ν die Ordnungszahl von ε_ν. Die p_ν sind die ganzen Zahlen von 1 bis n in geeigneter Reihenfolge, derart daß, wenn $p_\nu > p_\mu$, auch $|\varepsilon_\nu| \geqq |\varepsilon_\mu|$ wird. Dann folgt durch Logarithmieren aus (11)

$$\log|\Delta| \leqq n\log n + 2\sum_{\nu=1}^{n} v_\nu(p_\nu - 1) = n\log n + 2\sum_{\nu=1}^{n} v_\nu p_\nu .$$

Hierbei ist benutzt, daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} v_\nu = \log\left|\prod_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu\right| = \log|\pm 1| = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(88)\qquad \delta_0 = \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu p_\nu,$$

so wird

$$(89)\qquad \log|\Delta| \leqq n\log n + 2\delta_0.$$

Es ist nach (19)

$$\overline{\varepsilon}_{r+\sigma} = \varepsilon_{r+\sigma+s} \qquad \text{für} \qquad 1 \leqq \sigma \leqq s,$$

also

$$(90)\qquad v_{r+\sigma} = v_{r+\sigma+s}.$$

Zwei konjugiert komplexe Konjugierte haben den gleichen absoluten Betrag und können daher in der Reihenfolge der Größe der absoluten Beträge als benachbart angesehen werden. Man kann also setzen

$$p_{r+\sigma+s} = p_{r+\sigma} + 1. \tag{91}$$

Man führe nunmehr in (88) die y_ν wieder ein unter Benutzung von (87), (90), (91). Es wird

$$\delta_0 = \sum_{\varrho=1}^{r} y_\varrho p_\varrho + \sum_{\sigma=1}^{s} {}^* y_{r+\sigma} \cdot \frac{2p_{r+\sigma}+1}{2} = \sum_{\nu=1}^{r+s}{}^* y_\nu h_\nu . \tag{92}$$

Hierin ist Σ^* wie in (46) definiert. In (92) ist

$$h_\varrho = p_\varrho \qquad \text{für} \qquad 1 \leqq \varrho \leqq r. \tag{93}$$

Diese h_ϱ und p_ϱ mögen „für-reell" heißen. Ferner ist

$$h_{r+\sigma} = \frac{2p_{r+\sigma}+1}{2} = p_{r+\sigma} + \tfrac{1}{2} \qquad \text{für} \qquad 1 \leqq \sigma \leqq s. \tag{93a}$$

Diese $h_{r+\sigma}$ und $p_{r+\sigma}$ mögen „für-komplex" heißen. Es sind also die für-reellen h_ϱ ganze Zahlen, die für-komplexen $h_{r+\sigma}$ ganze Zahlen $+\tfrac{1}{2}$, derart, daß die h_ϱ für $1 \leqq \varrho \leqq r$ und die $h_{r+\sigma} \pm \tfrac{1}{2}$ zusammen, abgesehen von der Reihenfolge, die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ erfüllen. Es ist

$$\sum_{\nu=1}^{k+1}{}^* y_\nu h_\nu$$

abzuschätzen unter der Bedingung

$$\bar{q}(y_\nu) \leqq 1.$$

Hieraus folgt nach (28)

$$\sum_{\nu=1}^{k+1}{}^* \frac{y_\nu^2}{t_\nu^2} \leqq \bar{q}(y_\nu) \leqq 1. \tag{94}$$

Es ist wegen (46) für ein beliebiges reelles λ

$$\delta_0 = \sum_{\nu=1}^{k+1}{}^* y_\nu h_\nu = \sum_{\nu=1}^{k+1}{}^* y_\nu (h_\nu - \lambda) = \sum_{\nu=1}^{k+1}{}^* y_\nu h'_\nu ,$$

worin

$$h'_\nu = h_\nu - \lambda$$

zur Abkürzung eingeführt ist. Dann ist nach der Schwarz'schen Ungleichung unter Benutzung von (94)

$$\delta_0^2 = \left(\sum_{\nu=1}^{k+1}{}^* y_\nu h'_\nu\right)^2 = \left(\sum_{\nu=1}^{k+1}{}^* \frac{y_\nu}{t_\nu} \cdot t_\nu h'_\nu\right)^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{k+1}{}^* t_\nu^2 h'^2_\nu = \delta' ; \tag{95}$$

hierin ist δ' zur Abkürzung eingeführt. Für $t_1, t_2, \ldots, t_{k+1} = \bar{t}$ sind die Werte (29), (30), (31) einzusetzen. Die Annahme, daß y_1 oder y_2 absolut nicht größer seien als eines der übrigen y_ν, führt wegen (38), (39) zu einem Widerspruch; also können y_1 und y_2 nur die größten positiven oder negativen Werte unter den y_ν annehmen. Ferner führt wegen (37) die Annahme, daß y_1 und y_2 von gleichem Vorzeichen seien, zu einem Widerspruch. Also ist der eine Wert, z. B. y_2, positiv und der größte, der andere y_1 ist dann negativ und der kleinste Wert unter den y_ν. Wenn $\psi_1 = 1$ und $\psi_2 = 1$, so ist $v_1 = y_1$, $v_2 = y_2$. Wenn $\psi_1 = 1$ und $\psi_2 = 2$, so ist $v_2 = \frac{y_2}{2}$. Es kann aber auch v_2 nicht absolut kleiner als ein v_ν für $\nu \geqq 3$ werden, da die Reihenfolge der Indizes so gewählt ist, daß zuerst sämtliche reellen konjugierten Körper aufgezählt werden. Wenn also $\psi_2 = 2$, so sind sämtliche $\psi_\nu = 2$ für $\nu \geqq 3$. Da $|y_2| > |y_\nu|$, so ist auch

$$|v_2| = \left|\frac{y_2}{2}\right| > \left|\frac{y_\nu}{2}\right| = |v_\nu|.$$

Ebenso sind im total imaginären Falle sämtliche $\psi_\nu = 2$, die $v_\nu = \frac{y_\nu}{2}$ für $\nu \geqq 1$.

Es ist, wenn $r = 0$, $\psi_1 = 2$, $\psi_2 = 2$,

$$\begin{aligned} &p_1 = 1, && p_{1+s} = 2, && h_1 = \tfrac{3}{2}; \\ &p_2 = n - 1, && p_{2+s} = n, && h_2 = n - \tfrac{1}{2}, \end{aligned} \tag{96}$$

wenn $r = 1$, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 2$,

$$p_1 = 1 = h_1, \quad p_2 = n - 1, \quad p_{2+s} = n, \quad h_2 = n - \tfrac{1}{2}, \tag{97}$$

wenn $r \geqq 2$, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 1$

$$p_1 = 1 = h_1, \qquad p_2 = n = h_2. \tag{98}$$

Setzt man

$$p'_\nu = p_\nu - \lambda,$$

so gelten die gestrichenen Gleichungen (91), (93) und (93a). Es ist

$$\begin{aligned} 2h'^2_{r+\sigma} &= 2(p'_{r+\sigma} + \tfrac{1}{2})^2 = 2p'^2_{r+\sigma} + 2p'_{r+\sigma} + \tfrac{1}{2} = \\ &= p'^2_{r+\sigma} + (p'_{r+\sigma} + 1)^2 - \tfrac{1}{2} = p'^2_{r+\sigma} + p'^2_{r+\sigma+s} - \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

oder

$$h'^2_{r+\sigma} = p'^2_{r+\sigma} + p'^2_{r+\sigma+s} - \tfrac{1}{2} - h'^2_{r+\sigma}. \tag{99}$$

Setzt man die Werte (29), (30), (31) in (95) ein, so erhält man

$$\delta_0^2 \leqq \delta' = (T^2 - t^2)(h_1'^2 + h_2'^2) + t^2 \,.\, S'. \tag{100}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt

$$S' = \sum_{\nu=1}^{k+1} h_\nu'^2.$$

Es ist unter Benutzung von (99)

$$\left\{\begin{aligned} S' &= \sum_{\varrho=1}^{r} p_\varrho'^2 + \sum_{\sigma=1}^{s} (p'^2_{r+\sigma} + p'^2_{r+\sigma+s} - \tfrac{1}{2} - h'^2_{r+\sigma}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} (\nu - \lambda)^2 - \frac{s}{2} - \sum_{\sigma=1}^{s} h'^2_{r+\sigma}. \end{aligned}\right. \tag{101}$$

Hierbei ist benutzt, daß die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ abgesehen von der Reihenfolge die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ sind.

Es seien die Zahlen $h'_{r+\sigma}$ nach wachsendem Index geordnet, so daß, wenn $\sigma' > \sigma$, auch $h_{r+\sigma'} > h_{r+\sigma}$ wird *). Ich setze für das Folgende kurz $p = p_{r+\sigma}$. Dann wird

$$h_{r+\sigma} = \frac{p + p + 1}{2} = p + \tfrac{1}{2}; \quad p_{r+\sigma+1} \geqq p + 2;$$

also

$$h_{r+\sigma+1} \geqq \frac{(p+2) + (p+3)}{2} = p + 2 + \tfrac{1}{2};$$

$$h_{r+\sigma+1} - h_{r+\sigma} \geqq (p + 2 + \tfrac{1}{2}) - (p + \tfrac{1}{2}) = 2;$$

also, wenn $\sigma' > \sigma$,

$$h_{r+\sigma'} - h_{r+\sigma} \geqq 2(\sigma' - \sigma)$$

oder für jedes Paar σ', σ

$$|\, h_{r+\sigma'} - h_{r+\sigma} \,| \geqq 2\, |\, \sigma' - \sigma \,|. \tag{102}$$

Unter Benutzung der Formel

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geqq \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

und von (102) erhält man

---

*) Diese Stelle könnte durch ihre Kürze ein Missverständnis geben: der Autor denkt sich für diesen Teil des Beweises die ε_ν für $r < \nu \leqq r + s$ offenbar so angeordnet, daß $|\varepsilon_\nu| \leqq |\varepsilon_\mu|$ für $\nu \leqq \mu$. (Red.)

$$\sum_{\sigma=1}^{s} h'^2_{r+\sigma} = \tfrac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{s} (h'^2_{r+\sigma} + h'^2_{r+s+1-\sigma}) \geqq \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{h'_{r+\sigma} - h'_{r+s+1-\sigma}}{2}\right)^2$$
$$\geqq \sum_{\sigma=1}^{s} (2\sigma - s - 1)^2.$$

Dies ergibt, in (101) eingesetzt,

$$(103) \quad S' \leqq \sum_{\nu=1}^{n} (\nu - \lambda)^2 - \frac{s}{2} - \sum_{\sigma=1}^{s} (2\sigma - s - 1)^2 = S_1 - \frac{s}{2} - S_2,$$

worin S_1 und S_2 zur Abkürzung eingeführt sind.

Es werde nunmehr, um S_1 klein zu machen, $\lambda = \frac{n+1}{2}$ gesetzt.

Zur Auswertung der Summen S_1 und S_2 wird die folgende Summenformel benutzt. Es sei $d \neq 0$; $n \geqq 0$ eine ganze Zahl.

$$a + nd = b.$$

Dann ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} (a + \nu d)^2 = \frac{b(b+d)(2b+d)}{6d} - \frac{a(a-d)(2a-d)}{6d}.$$

Für S_1 ist

$$d = 1, \quad a = 1 - \frac{n+1}{2} = -\frac{n-1}{2}, \quad b = n - \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2}.$$

$$S_1 = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{12}.$$

Für S_2 ist

$$d = 2, \qquad a = -(s-1), \qquad b = s - 1,$$

$$S_2 = 2 \cdot \frac{1}{6 \cdot 2} (s-1)(s+1) \cdot 2s = \frac{(s-1)\,s\,(s+1)}{3}.$$

Es ist

$$S_2 + \frac{s}{2} = \frac{s}{6}(2s^2 - 2 + 3) = \frac{s}{6}(2s^2 + 1).$$

Setzt man diese Ergebnisse in (103) ein, so erhält man

$$(104) \quad S' \leqq S_1 - \frac{s}{2} - S_2 = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{12} - \frac{s(2s^2+1)}{6}.$$

Es ist nach (96), (97), (98)

$$\frac{3}{2} \geqq h_1 \geqq 1; \qquad n - \frac{1}{2} \leqq h_2 \leqq n.$$

Für $\lambda = \frac{n+1}{2}$ ist, da $n \geqq 2$,

$$n - \frac{1}{2} \geqq \lambda \geqq \frac{3}{2},$$

$$|h_1'| = \lambda - h_1 \leqq \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2},$$

$$|h_2'| = h_2 - \lambda \leqq n - \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2};$$

also ist nach (100) wegen $T \geqq t > 0$

$$\delta_0^2 \leqq \delta' \leqq (T^2 - t^2) \cdot 2 \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + t^2 \cdot S';$$

also nach (104)

$$(105) \quad \begin{cases} \delta_0^2 \leqq \delta' \leqq T^2 \cdot \dfrac{(n-1)^2}{2} + t^2 \cdot \left(S' - \dfrac{(n-1)^2}{2}\right) \\ \leqq T^2 \cdot \dfrac{(n-1)^2}{2} + t^2 \cdot \left[\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{12} - \dfrac{s(2s^2+1)}{6}\right]. \end{cases}$$

Hierbei ist benutzt, daß

$$\frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{12} - \frac{(n-1)^2}{2} = \frac{n-1}{12}(n^2 + n - 6n + 6)$$

$$= \frac{n-1}{12}(n^2 - 5n + 6) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{12}.$$

(105) ergibt in (89) eingesetzt

$$\log|\varDelta| \leqq n \log n + $$
$$+ \sqrt{2T^2(n-1)^2 + t^2\left[\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3} - \frac{2s(2s^2+1)}{3}\right]}$$

oder durch Einsetzen von (81)

$$(106) \quad \begin{cases} \log|\varDelta| \leqq n \log n + \\ + A(1-\varepsilon) \cdot \sqrt{2V^2(n-1)^2 + v^2\left[\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3} - \dfrac{2s(2s^2+1)}{3}\right]} \\ = n \log n + A[1-\varepsilon] \cdot \sqrt{U}. \end{cases}$$

Hierin ist U zur Abkürzung für den Radikanden eingeführt.

§ 7.

Es soll die rechte Seite von (106) abgeschätzt werden unter der Voraussetzung, daß (84) oder (84Q) und (85) oder die gleichbedeutende Bedingung (86) erfüllt sind.

Im Falle (84) (ohne Quadrierung) setze man

$$(107)\quad \Lambda = \frac{|R|}{R_{\min}\cdot(1-\varepsilon)^{2k+1}\cdot\sqrt{k+1}} \geqq \frac{1}{(1-\varepsilon)^{2k+1}\cdot\sqrt{k+1}} = \Lambda_0.$$

Im Falle (84Q) setze man

$$(107\mathrm{Q})\quad \Lambda = \frac{|R|}{R_{\min Q}\cdot(1-\varepsilon)^{n-1}\sqrt{k+1}} \geqq \frac{1}{(1-\varepsilon)^{n-1}\sqrt{k+1}} = \Lambda_0.$$

Hierbei ist berücksichtigt, daß $|R| \geqq R_{\min}$ bezw. $|R| \geqq R_{\min Q}$. Die Bezeichnung Λ_0 ist zur Abkürzung eingeführt.

(84) bezw. (84Q) können in der Form geschrieben werden

$$(108)\qquad \left(\frac{1}{v^2}\right)^{k-2}\cdot\frac{1}{V^2}\cdot\left(\frac{k-1}{V^2}+\frac{2}{v^2}\right) \leqq \frac{1}{\Lambda^2}.$$

Es soll (108) sowohl wie (85) mit dem Gleichheitszeichen erfüllt werden. Es werde gesetzt

$$(109)\qquad \frac{1}{v^2} = g - \eta.$$

Dann wird nach (86) mit dem Gleichheitszeichen

$$\eta = \frac{1}{V^2}(g-1)$$

oder

$$(110)\qquad \frac{1}{V^2} = \frac{\eta}{g-1}.$$

(109) und (110) werden in (108) mit dem Gleichheitszeichen eingesetzt

$$(111)\qquad f(\eta) = (g-\eta)^{k-2}\cdot\frac{\eta}{g-1}\cdot(g-c\eta) = \frac{1}{2\Lambda^2}.$$

Hierin ist $f(\eta)$ zur Abkürzung für das Polynom eingeführt. Ferner ist

$$c = 1 - \frac{k-1}{2(g-1)}.$$

Es ist $k-1 < g-1$ nach (59), also $1 > c > \frac{1}{2}$. (111) ist eine algebraische Gleichung für η. Es ist

(111a) $$f(\eta) > 0,$$
so lange
(111b) $$0 < \eta < g.$$
Es war nach (32) $T > t$ oder wegen (81) $V > v$, also nach (109) und (110)

$$g - \eta > \frac{\eta}{g - 1}, \qquad g > \frac{\eta g}{g - 1},$$

(112) $$g - 1 > \eta.$$

Setzt man $\eta_2 = g - 1$, so ist

(113) $$f(\eta_2) = 1^{k-2} \cdot 1 \cdot (g - c\eta_2) = g - \left(g - 1 - \frac{k - 1}{2}\right) = \frac{k + 1}{2}.$$

Es ist

(114) $$\frac{f'(\eta)}{f(\eta)} = -\frac{k - 2}{g - \eta} + \frac{1}{\eta} - \frac{c}{g - c\eta}.$$

Im Intervall (111b) haben wegen (111a) die Funktionen $f'(\eta)$ und $\frac{f'(\eta)}{f(\eta)}$ das gleiche Vorzeichen. Für hinreichend kleine Werte von η überwiegt in (114) das Glied $\frac{1}{\eta}$, ist also $f'(\eta)$ positiv. Im Intervall (111b) nehmen alle Summanden auf der rechten Seite von (114) mit wachsendem η monoton ab. Es ist

$$\frac{f'(\eta_2)}{f(\eta_2)} = -(k - 2) + \frac{1}{g - 1} - \frac{c}{\left(\frac{k + 1}{2}\right)}.$$

Für $k \geqq 3$ ist also wegen $g > 6$

$$\frac{f'(\eta_2)}{f(\eta_2)} \leqq -1 + \frac{1}{5} - 0 = -\frac{4}{5} < 0.$$

Für $k = 2$ ist $g = 6$;

(115) $$c = 1 - \frac{1}{2 \,.\, 5} = \frac{9}{10};$$

also

$$\frac{f'(\eta_2)}{f(\eta_2)} = -0 + \frac{1}{5} - \frac{\left(\frac{9}{10}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{2}{5} < 0.$$

$\frac{f'(\eta_2)}{f(\eta_2)}$ nimmt also mit vom 0 aufsteigendem η bis η_2 von positiven zu negativen Werten monoton ab, nimmt also genau an einer

Stelle η_1 den Wert 0 an. Es ist also

$$0 < \eta_1 < \eta_2, \qquad f'(\eta_1) = 0,$$

$f(\eta_1)$ ist ein Maximum, da die Ableitung mit wachsendem η von positiven zu negativen Werten übergeht. Es ist wegen (113)

$$f(\eta_1) > f(\eta_2) = \frac{k+1}{2}. \tag{116}$$

Von den Werten (111)

$$f(\eta) = \frac{1}{2\Lambda^2}$$

liegen die für uns brauchbaren Werte wegen (107) bezw. (107Q) im Intervall

$$0 < f(\eta) = \frac{1}{2\Lambda^2} \leqq \frac{1}{2\Lambda_0^2} = \frac{(1-\varepsilon)^m \cdot (k+1)}{2} < \frac{k+1}{2}. \tag{117}$$

Hierin ist der Exponent entweder „ohne Quadrierung" $m = 2(2k+1)$ oder „mit Quadrierung" $m = 2(n-1)$. Das Interval $\eta_1 \leqq \eta \leqq \eta_2$ liefert wegen (116) Werte, die von $f(\eta_1)$ zu $f(\eta_2)$ abnehmen, für die also

$$f(\eta) \geqq \frac{k+1}{2}.$$

Dieses Intervall liefert also keine Werte $f(\eta) = \frac{1}{2\Lambda^2}$, für die (117) erfüllt ist. Im Intervall $0 < \eta \leqq \eta_1$ wächst $f(\eta)$ monoton, nimmt also, da nach (117) und (116)

$$\frac{1}{2\Lambda_0^2} < \frac{k+1}{2} = f(\eta_2) < f(\eta_1),$$

die Werte des Intervalls (117), jeden genau einmal, an. Speziell sei

$$f(\eta_0) = \frac{1}{2\Lambda_0^2}. \tag{118}$$

Dann ist

$$\eta_0 < \eta_1 < \eta_2.$$

Jeder Wert des Intervalls (117) wird von $f(\eta)$ im Intervall

$$0 < \eta \leqq \eta_0$$

genau einmal angenommen.

Es mögen der besseren Übersicht halber die Ergebnisse über den Verlauf der ganzen rationalen Funktion $f(\eta)$ noch einmal zusammengestellt werden. Wegen (110) und (112) ist η auf das Intervall

$$0 < \eta < \eta_2 = g - 1$$

zu beschränken. In diesem Intervall wächst $f(\eta)$ monoton bis zu einem Maximum $f(\eta_1)$ und nimmt dann monoton wieder ab. Es ist

$$f(0) = 0; \qquad f(\eta_2) = \frac{k+1}{2}.$$

Die brauchbaren Werte von $f(\eta)$ liegen nach (117) im Intervall

$$0 < f(\eta) \leqq \frac{1}{2\Lambda_0^2} < \frac{k+1}{2}.$$

Der Abstieg vom Maximum $f(\eta_1)$ zum Endwert $f(\eta_2)$ liefert also zu große, unbrauchbare Werte. Ebenso sind die Werte von $f(\eta)$ im letzten Teil des Anstieges bis zum Maximum $f(\eta_1)$ zu groß. Die brauchbaren Werte liegen im ersten Teil des monotonen Anstieges

$$0 < \eta \leqq \eta_0,$$

worin nach (118)

$$f(\eta_0) = \frac{1}{2\Lambda_0^2}.$$

Es soll nunmehr in (106) der Radikand U abgeschätzt werden. Es ist

$$(119) \quad \begin{cases} U < 2V^2 \cdot (n-1)^2 + v^2 \cdot \dfrac{(n-1)^2(n-3)}{3} \\ = 2(n-1)^2 \cdot \left(V^2 + v^2 \dfrac{n-3}{6}\right). \end{cases}$$

Hierin setze man nach (109), (110), (111)

$$V^2 = \frac{g-1}{\eta} = 2\Lambda^2 \cdot (g-\eta)^{k-2} \cdot (g - c\eta),$$

$$v^2 = \frac{1}{g-\eta} = 2\Lambda^2 \cdot (g-\eta)^{k-3} \frac{\eta}{g-1} \cdot (g - c\eta);$$

also

$$V^2 + v^2 \cdot \frac{n-3}{6} = 2\Lambda^2 \cdot (g-\eta)^{k-3} \cdot (g - c\eta) \cdot \left[g - \eta + \frac{\eta(n-3)}{6(g-1)}\right].$$

Hierin ist nach (59)

$$\frac{n-3}{6(g-1)} < \frac{n}{6(k+1)} = \frac{r+2s}{6(r+s)} \leqq \frac{2r+2s}{6(r+s)} = \frac{1}{3};$$

also

$$(120) \quad V^2 + v^2 \frac{n-3}{6} < 2\Lambda^2 (g-\eta)^{k-3} \cdot (g - c\eta)\left(g - \frac{2}{3}\eta\right).$$

Hieraus folgt zunächst für $k \geqq 3$

$$V^2 + v^2 \frac{n-3}{6} < 2A^2 g^{k-1}. \tag{121}$$

Für $k = 2$ ist $g = 6$ und $c = \frac{9}{10}$ nach (115); die Ungleichung (120) lautet

$$V^2 + v^2 \frac{n-3}{6} < 2A^2 \cdot \frac{(6 - \frac{9}{10}\eta)(6 - \frac{2}{3}\eta)}{6-\eta}$$

$$= 2A^2 \cdot 6 + 2A^2 \cdot \frac{(6 - \frac{9}{10}\eta)(6 - \frac{2}{3}\eta) - 6(6-\eta)}{6-\eta}$$

$$= 2A^2 \cdot 6 + 2A^2 \cdot \frac{6 \cdot (-\frac{9}{10} - \frac{2}{3} + 1)\eta + \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{3}\eta^2}{6-\eta}$$

$$= 2A^2 \cdot 6 + 2A^2 \cdot \frac{(-27 - 20 + 30)\eta + 3\eta^2}{5(6-\eta)}$$

$$= 2A^2 \cdot 6 + 2A^2 \cdot \frac{\eta(3\eta - 17)}{5(6-\eta)} < 2A^2 \cdot 6 = 2A^2 \cdot g.$$

Es ist nämlich

$$3\eta - 17 < 3 \,.\, 5 - 17 = -2 < 0,$$

weil

$$\eta \leqq \eta_0 < \eta_2 = g - 1 = 5.$$

Die Ungleichung (121) ist also auch für $k = 2$ erfüllt.

Man setze (121) in (119) ein und erhält

$$U < 4(n-1)^2 A^2 \,.\, g^{k-1}.$$

Dies ergibt in (106) eingesetzt

$$\log |\Delta| < n \log n + A(1-\varepsilon) \cdot 2(n-1) \cdot A \cdot g^{\frac{k-1}{2}}.$$

Hierin setze man nach (33)

$$A = \frac{n}{\sqrt{k+1}} \log 2;$$

für A setze man seinen Wert nach (107) ein. Dann erhält man

$$\log |\Delta| < n \log n + \log 2 \cdot \frac{2n(n-1)}{k+1} \cdot \frac{1}{(1-\varepsilon)^{2k}} \cdot \frac{|R|}{R_{\min}} \cdot g^{\frac{k+1}{2}}. \tag{122a}$$

Da diese Beziehung für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, so ist

$$\log |D| \leqq \log |\Delta| \leqq n \log n + \frac{|R|}{R_{\min}} \cdot \log 2 \cdot \frac{2n(n-1)}{k+1} \cdot g^{\frac{k-1}{2}}. \tag{122}$$

Hierin ist D die Körperdiskriminante. Bei Benutzung von (107Q) tritt $R_{\min Q}$ an die Stelle von $R_{\min}$; an die Stelle von $\frac{1}{(1-\varepsilon)^{2k}}$ tritt in (122a) der Bruch $\frac{1}{(1-\varepsilon)^{n-2}}$, der ebenfalls fortgelassen werden darf, da, wenn $k \geqq 2$ ist, $n-2 \geqq 3-2 = 1$ ist.

(122) liefert eine obere Schranke für $|D|$, die von $|R|$ abhängt. Löst man in (122) nach $|R|$ auf, so erhält man

$$(123) \qquad |R| \geqq R_{\min} \cdot (k+1) \cdot \frac{\log|D| - n\log n}{\log 2 \cdot 2n(n-1) \cdot g^{\frac{k-1}{2}}}.$$

(123) wird aber erst wirksam, wenn

$$(124) \qquad \log|D| \geqq n \cdot \log n + \log 2 \cdot \frac{2n(n-1)}{k+1} \cdot g^{\frac{k-1}{2}}.$$

Für kleinere $|D|$ hat es bei der von $|D|$ unabhängigen Abschätzung $|R| \geqq R_{\min}$ sein Bewenden. In (122a) bis (124) kann überall $R_{\min Q}$ an die Stelle von $R_{\min}$ treten.

Für alle algebraischen Zahlkörper mit Ausnahme der Körper mit Einheitsdefekt ist also bewiesen, daß bei festem n $|R|$ mit $|D|$ ins Unendliche wächst.

Es möge eine Bemerkung über die absoluten Beträge der Regulatoren der total reellen Körper gemacht werden. Am Schlusse von RU war gezeigt worden, daß sie alle größer sind als ein Tausendstel und daß ihre untere Schranke mit n ins Unendliche wächst. Nimmt man einen festen Regulator R_1, z. B. den Regulator des reell-quadratischen Zahlkörpers $P(\sqrt{5})$,

$$|R| = \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}4812.$$

so ist für $n \geqq n_1$, worin n_1 eine angebbare Schranke, $R_{\min Q} \geqq |R_1|$. Der Fall

$$(125) \qquad |R| < |R_1|$$

kann also nur für $n \leqq n_1$ vorkommen. Für jeden dieser Grade liefert aber (122) in Verbindung mit (125) eine Schranke für $|D|$. Da es nach Minkowski[13]) für jedes D nur endlich viele Zahlkörper gibt, so kommen überhaupt nur endlich viele Zahlkörper in betracht, für die (125) gelten kann. Unter den absoluten Beträgen der Regulatoren der total reellen Zahlkörper aller Grade gibt es also ein Minimum, das für einen oder endlich viele wohlbestimmte

---

[13]) Siehe l. c. Anmerkung [5]).

Zahlkörper angenommen wird, dessen Ausrechnung zwar in endlich vielen Schritten möglich ist, aber, wenn nicht neue theoretische Hilfsmittel hinzukommen, menschliche Kräfte bei weitem übersteigen würde.

§ 8.

In diesem Paragraphen soll die spezielle Voraussetzung gemacht werden, daß der gegebene Körper, abgesehen vom Körper der rationalen Zahlen, keinen echten Unterkörper oder höchstens einen imaginär-quadratischen besitzt. Diese Voraussetzung ist z. B. immer erfüllt, wenn der Grad n des Körpers eine Primzahl ist.

Es brauchen hier keine Vorkehrungen getroffen zu werden, die verhindern sollen, dass die nach dem Blichfeldt'schen Satz gefundene Einheit einem echten Unterkörper angehört, da es nach der Voraussetzung keine Einheiten gibt, die einem echten Unterkörper angehören und keine Einheitswurzeln sind.

Für das Folgende wird nur der Realteil der Logarithmen benutzt. Infolge dessen werden Einheitswurzeln durch den Nullpunkt des Punkgitters dargestellt, für den $y_\nu = 0$ für $1 \leqq \nu \leqq k$, also auch $\bar{y} = 0$. Ein gefundener, vom Nullpunkt verschiedener Gitterpunkt, für den also nicht sämtliche $y_\nu = 0$ sind, kann mithin keine Einheitswurzel darstellen.

Es sei

$$\bar{q}(y_\nu) = \frac{1}{t^2}\left(\bar{y}^2 + \sum_{\nu=1}^{k} y_\nu^2\right) = \frac{1}{t^2} q(y_\nu).$$

Hierin sei wieder

(26) $$\bar{y} = -\sum_{\nu=1}^{k} y_\nu$$

und

(126) $$q(y_\nu) = \sum_{\nu,\varrho=1}^{k} \delta_{\nu\varrho}\, y_\nu\, y_\varrho$$

mit

$$\delta_{\nu\nu} = 2; \qquad \delta_{\nu\varrho} = 1 \quad \text{für} \quad \nu \neq \varrho.$$

Es ist die Determinante

(127) $$|\,\delta_{\nu\varrho}\,| = k + 1$$

nach RU (15) oder nach Hilfssatz I. In (126) ist einzusetzen

$$y_\nu = \sum_{\mu=1}^{k} a_\nu^{(\mu)}\, x^{(\mu)} \qquad \text{für} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k,$$

worin

$$a_\nu^{(\mu)} = \psi_\nu \log | \vartheta_\nu^{(\mu)} |$$

nach (20) und die Determinante

$$| a_\nu^{(\mu)} | = R. \tag{21}$$

Man erhält

$$q(y_\nu) = Q(x^{(\mu)}) = \sum_{\mu,\sigma=1}^{k} x^{(\mu)} x^{(\sigma)} \varphi^{(\mu\sigma)}.$$

Es ergibt sich die Determinante der quadratischen Form unter Benutzung von (127) und (21)

$$D(Q) = | \varphi^{(\mu\sigma)} | = | \delta_{\nu\varrho} | \cdot | a_\nu^{(\mu)} |^2 = (k+1)R^2.$$

Es ist

$$\overline{q}(y_\nu) = \frac{1}{t^2}\, q(y_\nu) = \frac{1}{t^2}\, Q(x^{(\mu)}) = \overline{Q}(x^{(\mu)});$$

also

$$D(\overline{Q}) = \frac{1}{t^{2k}} \cdot (k+1) \cdot R^2. \tag{128}$$

Es sei

$$\overline{M} = \operatorname{Min} \overline{Q}(x^{(\mu)})$$

für alle ganzzahligen Wertsysteme $x^{(\mu)}$ mit Ausnahme des Systems $x^{(\mu)} = 0$ für $\mu = 1, 2, \ldots k$. Ferner sei B_k die Blichfeldt'sche Zahl

$$B_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(2 + \frac{k}{2}\right)}. \tag{129}$$

Dann ist analog (77)

$$(\sqrt{\overline{M}})^k \cdot B_k \leqq \sqrt{D(\overline{Q})}$$

oder

$$(\sqrt{\overline{M}})^k \leqq \frac{\sqrt{D(\overline{Q})}}{B_k}.$$

Damit

$$\overline{M} \leqq 1$$

sei, ist hinreichend, daß

$$\frac{\sqrt{D(\overline{Q})}}{B_k} \leqq 1 \tag{130}$$

oder mit Benutzung von (128)

$$\frac{\sqrt{k+1}\cdot R}{B_k} \leqq t^k, \tag{131}$$

oder

$$\frac{R^{\frac{1}{k}}\cdot(k+1)^{\frac{1}{2k}}}{B_k^{\frac{1}{k}}} \leqq t. \tag{132}$$

Um eine möglichst gute Abschätzung zu bekommen, wähle man für t den kleinsten nach (132) zuläßigen Wert, setze also

$$\frac{R^{\frac{1}{k}}\cdot(k+1)^{\frac{1}{2k}}}{B_k^{\frac{1}{k}}} = t. \tag{132a}$$

Die Abschätzung für $\log|\varDelta|$ erhält man nach § 6, indem man $T = t$ setzt. Es ist nach (100) und (104)

$$\delta' = t^2\cdot S' \leqq t^2\left[\frac{(n-1)n(n+1)}{12} - \frac{s(2s^2+1)}{6}\right]. \tag{133}$$

Es ist nach (95) $\delta_0^2 \leqq \delta'$, also nach (89), (133), (132a), (129)

$$\begin{cases} \log|D| \leqq \log|\varDelta| \leqq n\log n + 2\delta_0 \leqq n\,.\log n + 2\sqrt{\delta'} \\ \leqq n\cdot\log n + R^{\frac{1}{k}}\cdot(k+1)^{\frac{1}{2k}}\cdot\left(\Gamma\left(2+\frac{k}{2}\right)\right)^{\frac{1}{k}}\cdot\frac{2^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{n^3-n}{3}-\frac{4s^3+2s}{3}} \\ = n\log n + R^{\frac{1}{k}}\cdot\Theta. \end{cases} \tag{134}$$

D ist die Körperdiskriminante, $\varDelta$ die Gleichungsdiskriminante der gefundenen Einheit, die gleichzeitig erzeugende Zahl des Körpers und keine Einheitswurzel ist. Θ ist zur Abkürzung für den Faktor von $R^{\frac{1}{k}}$ eingeführt.

Es soll die Größenordnung von Θ für große Werte von n untersucht werden. Es ist nach der Stirling'schen Formel

$$\Gamma\left(2+\frac{k}{2}\right) = \left(2+\frac{k}{2}\right)^{\frac{3+k}{2}}\cdot e^{-(2+\frac{k}{2})}\cdot\sqrt{2\pi\,.\,\varphi_1}.$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\ldots$ bezeichnen Funktionen von k oder n, die mit wachsendem n gegen 1 konvergieren.

$$\left(\Gamma\left(2+\frac{k}{2}\right)\right)^{\frac{1}{k}} = \left(2+\frac{k}{2}\right)^{\frac{3}{2k}+\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{2}{k}-\frac{1}{2}}\cdot(2\pi)^{\frac{1}{2k}}\cdot\varphi_1^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}}\cdot\varphi_2.$$

Also ist

$$\Theta = \sqrt{\frac{k}{2} \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{3}} \cdot \sqrt{n^3 - n - 4s^3 - 2s} \cdot \varphi_3$$

$$= \sqrt{\frac{k}{3 \cdot e \cdot \pi} \cdot (n^3 - 4s^3)} \cdot \varphi_4.$$

Für total reelle Körper, also $s = 0$, $k = n - 1$, erhält man

$$\Theta = \frac{n^2}{\sqrt{3 \cdot e \cdot \pi}} \cdot \varphi_5.$$

§ 9.

Es bleibt der Fall $k = 1$ nachzuholen. Er fällt stets unter die speziellen Voraussetzungen des § 8. Es sind nur 3 Fälle möglich:

Fall a) $n = 2$, $s = 0$;

Fall b) $n = 3$, $s = 1$;

Fall c) $n = 4$, $s = 2$.

$n = 2$ und $n = 3$ sind Primzahlen. In diesen Fällen gibt es also ausser dem Körper der rationalen Zahlen keinen echten Unterkörper. Im Falle $n = 4$ ist nur ein echter Unterkörper des Grades 2 möglich. Ist dieser imaginär, so ist er nach den Voraussetzungen des § 8 zuläßig; ist er reell, so liegt der ausgeschlossene Fall des Einheitsdefekts vor, nämlich ein total imaginärer Körper des Grades n über einem total reellen Körper des Grades $\frac{n}{2}$.

Alle Einheiten sind Potenzen einer einzigen ϑ_1. Der Regulator R ist eine Determinante ersten Grades

$$R = \psi_1 \log \vartheta_1.$$

Anstatt der Blichfeldt'schen Zahl B_1 kann der genaue Wert 1 gesetzt werden. Dann lautet (130)

$$\sqrt{D(Q)} \leqq 1.$$

(131) lautet

$$\sqrt{2} \cdot R \leqq t.$$

An Stelle von (132a) wird gesetzt

$$\sqrt{2} \,.\, R = t.$$

An die Stelle von (134) tritt

$$\log|D| \leqq \log|\Delta| \leqq n\log n + 2\delta_0 \leqq n\log n + 2t\cdot\sqrt{S'}$$
$$\leqq n\log n + \sqrt{2}\cdot R\cdot\sqrt{\frac{n^3-n}{3}-\frac{4s^3+2s}{3}}.$$

Fall a): $n = 2, \quad s = 0;$

(135) $$\log|D| \leqq 2\log 2 + 2|R|.$$

Fall b): $n = 3, \quad s = 1;$

(136) $$\log|D| \leqq 3\log 3 + 2\sqrt{3}\cdot|R|.$$

Fall c): $n = 4, \quad s = 2;$

(137) $$\log|D| \leqq 4\log 4 + 4|R|.$$

(Oblatum 11-7-51).