J. DIXMIER

Applications ♮ dans les anneaux d'opérateurs

Compositio Mathematica, tome 10 (1952), p. 1-55

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1952__10__1_0>

Applications $\natural$ dans les anneaux d'opérateurs

par

J. Dixmier

Dijon

Dans deux précédents articles [2] [6] [1]), j'ai étudié la théorie des anneaux d'opérateurs. Dans [2], j'ai prouvé l'existence d'une application $\natural$ dans les anneaux de classe finie. Dans [6], j'ai donné quelques résultats sur la structure des anneaux quelconques. Je suppose ces articles connus du lecteur et j'utilise leurs notations. Partant de leurs résultats, nous allons maintenant étudier les applications $\natural$ dans les anneaux quelconques [2]). Nous généraliserons ainsi certains résultats de [10] [11] [12] [15] concernant les facteurs. Un résumé partiel a été donné dans [5].

La méthode générale consiste à ramener le cas des anneaux quelconques au cas des anneaux de classe finie par l'utilisation des variétés *finies*. Ce principe est déjà mis en oeuvre dans [15] pour les facteurs. D'ailleurs, pour les idées générales comme pour les techniques de détail, je me suis constamment inspiré, comme dans [2] [6], des méthodes de F. J. Murray et J. von Neumann [3]). L'analogie avec la théorie de l'intégration, si visible dans [10] [11] [12] [15], et qui m'avait guidé dans [2], m'a encore beaucoup servi. Enfin, la documentation, souvent inédite, mise à ma disposition par R. Godement, m'a influencé d'une manière qu'il est difficile d'apprécier. Je dois d'ailleurs à R. Godement l'idée de plusieurs chapitres de ce travail.

Les anneaux d'opérateurs quelconques ont été aussi étudiés par J. von Neumann dans [17], mais, comme je l'ai déjà dit dans [2], mes méthodes sont très différentes de celles de [17]. Elles sont indépendantes de la théorie de la mesure, et elles permettent de traiter le cas d'un espace non séparable; mais elles ne donnent absolument rien concernant la structure fine des

---

[1]) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie.

[2]) Il sera toujours sous-entendu que ces anneaux contiennent 1.

[3]) Mais la rédaction a été faite de telle sorte que la connaissance des articles de ces auteurs n'est pas nécessaire.

anneaux d'opérateurs. Il est hors de doute qu'on pourrait déduire (dans le cas d'un espace séparable) beaucoup des résultats de cet article de la combinaison des résultats de [10] [11] [12] [17], bien que je n'aie pas tenté de le faire.

On va maintenant préciser un peu les résultats obtenus, et donner à cette occasion des définitions importantes qui ne seront pas répétées dans la suite [4]).

Rappelons que dans un anneau $\mathbf{M}$ de classe finie il existe une et une seule application $A \rightarrow A^\natural$ de $\mathbf{M}$ dans $\mathbf{M}^\natural$ qui possède les propriétés suivantes:

1. Elle est linéaire.
2. $(AB)^\natural = (BA)^\natural$.
3. Si $A \in \mathbf{M}^+$, on a $A^\natural \in \mathbf{M}^{\natural+}$.
4. Si $A \in \mathbf{M}^\natural$, on a $(AB)^\natural = AB^\natural$.
5. Si $A \in \mathbf{M}^\natural$, on a $A^\natural = A$.

Si $\mathbf{M}$ n'est pas de classe finie, une telle application *n'existe pas*. Si on veut généraliser l'application $^\natural$ au cas des anneaux quelconques, il faut donc abandonner quelque chose des propriétés précédentes. Nous nous interdirons de modifier les conditions 1—3 qui caractérisent essentiellement les phénomènes étudiés. La condition 4 est indispensable si l'on veut que l'application $^\natural$ permette de *reconstituer toutes les traces*. Mais nous abandonnons la condition 5. Le cas des facteurs prouve aussi qu'il faut renoncer à définir une application $^\natural$ dans $\mathbf{M}$ tout entier.

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal bilatère de $\mathbf{M}$. Une application φ de $\mathfrak{m}$ dans $\mathbf{M}^\natural$ sera dite *centrale* si $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ pour $A \in \mathfrak{m}$, $B \in \mathbf{M}$, et *positive* si $A \in \mathfrak{m}^+$ entraîne $\varphi(A) \in \mathbf{M}^{\natural+}$. On appellera *application* $^\natural$ toute application φ d'un idéal bilatère $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{M}$ dans $\mathbf{M}^\natural$, linéaire, centrale, positive, et telle que $\varphi(AB) = A\varphi(B)$ pour $A \in \mathbf{M}^\natural$ et $B \in \mathfrak{m}$. [5]) On dira que φ est *fidèle* si les hypothèses $A \in \mathfrak{m}^+$, $\varphi(A)=0$ entraînent $A = 0$. On dira que φ est *normale* si, lorsque $\mathscr{F} \subset \mathfrak{m}$ est un ensemble filtrant croissant d'opérateurs self-adjoints de borne supérieure $A \in \mathfrak{m}$, $\varphi(A)$ est la borne supérieure de $\varphi(\mathscr{F})$ (notons que $\varphi(\mathscr{F})$ est automatiquement filtrant croissant et majoré par $\varphi(A)$ dès que φ est linéaire et positive).

Nous ne nous intéresserons qu'aux applications $^\natural$ normales. En fait, nous pensons que toute application $^\natural$ est normale. Mais nous

4) $\mathbf{M}^\natural$ désigne le centre de $\mathbf{M}$. Si N est un ensemble quelconque d'opérateurs, on désignera par N^+ l'ensemble des opérateurs self-adjoints ≥ 0 de N.

5) C'est sensiblement la définition des applications $^\natural$ donnée par Godement dans [9]. On notera une fois pour toutes que $\varphi(A^*) = \varphi(A)^*$ pour $A \in \mathfrak{m}$: on verra en effet que tout opérateur de $\mathfrak{m}$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathfrak{m}^+$.

n'avons pu établir ce point: il y a là un problème algébrico-topologique assez intéressant, qui n'a jamais été étudié même pour les facteurs.

Ceci posé, le théorème 1 affirme essentiellement qu'il existe des applications $\natural$ normales fidèles définies sur des idéaux bilatères fortement partout denses, pourvu que $\mathbf{M}$ ne contienne pas de projecteurs purement infinis.

En supposant la condition précédente vérifiée, il existe même une infinité d'applications $\natural$ normales fidèles définies sur des idéaux bilatères fortement partout denses. Lorsque $\mathbf{M}$ est de classe finie, on a pu définir [2] une application $\natural$ particulière, qu'on appellera désormais l'application $\natural$ canonique [6]). Mais ceci est impossible dans le cas général. Cependant le théorème 2 rétablit dans une certaine mesure l'unicité de l'application $\natural$, puisqu'il affirme essentiellement que toutes les applications $\natural$ fidèles normales définies sur des idéaux bilatères fortement partout denses sont, en un certain sens, proportionnelles.

Parallèlement aux applications $\natural$, nous considérerons les *traces* sur $\mathbf{M}$, c'est-à-dire les applications φ d'un idéal bilatère $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{M}$ dans le corps des nombres complexes, linéaires, centrales et positives. On définit sans peine, par analogie avec ce qui précède, les traces fidèles et les traces normales. Alors on peut déterminer toutes les traces normales fidèles, car le théorème 3 affirme en particulier que les relations étroites entre les traces et les applications $\natural$, établies par R. Godement quand $\mathbf{M}$ est de classe finie, s'étendent au cas général.

Enfin, le théorème 4 prouve que l'étude des fonctions-poids [17] est entièrement équivalente à celle des traces normales.

Comme on l'a déjà dit, on utilisera sans explication les notations de [2] éventuellement modifiées dans [6]. On utilisera aussi fréquemment, et sans s'y référer explicitement, les remarques suivantes:

1. Soient $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ des variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$. Posons $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_2' = \mathcal{M}_2 \ominus (\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2)$, $\mathcal{M}_2'' = \mathcal{M} \ominus \mathcal{M}_1$. On a: $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2' = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2''$. Les variétés $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2''$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathcal{M}$. La variété $\mathcal{M}_2''$ est en position p' avec $\mathcal{M}_2'$ (cf. [2], p. 213), donc il existe un $U \in \mathbf{M}_U$ tel que $U(\mathcal{M}_2'') = \mathcal{M}_2'$. Donc $\mathcal{M}_2'' \prec \mathcal{M}_2$.

2. Soient $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ des variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$. L'ensemble $P_{\mathcal{M}_1}\mathcal{M}_2$ est

---

[6]) Cette application est fidèle d'après [2], théorème 10, et normale d'après [2], théorème 17.

une variété linéaire non fermée en général; soit $\mathcal{M}_2' = [P_{\mathcal{M}_1}\mathcal{M}_2]$. La variété $\mathcal{M}_2'$ est en position p' avec $\mathcal{M}_2 \ominus (\mathcal{M}_2 \cap (H \ominus \mathcal{M}_1))$. Donc $\mathcal{M}_2' \prec \mathcal{M}_2$.

3. Si $\mathcal{F}$ est un ensemble filtrant croissant majoré d'opérateurs self-adjoints, $\mathcal{F}$ admet une borne supérieure A fortement adhérente à $\mathcal{F}$ ([4], théorème 2). Si B est un majorant de $\mathcal{F}$ fortement adhérent à $\mathcal{F}$, on a $B = A$; car, puisque B majore $\mathcal{F}$, on a $B \geqq A$; d'autre part, l'ensemble des minorants de A est fortement fermé et contient $\mathcal{F}$ donc $B : A \geqq B$; d'où $A = B$.

Si $\mathcal{F}$ est contenu dans un anneau d'opérateurs $\mathbf{M}$, on a $A \in \mathbf{M}$, puisque $\mathbf{M}$ est fortement fermé.

Soit $T \in \mathcal{F}$. L'ensemble $\mathcal{F}'$ des $S \in \mathcal{F}$ tels que $S \geqq T$ est filtrant croissant. Les ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ ont mêmes majorants comme on le voit aussitôt, donc même borne supérieure. $\mathcal{F}'$ est minoré, donc, par translation, on se ramène au cas où $S \geqq 0$ pour tout $S \in \mathcal{F}'$. Ceci nous permettra de nous limiter toujours aux ensembles filtrants croissants d'opérateurs self-adjoints $\geqq 0$.

I. Propriétés des anneaux de classe finie.

$\mathbf{M}$ désigne, *dans ce chapitre*, un anneau de classe finie, et $A \to A^\natural$ est l'application $^\natural$ *canonique* de $\mathbf{M}$.

1. Proposition 1. — *Soit $K \in \mathbf{M}^{\natural +}$. L'application φ définie par $\varphi(A) = A^\natural K = KA^\natural = (AK)^\natural = (KA)^\natural$ pour $A \in \mathbf{M}$ est une application $^\natural$ normale. Réciproquement, si φ est une application $^\natural$ définie sur $\mathbf{M}$, il existe un $K \in \mathbf{M}^{\natural +}$ tel que $\varphi(A) = A^\natural K$, et K est évidemment unique, avec $K = \varphi(1)$. Si donc φ_1 et φ_2 sont deux applications $^\natural$ définies sur $\mathbf{M}$ telles que $\varphi_1(1) = \varphi_2(1)$, on a: $\varphi_1 = \varphi_2$.*

Démonstration. — Si $K \in \mathbf{M}^{\natural +}$, l'application $A \to A^\natural K$ est une application $^\natural$: ceci résulte aussitôt des propriétés de l'application $^\natural$ canonique. Si $A \in \mathbf{M}^+$, et si $\mathcal{F} \subset \mathbf{M}^+$ est un ensemble filtrant croissant de borne supérieure A, $\varphi(\mathcal{F})$ est filtrant croissant et majoré par $\varphi(A)$. Comme A est fortement adhérent à $\mathcal{F}$, $\varphi(A)$ est fortement adhérent à $\varphi(\mathcal{F})$, compte tenu du théorème 17 de [2]; alors $\varphi(A)$ est la borne supérieure de $\varphi(\mathcal{F})$: φ est normale.

Réciproquement, soit φ une application $^\natural$ définie sur $\mathbf{M}$. Posons: $K = \varphi(1) \in \mathbf{M}^{\natural +}$. Soit $A \in \mathbf{M}_S$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe des $U_i \in \mathbf{M}_U$, des $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $(1 \leqq i \leqq n;\ \lambda_i \geqq 0;\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1)$ tels que:

$$-\varepsilon \,.\, 1 \leqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1} - A^\natural \leqq \varepsilon \,.\, 1$$

D'où:

$$-\varepsilon K \leqq \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1} - A^\natural\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(U_i A U_i^{-1}) - \varphi(A^\natural)$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big)\varphi(A) - A^\natural \varphi(1) = \varphi(A) - A^\natural K \leqq \varepsilon K.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $\varphi(A) = A^\natural K$. Ceci s'étend au cas où A est quelconque dans $\mathbf{M}$ par linéarité.

2. Proposition 2. — *Il y a une correspondance biunivoque $\varphi \to \psi$ entre les traces φ partout définies sur $\mathbf{M}$ et les formes linéaires positives ψ partout définies sur $\mathbf{M}^\natural$. Cette correspondance est définie par la formule $\varphi(A) = \psi(A^\natural)$, et ψ n'est autre que la restriction de φ à $\mathbf{M}^\natural$* [7]*). De plus, φ est fidèle (resp. normale) si et seulement si ψ est fidèle (resp. normale).*

Démonstration. — Pour toute trace partout définie φ, on a $\varphi(A) = \varphi(A^\natural)$. Il suffit de le prouver pour $A \in \mathbf{M}_S$. Or, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des $U_i \in \mathbf{M}_U$, des $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $(1 \leqq i \leqq n;\ \lambda_i \geqq 0;$ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1)$ avec $\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1} - A^\natural\| \leqq \varepsilon$. Alors, observant que $\varphi(U_i A U_i^{-1}) = \varphi(A U_i^{-1} U_i) = \varphi(A)$, on a

$$\varepsilon\varphi(1) \geqq \Big|\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1} - A^\natural\Big)\Big| = |\varphi(A) - \varphi(A^\natural)|$$

d'où notre assertion. D'autre part, pour toute forme linéaire positive partout définie ψ sur $\mathbf{M}^\natural$, la formule $\varphi(A) = \psi(A^\natural)$ définit une trace sur $\mathbf{M}$, à cause des propriétés de l'application $\natural$. Ceci prouve la première partie du théorème.

Si φ est fidèle (resp. normale), ψ, qui est la restriction de φ à $\mathbf{M}^\natural$, est fidèle (resp. normale). Si ψ est fidèle, supposons $A \in \mathbf{M}^+$ et $\varphi(A) = 0$; on a $A^\natural \in \mathbf{M}^{\natural +}$ et $\psi(A^\natural) = 0$, donc $A^\natural = 0$, donc $A = 0 : \varphi$ est fidèle. Si ψ est normale, soit $\mathscr{F} \subset \mathbf{M}_S$ un ensemble filtrant croissant de borne supérieure A; l'image $\mathscr{F}^\natural$ de $\mathscr{F}$ par l'application $\natural$ est un ensemble filtrant croissant de borne supérieure $A^\natural$, donc $\psi(A^\natural) = \varphi(A)$ est la borne supérieure de l'ensemble $\psi(\mathscr{F}^\natural) = \varphi(\mathscr{F}) : \varphi$ est normale.

3. Nous arrivons maintenant au théorème qui nous permettra, au chapitre VI, d'analyser les fonctions-poids. Cette fois, des lemmes sont nécessaires.

---

[7]) Cette partie du théorème est due à Godement [9], ainsi que la démonstration qu'on en donne.

Lemme 1.1 — *Soient $\mathscr{M}, \mathscr{M}_0, \mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \ldots, \mathscr{M}_n$ des variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$, avec $0 = \mathscr{M}_0 \subset \mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{M}_n = H$. Il existe des variétés $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_n$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ deux à deux orthogonales, sous-tendant H, telles que $\mathscr{M}_{i-1} \cap \mathscr{L}_i \prec \mathscr{M} \cap \mathscr{L}_i \prec \mathscr{M}_i \cap \mathscr{L}_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Démonstration [8]. — Construisons des variétés $\mathscr{N}_0, \mathscr{N}_1, \ldots, \mathscr{N}_p$ $(0 \leqq p \leqq n)$ possédant les propriétés suivantes: 1. $\mathscr{N}_i \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$. 2. $0 = \mathscr{N}_0 \subset \mathscr{N}_1 \subset \ldots \subset \mathscr{N}_p$. 3. $\mathscr{N}_i \cap \mathscr{M} \prec \mathscr{N}_i \cap \mathscr{M}_i$. 4. $\mathscr{N}'_i \cap \mathscr{M}_i \prec \mathscr{N}'_i \cap \mathscr{M}$, où $\mathscr{N}'_i = H \ominus \mathscr{N}_i$. Cette construction est possible comme on s'en assure par récurrence sur p. Le cas $p = 0$ est trivial. Ensuite, $\mathscr{N}_0, \mathscr{N}_1, \ldots, \mathscr{N}_i$ étant supposées construites, appliquons dans l'espace $\mathscr{N}'_i$ le théorème 6 de [2] à $\mathscr{N}'_i \cap \mathscr{M}$ et $\mathscr{N}'_i \cap \mathscr{M}_{i+1}$. On détermine deux variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, $\mathscr{N}'_{i+1}$ et $\mathscr{N}''_i = \mathscr{N}'_i \ominus \mathscr{N}'_{i+1}$, telles que $\mathscr{N}''_i \cap \mathscr{M} \prec \mathscr{N}''_i \cap \mathscr{M}_{i+1}$ et $\mathscr{N}'_{i+1} \cap \mathscr{M}_{i+1} \prec \mathscr{N}'_{i+1} \cap \mathscr{M}$. Alors $\mathscr{N}_{i+1} = \mathscr{N}_i \oplus \mathscr{N}''_i$ a les propriétés requises (car $\mathscr{N}_{i+1} \cap \mathscr{M} = (\mathscr{N}_i \cap \mathscr{M}) \oplus (\mathscr{N}''_i \cap \mathscr{M}) \prec (\mathscr{N}_i \cap \mathscr{M}_i) \oplus (\mathscr{N}''_i \cap \mathscr{M}_{i+1}) \prec (\mathscr{N}_i \cap \mathscr{M}_{i+1}) \oplus (\mathscr{N}''_i \cap \mathscr{M}_{i+1}) = \mathscr{N}_{i+1} \cap \mathscr{M}_{i+1}$; et $H \ominus \mathscr{N}_{i+1} = \mathscr{N}'_{i+1}$). On peut donc déterminer des variétés $\mathscr{N}_0, \mathscr{N}_1, \ldots, \mathscr{N}_n = H$ avec les propriétés 1, 2, 3, 4. Alors, les $\mathscr{L}_i = \mathscr{N}_i \ominus \mathscr{N}_{i-1}$ sont les variétés du lemme.

Lemme 1.2. — *Si H est homogène, toute variété $\mathscr{M}$ irréductible est simple.*

Démonstration [8]. — Soit $(\mathscr{M}_i)_{i \in I}$ une partition homogène de H, les $\mathscr{M}_i$ étant irréductibles. Soient $\mathscr{N} = \mathscr{M}^\natural$, et $\mathscr{N}_i = \mathscr{M}_i \cap \mathscr{N}$. Les $\mathscr{N}_i$ forment une partition homogène de $\mathscr{N}$ (car $\mathscr{M}_i \sim \mathscr{M}_j$ entraîne $\mathscr{N}_i \sim \mathscr{N}_j$; le fait que les $\mathscr{M}_i$ sous-tendent H entraîne que les $\mathscr{N}_i$ sous-tendent $\mathscr{N}$; $\mathscr{M} \neq 0$ entraîne $\mathscr{N} \neq 0$, donc $\mathscr{N}_i \neq 0$, sinon les $\mathscr{M}_i$ seraient orthogonales à $\mathscr{N}$) donc $\mathscr{N}_i^\natural = \mathscr{N} = \mathscr{M}^\natural$ ([2], lemme 3.1), et par suite ([6], lemme 3.4) $\mathscr{N}_i \sim \mathscr{M}$. Les $\mathscr{N}_i$ sont simples, donc $\mathscr{M}$ est simple.

Lemme 1.3. — *Si H est homogène, toute $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ est sous-tendue par un nombre fini de variétés irreductibles simples deux à deux orthogonales.*

Démonstration. — Compte tenu du lemme 1.2, il suffit de trouver un nombre fini de variétés irréductibles deux à deux orthogonales sous-tendant $\mathscr{M}$.

Soit $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ une partition homogène de H dont les éléments sont irréductibles. Posons $\mathscr{M}_i = \bigoplus_{k=1}^{i} m_k$ pour $1 \leqq i \leqq n$, $\mathscr{M}_0 = 0$, et appliquons le lemme 1.1 à $\mathscr{M}, \mathscr{M}_0, \mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n$. On

---

[8]) Valable pour M quelconque.

obtient des variétés $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_n$ et il suffit de prouver le lemme pour chaque variété $\mathscr{M} \cap \mathscr{L}_i$. Autrement dit, supposons $\mathscr{L}_i = H$. On a alors $\mathscr{M}_{i-1} \prec \mathscr{M} \prec \mathscr{M}_i$, on peut donc supposer (compte tenu du lemme 4.12 de [2]) que $\mathscr{M}_{i-1} \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{M}_i$. Alors, $\mathscr{M} = m_1 \oplus m_2 \oplus \ldots \oplus m_{i-1} \oplus m_i'$, avec $m_i' \subset m_i$; et les m_k sont irréductibles ainsi que m_i'.

Proposition 3. — *Soit D une fonction définie sur $\widetilde{\mathbf{M}}$, possédant les propriétés suivantes:*

1. $0 \leqq D(\mathscr{M}) < +\infty$ *pour* $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$.
2. $D(\mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2) = D(\mathscr{M}_1) + D(\mathscr{M}_2)$ *si* $\mathscr{M}_1$ *et* $\mathscr{M}_2$ *sont orthogonales.*
3. $D(U(\mathscr{M})) = D(\mathscr{M})$ *si* $U \in \mathbf{M}_U$.

Il existe une trace partout définie unique, φ_D, telle que $D(\mathscr{M}) = \varphi_D(P_{\mathscr{M}})$. Réciproquement, pour toute trace φ partout définie, il existe une fonction D unique, avec les propriétés 1, 2, 3, *telle que* $\varphi = \varphi_D$.

Démonstration. — D sera, par abus de langage, définie sur $\mathbf{M}_P$, par $D(P_{\mathscr{M}}) = D(\mathscr{M})$.

Si φ est donnée, l'existence et l'unicité de D, avec $\varphi = \varphi_D$, est immédiate. Supposons maintenant D donnée. Montrons d'abord l'unicité de φ_D. Si $D(\mathscr{M}) = \varphi_D'(P_{\mathscr{M}})$, φ_D et φ_D' coincident sur $\mathbf{M}_P$, donc sur les combinaisons linéaires d'éléments de $\mathbf{M}_P$. Or φ_D et φ_D', étant positives, sont continues pour la topologie uniforme, donc φ_D et φ_D' coincident sur $\mathbf{M}_S$ et finalement sur $\mathbf{M}$. Montrons maintenant l'existence de φ_D.

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des projecteurs deux à deux orthogonaux de $\mathscr{M}^\natural$, tels que $\sum_{i=1}^{n} E_i = 1$. Pour $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i \in \mathbf{M}^\natural$ $(\lambda_i \in \mathbf{R})$, posons $\psi(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D(E_i)$. Cette quantité ne dépend que de A. Car, soit $A' = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j' E_j'$, où $\lambda_j' \in \mathbf{R}$ et où les E_j' sont des projecteurs deux à deux orthogonaux de $\mathbf{M}^\natural$ tels que $\sum_{j=1}^{p} E_j' = 1$. Posons $E_{ij} = E_i E_j'$. Les E_{ij} sont des projecteurs deux à deux orthogonaux de $\mathbf{M}^\natural$, et on a:

$$A = \sum_{i,j} \lambda_{ij} E_{ij} \text{ où } \lambda_{ij} = \lambda_i,$$

$$A' = \sum_{i,j} \lambda_{ij}' E_{ij} \text{ où } \lambda_{ij}' = \lambda_j',$$

$$\sum_i \lambda_i D(E_i) = \sum_i \lambda_{ij} D(\sum_j E_{ij}) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} D(E_{ij}),$$

$$\sum_j \lambda_j' D(E_j') = \sum_j \lambda_{ij}' D(\sum_i E_{ij}) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}' D(E_{ij}).$$

Si maintenant $A = A'$, on a:

$$\lambda_{ij}E_{ij} = E_{ij}A = E_{ij}A' = \lambda'_{ij}E_{ij}$$

donc $E_{ij} = 0$, ou $\lambda_{ij} = \lambda'_{ij}$, et, dans les deux cas, $\lambda_{ij}D(E_{ij}) = \lambda'_{ij}D(E_{ij})$ (la propriété 2 de D entraîne en effet $D(0) = 0$), donc $\sum_j \lambda'_j D(E'_j) = \sum_i \lambda_i D(E_i)$. ψ est ainsi définie sur l'espace vectoriel réel $N \subset \mathbf{M}^\natural$ des opérateurs A de la forme précédente. On vérifie aisément que ψ est linéaire sur N, et que $\psi(A) \geqq 0$ si $A \geqq 0$. Il en résulte que $|\psi(A)| \leqq \|A\| D(1)$, de sorte que ψ peut être prolongée à $\mathbf{M}^\natural_S$, puis à $\mathbf{M}^\natural$, en une forme linéaire positive partout définie. Et l'on a: $\psi(E) = D(E)$ si $E \in \mathbf{M}^\natural_P$.

Alors, par $\varphi(A) = \psi(A^\natural)$, on définit une trace sur $\mathbf{M}$ (proposition 2). On va voir que φ est la trace φ_D du théorème. Posons, pour $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$, $\varphi(P_\mathscr{M}) = D'(\mathscr{M})$. D' possède les mêmes propriétés que D, et l'on a, si $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$

$$D'(\mathscr{M}) = \varphi(P_\mathscr{M}) = \psi(P_\mathscr{M}) = D(\mathscr{M}).$$

Donc tout revient à prouver le résultat suivant:

Si D_1 et D_2, possédant les propriétés du théorème, coïncident sur $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, on a $D_1 = D_2$.

Observons d'abord que, si $\mathscr{M}_1 \in \widetilde{\mathbf{M}}$ est une variété simple, on a $D_1(\mathscr{M}_1) = D_2(\mathscr{M}_1)$. En effet, soit $(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \ldots, \mathscr{M}_n)$ une partition homogène de $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$. On a aussitôt:

$$D_1(\mathscr{M}_1) = n^{-1}D_1(\mathscr{M}) = n^{-1}D_2(\mathscr{M}) = D_2(\mathscr{M}_1).$$

Ceci posé, il existe ([6], théorème 2) des variétés $H^0, H^1, H^2, \ldots$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, deux à deux orthogonales, sous-tendant H, telles que:

H^0 ne contient aucune variété irréductible;

pour $i \geqq 1$, $H^i = 0$ ou bien H^i est homogène de degré i; soit $\overline{H^0} = H \ominus H^0$. Pour toute $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$, on a

$$D_i(\mathscr{M}) = D_i(\mathscr{M} \cap H^0) + D_i(\mathscr{M} \cap \overline{H^0}) \qquad (i = 1, 2).$$

Il suffit donc de montrer que $D_1(\mathscr{M}) = D_2(\mathscr{M})$ quand $\mathscr{M} \subset H^0$ et quand $\mathscr{M} \subset \overline{H^0}$. Autrement dit, on peut se borner aux cas où $H^0 = 0$, ou bien $\overline{H^0} = 0$.

a. $\overline{H^0} = 0$. Alors, H ne contient aucune variété irréductible. Soit $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$, et soit n un entier > 0. Soit $(m_i)_{1 \leqq i \leqq 2^n}$ une partition homogène de H ([2], lemme 6.2), et posons $\mathscr{M}_i = \bigoplus_{k=1}^{i} m_k$. Appliquons le lemme 1.1 à $\mathscr{M}, \mathscr{M}_0 = 0, \mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_{2^n}$. On obtient des variétés $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_{2^n}$. Comme les $\mathscr{L}_i \cap m_j$ sont des variétés simples (car $\mathscr{L}_i \cap m_1$, $\mathscr{L}_i \cap m_2, \ldots$ sous-tendent $\mathscr{L}_i$), on a $D_1(\mathscr{L}_i \cap m_j) = D_2(\mathscr{L}_i \cap m_j)$, donc $D_1(\mathscr{L}_i \cap \mathscr{M}_j) = D_2(\mathscr{L}_i \cap \mathscr{M}_j)$. D'autre part, on a:

$$D_1(\mathscr{L}_i \cap \mathscr{M}_{i-1}) = D_2(\mathscr{L}_i \cap \mathscr{M}_{i-1}) \leqq D_r(\mathscr{L}_i \cap \mathscr{M}) \leqq D_1(\mathscr{L}_i \cap \mathscr{M}_i) = D_2(\mathscr{L}_i \cap \mathscr{M}_i) \quad (r = 1, 2)$$

d'où

$$|D_1(\mathscr{L}_i \cap \mathscr{M}) - D_2(\mathscr{L}_i \cap \mathscr{M})| \leqq D_1(\mathscr{L}_i \cap \mathscr{M}_i) - D_1(\mathscr{L}_i \cap \mathscr{M}_{i-1}) = D_1(\mathscr{L}_i \cap \mathscr{M}_1) = 2^{-n} D_1(\mathscr{L}_i)$$

puis, en sommant sur i:

$$|D_1(\mathscr{M}) - D_2(\mathscr{M})| \leqq 2^{-n} \sum_{i=1}^{2^n} D_1(\mathscr{L}_i) = 2^{-n} D_1(H).$$

Comme n est quelconque, $D_1(\mathscr{M}) = D_2(\mathscr{M})$.

b. $H^0 = 0$. Soit $\mathscr{M} \in \widehat{\mathbf{M}}$ et soit n un entier > 0. Posons:

$$H' = \bigoplus_{i=n^2}^{+\infty} H^i.$$

Nous allons montrer que $|D_1(\mathscr{M}) - D_2(\mathscr{M})| \leqq 3n^{-1} D_1(H)$. Comme n est arbitraire, on en conclura que $D_1(\mathscr{M}) = D_2(\mathscr{M})$.

Or: $$D_i(\mathscr{M}) = \sum_{k=1}^{n^2-1} D_i(\mathscr{M} \cap H^k) + D_i(\mathscr{M} \cap H').$$

D'après le lemme 1.3 et une remarque antérieure, on a $D_1(\mathscr{M} \cap H^k) = D_2(\mathscr{M} \cap H^k)$, donc tout revient à prouver que

$$|D_1(\mathscr{M} \cap H') - D_2(\mathscr{M} \cap H')| \leqq 3n^{-1} D_1(H).$$

Autrement dit, supposons désormais $\mathscr{M} \subset H'$.

Pour tout entier $p \geqq n^2$, désignons par q_p la partie entière de $n^{-1} \cdot p \, (q_p \geqq n)$. On a: $p = nq_p + r_p$, avec $r_p < n$. Soit $(m_1^p, m_2^p, \ldots, m_p^p)$ une partition homogène de H^p, les m_i^p étant irréductibles, et posons

$$\mathscr{M}_i^p = \bigoplus_{k=1}^{iq_p} m_k^p$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Et soit $\mathscr{M}_0^p = 0$, $\mathscr{M}_{n+1}^p = \bigoplus_{k=1}^{p} m_k^p = H^p$. On a:

$$\begin{cases} 0 = \mathscr{M}_0^p \subset \mathscr{M}_1^p \subset \mathscr{M}_2^p \subset \ldots \subset \mathscr{M}_n^p \subset \mathscr{M}_{n+1}^p = H^p, \\ \mathscr{M}_i^p \ominus \mathscr{M}_{i-1}^p \sim \mathscr{M}_1^p \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n, \\ \mathscr{M}_{n+1}^p \ominus \mathscr{M}_n^p < \mathscr{M}_1^p. \end{cases}$$

Enfin, posons $\mathscr{M}_i = \bigoplus_{p=n^2}^{+\infty} \mathscr{M}_i^p$. On a:

$$\begin{cases} 0 = \mathscr{M}_0 \subset \mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{M}_n \subset \mathscr{M}_{n+1} = H', \\ \mathscr{M}_i \ominus \mathscr{M}_{i-1} \sim \mathscr{M}_1 \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n, \\ \mathscr{M}_{n+1} \ominus \mathscr{M}_n \prec \mathscr{M}_1. \end{cases}$$

Appliquons le lemme 1.1 à $\mathscr{M}, \mathscr{M}_0, \mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_{n+1}$ dans l'espace H'. On obtient des variétés $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_{n+1}$ appartenant à $\widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$, deux à deux orthogonales, sous-tendant H', et telles que $\mathscr{M}_{i-1} \cap \mathscr{L}_i \prec \mathscr{M} \cap \mathscr{L}_i \prec \mathscr{M}_i \cap \mathscr{L}_i$. On a:

$$D_i(\mathscr{M}_{k-1} \cap \mathscr{L}_k) \leqq D_i(\mathscr{M} \cap \mathscr{L}_k) \leqq D_i(\mathscr{M}_k \cap \mathscr{L}_k) \qquad (i = 1, 2; k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Donc:

$$(1) \quad |D_1(\mathscr{M} \cap \mathscr{L}_k) - D_2(\mathscr{M} \cap \mathscr{L}_k)| \leqq |D_1(\mathscr{M}_k \cap \mathscr{L}_k) - D_1(\mathscr{M}_{k-1} \cap \mathscr{L}_k)| + |D_2(\mathscr{M}_k \cap \mathscr{L}_k) - D_2(\mathscr{M}_{k-1} \cap \mathscr{L}_k)| + |D_1(\mathscr{M}_k \cap \mathscr{L}_k) - D_2(\mathscr{M}_k \cap \mathscr{L}_k)|.$$

Or:

$$(2) \quad |D_1(\mathscr{M}_k \cap \mathscr{L}_k) - D_1(\mathscr{M}_{k-1} \cap \mathscr{L}_k)| = D_1((\mathscr{M}_k \ominus \mathscr{M}_{k-1}) \cap \mathscr{L}_k) \leqq D_1(\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{L}_k).$$

De même

$$(2') \quad |D_2(\mathscr{M}_k \cap \mathscr{L}_k) - D_2(\mathscr{M}_{k-1} \cap \mathscr{L}_k)| \leqq D_2(\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{L}_k).$$

Enfin, on a:

$$nD_i(\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{L}_k) + D_i((\mathscr{M}_{n+1} \ominus \mathscr{M}_n) \cap \mathscr{L}_k) = D_i(\mathscr{L}_k) = D_1(\mathscr{L}_k) \qquad (i = 1, 2)$$

donc

$$(3) \quad (n+1)^{-1} D_1(\mathscr{L}_k) \leqq D_i(\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{L}_k) \leqq n^{-1} D_1(\mathscr{L}_k).$$

Par suite:

$$|D_1(\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{L}_k) - D_2(\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{L}_k)| \leqq (n^{-1} - (n+1)^{-1}) D_1(\mathscr{L}_k) = n^{-1}(n+1)^{-1} D_1(\mathscr{L}_k).$$

Par suite encore:

$$(4) \quad |D_1(\mathscr{M}_k \cap \mathscr{L}_k) - D_2(\mathscr{M}_k \cap \mathscr{L}_k)| \leqq kn^{-1}(n+1)^{-1} D_1(\mathscr{L}_k) \leqq n^{-1} D_1(\mathscr{L}_k)$$

(1) devient alors, compte tenu de (2), (2′), (3), (4):

$$|D_1(\mathscr{M} \cap \mathscr{L}_k) - D_2(\mathscr{M} \cap \mathscr{L}_k)| \leqq 3n^{-1} D_1(\mathscr{L}_k)$$

et, sommant sur k

$$|D_1(\mathscr{M}) - D_2(\mathscr{M})| \leqq 3n^{-1} D_1(H).$$

DÉFINITION 1.1. — *Soit D une fonction possédant les propriétés de la proposition* 3.

a. *On dira que D est fidèle si l'hypothèse $D(\mathcal{M}) = 0$ entraîne $\mathcal{M} = 0$.*

b. *On dira que D est normale si D possède la propriété suivante: $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ étant une famille de variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$ deux à deux orthogonales, on a $D(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i) = \sum_{i\in I} D(\mathcal{M}_i)$.*

PROPOSITION 3′. — *Dans la proposition 3, D est fidèle (resp. normale) si et seulement si φ_D est fidèle (resp. normale).*

Démonstration. — Si φ_D est fidèle, l'hypothèse $D(\mathcal{M}) = \varphi_D(P_{\mathcal{M}}) = 0$ entraine $P_{\mathcal{M}} = 0$, $\mathcal{M} = 0$: D est fidèle. Si φ_D n'est pas fidèle, il existe un $A \in \mathbf{M}^+$, avec $\varphi_D(A) = 0$, et $a = \|A\| \neq 0$. Soit $A = \int_0^a \lambda dE_\lambda$ la décomposition spectrale de A. On a: $A \geqq \frac{1}{2}a(1 - E_{\frac{1}{2}a}) \neq 0$, donc $\varphi_D(1 - E_{\frac{1}{2}a}) = 0$, d'où une variété $\mathcal{M} \neq 0$ telle que $D(\mathcal{M}) = 0$: D n'est pas fidèle.

Maintenant, supposons φ_D normale. Soit $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une famille de variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$ deux à deux orthogonales, et $\mathcal{M} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i$. $P_{\mathcal{M}}$ est la borne supérieure de l'ensemble filtrant croissant des $\sum_{i\in J} P_{\mathcal{M}_i}$, où J parcourt l'ensemble des parties finies de I, donc $D(\mathcal{M}) = \varphi_D(P_{\mathcal{M}})$ est la borne supérieure des $\varphi_D(\sum_{i\in J} P_{\mathcal{M}_i}) = \sum_{i\in J} D(\mathcal{M}_i)$. Donc $D(\mathcal{M}) = \sum_{i\in I} D(\mathcal{M}_i)$.

Enfin, supposons φ_D non normale, et montrons que D est non normale. Nous supposerons $\varphi_D(1) = 1$, ce qui est évidemment loisible. D'après la proposition 2 la restriction de φ_D à $\mathbf{M}^\natural$ est non normale, de sorte qu'il existe un $A \in \mathbf{M}^\natural_S$ et un ensemble filtrant croissant $\mathcal{F} \subset \mathbf{M}^\natural_S$ admettant A pour borne supérieure, tels que $\varphi_D(A) \neq \sup_{B\in\mathcal{F}} \varphi_D(B)$ (on s'est ramené à un problème concernant $\mathbf{M}^\natural$). Alors, les $A - B$, où $B \in \mathcal{F}$, forment un ensemble filtrant décroissant $\mathcal{F}' \subset \mathbf{M}^{\natural+}$, de borne inférieure 0, et $\inf_{B\in\mathcal{F}'} \varphi_D(B) = \mu > 0$. On peut évidemment supposer $0 \leqq B \leqq 1$ pour $B \in \mathcal{F}'$. Soit $E_B(\lambda)$ la décomposition de l'unité attachée à $B(-\infty < \lambda < +\infty)$, et $E_B = 1 - E_B\left(\frac{\mu}{2}\right)$. On a: $B = BE_B + B(1 - E_B)$, et $0 \leqq B(1 - E_B) = BE_B\left(\frac{\mu}{2}\right) \leqq \frac{\mu}{2}.1$, donc $0 \leqq \varphi_D(B(1 - E_B)) \leqq \frac{\mu}{2}$, $\varphi_D(BE_B) \geqq \frac{\mu}{2}$. Comme $E_B \geqq BE_B$, $\varphi_D(E_B) \geqq \frac{\mu}{2}$. D'autre part, les E_B forment un ensemble filtrant décroissant: ceci résulte de ce que $B_1 \geqq B_2$ ($B_1 \in \mathcal{F}'$, $B_2 \in \mathcal{F}'$) entraîne $E_{B_1} \geqq E_{B_2}$ (en effet, la permutabilité de B_1 et B_2 entraîne celle de E_{B_1} et E_{B_2}; et si, pour un $x \in H$, $\|x\| = 1$, on avait $E_{B_2}x = x$. $E_{B_1}x = 0$, on aurait $(B_2x, x) > \frac{\mu}{2}$, $(B_1x, x) \leqq \frac{\mu}{2}$, ce qui est impossible; ces remarques prouvent notre assertion). Enfin, les E_B admettent 0 pour borne inférieure: ceci résulte aussitôt de $B \geqq \frac{\mu}{2} E_B$. Donc les $1 - E_B$ forment un ensemble filtrant croissant de borne supérieure 1, et $\varphi_D(1 - E_B) \leqq 1 - \frac{\mu}{2}$. On est donc ramené à prouver le lemme suivant [9]).

Lemme 1.4. — a. *Soit* $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ *un ensemble filtrant croissant de variétés de* $\widetilde{\mathbf{M}}$, *de borne supérieure* $\mathcal{M}$. *Il existe une famille* $(\mathcal{N}_j)_{j \in J}$ *de variétés de* $\widetilde{\mathbf{M}}$ *deux à deux orthogonales, sous-tendant* $\mathcal{M}$, *avec la propriété suivante: pour tout* $j \in J$ *existe un* $i \in I$ *tel que* $\mathcal{N}_j \subset \mathcal{M}_i$.

b. *Si* $\mathfrak{I}$ *est un idéal de* $\widetilde{\mathbf{M}}$ *contenant la variété* $\mathcal{M}$ *précédente, et si* D, *définie sur* $\mathfrak{I}$ *et possédant les propriétés de la proposition* 3, *est normale, on a* $D(\mathcal{M}) = \sum_{j \in J} D(\mathcal{N}_j) = \sup_{i \in I} D(\mathcal{M}_i)$.

Démonstration. — Considérons les partitions dont chaque élément est contenu dans une $\mathcal{M}_i$. L'ensemble de ces partitions est non vide (sauf si $\mathcal{M}_i = 0$ pour tout i, cas trivial) et le théorème de Zorn prouve aussitôt l'existence d'une telle partition maximale, soit $(\mathcal{N}_j)_{j \in J}$. Soit $\mathcal{N} = \bigoplus_{j \in J} \mathcal{N}_j$. Comme chaque $\mathcal{N}_j$ est contenue dans une $\mathcal{M}_i$, et comme l'ensemble des $\mathcal{M}_i$ est filtrant croissant, $\bigoplus_{j \in J'} \mathcal{N}_j$ est contenue dans une $\mathcal{M}_k$, donc dans $\mathcal{M}$, quelle que soit la partie finie J' de J. Donc $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. D'autre part, pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{N}$: sinon, on pourrait ajouter $\mathcal{M}_i \ominus (\mathcal{N} \cap \mathcal{M}_i) \neq 0$ à la partition $(\mathcal{N}_j)_{j \in J}$ qui ne serait pas maximale. Donc $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ et finalement $\mathcal{N} = \mathcal{M}$. Ceci prouve le *a* du lemme.

Pour toute partie finie J' de J, il existe, on vient de le voir, un $k \in I$ tel que $\bigoplus_{j \in J'} \mathcal{N}_j \subset \mathcal{M}_k$. Alors:

$$\sum_{j \in J'} D(\mathcal{N}_j) = D\Big(\bigoplus_{j \in J'} \mathcal{N}_j\Big) \leqq D(\mathcal{M}_k) \leqq D(\mathcal{M})$$

[9]) Il suffirait de prouver ce lemme dans le cas où $\widetilde{\mathbf{M}} = \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural} = \mathfrak{I}$; mais cela ne simplifie pas la démonstration, et le lemme, tel qu'il est énoncé, nous sera utile au chapitre VI. La notion d'idéal de $\widetilde{\mathbf{M}}$, qui y intervient, ne sera définie qu'au chapitre III, mais, pour les besoins actuels, on peut supposer $\mathfrak{I} = \widetilde{\mathbf{M}}$.

donc, vu la normalité de D:

$$D(\mathcal{M}) = \sum_{j \in J} D(\mathcal{N}_j) \leqq \sup_{k \in I} D(\mathcal{M}_k) \leqq D(\mathcal{M})$$

ce qui prouve le b du lemme.

II. Anneaux induits.

Définition 2.1. — *Soient A un opérateur linéaire quelconque, $\mathcal{M}$ une variété linéaire fermée quelconque, N un ensemble quelconque d'opérateurs linéaires.*

a. *Si A est réduit par $\mathcal{M}$, on désignera par $A_{(\mathcal{M})}$ l'opérateur induit par A dans $\mathcal{M}$: c'est un opérateur de l'espace $\mathcal{M}$. On désignera par $N_{(\mathcal{M})}$ l'ensemble des $A_{(\mathcal{M})}$, où A parcourt l'ensemble des opérateurs de N réduits par $\mathcal{M}$: c'est un ensemble d'opérateurs de l'espace $\mathcal{M}$* [10]).

b. *$N_{\langle\mathcal{M}\rangle}$ désignera l'ensemble des $A \in N$ tels que $A(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$, $A(H \ominus \mathcal{M}) = 0$, autrement dit l'ensemble des $A \in N$ réduits par $\mathcal{M}$ et induisant 0 dans $H \ominus \mathcal{M}$: c'est un ensemble d'opérateurs de l'espace H.*

Avec ces définitions, remarquons une fois pour toutes que, si $\mathcal{M} \in \overline{\mathbf{M}}$, tous les opérateurs de $\mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\rangle}$ et tous les opérateurs de $\mathbf{M}'$ sont réduits par $\mathcal{M}$.

Lemme 2.1. — *Soit $\mathcal{M} \in \overline{\mathbf{M}}$. Alors $\mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\rangle}$ est l'ensemble des $A \in \mathbf{M}$ tels que $AP_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}A = A$. C'est aussi l'ensemble des $P_{\mathcal{M}}AP_{\mathcal{M}}$, où A parcourt $\mathbf{M}$.*

Démonstration. — La première caractérisation résulte aussitôt de la définition. Maintenant, si $A \in \mathbf{M}$, et $B = P_{\mathcal{M}}AP_{\mathcal{M}}$, on a $B \in \mathbf{M}$, et $P_{\mathcal{M}}B = BP_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}AP_{\mathcal{M}} = B$, donc $B \in \mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\rangle}$. Réciproquement, si $B \in \mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\rangle}$, on a $P_{\mathcal{M}}B = BP_{\mathcal{M}} = B$, d'où $B = P_{\mathcal{M}}BP_{\mathcal{M}}$.

Lemme 2.2. — *Soit $\mathcal{M} \in \overline{\mathbf{M}}$. L'application $A \to A_{(\mathcal{M})}$ est une application biunivoque de $\mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\rangle}$ sur $\mathbf{M}_{(\mathcal{M})}$. C'est même un isomorphisme pour les structures d'*-algèbres* [11]) *de $\mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\rangle}$ et $\mathbf{M}_{(\mathcal{M})}$.*

Démonstration. — Le seul point qui n'est pas tout à fait évident est le fait que tout $B \in \mathbf{M}_{(\mathcal{M})}$ est de la forme $A_{(\mathcal{M})}$, avec $A \in \mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\rangle}$. Or, $B = \bar{A}_{(\mathcal{M})}$, avec $\bar{A} \in \mathbf{M}$, $\bar{A}$ réduit par $\mathcal{M}$. Et on a aussitôt:

---

[10]) Ce sont les notations de [10], définition 11.3.1. Tout ce chapitre est d'ailleurs inspiré directement par [10].

[11]) La norme est conservée dans un tel isomorphisme. En effet (cf. [16]), $\|A\|$ est le plus petit nombre $a \geqq 0$ tel que $a^2 - A^*A \geqq 0$, c'est-à-dire tel que $a^2 - A^*A = B^*B$ pour un opérateur B de l'algèbre considérée.

$\bar{A}_{(\mathscr{M})} = (P_{\mathscr{M}} \bar{A} P_{\mathscr{M}})_{(\mathscr{M})}$. On peut alors prendre $A = P_{\mathscr{M}} \bar{A} P_{\mathscr{M}}$ en appliquant le lemme 2.1.

Lemme 2.3. — *Soit* $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$. *L'application* $A' \to A'_{(\mathscr{M})}$ *est un application biunivoque de* $(\mathbf{M}')_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$ *sur* $(\mathbf{M}')_{(\mathscr{M})}$. *C'est même un isomorphisme pour les structures d'*-algèbres* [12]) *de* $(\mathbf{M}')_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$ *et* $(\mathbf{M}')_{(\mathscr{M})}$.

Démonstration. — L'application $A' \to (A')_{(\mathscr{M})}$ est une application de $(\mathbf{M}')_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$ *sur* $(\mathbf{M}')_{(\mathscr{M})}$. En effet, tout opérateur de $(\mathbf{M}')_{(\mathscr{M})}$ est de la forme $(A')_{(\mathscr{M})}$, avec $A' \in \mathbf{M}'$. Comme $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}^\natural$, on a $A'_{(\mathscr{M})} = (A' P_{\mathscr{M}^\natural})_{(\mathscr{M})}$. Or $A' P_{\mathscr{M}^\natural} \in (\mathbf{M}')_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$.

Ensuite, l'application $A' \to (A')_{(\mathscr{M})}$ est biunivoque sur $(\mathbf{M}')_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$. En effet, si $A' \in (\mathbf{M}')_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$ et si $A'_{(\mathscr{M})} = 0$, on a $\mathscr{M} \subset \mathscr{N}_{A'}$ (la variété des zéros de A'); comme $\mathscr{N}_{A'} \in \widetilde{\mathbf{M}}'$ est invariante par tout $U \in \mathbf{M}_U$, on a $\mathscr{M}^M \subset \mathscr{N}_{A'}$, donc $\mathscr{M}^\natural \subset \mathscr{N}_{A'}$ (cf. [2], définition 3.1). Donc A' induit 0 dans $\mathscr{M}^\natural$. Mais $A' \in (\mathbf{M}')_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$ induit 0 dans $H \ominus \mathscr{M}^\natural$. Donc $A' = 0$.

Le lemme est une conséquence immédiate de ces remarques.

Lemme 2.4. — *Soit* $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$. *Dans l'espace* $\mathscr{M}$, *on a les propriétés suivantes:*

a. $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})}$ *est un anneau d'opérateurs.*

b. $(\mathbf{M}')_{(\mathscr{M})} = (\mathbf{M}_{(\mathscr{M})})'$.

c. $(\mathbf{M}^\natural)_{(\mathscr{M})} = (\mathbf{M}_{(\mathscr{M})})^\natural$.

Démonstration. — $\mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \rangle}$, défini par les conditions $A \in \mathbf{M}$, $A P_{\mathscr{M}} = P_{\mathscr{M}} A = A$, est un anneau d'opérateurs. L'isomorphisme $A \to A_{(\mathscr{M})}$ du lemme 2.2 est évidemment bicontinu pour la topologie faible (de H, resp. de $\mathscr{M}$), donc $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})}$ est un anneau d'opérateurs dans $\mathscr{M}$.

Tout opérateur de $\mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \rangle}$ et tout opérateur de $\mathbf{M}'$ sont permutables, donc leurs parties induites dans $\mathscr{M}$ sont permutables. D'autre part, si un opérateur A de l'espace $\mathscr{M}$ permute avec tout opérateur de $(\mathbf{M}')_{(\mathscr{M})}$, $A P_{\mathscr{M}}$, opérateur de l'espace H, permute avec tout opérateur de $\mathbf{M}'$, donc $A P_{\mathscr{M}} \in \mathbf{M}$, $A \in \mathbf{M}_{(\mathscr{M})}$. Donc $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})} = ((\mathbf{M}')_{(\mathscr{M})})'$. Pour prouver le b du lemme, il suffit donc de prouver que $((\mathbf{M}')_{(\mathscr{M})})'' = (\mathbf{M}')_{(\mathscr{M})}$ c'est-à-dire [13] que $(\mathbf{M}')_{(\mathscr{M})}$ est un anneau d'opérateurs dans l'espace $\mathscr{M}$. Comme $(\mathbf{M}')_{(\mathscr{M})}$ est évidemment une *-algèbre, il suffit [3] de prouver que

[12]) L'isomorphisme du lemme 2.2 est bicontinu pour toutes les topologies usuelles. Par contre, l'isomorphisme du lemme 2.3, continu pour toutes les topologies usuelles, n'est pas bicontinu en général pour les topologies forte et faible. Mais il est bicontinu pour la topologie ultra-forte (strongest). Ce fait, intéressant en lui-même et assez facile à prouver, généralise le résultat du § 4 de [14].

l'ensemble des $A' \in (\mathbf{M}')_{(\mathscr{M})}$ tels que $\|A'\| \leqq 1$ est faiblement fermé [13]). Or, cet ensemble est l'image, par l'application faiblement continue $A' \to A'_{(\mathscr{M})}$, de l'ensemble faiblement compact des $A' \in \mathbf{M}'_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$ tels que $\| A' \| \leqq 1$ (cf. note [11])). D'où notre assertion.

On a évidemment $(\mathbf{M}^\natural)_{(\mathscr{M})} \subset \mathbf{M}_{(\mathscr{M})} \cap (\mathbf{M}')_{(\mathscr{M})} = \mathbf{M}_{(\mathscr{M})} \cap (\mathbf{M}_{(\mathscr{M})})' = (\mathbf{M}_{(\mathscr{M})})^\natural$. Réciproquement, soit $A \in (\mathbf{M}_{(\mathscr{M})})^\natural$. Comme $A \in (\mathbf{M}_{(\mathscr{M})})' = (\mathbf{M}')_{(\mathscr{M})}$, on a $A = A'_{(\mathscr{M})}$, avec $A' \in (\mathbf{M}')_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$ (lemme 2.3). Montrons que $A' \in \mathbf{M}^\natural$, ce qui prouvera que $A \in (\mathbf{M}^\natural)_{(\mathscr{M})}$, donc que $(\mathbf{M}^\natural)_{(\mathscr{M})} = (\mathbf{M}_{(\mathscr{M})})^\natural$. Il suffit de prouver que $A' \in \mathbf{M}$, donc que A' permute avec tout opérateur A'_1 de $\mathbf{M}'$. Or:

$$(A'A'_1 - A'_1A')_{(\mathscr{M})} = A'_{(\mathscr{M})} A'_{1(\mathscr{M})} - A'_{1(\mathscr{M})} A'_{(\mathscr{M})} = 0$$

puisque $A'_{(\mathscr{M})} = A \in (\mathbf{M}_{(\mathscr{M})})^\natural$. Donc (lemme 2.3)

$$0 = (A'A'_1 - A'_1A')_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle} = A'A'_1 - A'_1A'$$

puisque $A' \in (\mathbf{M}')_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$. D'où notre assertion.

Le lemme 2.4 nous permettra d'employer désormais sans ambiguïté les notations $\mathbf{M}'_{(\mathscr{M})}$, $\mathbf{M}^\natural_{(\mathscr{M})}$.

Lemme 2.5. — *Soit $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$. L'application $A \to A_{(\mathscr{M})}$ est, pour les structures d'*-algèbres, un isomorphisme de $(\mathbf{M}^\natural)_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$ sur $\mathbf{M}^\natural_{(\mathscr{M})}$.*

Démonstration. — L'isomorphisme du lemme 2.3 donne en particulier un isomorphisme du centre de $(\mathbf{M}')_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$, qui est $(\mathbf{M}^\natural)_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$ comme on le voit facilement, sur le centre de $(\mathbf{M}')_{(\mathscr{M})}$, qui est $(\mathbf{M}_{(\mathscr{M})})^\natural$ (lemme 2.4).

Définition 2.2 — *On désignera par $\theta_{\mathscr{M}}$ l'isomorphisme inverse de l'isomorphisme du lemme 2.5.*

$\theta_{\mathscr{M}}$ applique donc $\mathbf{M}^\natural_{(\mathscr{M})}$ sur $(\mathbf{M}^\natural)_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$, et l'on a:

$$(\theta_{\mathscr{M}}(A))_{(\mathscr{M})} = A \text{ pour } A \in \mathbf{M}^\natural_{(\mathscr{M})},\ \theta_{\mathscr{M}}(B_{(\mathscr{M})}) = B \text{ pour } B \in (\mathbf{M}^\natural)_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}.$$

Lemme 2.6. — *Soit $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$. L'anneau $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})}$ est un anneau de classe finie si et seulement si $\mathscr{M}$ est finie.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{N}$ une variété. On a évidemment $\mathscr{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}_{(\mathscr{M})}$ si et seulement si $\mathscr{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ et $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$. D'autre part, si $\mathscr{N}$ et $\mathscr{N}'$ sont deux variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$ contenues dans $\mathscr{M}$, et si $U \in \mathbf{M}_{PI}$ admet $\mathscr{N}$ et $\mathscr{N}'$ pour variétés initiale et finale, on a $U \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \rangle}$

---

[13]) Au lieu d'utiliser le théorème 6 de [3], on pourrait utiliser le lemme 11.3.1 de [10] dont la démonstration est tout à fait indépendante du reste de [10]. On pourrait aussi utiliser la topologie ultra-forte (cf. note (12)).

et $U_{(\mathcal{M})} \in (\mathbf{M}_{(\mathcal{M})})_{PI}$ admet encore $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ pour variétés initiale et finale; réciproquement, si $U' \in (\mathbf{M}_{(\mathcal{M})})_{PI}$ admet $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ pour variétés initiale et finale, il en est de même de $U'P_{\mathcal{M}} \in \mathbf{M}_{PI}$. Donc la relation $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}'$, pour deux variétés contenues dans $\mathcal{M}$, a même sens dans $\mathbf{M}$ et dans $\mathbf{M}_{(\mathcal{M})}$. D'où le lemme.

Ce sont les lemmes 2.5 et 2.6 qui permettent, comme annoncé dans l'introduction, de définir, à partir de l'application $^\natural$ canonique d'un anneau de classe finie, des applications $^\natural$ dans un anneau quelconque.

III. Idéaux.

DÉFINITION 3.1. — *Les idéaux à gauche, à droite, bilatères dans* $\mathbf{M}$ *sont définis à la manière habituelle. Un idéal* $\mathfrak{m} \subset \mathbf{M}$ *sera dit self-adjoint si l'hypothèse* $A \in \mathfrak{m}$ *entraîne* $A^* \in \mathfrak{m}$.

On appellera idéal dans $\overset{\frown}{\mathbf{M}}$ *un ensemble* $\mathfrak{I}$ *de variétés de* $\overset{\frown}{\mathbf{M}}$ *vérifiant les conditions suivantes:*

a. *Si* $\mathcal{M}_1 \in \mathfrak{I}$ *et* $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1$ $(\mathcal{M}_2 \in \overset{\frown}{\mathbf{M}})$, *on a* $\mathcal{M}_2 \in \mathfrak{I}$.

b. *Si* $\mathcal{M}_1 \in \mathfrak{I}$ *et* $\mathcal{M}_2 \in \mathfrak{I}$, *on a* $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \in \mathfrak{I}$.

c. *Si* $\mathcal{M}_1 \in \mathfrak{I}$ *et* $U \in \mathbf{M}_U$, *on a* $U(\mathcal{M}_1) \in \mathfrak{I}$.

1. Voici d'abord quelques résultats simples concernant les idéaux [14]).

LEMME 3.1. — *Pour qu'une partie* $\mathfrak{I}$ *de* $\overset{\frown}{\mathbf{M}}$ *soit un idéal, il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition* b *ci-dessus et la condition suivante:*

a'. *Si* $\mathcal{M}_1 \in \mathfrak{I}$ *et* $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_1$, *on a* $\mathcal{M}_2 \in \mathfrak{I}$.

Démonstration. — Comme les relations $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1$ ou $\mathcal{M}_2 \sim \mathcal{M}_1$ entraînent $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_1$, il est évident que les conditions a' et b suffisent pour que $\mathfrak{I}$ soit un idéal. Réciproquement, il faut montrer que, si $\mathfrak{I}$ est un idéal, $\mathfrak{I}$ vérifie la condition a'. Or, si $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_1$, avec $\mathcal{M}_1 \in \mathfrak{I}$, on a $\mathcal{M}_2 \sim \mathcal{M}_3$, avec $\mathcal{M}_3 \subset \mathcal{M}_1$; alors ([6], lemme 1.7) il existe des variétés $\mathcal{M}_2'$, $\mathcal{M}_2''$ (resp. $\mathcal{M}_3'$, $\mathcal{M}_3''$) orthogonales complémentaires dans $\mathcal{M}_2$ (resp. $\mathcal{M}_3$), et des unitaires U', U'' de $\mathbf{M}$, avec $U'(\mathcal{M}_2') = \mathcal{M}_3'$, $U''(\mathcal{M}_2'') = \mathcal{M}_3''$; donc $\mathcal{M}_2' \in \mathfrak{I}$, $\mathcal{M}_2'' \in \mathfrak{I}$, donc $\mathcal{M}_2 \in \mathfrak{I}$.

LEMME 3.2. — *Pour qu'une partie* $\mathfrak{m}$ *de* $\mathbf{M}$ *soit un idéal bilatère, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

a. *Si* A *et* B *sont dans* $\mathfrak{m}$, *et si* λ *et* μ *sont des nombres complexes, on a* $\lambda A + \mu B \in \mathfrak{m}$.

---

[14]) On s'est inspiré de [1]. CALKIN, dans [1], s'intéresse aux idéaux de l'anneau de tous les opérateurs, mais il signale que ses résultats s'appliquent dans des cas plus généraux.

b. *Si* $A \in \mathfrak{m}$ *et* $U \in \mathbf{M}_U$, *on a* $UA \in \mathfrak{m}$ *et* $AU \in \mathfrak{m}$.

Démonstration. — La nécessité est évidente. La suffisance résulte du fait que tout élément de $\mathbf{M}$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{M}_U$ ([11], p. 239; ou [2], p. 250).

LEMME 3.3. — *Tout idéal à gauche (resp. à droite) self-adjoint de* $\mathbf{M}$ *est bilatère. Tout idéal bilatère est self-adjoint.*

Démonstration. — Soit par exemple $\mathfrak{m}$ un idéal à gauche self-adjoint. Soient $A \in \mathfrak{m}$, $B \in \mathbf{M}$. On a $A^* \in \mathfrak{m}$, donc $B^*A^* \in \mathfrak{m}$, donc $AB = (B^*A^*)^* \in \mathfrak{m}$. Donc $\mathfrak{m}$ est bilatère.

Soit maintenant $\mathfrak{m}$ un idéal bilatère. Soit $A \in \mathfrak{m}$. On sait que $A = WK$, avec $K \in \mathbf{M}^+$ et $W \in \mathbf{M}_{PI}$ ([10], lemme 4.4.1; la démonstration consiste à observer que W et K, à cause de leur unicité, sont invariants par tout unitaire de $\mathbf{M}'$). De plus, $K = W^*A$. Alors, $K \in \mathfrak{m}$, donc $A^* \in KW^* \in \mathfrak{m}$.

Désormais, tous les idéaux de $\mathbf{M}$ considérés seront des idéaux bilatères. *On dira donc: idéal, sans préciser.*

LEMME 3.4. — *Soit* $\mathfrak{m}$ *un idéal de* $\mathbf{M}$. *Pour que* $A \in \mathfrak{m}$, *il faut et il suffit que* $(A^*A)^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{m}^+$.

Démonstration. — On sait que $A = W(A^*A)^{\frac{1}{2}}$, et $(A^*A)^{\frac{1}{2}} = W^*A$, avec $W \in \mathbf{M}_{PI}$. Donc $A \in \mathfrak{m}$ et $(A^*A)^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{m}$ sont des conditions équivalentes.

LEMME 3.5. — *Soit* $\mathfrak{m}$ *un idéal de* $\mathbf{M}$. *Tout élément de* $\mathfrak{m}$ *est combinaison linéaire d'éléments de* $\mathfrak{m}^+$.

Démonstration. — Soit $A \in \mathfrak{m}$. On a $A = B + iC$, avec $B = \frac{1}{2}(A + A^*) \in \mathfrak{m}$, $C = \dfrac{1}{2i}(A - A^*) \in \mathfrak{m}$. Il suffit donc de prouver le lemme pour B et C, qui sont self-adjoints, et par exemple pour B. On a: $B = B^+ - B^-$, B^+ et B^- étant les parties positive et négative de B. Or $B^+ = BE$, où E est un projecteur spectral de B, donc $E \in \mathbf{M}$; d'où $B^+ \in \mathfrak{m}$, et de même $B^- \in \mathfrak{m}$. Le lemme est démontré.

LEMME 3.6. — *Soit* $\mathfrak{m}_0$ *un sous-ensemble de* $\mathbf{M}^+$ *possédant les propriétés suivantes:*

a. *Si* $A \in \mathfrak{m}_0$ *et* $U \in \mathbf{M}_U$, *on a* $U^{-1}AU \in \mathfrak{m}_0$.

b. *Si* $A \in \mathfrak{m}_0$ *et si* $B \in \mathbf{M}^+$, $B \leqq A$, *on a* $B \in \mathfrak{m}_0$.

c. *Si* A *et* B *sont dans* $\mathfrak{m}_0$, *on a* $A + B \in \mathfrak{m}_0$.

Alors, si $\mathfrak{m}$ *est l'idéal de* $\mathbf{M}$ *engendré par* $\mathfrak{m}_0$, *on a* $\mathfrak{m}^+ = \mathfrak{m}_0$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{m}'$ l'ensemble des opérateurs de la forme $\sum_{i=1}^{n} A_i B_i^*$, où $A_i \in \mathbf{M}$, $B_i \in \mathbf{M}$, $A_i A_i^* \in \mathfrak{m}_0$, $B_i B_i^* \in \mathfrak{m}_0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. L'ensemble $\mathfrak{m}'$ est linéaire. Si $U \in \mathbf{M}_U$, on a:

$(UA_i)(UA_i)^* = U(A_iA_i)^*U^{-1} \in \mathfrak{m}_0$, et $(U^{-1}B_i)(U^{-1}B_i)^* = U^{-1}(B_iB_i^*)U \in \mathfrak{m}_0$, donc $U(\sum_{i=1}^{n} A_iB_i^*) = \sum_{i=1}^{n}(UA_i)B_i^* \in \mathfrak{m}'$ et $(\sum_{i=1}^{n} A_iB_i^*)U = \sum_{i=1}^{n} A_i(U^{-1}B_i)^* \in \mathfrak{m}'$. Donc $\mathfrak{m}'$ est un idéal. On va voir que $\mathfrak{m}'^+ = \mathfrak{m}_0$.

Si $A \in \mathfrak{m}_0$, on a $A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}*} \in \mathfrak{m}_0$, donc $A = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}*} \in \mathfrak{m}'$; ainsi, $\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{m}'^+$. Supposons enfin $A = \sum_{i=1}^{n} A_iB_i^* \in \mathfrak{m}'^+$, avec $A_iA_i^* \in \mathfrak{m}_0$, $B_iB_i^* \in \mathfrak{m}_0$. On a: $\sum_{i=1}^{n}(A_i - B_i)(A_i - B_i)^* \geqq 0$, donc $\sum_{i=1}^{n}(A_iA_i^* + B_iB_i^*) \geqq \sum_{i=1}^{n} A_iB_i^* + (\sum_{i=1}^{n} A_iB_i^*)^* = 2\sum_{i=1}^{n} A_iB_i^*$. Appliquant les propriétés b et c de $\mathfrak{m}_0$, on en déduit que $A \in \mathfrak{m}_0$. Donc $\mathfrak{m}'^+ \subset \mathfrak{m}_0$.

2. Passons maintenant aux relations entre les idéaux de $\mathbf{M}$ et les idéaux de $\widetilde{\mathbf{M}}$.

Définition 3.2. — a. *Si* $\mathfrak{I}$ *est un idéal de* $\widetilde{\mathbf{M}}$, $\mathfrak{m}(\mathfrak{I})$ *désignera l'idéal de* $\mathbf{M}$ *engendré par les* $P_{\mathcal{M}}$ *où* $\mathcal{M}$ *parcourt* $\mathfrak{I}$.

b. *Conformément aux notations générales, si* $\mathfrak{m}$ *est un idéal de* $\mathbf{M}$, $\widetilde{\mathfrak{m}}$ *désigne l'ensemble des* $\mathcal{M}$ *telles que* $P_{\mathcal{M}} \in \mathfrak{m}$.

Lemme 3.7. — a. *Si* $\mathfrak{m}$ *est un idéal de* $\mathbf{M}$, $\widetilde{\mathfrak{m}}$ *est un idéal de* $\widetilde{\mathbf{M}}$.

b. *Si* $\mathfrak{I}$ *est un idéal de* $\widetilde{\mathbf{M}}$, $\mathfrak{m}(\mathfrak{I})$ *est la réunion des* $\mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\rangle}$ *où* $\mathcal{M}$ *parcourt* $\mathfrak{I}$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{m}$ un idéal de $\mathbf{M}$. Si $\mathcal{M}_1 \in \widetilde{\mathfrak{m}}$ et $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_2 \in \widetilde{\mathbf{M}}$) on a $P_{\mathcal{M}_2} = P_{\mathcal{M}_2}P_{\mathcal{M}_1} \in \mathfrak{m}$, donc $\mathcal{M}_2 \in \widetilde{\mathfrak{m}}$. Si $\mathcal{M}_1 \in \widetilde{\mathfrak{m}}$ et $\mathcal{M}_2 = U(\mathcal{M}_1)$ avec $U \in \mathbf{M}_U$, on a $P_{\mathcal{M}_2} = UP_{\mathcal{M}_1}U^{-1} \in \mathfrak{m}$, donc $\mathcal{M}_2 \in \widetilde{\mathfrak{m}}$. Enfin, si $\mathcal{M}_1 \in \widetilde{\mathfrak{m}}$ et $\mathcal{M}_2 \in \widetilde{\mathfrak{m}}$, soit $\mathcal{M}_2' = (\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2) \ominus \mathcal{M}_1$. $\mathcal{M}_2'$ est en position p' avec une variété contenue dans $\mathcal{M}_2$, donc, d'après ce qui précède, $\mathcal{M}_2' \in \widetilde{\mathfrak{m}}$, $P_{\mathcal{M}_2'} \in \mathfrak{m}$. $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2'$ sont orthogonales, et $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2'$, donc $P_{\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2} = P_{\mathcal{M}_1} + P_{\mathcal{M}_2'} \in \mathfrak{m}$ donc $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \in \widetilde{\mathfrak{m}}$: $\widetilde{\mathfrak{m}}$ est un idéal de $\widetilde{\mathbf{M}}$.

Soit maintenant $\mathfrak{I}$ un idéal de $\widetilde{\mathbf{M}}$, et $\mathfrak{m}'$ la réunion des $\mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\rangle}$ où $\mathcal{M}$ parcourt $\mathfrak{I}$. Si $A \in \mathfrak{m}'$, on a $P_{\mathcal{M}}A = A$ pour une $\mathcal{M} \in \mathfrak{I}$ (lemme 2.1) donc, comme $P_{\mathcal{M}} \in \mathfrak{m}(\mathfrak{I})$, $A \in \mathfrak{m}(\mathfrak{I})$. Donc $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}(\mathfrak{I})$. Pour prouver que $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}(\mathfrak{I})$, il suffit donc, observant que $P_{\mathcal{M}} \in \mathfrak{m}'$ pour toute $\mathcal{M} \in \mathfrak{I}$, de prouver que $\mathfrak{m}'$ est un idéal. Or, si $A \in \mathfrak{m}'$, $B \in \mathfrak{m}'$, et si λ et μ sont des nombres complexes, on a $A \in \mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\rangle}$, $B \in \mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}'\rangle}$ avec $\mathcal{M} \in \mathfrak{I}$, $\mathcal{M}' \in \mathfrak{I}$, donc $\lambda A + \mu B \in \mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\oplus\mathcal{M}'\rangle}$, donc $\lambda A + \mu B \in \mathfrak{m}'$ puisque $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}' \in \mathfrak{I}$. Si $U \in \mathbf{M}_U$, on a $UA \in \mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\oplus U(\mathcal{M})\rangle}$, $AU \in \mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\oplus U^{-1}(\mathcal{M})\rangle}$ donc de même $UA \in \mathfrak{m}'$, $AU \in \mathfrak{m}'$. Donc (lemme 3.2) $\mathfrak{m}'$ est un idéal.

Lemme 3.8. — a. *Si* $\mathfrak{m}$ *est un idéal de* $\mathbf{M}$, *on a* $\mathfrak{m}(\overline{\mathfrak{m}}) \subset \mathfrak{m}$, $\overline{\mathfrak{m}}(\overline{\mathfrak{m}}) = \overline{\mathfrak{m}}$.

b. *Si* $\mathfrak{l}$ *est un idéal de* $\overline{\mathbf{M}}$, *on a* $\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{l}$.

Démonstration. — Si $\mathfrak{m}$ est un idéal de $\mathbf{M}$, on a $P_{\mathcal{M}} \in \mathfrak{m}$ pour toute $\mathcal{M} \in \overline{\mathfrak{m}}$, donc $\mathfrak{m}(\overline{\mathfrak{m}}) \subset \mathfrak{m}$.

Si $\mathfrak{l}$ est un idéal de $\overline{\mathbf{M}}$, et si $\mathcal{M} \in \mathfrak{l}$, on a $P_{\mathcal{M}} \in \mathfrak{m}(\mathfrak{l})$, donc $\mathcal{M} \in \overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{l})$. Donc $\mathfrak{l} \subset \overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{l})$. Si $\mathcal{M}' \in \overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{l})$, on a $P_{\mathcal{M}'} \in \mathfrak{m}(\mathfrak{l})$, donc (lemme 3.7) $P_{\mathcal{M}'} \in \mathbf{M}_{\langle\mathcal{N}\rangle}$ avec $\mathcal{N} \in \mathfrak{l}$; d'où évidemment $\mathcal{M}' \subset \mathcal{N}$ et par suite $\mathcal{M}' \in \mathfrak{l}$. Donc $\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{l}) \subset \mathfrak{l}$ et finalement $\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{l}$.

Faisant $\mathfrak{l} = \overline{\mathfrak{m}}$ pour un idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{M}$, on trouve $\overline{\mathfrak{m}}(\overline{\mathfrak{m}}) = \overline{\mathfrak{m}}$. En général, on n'a pas $\mathfrak{m}(\overline{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}$, ce qui nous amène à poser la

Définition 3.3. — *Un idéal* $\mathfrak{m}$ *de* $\mathbf{M}$ *sera dit restreint si* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\overline{\mathfrak{m}})$, *c'est-à-dire si* $\mathfrak{m}$ *est engendré par les projecteurs qu'il contient.*

Lemme 3.9. — a. *L'application* $\mathfrak{l} \to \mathfrak{m}(\mathfrak{l})$ *est une application biunivoque de l'ensemble des idéaux de* $\overline{\mathbf{M}}$ *sur l'ensemble des idéaux restreints de* $\mathbf{M}$. *L'application inverse n'est autre que l'application* $\mathfrak{m} \to \overline{\mathfrak{m}}$.

b. *Soit* $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ *une famille de variétés de* $\overline{\mathbf{M}}$. *L'idéal* $\mathfrak{m}$ *de* $\mathbf{M}$ *engendré par les* $P_{\mathcal{M}_i}$ *est restreint, et* $\overline{\mathfrak{m}}$ *est l'idéal de* $\overline{\mathbf{M}}$ *engendré par les* $\mathcal{M}_i$. *Une variété* $\mathcal{M}$ *de* $\overline{\mathbf{M}}$ *appartient à* $\overline{\mathfrak{m}}$ *si et seulement s'il existe un nombre fini de variétés orthogonales* $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots, \mathcal{N}_n$ *avec:* 1. $\mathcal{M} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{N}_j$; 2. *pour tout* $j = 1, 2, \ldots, n$, *il existe un* $i \in I$ *tel que* $\mathcal{N}_j \prec \mathcal{M}_i$.

c. *Si* $\mathfrak{m}$ *est un idéal quelconque de* $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}(\overline{\mathfrak{m}})$ *est restreint; on posera:* $\mathfrak{m}(\overline{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}^r$; *on a:* $\overline{\mathfrak{m}^r} = \overline{\mathfrak{m}}$.

Démonstration. — Si $\mathfrak{l}$ est un idéal de $\overline{\mathbf{M}}$, $\mathfrak{m}(\mathfrak{l})$ est évidemment restreint. Comme tout idéal restreint $\mathfrak{m}'$ est de la forme $\mathfrak{m}(\mathfrak{l})$ (avec $\mathfrak{l} = \overline{\mathfrak{m}}'$) on voit que l'application $\mathfrak{l} \to \mathfrak{m}(\mathfrak{l})$ est bien une application de l'ensemble des idéaux de $\overline{\mathbf{M}}$ *sur* l'ensemble des idéaux restreints de $\mathbf{M}$. Cette application est biunivoque, car, si $\mathfrak{m}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{m}(\mathfrak{l}')$ on a $\mathfrak{l} = \overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{l}) = \overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{l}') = \mathfrak{l}'$. Comme $\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{l}$, l'application inverse est l'application $\mathfrak{m} \to \overline{\mathfrak{m}}$. D'où a.

Prouvons b. Dans l'application précédente, aux idéaux restreints contenant les $P_{\mathcal{M}_i}$ correspondent les idéaux de $\overline{\mathbf{M}}$ contenant les $\mathcal{M}_i$. Donc à $\mathfrak{m}$ correspond l'idéal de $\overline{\mathbf{M}}$ engendré par les $\mathcal{M}_i$. Ce dernier idéal est donc $\overline{\mathfrak{m}}$. Désignons provisoirement par $\mathfrak{l}$ l'ensemble des $\mathcal{M} \in \overline{\mathbf{M}}$ pour lesquelles existent des variétés $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots, \mathcal{N}_n$, avec: 1. $\mathcal{M} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{N}_j$; 2. pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$, il existe un $i \in I$ tel que $\mathcal{N}_j \prec \mathcal{M}_i$. D'après le lemme 3.1, tout idéal de $\widehat{\mathbf{M}}$ contenant les $\mathcal{M}_i$ contient $\mathfrak{l}$. Montrons que $\mathfrak{l}$ est un idéal (donc est l'idéal de $\widehat{\mathbf{M}}$ engendré par les $\mathcal{M}_i$). Les conditions b et c de la définition 3.1 sont évidemment vérifiées. D'autre part, si $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{N}_j$, considérons les projections des $\mathcal{N}_j$ sur $\mathcal{M}'$ et les adhérences $\mathcal{N}'_j$ des variétés ainsi obtenues; on a $\mathcal{M}' = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{N}'_j$, et $\mathcal{N}'_j \prec \mathcal{N}_j$; donc la condition a de la définition 3.1 est aussi vérifiée. Reste à prouver que, si $\mathcal{M} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{N}_j$, on peut remplacer les $\mathcal{N}_j$ par des $\mathcal{N}'_j$ orthogonales; or, ceci se démontre immédiatement par récurrence, en remplaçant $\mathcal{N}_n$ par $\mathcal{M} \ominus (\bigoplus_{j=1}^{n-1} \mathcal{N}_j)$.

Prouvons c. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal quelconque de $\mathbf{M}$, on a $\widehat{\mathfrak{m}^r} = \widehat{\mathfrak{m}}$ (lemme 3.8), donc $\mathfrak{m}(\widehat{\mathfrak{m}^r}) = \mathfrak{m}^r$: $\mathfrak{m}^r$ est restreint.

3. Nous allons maintenant étudier l'adhérence forte d'un idéal de $\mathbf{M}$ (qui est évidemment un idéal).

LEMME 3.10. — *Soit $(\mathcal{M}^j)_{j \in J}$ une famille de variétés de $\widehat{\mathbf{M}}$. Soient $\mathcal{N} = (\bigoplus_{j \in J} \mathcal{M}^j)^\natural$, et $\mathcal{M}$ une variété de $\widehat{\mathbf{M}}$ contenue dans $\mathcal{N}$. Il existe une famille $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ de variétés deux à deux orthogonales, sous-tendant $\mathcal{M}$, telles que, pour tout $i \in I$, existe $j \in J$ avec $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}^j$.*

Démonstration. — Si $\mathcal{M} = 0$, le lemme est trivial. Si $\mathcal{M} \neq 0$, il existe d'abord des variétés $\mathcal{M}' \neq 0$ telles que $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}' \prec \mathcal{M}^j$ pour un $j \in J$. En effet, appliquons le théorème 6 de [2] à $\mathcal{M}^j$ et $\mathcal{M}$. Il existe deux variétés m_1^j, m_2^j (resp. m_{1j}, m_{2j}), rthogonales complémentaires dans $\mathcal{M}^j$ (resp. $\mathcal{M}$), avec $m_1^j \prec m_{1j}$, $\prec m_2^j$, $m_{1j}^\natural$ orthogonale à $m_2^{j\natural}$. Si notre assertion était inexacte, il faudrait, pour tout j, $m_1^j = m_{2j} = 0$, donc $\mathcal{M}^{j\natural} = m_2^{j\natural}$ orthogonale à $\mathcal{M}^\natural = m_{1j}^\natural$, donc $\mathcal{M}^\natural$ serait orthogonale à $\mathcal{N}$. Comme $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ donc $\mathcal{M}^\natural \subset \mathcal{N}$, ceci donnerait $\mathcal{M} = 0$, ce qui est contradictoire.

Ceci posé, considérons les familles $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ de variétés $\neq 0$, deux à deux orthogonales, contenues dans $\mathcal{M}$, avec $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}^j$ pour un j variable de J, quel que soit $i \in I$. Grâce au théorème de Zorn, soit une telle famille maximale, que nous désignons encore par $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ pour simplifier. Soit $\overline{\mathcal{M}} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{M}_i$. Si $\overline{\mathcal{M}} \neq \mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \ominus \overline{\mathcal{M}} \neq 0$, donc il existe, d'après ce qui précède, une variété $\mathcal{M}' \neq 0$, avec $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M} \ominus \overline{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{M}' \prec \mathcal{M}^j$ pour un $j \in J$, de sorte que la famille $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ ne serait pas maximale. Donc $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$ et le lemme est démontré.

Lemme 3.11. — *Soit* $\mathfrak{m}$ *un idéal de* $\mathbf{M}$.

a. *Parmi les variétés* $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ *telles que* $\mathfrak{m} \subset \mathbf{M}_{\langle \mathcal{M} \rangle}$, *il en existe une plus petite que toutes les autres. Elle sera désignée par* $\mathcal{M}(\mathfrak{m})$. *On a:* $\mathcal{M}(\mathfrak{m}) \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$. *L'adhérence forte de* $\mathfrak{m}$ *est* $\mathbf{M}_{\langle \mathcal{M}(\mathfrak{m}) \rangle}$. *Elle sera désignée par* $\overline{\mathfrak{m}}$.

b. *Soit* $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ *une famille de variétés engendrant* $\widetilde{\mathfrak{m}}$. *On a:* $\mathcal{M}(\mathfrak{m}) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{M}_i^{\natural}$. *Donc* $\mathcal{M}(\mathfrak{m}) = \mathcal{M}(\mathfrak{m}^r)$, $\overline{\mathfrak{m}} = \overline{\mathfrak{m}^r}$.

c. *Toute variété de* $\widetilde{\mathbf{M}}$ *contenue dans* $\mathcal{M}(\mathfrak{m})$ *est sous-tendue par une famille de variétés de* $\widetilde{\mathfrak{m}}$ *deux à deux orthogonales.*

Démonstration. — Soit $(\mathcal{M}^j)_{j \in J}$ une famille de variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$. Si $\mathfrak{m} \subset \mathbf{M}_{\langle \mathcal{M}^j \rangle}$ pour tout $j \in J$, on a aussitôt $\mathfrak{m} \subset \mathbf{M}_{\langle \mathcal{M} \rangle}$ où $\mathcal{M} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{M}^j$. D'où l'existence de $\mathcal{M}(\mathfrak{m})$. Si $U \in \mathbf{M}_U$ et $A \in \mathfrak{m}$, on a $UAU^{-1} \in \mathfrak{m}$, donc $\mathfrak{m}$ et par suite $\mathcal{M}(\mathfrak{m})$ sont invariants par tout $U \in \mathbf{M}_U$. Donc $\mathcal{M}(\mathfrak{m}) \in \widetilde{\mathbf{M}}'$ et par suite $\mathcal{M}(\mathfrak{m}) \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$. Comme $\mathbf{M}_{\langle \mathcal{M}(\mathfrak{m}) \rangle}$ est fortement fermé, on a $\overline{\mathfrak{m}} \subset \mathbf{M}_{\langle \mathcal{M}(\mathfrak{m}) \rangle}$.

Soit $(\mathcal{M}'_i)_{i \in I'}$ la famille de toutes les variétés de $\widetilde{\mathfrak{m}}$. On a évidemment $\mathcal{M}'_i \subset \mathcal{M}(\mathfrak{m})$, donc $\mathcal{M}'^{\natural}_i \subset \mathcal{M}(\mathfrak{m})$ pour tout $i \in I'$; donc, posant provisoirement $\mathcal{M}^* = \bigoplus_{i \in I'} \mathcal{M}'^{\natural}_i$, on a $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}(\mathfrak{m})$. Maintenant, si $A \in \mathfrak{m}^+$, A est, d'après la théorie spectrale [15]), limite uniforme d'opérateurs du type $\sum_{i \in J} \lambda_i P_{\mathcal{M}'_i}$($J$: partie finie de I'; $\lambda_i \geqq 0$); ces opérateurs sont dans $\mathbf{M}_{\langle \mathcal{M}^* \rangle}$; donc $A \in \mathbf{M}_{\langle \mathcal{M}^* \rangle}$ et par suite, vu le lemme 3.5, $\mathfrak{m} \subset \mathbf{M}_{\langle \mathcal{M}^* \rangle}$. La définition de $\mathcal{M}(\mathfrak{m})$ prouve alors que $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}(\mathfrak{m})$. Comme $\widetilde{\mathfrak{m}^r} = \widetilde{\mathfrak{m}}$, on a $\mathcal{M}(\mathfrak{m}) = \mathcal{M}(\mathfrak{m}^r)$. Si enfin $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ est une famille de variétés engendrant $\widetilde{\mathfrak{m}}$, on a évidemment $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{M}_i^{\natural} \subset \bigoplus_{i \in I'} \mathcal{M}'^{\natural}_i$; l'inclusion opposée résulte aussitôt du lemme 3.9.b.

Le c du lemme résulte de ce qui précède et du lemme 3.10.

Il reste seulement à démontrer que $\mathbf{M}_{\langle \mathcal{M}(\mathfrak{m}) \rangle} \subset \overline{\mathfrak{m}}$. Or, tout $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathcal{M}(\mathfrak{m}) \rangle}$ est limite uniforme d'opérateurs de la forme $\sum_{k=1}^{n} \mu_k P_{\mathcal{N}_k}$, où $\mu_k \geqq 0$, et où $\mathcal{N}_k \subset \mathcal{M}(\mathfrak{m})$; et ces opérateurs sont dans $\overline{\mathfrak{m}}$ d'après le c du lemme

Lemme 3.12. — *Soit* $\mathfrak{m}$ *un idéal restreint. Soit* $A \in \mathbf{M}^+$. *L'en-*

---

15) Soit $A = \int_0^{+\infty} \lambda dE_\lambda$ la décomposition spectrale de A. Pour $\mu > 0$, soit $A_\mu = \int_\mu^{+\infty} \lambda^{-1} dE_\lambda$, qui est un opérateur de $\mathbf{M}$, car les E_λ sont dans $\mathbf{M}$ d'après [13]. On a: $1 - E_\mu = AA_\mu$, donc $1 - E_\mu \in \mathfrak{m}$ pour $\mu > 0$ (cf. [8]).

semble $\mathscr{F}_A$ des $B \in \mathfrak{m}^+$ tels que $B \leqq A$ est filtrant croissant [16]). *Il admet donc* ([4], *théorème* 2) *une borne supérieure $\hat{A} \leqq A$. On a $\hat{A} = A$ si et seulement si $A \in \overline{\mathfrak{m}}^+$.*

Démonstration. Soient $A \in \mathbf{M}^+$, $B \in \mathscr{F}_A$, $B' \in \mathscr{F}_A$. Comme $\mathfrak{m}$ est restreint, on a $B \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \rangle}$, $B' \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{M}' \rangle}$ avec $\mathscr{M} \in \tilde{\mathfrak{m}}$, $\mathscr{M}' \in \tilde{\mathfrak{m}}$ (lemme 3.7), donc $B \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{N} \rangle}$, $B' \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{N} \rangle}$, avec $\mathscr{N} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}' \in \tilde{\mathfrak{m}}$. Soit C le plus grand des opérateurs self-adjoints $\geqq 0$, réduits par $\mathscr{N}$, induisant 0 dans $H \ominus \mathscr{N}$, et majorés par A ([4], théorème 1). C est invariant par tout opérateur unitaire de $\mathbf{M}'$, donc $C \in \mathbf{M}$. Plus précisément, $C \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{N} \rangle}$, donc $C \in \mathfrak{m}^+$. D'ailleurs, $B \leqq C$, $B' \leqq C$, $C \leqq A$. Donc $\mathscr{F}_A$ est bien filtrant croissant, de sorte que $\hat{A} \leqq A$ existe. $\hat{A}$ est fortement adhérent à $\mathscr{F}_A$ ([4], théorème 2), donc $\hat{A} \in \overline{\mathfrak{m}}^+$. Donc, si $A = \hat{A}$, on a $A \in \overline{\mathfrak{m}}^+$. Réciproquement, supposons $A \in \overline{\mathfrak{m}}^+$. On va prouver que $A \leqq \hat{A}$. Soit $A = \int_0^1 \lambda dE_\lambda$ la décomposition spectrale de A (en supposant $0 \leqq A \leqq 1$ pour simplifier). On a $E_\lambda - E_0 \in \overline{\mathfrak{m}}^+$ pour tout $\lambda \geqq 0$. Posons $B_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n}(E_{\frac{k+1}{2^n}} - E_{\frac{k}{2^n}})$. On a $\| B_n - A \| \to 0$ quand $n \to +\infty$. Il suffit donc de prouver que $B_n \leqq \hat{A}$ pour tout n. D'ailleurs, $B_n \leqq A$, donc $\mathscr{F}_{B_n} \subset \mathscr{F}_A$, donc $\hat{B}_n \leqq \hat{A}$. Il suffit de prouver que $B_n \leqq \hat{B}_n$. Considérons les opérateurs de la forme $B'_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} E'_k$, où E'_k est un projecteur *quelconque* (variable) de $\mathfrak{m}$ tel que $E'_k \leqq E_{\frac{k+1}{2^n}} - E_{\frac{k}{2^n}}$. On a $B'_n \in \mathscr{F}_{B_n}$, et, d'après le c du lemme 3.11, compte tenu de $E_{\frac{k+1}{2^n}} - E_{\frac{k}{2^n}} \in \overline{\mathfrak{m}}^+$, B_n est fortement adhérent à l'ensemble des B'_n. D'où $B_n = \hat{B}_n$.

Lemme 3.13. — *Si $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ sont des idéaux de* $\mathbf{M}$, *et si $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}'$, on a $\overline{\mathfrak{n}} = \overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{m}}'$.*

Démonstration. — On a $\mathfrak{n} \subset \overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{m}}'$, donc $\overline{\mathfrak{n}} \subset \overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{m}}'$. D'autre part, d'après le lemme 3.11.c appliqué deux fois, $\mathscr{M}(\mathfrak{m}) \cap \mathscr{M}(\mathfrak{m}')$ est sous-tendue par une famille de variétés de $\tilde{\mathfrak{n}}$, donc $\mathscr{M}(\mathfrak{m}) \cap \mathscr{M}(\mathfrak{m}') \subset \mathscr{M}(\mathfrak{n})$, et par suite $\overline{\mathfrak{m}} \cap \overline{\mathfrak{m}}' \subset \overline{\mathfrak{n}}$.

Voici maintenant l'analogue du lemme 3.11 pour les idéaux de $\tilde{\mathbf{M}}$.

---

[16]) Il serait intéressant de savoir s'il en est ainsi quand $\mathfrak{m}$ est quelconque. Une réponse affirmative paraît vraisemblable.

LEMME 3.14. — *Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de $\widetilde{\mathbf{M}}$.*

a. *Parmi les variétés $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ telles que $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$ pour toute $\mathscr{N} \in \mathfrak{I}$, il en existe une plus petite que toutes les autres. Elle sera désignée par $\mathscr{M}(\mathfrak{I})$. On a: $\mathscr{M}(\mathfrak{I}) \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$. L'ensemble des variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$ contenues dans $\mathscr{M}(\mathfrak{I})$ sera désigné par $\bar{\mathfrak{I}}$; $\bar{\mathfrak{I}}$ est un idéal de $\widetilde{\mathbf{M}}$ contenant $\mathfrak{I}$.*

b. *Soit $(\mathscr{M}_i)_{i \in I}$ une famille de variétés engendrant $\mathfrak{I}$. On a: $\mathscr{M}(\mathfrak{I}) = \bigoplus_{i \in I} \mathscr{M}_i^\natural$.*

c. *Toute variété de $\bar{\mathfrak{I}}$ est sous-tendue par une famille de variétés de $\mathfrak{I}$ deux à deux orthogonales.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\mathfrak{I})$. Si une variété $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ est telle que $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$ pour toute $\mathscr{N} \in \mathfrak{I}$ on a $\mathfrak{m} \subset \mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \rangle}$ d'après le lemme 3.7; la réciproque est évidente. D'où l'existence de $\mathscr{M}(\mathfrak{I})$ avec $\mathscr{M}(\mathfrak{I}) = \mathscr{M}(\mathfrak{m}) \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$. Comme $\widetilde{\mathfrak{m}} = \mathfrak{I}$, b et c résultent aussitôt de b et c du lemme 3.11.

Nous utiliserons aux chapitres suivants la notation suivante:

DÉFINITION 3.4. — *Soit $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$. On désignera par $\mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$ l'idéal de $\mathbf{M}$ engendré par $P_{\mathscr{M}}$.*

IV. Applications $^\natural$.

1. Il est probable que toute application $^\natural$ est normale. Parmi les résultats que nous possédons à ce sujet, nous donnerons seulement la proposition 4 ci-dessous.

LEMME 4.1. — *Soit $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ une variété proprement infinie. Soit φ une application linéaire, positive, centrale, de $\mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \rangle}$ dans $\mathbf{M}^\natural$ ou dans le corps des nombres complexes. On a: $\varphi = 0$.*

Démonstration. — Il existe ([6], lemme 1.3) une partition $(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2)$ de $\mathscr{M}$ avec $\mathscr{M} \sim \mathscr{M}_1 \sim \mathscr{M}_2$. Soient donc $U_1 \in \mathbf{M}_{PI}$, $U_2 \in \mathbf{M}_{PI}$, avec $U_i^* U_i = P_{\mathscr{M}}$, $U_i U_i^* = P_{\mathscr{M}_i}$ $(i = 1, 2)$. On a: $U_i \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \rangle}$, donc $\varphi(P_{\mathscr{M}_i}) = \varphi(U_i U_i^*) = \varphi(U_i^* U_i) = \varphi(P_{\mathscr{M}})$. Donc $\varphi(P_{\mathscr{M}}) = \varphi(P_{\mathscr{M}_1} + P_{\mathscr{M}_2}) = 2\varphi(P_{\mathscr{M}})$, $\varphi(P_{\mathscr{M}}) = 0$. Si $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M} \rangle}$, avec $0 \leqq A \leqq 1$, on a $0 \leqq A \leqq P_{\mathscr{M}}$, donc $0 \leqq \varphi(A) \leqq \varphi(P_{\mathscr{M}}) = 0$, $\varphi(A) = 0$. D'où le lemme.

LEMME 4.2. — *Soit φ une application $^\natural$ définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{M}$. Soit $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathfrak{m}}$ une variété. Pour $A \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \rangle} \subset \mathfrak{m}$, posons $\varphi'(A_{(\mathscr{M})}) = (\varphi(A))_{(\mathscr{M})}$. L'application φ' est une application $^\natural$ définie sur $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})}$.*

Démonstration. — On a: $\varphi(A) \in \mathbf{M}^\natural$, donc $\varphi'(A_{(\mathscr{M})}) \in \mathbf{M}^\natural_{(\mathscr{M})}$. L'application φ' est évidemment linéaire, centrale et positive. Enfin, soient A et B des opérateurs de $\mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \rangle}$, avec $A_{(\mathscr{M})} \in \mathbf{M}^\natural_{(\mathscr{M})}$. Soit $A' = \theta_{\mathscr{M}}(A_{(\mathscr{M})}) \in \mathbf{M}^\natural$ (définition 2.2). On a: $A'_{(\mathscr{M})} = A_{(\mathscr{M})}$, donc $AB = A' P_{\mathscr{M}} B = A'B$. Alors $\varphi(AB) = \varphi(A'B) = A'\varphi(B)$, d'où $(\varphi(AB))_{(\mathscr{M})} = A'_{(\mathscr{M})}(\varphi(B))_{(\mathscr{M})} = A_{(\mathscr{M})}(\varphi(B))_{(\mathscr{M})}$, c'est-à-dire $\varphi'(A_{(\mathscr{M})}B_{(\mathscr{M})}) = A_{(\mathscr{M})}\varphi'(B_{(\mathscr{M})})$.

Lemme 4.3. — *Soit φ une application $\natural$ définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$ de* $\mathbf{M}$. *Soit $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathfrak{m}}$, et $A \in \mathbf{M}_{\langle\mathscr{M}\rangle}$. On a: $\varphi(A) \in (\mathbf{M}^\natural)_{\langle\mathscr{M}^\natural\rangle}$.*

Démonstration. — On a $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}^\natural$, donc $P_{\mathscr{M}}P_{H\ominus\mathscr{M}^\natural} = 0$, donc $\varphi(P_{\mathscr{M}})P_{H\ominus\mathscr{M}^\natural} = 0$, c'est-à-dire $0 \leqq \varphi(P_{\mathscr{M}}) \leqq KP_{\mathscr{M}^\natural}$, où $K > 0$. Si $0 \leqq A \leqq P_{\mathscr{M}}$, on a $0 \leqq \varphi(A) \leqq KP_{\mathscr{M}^\natural}$, donc $\varphi(A) \in (\mathbf{M}^\natural)_{\langle\mathscr{M}^\natural\rangle}$. D'où le lemme par linéarité.

Proposition 4. — *Toute application $\natural$ définie sur un idéal restreint est normale.*

Démonstration. — Soit φ une application $\natural$ définie sur l'idéal restreint $\mathfrak{m}$. Soit $A \in \mathfrak{m}^+$, et $\mathscr{F} \subset \mathfrak{m}^+$ un ensemble filtrant croissant de borne supérieure A. Il faut prouver que $\varphi(A)$ est la borne supérieure de $\varphi(\mathscr{F})$. Puisque $\mathfrak{m}$ est restreint, on a (lemme 3.7) $A \in \mathbf{M}_{\langle\mathscr{M}\rangle}$, avec $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathfrak{m}}$. Alors $\mathscr{F} \subset \mathbf{M}_{\langle\mathscr{M}\rangle}$. Soit $\mathscr{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ telle que $\mathscr{N} \cap \mathscr{M}$ soit finie et $(H\ominus\mathscr{N}) \cap \mathscr{M}$ proprement infinie ou $=0$. Tout $B \in \mathbf{M}_{\langle\mathscr{M}\rangle}$ est réduit par $\mathscr{N} \cap \mathscr{M}$ et $(H\ominus\mathscr{N}) \cap \mathscr{M}$, et $\varphi(A') = 0$ pour tout $A' \in \mathbf{M}^+_{\langle(H\ominus\mathscr{N})\cap\mathscr{M}\rangle}$ d'après le lemme 4.1. On peut donc supposer désormais $A \in \mathbf{M}_{\langle\mathscr{N}\cap\mathscr{M}\rangle}$ et $\mathscr{F} \subset \mathbf{M}^+_{\langle\mathscr{N}\cap\mathscr{M}\rangle}$; autrement dit supposons $\mathscr{M}$ finie. Posons: $\varphi'(B_{(\mathscr{M})}) = (\varphi(B))_{(\mathscr{M})}$ pour $B \in \mathbf{M}_{\langle\mathscr{M}\rangle}$. $A_{(\mathscr{M})}$ est la borne supérieure de $\mathscr{F}_{(\mathscr{M})}$, et comme φ' est, d'après le lemme 4.2, une application $\natural$ partout définie dans l'anneau de classe finie $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})}$, φ' est normale (proposition 1) de sorte que $\varphi'(A_{(\mathscr{M})})$ est la borne supérieure de $\varphi'(\mathscr{F}_{(\mathscr{M})})$. Donc $(\varphi(A))_{(\mathscr{M})}$ est la borne supérieure de $(\varphi(\mathscr{F}))_{(\mathscr{M})}$. Donc $\theta_{\mathscr{M}}[(\varphi(A))_{(\mathscr{M})}]$ est la borne supérieure de $\theta_{\mathscr{M}}[(\varphi(\mathscr{F}))_{(\mathscr{M})}]$. Mais $\varphi(A) \in (\mathbf{M}^\natural)_{\langle\mathscr{M}^\natural\rangle}$ (lemme 4.3), donc $\theta_{\mathscr{M}}[(\varphi(A))_{(\mathscr{M})}] = \varphi(A)$. De même, $\theta_{\mathscr{M}}[(\varphi(\mathscr{F}))_{(\mathscr{M})}] = \varphi(\mathscr{F})$. D'où la proposition.

2. Si φ est une application $\natural$ normale définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$, la restriction de φ à tout idéal contenu dans $\mathfrak{m}$ est évidemment une application $\natural$ normale. Mais il y a intérêt, au contraire, à prolonger φ si possible. Nous allons définir deux prolongements (concordants) de φ. L'un d'eux sera une application $\natural$ normale au sens de l'introduction, que nous qualifierons de *maximale*; on peut considérer qu'on construit là le domaine naturel de définition d'une application $\natural$. L'autre prolongement, que nous noterons φ^*, ne sera pas une application $\natural$ au sens strict: φ^* sera défini sur $\mathbf{M}^+$ tout entier, et $\varphi^*(A)$ ne sera pas toujours dans $\mathbf{M}^\natural$. Quelques mots d'explications sont ici nécessaires.

D'après des résultats bien connus de Gelfand et Neumark [8], on peut attacher canoniquement à $\mathbf{M}^\natural$ un espace compact Ω et un isomorphisme ϱ de l'$*$-algèbre normée $\mathbf{M}^\natural$ sur l'$*$-algèbre normée $C(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω à valeur complexes. Désormais, et par abus de langage, nous *identifions* A et $\varrho(A)$, pour $A \in \mathbf{M}^\natural$. Ainsi un élément de $\mathbf{M}^{\natural+}$ est aussi une fonction continue finie et positive sur Ω, et l'identification faite est compatible avec les structures d'ordre usuelles.

Alors, $\mathbf{M}^{\natural+}$ se trouve *plongé* dans l'ensemble $\mathbf{Z}$ des fonctions continues positives, *finies ou infinies*, sur Ω. Cet ensemble $\mathbf{Z}$ est muni d'une structure que nous allons préciser. Si $f \in \mathbf{Z}$ et $g \in \mathbf{Z}$, et si λ est un nombre > 0, on sait définir $f + g$ et λf. Définissons le produit fg: la fonction $x \to f(x)g(x)$, où l'on convient que $0 . + \infty = 0$, est semi-continue inférieurement, donc, d'après [7], elle est égale, sauf sur un ensemble rare, à une fonction de $\mathbf{Z}$ bien déterminée; c'est cette fonction que nous noterons fg. (Ceci fournit pour le produit $0 . f$, non encore défini, de la constante 0 par une $f \in \mathbf{Z}$, la valeur 0). Les opérations que nous venons de définir possèdent les propriétés habituelles, comme on le vérifie aisément [17]); et, si les fonctions considérées sont finies, on retrouve les opérations usuelles. Enfin, il existe sur $\mathbf{Z}$ une relation d'ordre évidente, qui prolonge celle de $\mathbf{M}^{\natural+}$. On sait (cf. [7]) que, pour cette relation d'ordre, toute famille d'éléments de $\mathbf{Z}$ admet une borne supérieure.

Il serait facile d'identifier certaines des fonctions de $\mathbf{Z}$ avec des opérateurs non bornés sur l'espace H, mais ce serait sans grand intérêt. On pourrait aussi, mais assez péniblement, éviter l'introduction de Ω, et raisonner directement sur des opérateurs non bornés de H. Cependant il faudrait en réalité introduire certains opérateurs purement formels, et d'ailleurs l'introduction de Ω est indispensable dans d'autres développements de la théorie (que nous ne ferons qu'effleurer dans ce mémoire).

Ceci posé, introduisons une nouvelle terminologie.

Définition 4.1. — *On appellera pseudo-application $\natural$ toute application φ de $\mathbf{M}^+$ dans $\mathbf{Z}$, possédant les propriétés suivantes:*

1. *Si $A \in \mathbf{M}^+$ et $A_1 \in \mathbf{M}^+$, on a: $\varphi(A + A_1) = \varphi(A) + \varphi(A_1)$.*
2. *Si $A \in \mathbf{M}^+$ et si λ est un nombre $\geqq 0$, on a: $\varphi(\lambda A) = \lambda\varphi(A)$.*
3. *Si $A \in \mathbf{M}^+$ et $U \in \mathbf{M}_U$, on a: $\varphi(UAU^{-1}) = \varphi(A)$.*
4. *Si $A \in \mathbf{M}^{\natural+}$ et $B \in \mathbf{M}^+$, on a: $\varphi(AB) = A\varphi(B)$.*

---

[17]) Par exemple, si $f \in \mathbf{Z}$, $g \in \mathbf{Z}$, $h \in \mathbf{Z}$ on a, sauf sur un ensemble rare: $[(f + g)h](x) = (f + g)(x)h(x) = (f(x) + g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x) = fh(x) + gh(x) = (fh + gh)(x)$. Mais $(f + g)h$ et $fh + gh$ sont des fonctions continues, donc coïncident partout. D'où $(f + g)h = fh + gh$.

Une pseudo-application $^\natural$, φ, *sera dite normale si*, $\mathscr{F} \subset \mathbf{M}^+$ *étant un ensemble filtrant croissant de borne supérieure* $A \in \mathbf{M}^+$, $\varphi(A)$ *est la borne supérieure de* $\varphi(\mathscr{F})$.

LEMME 4.4. — *Soient* φ *une pseudo-application* $^\natural$, *et* $\mathfrak{m}^+$ *l'ensemble des* $A \in \mathbf{M}^+$ *tels que* $\varphi(A)$ *soit borné. Soit* $\mathfrak{m}$ *l'idéal de* $\mathbf{M}$ *engendré par* $\mathfrak{m}^+$. *L'ensemble* $\mathfrak{m}^+$ *est l'ensemble des opérateurs self-adjoints* $\geqq 0$ *de* $\mathfrak{m}$ (*ce qui justifie les notations*) *donc* (*lemme* 3.5) $\mathfrak{m}$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de* $\mathfrak{m}^+$.

Démonstration. — Ceci résulte du lemme 3.6.

DÉFINITION 4.2. — *Soit* $A \in \mathbf{M}$. *On désignera par* $\mathscr{N}(A)$ *la plus grande variété de* $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ *contenue dans la variété des zéros de* A. *On posera* $\mathscr{M}(A) = H \ominus \mathscr{N}(A)$.

LEMME 4.5. — *Soit* φ *une pseudo-application* $^\natural$ *normale. Il existe trois variétés* $\mathscr{M}_0^\varphi$, $\mathscr{M}_\infty^\varphi$, $\mathscr{M}_1^\varphi$ *de* $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, *deux à deux orthogonales, sous-tendant* H, *bien déterminées par les propriétés suivantes:*

1. *Si* $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}_0^\varphi \rangle}$, *on a:* $\varphi(A) = 0$.

2. *Si* $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}_\infty^\varphi \rangle}$, *on a:* $\varphi(A) = +\infty \,.\, P_{\mathscr{M}(A)}$.

3. *Si* $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}_1^\varphi \rangle}$, *et si* $\varphi(A) = 0$, *on a* $A = 0$. *De plus, pour tout* $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}_1^\varphi \rangle}$, $A \neq 0$, *il existe un* $A' \leqq A$, $A' \neq 0$, *tel que* $\varphi(A')$ *soit borné.*

Avec les notations du lemme 4.4, *on a:* $\mathscr{M}(\mathfrak{m}) = H \ominus \mathscr{M}_\infty^\varphi = \mathscr{M}_0^\varphi \oplus \mathscr{M}_1^\varphi$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{I}$ l'ensemble des $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ telles que $\varphi(P_\mathscr{M}) = 0$. Les propriétés de φ entrainent aussitôt que $\mathfrak{I}$ est un idéal de $\widetilde{\mathbf{M}}$. Soit $\mathscr{M}_0^\varphi = \mathscr{M}(\mathfrak{I})$. D'après le lemme 3.7 et les propriétés de φ, on a $\varphi(A) = 0$ pour $A \in \mathfrak{m}(\mathfrak{I})^+$. Puis, d'après le lemme 3.12 et la normalité de φ, on a $\varphi(A) = 0$ pour $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}_0^\varphi \rangle}$. Donc, avec les notations du lemme 4.4, on a $\mathfrak{m}^+ \supset \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}_0^\varphi \rangle}$, donc $\mathscr{M}_0^\varphi \subset \mathscr{M}(\mathfrak{m})$. Soient $\mathscr{M}_1^\varphi = \mathscr{M}(\mathfrak{m}) \ominus \mathscr{M}_0^\varphi$, et $\mathscr{M}_\infty^\varphi = H \ominus \mathscr{M}(\mathfrak{m})$. Les variétés $\mathscr{M}_0^\varphi$, $\mathscr{M}_\infty^\varphi$, $\mathscr{M}_1^\varphi$ sont des variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, deux à deux orthogonales, sous-tendant H; la propriété 1 et la dernière propriété du lemme sont démontrées.

Soit maintenant $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}_\infty^\varphi \rangle}$, $A \neq 0$. On a $AP_{\mathscr{N}(A)} = 0$, donc $0 = \varphi(AP_{\mathscr{N}(A)}) = \varphi(A)P_{\mathscr{N}(A)}$. Donc $\varphi(A) \leqq +\infty \,.\, P_{\mathscr{M}(A)}$. Supposons $\varphi(A) \neq +\infty \,.\, P_{\mathscr{M}(A)}$. Alors, il existerait un $B \in \mathbf{M}^{\natural +}$ tel que $\varphi(AB) = \varphi(A)B$ soit borné et non nul. Ainsi, on aurait $AB \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}_\infty^\varphi \rangle}$ et $AB \in \mathfrak{m}^+$, $AB \neq 0$, ce qui contredit la définition de $\mathscr{M}_\infty^\varphi$.

Soit $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}_1^\varphi \rangle}$, $A \neq 0$. On a: $A \in \overline{\mathfrak{m}}^+$, donc il existe un $A' \leqq A$, $A' \neq 0$, avec $A' \in \mathfrak{m}^+$, donc tel que $\varphi(A')$ soit borné.

Par construction de $\mathscr{M}_0^\varphi$, on a $\varphi(E) \neq 0$ pour tout projecteur spectral non nul E de A, donc $\varphi(A) \neq 0$. On a ainsi prouvé la propriété 3.

Soient enfin $\mathscr{M}_0, \mathscr{M}_\infty, \mathscr{M}_1$ trois variétés ayant les propriétés 1, 2, 3 du lemme. On a immédiatement: 1. $\mathscr{M}_0 \subset \mathscr{M}_0^\varphi$. 2. $\mathscr{M}_\infty \cap \mathscr{M}(\mathfrak{m}) = 0$, donc $\mathscr{M}_\infty \subset \mathscr{M}_\infty^\varphi$. 3. $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_0^\varphi = 0$ et $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_\infty^\varphi = 0$, donc $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_1^\varphi$. On en déduit $\mathscr{M}_0 = \mathscr{M}_0^\varphi$, $\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_1^\varphi$, $\mathscr{M}_\infty = \mathscr{M}_\infty^\varphi$.

Définition 4.3. — *Soit φ une pseudo-application ♮ normale. On dira que φ est fidèle si $\mathscr{M}_0^\varphi = 0$, c'est-à-dire si $A \in \mathbf{M}^+$, $A \neq 0$ entraînent $\varphi(A) \neq 0$. On dira que φ est essentielle si $\mathscr{M}_\infty^\varphi = 0$, c'est-à-dire si $\mathscr{M}(\mathfrak{m}) = H$, (ou $\overline{\mathfrak{m}} = \mathbf{M}$), c'est-à-dire encore si, pour tout $A \in \mathbf{M}^+$, $A \neq 0$, il existe un $A' \leqq A$, $A' \neq 0$, tel que $\varphi(A')$ soit borné.*

Le lemme 4.5 ramène donc l'étude des pseudo-applications ♮ normales à l'étude des pseudo-applications ♮ normales fidèles et essentielles.

Ceci posé, nous allons établir une correspondance biunivoque entre les pseudo-applications ♮ normales et certaines applications ♮ normales.

Lemme 4.6. — *Soit φ une application ♮ normale, définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$. Il existe une et une seule pseudo-application ♮ normale φ^* coïncidant avec φ sur $\mathfrak{m}^+$, et telle que $\mathscr{M}_\infty^\varphi = H \ominus \mathscr{M}(\mathfrak{m})$. L'application φ^* est fidèle si et seulement si φ est fidèle, essentielle si et seulement si $\overline{\mathfrak{m}} = \mathbf{M}$.*

Démonstration. — Nous allons construire φ^* successivement dans les espaces $H \ominus \mathscr{M}(\mathfrak{m})$ et $\mathscr{M}(\mathfrak{m})$. Si $A \in \mathbf{M}^+_{\langle H \ominus \mathscr{M}(\mathfrak{m})\rangle}$, on pose: $\varphi^*(A) = +\infty.\, P_{\mathscr{M}(A)}$. Ceci définit, on le voit facilement, une pseudo-application ♮ normale dans l'espace $H \ominus \mathscr{M}(\mathfrak{m})$. Si $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}(\mathfrak{m})\rangle} = \overline{\mathfrak{m}}^+$, on désignera par $\varphi^*(A)$ la borne supérieure des $\varphi(B)$, où B parcourt l'ensemble $\mathscr{F}_A$ des opérateurs de $\mathfrak{m}^{r+}$ majorés par A. On va voir qu'on définit ainsi dans l'espace $\mathscr{M}(\mathfrak{m})$ une pseudo-application ♮ normale. D'abord, φ^* vérifie évidemment les propriétés 2 et 3 de la définition 4.1. Pour prouver les propriétés 1 et 4, établissons d'abord le résultat suivant:

Si $A \in \overline{\mathfrak{m}}^+$, et si $\mathscr{F} \subset \mathfrak{m}^{r+}$ est un ensemble filtrant croissant de borne supérieure A, $\varphi^*(A)$ est la borne supérieure de $\varphi(\mathscr{F})$.

Soit $A' \in \mathbf{Z}$ la borne supérieure de $\varphi(\mathscr{F})$. On a évidemment $A' \leqq \varphi^*(A)$. Soit maintenant $C \in \mathscr{F}_A$. On va prouver que $\varphi(C) \leqq A'$, ce qui montrera que $\varphi^*(A) \leqq A'$. Puisque $C \in \mathfrak{m}^r$, il existe une $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathfrak{m}}$ telle que $C \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{M}\rangle}$. L'ensemble $P_{\mathscr{M}} \mathscr{F} P_{\mathscr{M}}$ est filtrant croissant, majoré par $P_{\mathscr{M}} A P_{\mathscr{M}}$ et $P_{\mathscr{M}} A P_{\mathscr{M}}$ est dans son adhérence forte; donc $P_{\mathcal{M}} A P_{\mathcal{M}}$ est la borne supérieure de $P_{\mathcal{M}} \mathcal{F} P_{\mathcal{M}}$; comme $P_{\mathcal{M}} \mathcal{F} P_{\mathcal{M}} \subset \mathfrak{m}$ et que $P_{\mathcal{M}} A P_{\mathcal{M}} \in \mathfrak{m}$, $\varphi(P_{\mathcal{M}} A P_{\mathcal{M}})$ est la borne supérieure de $\varphi(P_{\mathcal{M}} \mathcal{F} P_{\mathcal{M}})$. Maintenant, A' majore $\varphi(\mathcal{F})$, donc $\varphi(P_{\mathcal{M}} \mathcal{F} P_{\mathcal{M}})$ [18]), donc $\varphi(P_{\mathcal{M}} A P_{\mathcal{M}})$, donc $\varphi(P_{\mathcal{M}} C P_{\mathcal{M}}) = \varphi(C)$.

Ceci posé, soient $A \in \bar{\mathfrak{m}}^+$ et $A_1 \in \bar{\mathfrak{m}}^+$. A (resp. A_1) est la borne supérieure de l'ensemble filtrant croissant $\mathcal{F}_A$ (resp. $\mathcal{F}_{A_1}$) d'après le lemme 3.12. Les opérateurs $B + B_1$, où $B \in \mathcal{F}_A$, $B_1 \in \mathcal{F}_{A_1}$, forment un ensemble $\mathcal{G} \subset \mathfrak{m}^{r+}$ filtrant croissant, majoré par $A + A_1$, et auquel $A + A_1$ adhère fortement; $A + A_1$ est donc la borne supérieure de $\mathcal{G}$. Donc $\varphi^*(A + A_1)$ est la borne supérieure des $\varphi(B + B_1) = \varphi(B) + \varphi(B_1)$. Or les $\varphi(B)$ (resp. $\varphi(B_1)$) admettent $\varphi^*(A)$ (resp. $\varphi^*(A_1)$) pour borne supérieure. Donc [19]) la borne supérieure des $\varphi(B) + \varphi(B_1)$ est $\varphi^*(A) + \varphi^*(A_1)$. Ainsi, $\varphi^*(A + A_1) = \varphi^*(A) + \varphi^*(A_1)$.

Soient $A \in \mathbf{M}^{\natural +}$ et $B \in \mathbf{M}^+$. Par définition, $\varphi^*(B)$ est la borne supérieure des $\varphi(C)$, où $C \in \mathcal{F}_B$, donc [20]) $A\varphi^*(B)$ est la borne supérieure des $A\varphi(C) = \varphi(AC)$. Enfin, AB majore l'ensemble filtrant croissant des AC et est dans son adhérence forte, donc $\varphi^*(AB)$ est la borne supérieure des $\varphi(AC)$. Ainsi, $\varphi^*(AB) = A\varphi^*(B)$.

Prouvons que φ^* est normale dans l'espace $\mathcal{M}(\mathfrak{m})$. Soit $\mathcal{F} \subset \bar{\mathfrak{m}}^+$ un ensemble filtrant croissant de borne supérieure $A \in \mathbf{M}^+$. L'ensemble filtrant croissant $\varphi^*(\mathcal{F})$ a une borne supérieure $\hat{A} \leqq \varphi^*(A)$. Maintenant, les opérateurs $B \in \mathfrak{m}^{r+}$ tels que $B \leqq C$ pour un C (variable) de $\mathcal{F}$ forment un ensemble filtrant croissant $\mathcal{G}$ majoré par A, et tout majorant de $\mathcal{G}$ majore les C donc A : A est la borne supérieure de $\mathcal{G}$, donc $\varphi^*(A)$ est la borne supérieure de $\varphi(\mathcal{G})$. Donc tout majorant de $\varphi^*(\mathcal{F})$, étant majorant de $\varphi(\mathcal{G})$, majore $\varphi^*(A)$, et par suite $\hat{A} \geqq \varphi^*(A)$.

En combinant les applications φ^* construites dans les espaces $\mathcal{M}(\mathfrak{m})$ et $H \ominus \mathcal{M}(\mathfrak{m})$, on obtient une pseudo-application $\natural$ normale φ^* dans H, qui coïncide avec φ sur $\mathfrak{m}^{r+}$, donc sur $\mathfrak{m}^+$ puisque φ et φ^* sont normales. Comme $\varphi^*(A)$ est borné pour $A \in \mathfrak{m}^+$,

---

[18]) Car, si $B \in \mathcal{F}$, on a $\varphi(P_{\mathcal{M}} B(1 - P_{\mathcal{M}})) = \varphi((1 - P_{\mathcal{M}})P_{\mathcal{M}} B) = \varphi(0) = 0$. De même, $\varphi((1 - P_{\mathcal{M}})BP_{\mathcal{M}}) = 0$. Donc

$$\varphi(B) = \varphi(P_{\mathcal{M}} BP_{\mathcal{M}}) + \varphi((1 - P_{\mathcal{M}})B(1 - P_{\mathcal{M}})) \geqq \varphi(P_{\mathcal{M}} BP_{\mathcal{M}}).$$

[19]) On applique ici la propriété suivante: soient $(f_i)_{i \in I}$, $(g_j)_{j \in J}$ deux familles filtrantes croissantes dans $\mathbf{Z}$, f et g leurs bornes supérieures; la famille $(f_i + g_j)_{i \in I, j \in J}$ est filtrante croissante, soit h sa borne supérieure. On a $h = f + g$. Car soient f', g', h' les enveloppes supérieures des familles $(f_i)_{i \in I}$, $(g_j)_{j \in J}$, $(f_i + g_j)_{i \in I, j \in J}$. On a évidemment $h' = f' + g'$. D'autre part (cf. [7]), f', g', h' coïncident avec f, g, h sauf sur des ensembles rares. Comme f, g, h sont continues, on a $h = f + g$.

on voit aussitôt que $\mathscr{M}_\infty^{\varphi^*} = H \ominus \mathscr{M}(\mathfrak{m})$. L'unicité de φ^* est immédiate puisque φ^* doit être normale et coïncider avec φ dans $\mathfrak{m}^+$.

Si φ n'est pas fidèle, φ^*, qui coïncide avec φ dans $\mathfrak{m}^+$, est évidemment non fidèle. Maintenant, supposons φ fidèle. Soit $A \in \mathbf{M}^+$. Si $A \notin \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}(\mathfrak{m})\rangle}$, on a évidemment $\varphi^*(A) \neq 0$. Si $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}(\mathfrak{m})\rangle}$, A est fortement adhérent à $\mathscr{F}_A$, donc, si $A \neq 0$, il existe un $B \in \mathscr{F}_A$ avec $B \neq 0$. Alors $\varphi(B) \neq 0$, donc $\varphi^*(A) \neq 0$: φ^* est fidèle.

Lemme 4.7. — *Soient φ une pseudo-application $\natural$ normale, $\mathfrak{m}$ l'idéal défini au lemme 4.4. Il existe une et une seule application $\natural$ normale φ_* définie sur $\mathfrak{m}$ et coïncidant avec φ sur $\mathfrak{m}^+$. On a: $(\varphi_*)^* = \varphi$. L'application φ_* possède de plus la propriété suivante:*

Soient $A \in \overline{\mathfrak{m}}^+$, et $\mathscr{F} \subset \mathfrak{m}^+$ un ensemble filtrant croissant de borne supérieure A. Si $\varphi_*(\mathscr{F})$ est majoré par un opérateur borné, on a: $A \in \mathfrak{m}^+$.

Démonstration. — L'idéal $\mathfrak{m}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathfrak{m}^+$. Compte tenu des propriétés de φ, il est immédiat que la restriction de φ à $\mathfrak{m}^+$ se prolonge d'une manière unique en une application linéaire et positive φ_* de $\mathfrak{m}$ dans $\mathbf{M}^\natural$. L'application φ_* est normale, et on a $\varphi_*(AB) = A\varphi_*(B)$ pour $A \in \mathbf{M}^{\natural+}$, $B \in \mathfrak{m}^+$ puisque φ_* coïncide avec φ sur $\mathfrak{m}^+$. Si $U \in \mathbf{M}_U$ et $A \in \mathfrak{m}$, on a $\varphi_*(UAU^{-1}) = \varphi_*(A)$, d'après les propriétés de φ si $A \in \mathfrak{m}^+$, et dans le cas général par linéarité. Donc $\varphi_*(AU) = \varphi_*(UAUU^{-1}) = \varphi_*(UA)$. Donc $\varphi_*(AB) = \varphi_*(BA)$ pour B combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{M}_U$, c'est-à-dire pour tout $B \in \mathbf{M}$.

Comme $\mathscr{M}_\infty^{\varphi} = H \ominus \mathscr{M}(\mathfrak{m})$, la propriété d'unicité du lemme 4.6 entraîne que $\varphi = (\varphi_*)^*$. Enfin, la dernière propriété indiquée de φ_* résulte de la définition de $\mathfrak{m}^+$ et de la normalité de φ.

La propriété de φ_* indiquée au lemme 4.7 n'appartient pas à toutes les applications $\natural$ normales. Le lemme suivant va éclaircir le sens de cette propriété.

Lemme 4.8. — *Soit φ une application $\natural$ normale, définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$. Les propriétés suivantes de φ sont équivalentes:*

1. *Aucune application $\natural$ normale, définie sur un idéal $\mathfrak{m}' \subset \overline{\mathfrak{m}}$, ne prolonge effectivement φ.*

---

[20]) On applique la propriété suivante: soient $(f_i)_{i \in I}$ une famille filtrante croissante dans $\mathbf{Z}$, f sa borne supérieure, et soit $g \in \mathbf{Z}$. La famille $(f_i g)_{i \in I}$ est filtrante croissante, soit h sa borne supérieure. On a $h = fg$. Car soient f', h' les enveloppes supérieures des familles $(f_i)_{i \in I}$ et $(f_i g)_{i \in I}$. En appliquant toujours la convention $0 \cdot +\infty = 0$, on a $h'(x) = f'(x)g(x)$. pour tout $x \in \Omega$. On a donc, sauf sur des ensembles rares, $h(x) = h'(x) = f'(x)g(x) = f(x)g(x) = fg(x)$, d'où $h = fg$.

2. *Si $A \in \overline{\mathfrak{m}}^+$, et si $\mathscr{F} \subset \mathfrak{m}^+$ est un ensemble filtrant croissant de borne supérieure A tel que $\varphi(\mathscr{F})$ soit majoré par un opérateur borné, on a $A \in \mathfrak{m}$.*

3. $\varphi = (\varphi^*)_*$.

Démonstration. — 2 → 1. Supposons une application $\natural$, φ', définie sur l'idéal $\mathfrak{m}' \subset \overline{\mathfrak{m}}$, prolongeant effectivement φ. Soit $A \in \mathfrak{m}'^+$ avec $A \notin \mathfrak{m}^+$. Il existe dans $\mathfrak{m}^+$ un ensemble filtrant croissant $\mathscr{F}$ dont A est la borne supérieure. Pour $B \in \mathscr{F}$, on a: $\varphi(B) = \varphi'(B) \leqq \varphi'(A)$, donc $\varphi(\mathscr{F})$ est majoré par un opérateur borné. Mais ceci, avec $A \notin \mathfrak{m}^+$, est impossible si la propriété 2 est vérifiée.

1 → 3. L'application φ^* coïncide avec φ sur $\mathfrak{m}^+$, donc $(\varphi^*)_*$ prolonge φ. De plus, $\mathscr{M}^{\varphi^*}_{\infty} = H \ominus \mathscr{M}(\mathfrak{m})$, donc, si $\mathfrak{m}'$ est l'idéal de définition de $(\varphi^*)_*$, on a $\mathfrak{m}' \subset \overline{\mathfrak{m}}$. Alors, si la propriété 1 est vérifiée, on a $\varphi = (\varphi^*)_*$.

3 → 2. Ceci résulte aussitôt du lemme 4.7.

Définition 4.4. — *Si une application $\natural$ normale possède les propriétés du lemme 4.8, elle sera dite maximale.*

Les résultats et raisonnements précédents entraînent alors aussitôt la

Proposition 5. — *a. Il existe une correspondance biunivoque entre les pseudo-applications $\natural$ normales φ et les applications $\natural$ normales maximales φ'. Cette correspondance est définie par les formules $\varphi' = \varphi_*$, $\varphi = \varphi'^*$.*

b. Soit ψ une application $\natural$ normale définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$. Les applications $\natural$ normales, définies sur un idéal $\mathfrak{m}' \subset \overline{\mathfrak{m}}$, qui prolongent ψ, sont toutes contenues dans l'une d'entre elles, qui est la seule maximale. Celle-ci n'est autre que $(\psi^*)_*$.

Ainsi, l'étude des applications $\natural$ normales est ramenée à celle des applications $\natural$ normales maximales, ou, ce qui revient exactement au même, à celle des pseudo-applications $\natural$ normales.

3. On va maintenant régler les questions d'existence concernant les applications $\natural$ normales. Le vrai problème qui se pose est bien entendu celui de savoir s'il existe des pseudo-applications $\natural$ normales *fidèles et essentielles.*

Lemme 4.9. — *Soient $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}'$ des variétés finies de $\widetilde{\mathbf{M}}$ avec $\mathscr{M} \sim \mathscr{M}'$. Soit A un opérateur appartenant à $\mathbf{M}_{\langle\mathscr{M}\rangle}$ et à $\mathbf{M}_{\langle\mathscr{M}'\rangle}$. Soit $\varphi(A) \in \mathbf{M}^{\natural}_{(\mathscr{M})}$ (resp. $\varphi'(A) \in \mathbf{M}^{\natural}_{(\mathscr{M}')}$) l'opérateur obtenu en appliquant à $A_{(\mathscr{M})}$ (resp. $A_{(\mathscr{M}')}$) l'application $\natural$ canonique de l'anneau de classe finie $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})}$ (resp $\mathbf{M}_{(\mathscr{M}')}$). Soient $\psi(A) = \theta_{\mathscr{M}}(\varphi(A))$, $\psi'(A) = \theta_{\mathscr{M}'}(\varphi'(A))$. On a: $\psi(A) = \psi'(A)$.*

Démonstration. — Soit U une application isométrique de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}'$, permutable avec les opérateurs de $\mathbf{M}'$. U applique isométriquement $\mathcal{M} \ominus (\mathcal{M} \cap \mathcal{M}')$ sur $\mathcal{M}' \ominus (U(\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'))$. $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ et $U(\mathcal{M} \cap \mathcal{M}')$ sont deux variétés équivalentes de l'anneau de classe finie $\mathbf{M}_{(\mathcal{M}')}$, donc ([2], lemme 4.12), $\mathcal{M}' \ominus (\mathcal{M} \cap \mathcal{M}')$ et $\mathcal{M}' \ominus U(\mathcal{M} \cap \mathcal{M}')$ sont équivalentes. D'où une application isométrique V, permutable avec $\mathbf{M}'$, de $\mathcal{M} \ominus (\mathcal{M} \cap \mathcal{M}')$ sur $\mathcal{M}' \ominus (\mathcal{M} \cap \mathcal{M}')$. V et l'application identique de $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ sur elle-même définissement finalement, par linéarité, une application isométrique W permutable avec $\mathbf{M}'$ de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}'$ qui se réduit à l'identité sur $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$. W définit, de manière évidente, un isomorphisme $\hat{W}$ de $\mathbf{M}_{(\mathcal{M})}$ sur $\mathbf{M}_{(\mathcal{M}')}$.

On a $A(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ et $A(\mathcal{M}') \subset \mathcal{M}'$, donc $A(\mathcal{M} \cap \mathcal{M}') \subset \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$; A induit 0 dans $H \ominus \mathcal{M}$ et $H \ominus \mathcal{M}'$, donc dans $(H \ominus \mathcal{M}) \oplus (H \ominus \mathcal{M}') = H \ominus (\mathcal{M} \cap \mathcal{M}')$; bref, $A \in \mathbf{M}_{\langle \mathcal{M} \cap \mathcal{M}' \rangle}$. $A_{(\mathcal{M})}$ (resp. $A_{(\mathcal{M}')}$) est réduit par $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ et induit 0 dans $\mathcal{M} \ominus (\mathcal{M} \cap \mathcal{M}')$ (resp. $\mathcal{M}' \ominus (\mathcal{M} \cap \mathcal{M}')$). Ceci montre aussitôt que $\hat{W}(A_{(\mathcal{M})}) = A_{(\mathcal{M}')}$.

Maintenant, l'isomorphisme $\hat{W}$ est compatible avec les applications $\natural$ canoniques de $\mathbf{M}_{(\mathcal{M})}$ et $\mathbf{M}_{(\mathcal{M}')}$ puisque l'application $\natural$ canonique est caractérisée par des propriétés purement algébriques. Donc, avec des notations évidentes, $(W(A_{(\mathcal{M})}))^\natural = \hat{W}((A_{(\mathcal{M})})^\natural)$, et par suite $(A_{(\mathcal{M}')})^\natural = \hat{W}((A_{(\mathcal{M})})^\natural)$, $\varphi'(A) = \hat{W}(\varphi(A))$.

Enfin, on a: $\varphi(A) = (\psi(A))_{(\mathcal{M})}$, $\varphi'(A) = (\psi'(A))_{(\mathcal{M}')}$. Soit $\varphi_1(A) = (\psi(A))_{(\mathcal{M}')}$. Comme $\psi(A) \in \mathbf{M}^\natural$ est permutable à W, on a $\varphi_1(A) = \hat{W}(\varphi(A)) = \varphi'(A)$. Donc $\psi(A) = \theta_{\mathcal{M}'}(\varphi_1(A)) = \theta_{\mathcal{M}'}(\varphi'(A)) = \psi'(A)$.

Lemme 4.10. — *Soient n et p deux entiers > 0. Soient $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_{np}$ des variétés finies de $\widetilde{\mathbf{M}}$, équivalentes, deux à deux orthogonales. Posons $\mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$, $\mathcal{M}' = \bigoplus_{i=1}^{np} \mathcal{M}_i$.*

Soit $A \in \mathbf{M}_{\langle \mathcal{M} \rangle}$. On a: $A \in \mathbf{M}_{\langle \mathcal{M}' \rangle}$. Soit $\varphi(A) \in \mathbf{M}^\natural_{(\mathcal{M})}$ (resp. $\varphi'(A) \in \mathbf{M}^\natural_{(\mathcal{M}')}$) l'opérateur obtenu en appliquant à $A_{(\mathcal{M})}$ (resp. $A_{(\mathcal{M}')}$) l'application $\natural$ canonique de l'anneau de classe finie $\mathbf{M}_{(\mathcal{M})}$ (resp. $\mathbf{M}_{(\mathcal{M}')}$). Soient $\psi(A) = \theta_{\mathcal{M}}(\varphi(A))$, $\psi'(A) = \theta_{\mathcal{M}'}(\varphi'(A))$. On a: $\psi(A) = p\psi'(A)$.

Démonstration. — $\varphi'(A)$, qui appartient à $\mathbf{M}^\natural_{(\mathcal{M}')}$, est réduit par $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}_{(\mathcal{M}')}$, et induit dans $\mathcal{M}$ un opérateur que nous désignerons par $\varphi_1(A)$. Comme $\varphi'(A) = (\psi'(A))_{(\mathcal{M}')}$, on a $\varphi_1(A) = (\psi'(A))_{(\mathcal{M})}$ d'où, en observant que $\mathcal{M}_1^\natural = \mathcal{M}^\natural = \mathcal{M}'^\natural$ (d'après [2], lemme 3.1), $\psi'(A) = \theta_{\mathcal{M}}(\varphi_1(A))$. Il suffit donc de prouver que $\varphi(A) = p\varphi_1(A)$.

Soit $B \in \mathbf{M}_{(\mathscr{M})}$. Définissons $\omega(B) \in \mathbf{M}_{(\mathscr{M}')}$ par: $\omega(B)x = 0$ pour $x \in \mathscr{M}' \ominus \mathscr{M}$, $\omega(B)x = Bx$ pour $x \in \mathscr{M}$, c'est-à-dire par $\omega(B) = (BP_{\mathscr{M}})_{(\mathscr{M}')}$. Soit $\omega'(B)$ le résultat de l'application $^\natural$ dans $\mathbf{M}_{(\mathscr{M}')}$ appliquée à $\omega(B)$; $\omega'(B) \in \mathbf{M}^\natural_{(\mathscr{M}')}$ est réduit par $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}_{(\mathscr{M}')}$. Soit enfin $\omega''(B) = (\omega'(B))_{(\mathscr{M})}$. L'application ω'' est une application de $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})}$ dans $\mathbf{M}^\natural_{(\mathscr{M})}$ (car $(\mathbf{M}^\natural_{(\mathscr{M}')})_{(\mathscr{M})} = \mathbf{M}^\natural_{(\mathscr{M})}$ d'après le lemme 2.4 où on remplace $\mathbf{M}$ par $\mathbf{M}_{(\mathscr{M}')}$), évidemment linéaire; $\omega''(BB_1) = \omega''(B_1B)$; $\omega''(B) \in \mathbf{M}^{\natural+}_{(\mathscr{M})}$ si $B \in \mathbf{M}^+_{(\mathscr{M})}$; enfin, si $B \in \mathbf{M}^\natural_{(\mathscr{M})}$, on a $p\omega''(B) = B$. [En effet, posons $\mathscr{M}^j = \bigoplus_{i=(j-1)n+1}^{jn} \mathscr{M}_i$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$. On a $\mathscr{M}^1 = \mathscr{M}$; les $\mathscr{M}^j$ sont deux à deux orthogonales, équivalentes, et sous-tendent $\mathscr{M}'$. Soient U_{ij} des opérateurs partiellement isométriques de $\mathbf{M}_{(\mathscr{M}')}$ admettant $\mathscr{M}^i$ pour variété initiale, $\mathscr{M}^j$ pour variété finale, avec $U_{ij} = U^*_{ji}$. D'après le lemme 2.4.c où l'on remplace $\mathbf{M}$ par $\mathbf{M}_{(\mathscr{M}')}$, il existe un $C \in \mathbf{M}^\natural_{(\mathscr{M}')}$ tel que $C_{(\mathscr{M})} = B$. Soit $P_i = (P_{\mathscr{M}^i})_{(\mathscr{M}')}$. Comme $C \in \mathbf{M}^\natural_{(\mathscr{M}')}$, on a $U_{ji}(CP_j)U_{ij} = CU_{ji}P_jU_{ij} = CP_i$. Donc $(CP_i)^\natural = (CP_jU_{ij}U_{ji})^\natural = (CP_j)^\natural$. Comme $C = C(P_1 + P_2 + \ldots + P_p)$, on a $C = C^\natural = p(CP_1)^\natural$. Or $CP_1 = \omega(B)$, donc $C = p\omega'(B)$, donc enfin $B = C_{(\mathscr{M})} = p\omega''(B)$]. Il résulte de ces propriétés que $p\omega''$ n'est autre que l'application $^\natural$ de $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})}$. ([2], th. 11).

Revenant alors à A, ce résultat et les définitions montrent que $\varphi(A) = A^\natural_{(\mathscr{M})} = p\omega''(A_{(\mathscr{M})})$; et $\omega(A_{(\mathscr{M})}) = A_{(\mathscr{M}')}$, $\omega'(A_{(\mathscr{M})}) = \varphi'(A)$, $\omega''(A_{(\mathscr{M})}) = \varphi_1(A)$.

Lemme 4.11. — *Supposons $H^f = 0$ (cf. [6], théorème 1). Soit $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ une variété finie. Soient $\mathscr{N}$, $\mathscr{N}'$ des variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$ possédant les propriétés suivantes:*

Il existe des variétés $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \ldots, \mathscr{M}_n$ (resp. $\mathscr{M}'_1, \mathscr{M}'_2, \ldots, \mathscr{M}'_{n'}$) deux à deux orthogonales, équivalentes à $\mathscr{M}$, sous-tendant $\mathscr{N}$ (resp. $\mathscr{N}'$).

Soit A un opérateur appartenant à $\mathbf{M}_{\langle\mathscr{N}\rangle}$ et à $\mathbf{M}_{\langle\mathscr{N}'\rangle}$. Soit $\varphi(A) \in \mathbf{M}^\natural_{(\mathscr{N})}$ (resp. $\varphi'(A) \in \mathbf{M}^\natural_{(\mathscr{N}')}$) l'opérateur obtenu en appliquant à $A_{(\mathscr{N})}$ (resp. $A_{(\mathscr{N}')}$) l'application $^\natural$ de l'anneau de classe finie $\mathbf{M}_{(\mathscr{N})}$ (resp. $\mathbf{M}_{(\mathscr{N}')}$). Soient $\psi(A) = \theta_{\mathscr{N}}(\varphi(A))$, $\psi'(A) = \theta_{\mathscr{N}'}(\varphi'(A))$. On a: $n\psi(A) = n'\psi'(A)$.

Démonstration. — D'après l'hypothèse $H^f = 0$ et les lemmes 1.5, 1.8 de [6], il existe des variétés $\mathscr{M}_{n+1}, \mathscr{M}_{n+2}, \ldots, \mathscr{M}_{nn'}$ (resp. $\mathscr{M}'_{n'+1}, \mathscr{M}'_{n'+2}, \ldots, \mathscr{M}'_{nn'}$) deux à deux orthogonales et orthogonales à $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \ldots, \mathscr{M}_n$ (resp. $\mathscr{M}'_1, \mathscr{M}'_2, \ldots, \mathscr{M}'_{n'}$), équivalentes à $\mathscr{M}$. Soient $\overline{\mathscr{N}} = \bigoplus_{i=1}^{nn'} \mathscr{M}_i$, $\overline{\mathscr{N}}' = \bigoplus_{i=1}^{nn'} \mathscr{M}'_i$. On a $\overline{\mathscr{N}} \sim \overline{\mathscr{N}}'$. Définissons pour $\overline{\mathscr{N}}$ et $\overline{\mathscr{N}}'$ les opérateurs $\overline{\varphi}(A)$, $\overline{\varphi}'(A)$, $\overline{\psi}(A)$, $\overline{\psi}'(A)$ comme on a défini $\varphi(A), \ldots$ (observons que $A \in \mathbf{M}_{\langle \overline{\mathscr{N}} \rangle}$, $A \in \mathbf{M}_{\langle \overline{\mathscr{N}}' \rangle}$). On a, par les lemmes 4.9 et 4.10

$$n\psi(A) = nn'\overline{\psi}(A) = nn'\overline{\psi}'(A) = n'\psi'(A).$$

On observera de plus que $\psi(A) \in \mathbf{M}^{\natural}_{\langle \mathscr{N}^{\natural} \rangle} = \mathbf{M}^{\natural}_{\langle \mathscr{M}^{\natural} \rangle}$ ($\mathscr{M}^{\natural} = \mathscr{N}^{\natural}$ résulte de [2], lemme 3.1).

Définition 4.5. — *Supposons $H^f = 0$. Soit $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ une variété finie. Soit $A \in \mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$. D'après le lemme 3.9 et le lemme 1.9 de [6], on a $A \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{N} \rangle}$ avec une variété $\mathscr{N}$ de la forme $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathscr{M}_i$ où les $\mathscr{M}_i$ sont des variétés deux à deux orthogonales équivalentes à $\mathscr{M}$. L'opérateur $n\psi(A)$ du lemme 4.11 ne dépend que de A. Nous le désignerons par $A^{\natural \mathscr{M}}$.*

Lemme 4.12. — *Supposons $H^f = 0$. Soit $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ une variété finie. L'application ${}^{\natural \mathscr{M}}$ est une application $\natural$ fidèle et normale définie sur $\mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$. On a: $P_{\mathscr{M}}^{\natural \mathscr{M}} = P_{\mathscr{M}^{\natural}}$.*

Démonstration. — Soient $A \in \mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$, $A' \in \mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$, $U \in \mathbf{M}_U$, λ un nombre complexe. On a $A \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{N} \rangle}$, $A' \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{N}' \rangle}$, avec $\mathscr{N} \in \widetilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}}$, $\mathscr{N}' \in \widetilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}}$. Alors $\lambda A \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{N} \rangle}$, $A + A' \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{N} \oplus \mathscr{N}' \rangle}$, $UA \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{N} \oplus U(\mathscr{N}) \rangle}$, $AU \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{N} \oplus U^{-1}(\mathscr{N}) \rangle}$. Donc A, A', λA, $A + A'$, UA, AU appartiennent à un même $\mathbf{M}_{\langle \mathscr{N}'' \rangle}$, avec une $\mathscr{N}''$ qu'on peut supposer de la forme $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathscr{M}_i$, les $\mathscr{M}_i$ étant deux à deux orthogonales et équivalentes à $\mathscr{M}$ (d'après le lemme 3.9 et le lemme 1.9 de [6]). Alors, utilisant les propriétés de l'application $\natural$ canonique de $\mathbf{M}_{(\mathscr{N}'')}$, l'isomorphisme $\theta_{\mathscr{N}''}$, et le fait que tout opérateur de $\mathbf{M}$ est combinaison linéaire d'opérateurs de $\mathbf{M}_U$, on voit immédiatement que ${}^{\natural \mathscr{M}}$ est une application linéaire, centrale, positive et fidèle. Si maintenant $B \in \mathbf{M}^{\natural}$, on a $AB \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{N}'' \rangle}$, d'où, avec les notations du lemme 4.11, $\varphi(AB) = \varphi(A)B_{(\mathscr{N})}$, $\psi(AB) = \psi(A)B$: l'application ${}^{\natural \mathscr{M}}$ est une application $\natural$. Sa normalité résulte de la proposition 4. L'égalité $(P_{\mathscr{M}})^{\natural \mathscr{M}} = P_{\mathscr{M}^{\natural}}$ résulte aussitôt des définitions.

Théorème 1 (*théorème d'existence*). — a. *Pour toute pseudo-application $\natural$ normale φ, la variété $\mathscr{M}_1^{\varphi}$ (cf. lemme 4.5) est orthogonale à H^{pi} (cf. [6], théorème 1).*

b. *Il existe des pseudo-applications $\natural$ normales φ telles que $\mathscr{M}_1^{\varphi} = H \ominus H^{pi}$.*

c. *Pour qu'il existe des pseudo-applications $\natural$ normales fidèles et essentielles, il faut et il suffit que $H^{pi} = 0$.*

Démonstration. — c résulte aussitôt de a et b. Prouvons a. Soient φ une pseudo-application $\natural$ normale, et $\mathfrak{m}$ l'idéal de définition de φ_*. Il s'agit de prouver que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1^\varphi \cap H^{\nu i} = 0$. Or $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1^\varphi \subset \mathcal{M}(\mathfrak{m})$, donc il existe (lemme 3.11) une famille $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ de variétés deux à deux orthogonales de $\widehat{\mathfrak{m}}$ sous-tendant $\mathcal{M}$. D'après le lemme 4.1, et puisque $\mathcal{M}_i \subset H^{\nu i}$, on a $\varphi_*(P_{\mathcal{M}_i}) = 0$ pour tout $i \in I$, donc $\varphi(P_{\mathcal{M}}) = 0$. Mais, puisque $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1^\varphi$, ceci entraîne $\mathcal{M} = 0$.

Prouvons b. Il suffit évidemment de construire dans $\mathbf{M}^+_{(H^f)}$ et dans $\mathbf{M}^+_{(H^i)}$ des pseudo-applications $\natural$ normales fidèles et essentielles. Or, dans $\mathbf{M}_{(H^f)}$ existe l'application $\natural$ canonique des anneaux de classe finie. Soit maintenant $\mathcal{M}$ une variété finie telle que $\mathcal{M}^\natural = H^i$ ([6], lemme 2.4). On a $\mathcal{M}(\mathfrak{m}_{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}^\natural$ (lemme 3.11.b), donc $\overline{\mathfrak{m}_{\mathcal{M}}} = \mathbf{M}_{\langle H^i \rangle}$. Le lemme 4.12 est applicable à $\mathbf{M}_{(H^i)}$ et à $\mathcal{M}$. Soit φ l'application ${}^\natural\mathcal{M}$. D'après le lemme 4.12, φ est une application $\natural$ normale fidèle définie sur un idéal fortement partout dense dans $\mathbf{M}_{(H^i)}$. Donc φ^* est une pseudo-application $\natural$ normale fidèle essentielle définie sur $\mathbf{M}^+_{(H^i)}$.

4. Nous allons maintenant étudier les relations entre les diverses applications $\natural$ normales.

Lemme 4.13. — a. *Soit $\mathcal{M} \in \widehat{\mathbf{M}}$ une variété. Si deux applications linéaires et centrales, φ_1, φ_2, de $\mathfrak{m}_{\mathcal{M}}$ dans $\mathbf{M}^\natural$ sont telles que $\varphi_1(A) \geqq \varphi_2(A)$ pour $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathcal{M} \rangle}$, on a $\varphi_1(A) \geqq \varphi_2(A)$ pour $A \in \mathfrak{m}^+_{\mathcal{M}}$.*

b. *Si de plus $\varphi_1(A) \neq \varphi_2(A)$ pour $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathcal{M} \rangle}$, $A \neq 0$, on a $\varphi_1(A) \neq \varphi_2(A)$ pour $A \in \mathfrak{m}^+_{\mathcal{M}}$, $A \neq 0$.*

Démonstration. — Soit $A \in \mathfrak{m}^+_{\mathcal{M}}$. On a (lemme 3.9) $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathcal{N} \rangle}$ avec $\mathcal{N} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{N}_i$ où les $\mathcal{N}_i$ sont des variétés deux à deux orthogonales telles que $\mathcal{N}_i \prec \mathcal{M}$. Alors:

$$A = P_{\mathcal{N}} A P_{\mathcal{N}} = \left(\sum_{i=1}^n P_{\mathcal{N}_i}\right) A \left(\sum_{i=1}^n P_{\mathcal{N}_i}\right) = \sum_{i,j=1}^n P_{\mathcal{N}_j} A P_{\mathcal{N}_i},$$

$$\varphi_r(A) = \sum_{i,j=1}^n \varphi_r(P_{\mathcal{N}_j} A P_{\mathcal{N}_i}) = \sum_{i=1}^n \varphi_r(P_{\mathcal{N}_i} A P_{\mathcal{N}_i}) + \sum_{i \neq j}^n \varphi_r(A P_{\mathcal{N}_i} P_{\mathcal{N}_j})$$
$$= \sum_{i=1}^n \varphi_r(P_{\mathcal{N}_i} A P_{\mathcal{N}_i}) \quad (r = 1, 2).$$

Pour prouver a, il suffit donc de prouver que $\varphi_1(P_{\mathcal{N}_1} A P_{\mathcal{N}_1}) \geqq \varphi_2(P_{\mathcal{N}_1} A P_{\mathcal{N}_1})$ par exemple, autrement dit que $\varphi_1(A) \geqq \varphi_2(A)$ pour $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathcal{N}_1 \rangle}$. Or, soit $U \in \mathbf{M}_{PI}$ un opérateur admettant $\mathcal{N}_1$ comme variété initiale, et une variété finale contenue dans $\mathcal{M}$.

On a: $U \in \mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$, et $\varphi_r(A) = \varphi_r(AU^*U) = \varphi_r(UAU^*)$ $(r = 1, 2)$. Or $UAU^* \in \mathbf{M}^+_{\langle\mathscr{M}\rangle}$. Donc $\varphi_1(UAU^*) \geqq \varphi_2(UAU^*)$, ce qui achève la démonstration.

Pour prouver b, il suffit, en appliquant le même raisonnement, de prouver que, si $A \in \mathbf{M}^+_{\langle\mathscr{N}\rangle}$ et $A \neq 0$, on a $P_{\mathscr{N}_i}AP_{\mathscr{N}_i} \neq 0$ pour un i au moins. Or, si $P_{\mathscr{N}_i}AP_{\mathscr{N}_i} = 0$ pour tout i, on a, pour $x \in \mathscr{N}_i$, $(Ax, x) = (AP_{\mathscr{N}_i}x, P_{\mathscr{N}_i}x) = (P_{\mathscr{N}_i}AP_{\mathscr{N}_i}x, x) = 0$, donc $Ax = 0$; donc $Ax = 0$ pour $x \in \mathscr{N}$ et par suite $A = 0$.

Lemme 4.14. — *Soient $(\mathscr{M}_i)_{i \in I}$ une famille de variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$, et $\mathfrak{m}$ l'idéal engendré par les $P_{\mathscr{M}_i}$. Soient φ_1, φ_2 deux applications $\natural$ définies sur $\mathfrak{m}$. Si $\varphi_1(P_{\mathscr{M}_i}) = \varphi_2(P_{\mathscr{M}_i})$ pour $i \in I$, on a $\varphi_1 = \varphi_2$.*

Démonstration. — $\mathfrak{m}$ est la somme des $\mathfrak{m}_{\mathscr{M}_i}$; par linéarité, il suffit de prouver que $\varphi_1(A) = \varphi_2(A)$ pour $A \in \mathfrak{m}^+_{\mathscr{M}_i}$. Supposons donc que la famille $(\mathscr{M}_i)_{i \in I}$ soit réduite à un élément $\mathscr{M}$. D'après le lemme 4.13, il suffit de prouver que $\varphi_1(A) = \varphi_2(A)$ pour $A \in \mathbf{M}^+_{\langle\mathscr{M}\rangle}$. D'après [6], lemme 1.2, il existe une $\mathscr{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ telle que $\mathscr{N} \cap \mathscr{M}$ soit finie et $(H \ominus \mathscr{N}) \cap \mathscr{M}$ proprement infinie (ou$=0$). Par linéarité, il suffit de prouver que $\varphi_1(A) = \varphi_2(A)$ pour $A \in \mathbf{M}_{\langle\mathscr{N} \cap \mathscr{M}\rangle}$ et pour $A \in \mathbf{M}_{\langle(H \ominus \mathscr{N}) \cap \mathscr{M}\rangle}$. Or, si $A \in \mathbf{M}_{\langle(H \ominus \mathscr{N}) \cap \mathscr{M}\rangle}$, $\varphi_1(A) = \varphi_2(A) = 0$ d'après le lemme 4.1. Supposons donc désormais $\mathscr{M}$ finie. Pour $A \in \mathbf{M}_{\langle\mathscr{M}\rangle}$, posons $\varphi'_i(A_{(\mathscr{M})}) = (\varphi_i(A))_{(\mathscr{M})}$ $(i = 1, 2)$. D'après le lemme 4.2, φ'_1 et φ'_2 sont deux applications $\natural$ définies sur l'anneau de classe finie $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})}$, et l'hypothèse $\varphi_1(P_{\mathscr{M}}) = \varphi_2(P_{\mathscr{M}})$ entraîne $\varphi'_1((1)_{(\mathscr{M})}) = \varphi'_2((1)_{(\mathscr{M})})$. Alors, d'après la proposition 1, $\varphi'_1(A_{(\mathscr{M})}) = \varphi'_2(A_{(\mathscr{M})})$ pour $A \in \mathbf{M}_{\langle\mathscr{M}\rangle}$. Donc $(\varphi_1(A))_{(\mathscr{M})} = (\varphi_2(A))_{(\mathscr{M})}$ pour $A \in \mathbf{M}_{\langle\mathscr{M}\rangle}$. Donc $\theta_{\mathscr{M}}[(\varphi_1(A))_{(\mathscr{M})}] = \theta_{\mathscr{M}}[(\varphi_2(A))_{(\mathscr{M})}]$. Mais $\varphi_i(A) \in (\mathbf{M}^\natural)_{\langle\mathscr{M}^\natural\rangle}$ (lemme 4.3), donc $\theta_{\mathscr{M}}[(\varphi_i(A))_{(\mathscr{M})}] = \varphi_i(A)$ $(i = 1, 2)$. D'où le lemme.

Lemme 4.15. — *Soient φ^1, φ^2 deux pseudo-applications $\natural$ normales. Soit $A \in \mathbf{M}^+$ un opérateur tel que $\mathscr{N}(A) = 0$. Si les fonctions $\varphi^1(A)$ et $\varphi^2(A)$ de $\mathbf{Z}$ sont égales, et finies sur un ensemble ouvert partout dense de Ω, on a $\varphi^1 = \varphi^2$.*

Démonstration. — Soient $\varphi_1 = \varphi^1_*$, $\varphi_2 = \varphi^2_*$, définies sur les idéaux $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$. Soit $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$. Si $\mathscr{M}^{\varphi^1}_\infty \neq 0$, on a $AP_{\mathscr{M}^{\varphi'}_\infty} \neq 0$ puisque $\mathscr{N}(A) = 0$, donc $\varphi^1(A)$ est infinie sur un ensemble ouvert contrairement à l'hypothèse. Donc $\overline{\mathfrak{m}}_1 = \mathbf{M}$, $\overline{\mathfrak{m}}_2 = \mathbf{M}$, donc $\overline{\mathfrak{n}} = \mathbf{M}$ (lemme 3.13). Soit $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathfrak{n}}$. On va prouver que $\varphi_1(P_{\mathscr{M}}) = \varphi_2(P_{\mathscr{M}})$. Le lemme 4.14 prouvera alors que φ_1 et φ_2 coïncident sur $\mathfrak{n}^r$. Comme tout opérateur de $\overline{\mathfrak{n}^{r+}} = \overline{\mathfrak{n}}^+ = \mathbf{M}^+$ est borne supérieure d'un ensemble filtrant croissant contenu dans $\mathfrak{n}^{r+}$, et comme φ^1 et φ^2 sont normales, on aura donc $\varphi^1 = \varphi^2$.

D'après un raisonnement souvent fait, on peut supposer successivement $\mathscr{M}$ finie et $\mathscr{M}$ proprement infinie. Si $\mathscr{M}$ est proprement infinie, on a $\varphi_1(P_{\mathscr{M}}) = 0 = \varphi_2(P_{\mathscr{M}})$ (lemme 4.1). Supposons donc désormais $\mathscr{M}$ finie. Soient $K_1 = \varphi_1(P_{\mathscr{M}}) \in \mathbf{M}^{\natural +}$, $K_2 = \varphi_2(P_{\mathscr{M}}) \in \mathbf{M}^{\natural +}$, et supposons $K_1 \neq K_2$. On va aboutir à une contradiction. Il existe une variété non nulle $\mathscr{N} \in \widehat{\mathbf{M}}^{\natural}$ telle que

$$K_1 P_{\mathscr{N}} \geqq K_2 P_{\mathscr{N}} + \lambda P_{\mathscr{N}} \tag{1}$$

avec $\lambda > 0$ (ou l'inégalité obtenue en échangeant K_1 et K_2). Soit $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \cap \mathscr{N}$. On a:

$$\varphi_i(P_{\mathscr{M}'}) = \varphi_i(P_{\mathscr{M}} P_{\mathscr{N}}) = \varphi_i(P_{\mathscr{M}}) P_{\mathscr{N}} = K_i P_{\mathscr{N}} \quad (i = 1, 2).$$

Pour $B \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{M}' \rangle}$, posons $\varphi_i'(B_{(\mathscr{M}')}) = (\varphi_i(B)_{(\mathscr{M}')}$ $(i = 1, 2)$; φ_1' et φ_2' sont (lemme 4.2) des applications $\natural$ dans l'anneau de classe finie $\mathbf{M}_{(\mathscr{M}')}$ et

$$\varphi_i'((1)_{(\mathscr{M}')}) = (\varphi_i(P_{\mathscr{M}'}))_{(\mathscr{M}')} = (K_i P_{\mathscr{N}})_{(\mathscr{M}')}.$$

Alors, (1) entraîne, en prenant les parties induites dans $\mathscr{M}'$,

$$\varphi_1'((1)_{(\mathscr{M}')}) \geqq \varphi_2'((1)_{(\mathscr{M}')}) + \lambda((1)_{(\mathscr{M}')}).$$

La proposition 1 prouve alors que $\varphi_1'(B_{(\mathscr{M}')})$ majore strictement $\varphi_2'(B_{(\mathscr{M}')})$ pour $B \in \mathbf{M}^{+}_{\langle \mathscr{M}' \rangle}$, $B \neq 0$; donc $(\varphi_1(B))_{(\mathscr{M}')}$ majore strictement $(\varphi_2(B))_{(\mathscr{M}')}$; appliquant $\theta_{\mathscr{M}'}$, et observant (lemme 4.3) que $\varphi_1(B) \in \mathbf{M}^{\natural}_{\langle \mathscr{M}'^{\natural} \rangle}$, $\varphi_2(B) \in \mathbf{M}^{\natural}_{\langle \mathscr{M}'^{\natural} \rangle}$, on voit que $\varphi_1(B)$ majore strictement $\varphi_2(B)$ pour $B \in \mathbf{M}^{+}_{\langle \mathscr{M}' \rangle}$, donc (lemme 4.13) $\varphi_1(B)$ majore strictement $\varphi_2(B)$ pour $B \in \overset{+}{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}'}$, $B \neq 0$. On a $\mathscr{M}'^{\natural} = \mathscr{N}$ [21]), tout opérateur de $\mathbf{M}^{+}_{\langle \mathscr{N} \rangle}$ est borne supérieure d'un ensemble filtrant croissant contenu dans $\overset{+}{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}'}$, donc, si $B \in \mathbf{M}^{+}_{\langle \mathscr{N} \rangle}$, on a $\varphi^1(B) \geqq \varphi^2(B)$.

Ceci posé, on a $AP_{\mathscr{N}} \neq 0$ puisque $\mathscr{N}(A) = 0$, et $AP_{\mathscr{N}} \in \mathbf{M}^{+}_{\langle \mathscr{N} \rangle}$; donc il existe un $B \in \overset{+}{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}'}$ tel que $B \leqq AP_{\mathscr{N}}$, $B \neq 0$. Alors, $\varphi^1(B)$ majore strictement $\varphi^2(B)$, c'est-à-dire que $\varphi^2(B) < \varphi^1(B)$ sur un ensemble ouvert de Ω. D'autre part, $AP_{\mathscr{N}} - B \in \mathbf{M}^{+}_{\langle \mathscr{N} \rangle}$, donc $\varphi^1(AP_{\mathscr{N}} - B) \geqq \varphi^2(AP_{\mathscr{N}} - B)$. Les fonctions $\varphi^1(B)$,

---

[21]) En effet, on a (lemme 4.3) $K_i \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{M}^{\natural} \rangle}$ pour $i = 1, 2$, donc (1) entraîne $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}^{\natural}$. $\mathscr{N}$ et $\mathscr{M}^{\natural}$ $\mathscr{N}$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathscr{M}^{\natural}$, donc $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \cap \mathscr{N}$ et $\mathscr{M}'' = \mathscr{M} \cap (\mathscr{M}^{\natural} \ominus \mathscr{N})$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathscr{M}$. L'inclusion $\mathscr{M}' \subset \mathscr{N}$ entraîne $\mathscr{M}'^{\natural} \subset \mathscr{N}$, l'inclusion $\mathscr{M}'' \subset \mathscr{M}^{\natural} \ominus \mathscr{N}$ entraîne $\mathscr{M}''^{\natural} \subset \mathscr{M}^{\natural} \ominus \mathscr{N}$; enfin $\mathscr{M}'^{\natural} \oplus \mathscr{M}''^{\natural} = (\mathscr{M}' \oplus \mathscr{M}'')^{\natural} = \mathscr{M}^{\natural}$. D'où nécessairement $\mathscr{M}'^{\natural} = \mathscr{N}$, $\mathscr{M}''^{\natural} = \mathscr{M}^{\natural} \ominus \mathscr{N}$.

$\varphi^2(B)$, $\varphi^1(AP_{\mathcal{N}}-B)$, $\varphi^2(AP_{\mathcal{N}}-B)$, toutes majorées par $\varphi^1(A)=\varphi^2(A)$, sont finies sauf sur une ensemble rare. On voit alors que $\varphi^1(AP_{\mathcal{N}})$ majore strictement $\varphi^2(AP_{\mathcal{N}})$ sur une ensemble ouvert de Ω. Ceci fournit la contradiction annoncée, car

$$\varphi^1(AP_{\mathcal{N}})=\varphi^1(A)P_{\mathcal{N}}=\varphi^2(A)P_{\mathcal{N}}=\varphi^2(AP_{\mathcal{N}}).$$

LEMME 4.16. — a. *Soit φ une pseudo-application $\natural$ fidèle. Si* $A \in \mathbf{M}^+$ *est tel que $\mathcal{N}(A)=0$, on a $\varphi(A)>0$ sur un ensemble ouvert partout dense.*

b. *Soient φ_1, φ_2 deux pseudo-applications $\natural$ normales essentielles. Il existe un $A \in \mathbf{M}^+$ tel que $\mathcal{N}(A)=0$, $\varphi_1(A)\leqq 1$, $\varphi_2(A)\leqq 1$.*

Démonstration. — Soit φ une pseudo-application $\natural$, et $A \in \mathbf{M}^+$. Supposons $\varphi(A)=0$ sur un ensemble ouvert de Ω. Il existe alors un projecteur $E \in \mathbf{M}^\natural$, $E \neq 0$, tel que $\varphi(AE)=\varphi(A)E=0$. Si φ est fidèle, ceci entraîne $AE=0$, donc $\mathcal{N}(A)\neq 0$. D'où le a du lemme.

Soient φ_1, φ_2 deux pseudo-applications $\natural$ normales essentielles. Soient $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ les idéaux de définition de φ_{1*}, φ_{2*}, et soit $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}_1\cap\mathfrak{m}_2$. On a $\overline{\mathfrak{m}}_1=\overline{\mathfrak{m}}_2=\mathbf{M}$, donc (lemme 3.13) $\overline{\mathfrak{n}}=\mathbf{M}$. Considérons les familles de variétés $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ non nulles telles que: 1. Les $\mathcal{M}_i^\natural$ sont deux à deux orthogonales. 2. On a: $P_{\mathcal{M}_i}\in\mathfrak{n}$ pour tout i. Grâce au théorème de Zorn, on peut construire une telle famille maximale, que nous notons encore $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$. Comme $\overline{\mathfrak{n}}=\mathbf{M}$, les $\mathcal{M}_i^\natural$ sous-tendent H. Maintenant il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de nombres tels que $0<\lambda_i\leqq 1$, $\varphi_1(\lambda_i P_{\mathcal{M}_i})\leqq P_{\mathcal{M}_i^\natural}$, $\varphi_2(\lambda_i P_{\mathcal{M}_i})\leqq P_{\mathcal{M}_i^\natural}$ pour tout $i\in I$. Soit alors A l'opérateur de $\mathbf{M}^+$ tel que $AP_{\mathcal{M}_i^\natural}=\lambda_i P_{\mathcal{M}_i}$ pour tout $i\in I$. On a, pour $r=1, 2$: $\varphi_r(A)P_{\mathcal{M}_i^\natural}=\varphi_r(AP_{\mathcal{M}_i^\natural})=\varphi_r(\lambda_i P_{\mathcal{M}_i})\leqq P_{\mathcal{M}_i^\natural}$, donc $\varphi_r(A)\leqq 1$. D'autre part, soit $\mathcal{N}$ la variété des zéros de A. Si $\mathcal{N}'$ est une variété de $\mathbf{M}^\natural$ contenue dans $\mathcal{N}$, on a $\mathcal{M}_i\cap\mathcal{N}'\subset\mathcal{M}_i\cap\mathcal{N}=0$ par définition de A, donc $\mathcal{N}'$ est orthogonale à toutes les $\mathcal{M}_i$ et par suite à toutes les $\mathcal{M}_i^\natural$, donc $\mathcal{N}'=0$.

THÉORÈME 2. — *Supposons $H^{pi}=0$. Soit φ_0 une pseudo-application $\natural$ normale fidèle et essentielle. Il existe une correspondance biunivoque entre les pseudo-applications $\natural$ normales φ et les fonctions $K\in\mathbf{Z}$. Cette correspondance est définie par la formule $\varphi(B)=\varphi_0(B)K$ pour $B\in\mathbf{M}^+$. Pour que φ soit fidèle (resp. essentielle) il faut et il suffit que $K(x)>0$ (resp. $K(x)<+\infty$) sur un ensemble ouvert partout dense de Ω.*

Démonstration. — Soit $A\in\mathbf{M}^+$, tel que: 1. $\mathcal{N}(A)=0$. 2. On a $0<\varphi_0(A)<+\infty$ sur un ensemble ouvert partout dense de Ω (lemme 4.16).

Soit $K \in \mathbf{Z}$. Posons, pour $B \in \mathbf{M}^+$, $\varphi(B) = \varphi_0(B)K$. L'application φ est évidemment une pseudo-application $\natural$ normale. La correspondance $K \to \varphi$ est biunivoque, car $\varphi_0(A)K = \varphi_0(A)K'$ entraîne $K = K'$.

Si φ est fidèle, on a $\varphi(A) > 0$ sur un ensemble ouvert partout dense (lemme 4.16), et l'égalité $\varphi(A) = \varphi_0(A)K$ entraîne $K(x) > 0$ sur cet ensemble ouvert. Réciproquement, si $K(x) > 0$ sur un ensemble ouvert partout dense, l'égalité $\varphi(B) = 0$ entraîne $\varphi_0(B) = 0$, donc $B = 0$ puisque φ_0 est fidèle: φ est fidèle.

Si φ est essentielle, on peut choisir A de façon que $\varphi(A) < +\infty$ sauf sur un ensemble rare (lemme 4.16). Alors, $\varphi(A) = \varphi_0(A)K$ entraîne $K(x) < +\infty$ sauf sur un ensemble rare. Réciproquement, si $K(x) < +\infty$ sauf sur un ensemble rare, pour tout $A \in \mathbf{M}^+$, $A \neq 0$, il existe d'abord un $A' \leqq A$ tel que $\varphi_0(A')$ soit borné et non nul; puis il existe un $k \in \mathbf{Z}$, $k \leqq 1$, tel que $kK\varphi_0(A') = \varphi(A'k)$ soit borné et non nul; d'ailleurs, $kA' \leqq A$, et $kA' \neq 0$; φ est donc essentielle.

Reste à prouver que toute pseudo-application $\natural$ normale φ est du type précédemment considéré. Supposons d'abord φ essentielle. Choisissant encore A de façon que $\varphi(A) < +\infty$ sur un ensemble ouvert partout dense, soit $K = \varphi(A) \,.\, (\varphi_0(A))^{-1}$, et définissons une pseudo-application $\natural$ normale φ' par $\varphi'(B) = \varphi_0(B)K$. On a: $\varphi'(A) = \varphi_0(A)\varphi(A)(\varphi_0(A))^{-1} = \varphi(A)$ [22]). Donc (lemme 4.15) $\varphi = \varphi'$. Si enfin φ est quelconque, soit $\mathfrak{m}$ l'idéal de définition de φ_*. L'application φ_1 définie par $\varphi_1(B) = \varphi(B)P_{\mathscr{M}(\mathfrak{m})}$ est une pseudo-application $\natural$ normale essentielle puisque $\varphi_1(B)$ est borné pour $B \in \mathbf{M}^+_{\langle H \ominus \mathscr{M}(\mathfrak{m})\rangle}$ et pour $B \in \mathfrak{m}^+$. Il existe donc $K_1 \in \mathbf{Z}$ tel que $\varphi_1(B) = K_1\varphi_0(B)$. Soit $K = (+\infty).\ P_{H \ominus \mathscr{M}(\mathfrak{m})} + K_1 \in \mathbf{Z}$. On vérifie aussitôt que $\varphi(B) = \varphi_0(B)K$ pour $B \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}(\mathfrak{m})\rangle}$ et pour $B \in \mathbf{M}^+_{\langle H \ominus \mathscr{M}(\mathfrak{m})\rangle}$, donc pour $B \in \mathbf{M}^+$.

Proposition 6. — *Supposons $H^{pi} = 0$. Soit φ une pseudo-application $\natural$ normale fidèle et essentielle, et considérons l'ensemble des $A \in \mathbf{M}^+$ tels que $\varphi(A) < +\infty$ sur un ensemble ouvert partout dense. Cet ensemble $\mathfrak{m}^+$ est l'ensemble des opérateurs self-adjoints $\geqq 0$ d'un idéal $\mathfrak{m}$, qui ne dépend que de* $\mathbf{M}$ *et pas de φ. On a $\overline{\mathfrak{m}} = \mathbf{M}$, et $\mathfrak{m} = \mathbf{M}$ si et seulement si* $\mathbf{M}$ *est de classe finie. L'idéal $\mathfrak{m}$ est la*

22) Car soient f, g deux fonctions de $\mathbf{Z}$, avec $0 < f(x) < +\infty$ sur un ensemble ouvert partout dense. On a, sauf sur un ensemble rare, $fgf^{-1}(x) = f(x)g(x)(f(x))^{-1}$, et ce produit vaut $g(x)$ sauf éventuellement si un des facteurs vaut $+\infty$ et un autre 0, ce qui n'arrive que pour $f(x) = 0$ ou $f(x) = +\infty$, donc sur un ensemble rare.

réunion des idéaux de définition de toutes les applications $\natural$ normales fidèles.

Démonstration. — Si $A \in \mathfrak{m}^+$, $U \in \mathbf{M}_U$, on a $UAU^{-1} \in \mathfrak{m}$. Si maintenant $B \in \mathfrak{m}^+$, et si $C \in \mathbf{M}^+$ est tel que $C \leqq A$, on a $A + B \in \mathfrak{m}^+$ et $C \in \mathfrak{m}^+$. Donc $\mathfrak{m}^+$ est bien l'ensemble des opérateurs self-adjoints $\geqq 0$ d'un idéal $\mathfrak{m}$, qui est tel que $\overline{\mathfrak{m}} = \mathbf{M}$ puisque φ est essentielle. Si $\mathfrak{m} = \mathbf{M}$, on a $\varphi(1) < +\infty$ sur un ensemble ouvert partout dense, et $\varphi(1) > 0$ sur un ensemble ouvert partout dense puisque φ est fidèle (lemme 4,16. a); l'application φ' définie par $\varphi'(A) = \varphi(A)(\varphi(1))^{-1}$ est telle que $\varphi'(1) = 1$, donc $\varphi'(C) = C$ pour $C \in \mathbf{M}^{\natural +}$; φ'_* est alors une application $\natural$ qui se réduit à l'identité sur $\mathbf{M}^\natural$, ce qui prouve ([2], théorème 14) que $\mathbf{M}$ est de classe finie.

Soit φ_1 une autre pseudo-application $\natural$ normale fidèle et essentielle. On a $\varphi_1(A) = \varphi(A)K$ pour tout $A \in \mathbf{M}^+$, avec un $K \in \mathbf{Z}$ tel que $0 < K(x) < +\infty$ sur un ensemble ouvert partout dense (théorème 2). Il est donc évident que $\varphi(A) < +\infty$ sur un ensemble ouvert partout dense si et seulement si $\varphi_1(A) < +\infty$ sur un ensemble ouvert partout dense.

Soit φ_2 une application $\natural$ normale fidèle, définie sur l'idéal $\mathfrak{n}$. Comme $H^{\nu i} = 0$, on peut la prolonger en une application $\natural$ normale fidèle φ'_2 définie sur un idéal $\mathfrak{n}'$ tel que $\overline{\mathfrak{n}'} = \mathbf{M}$. Alors $\varphi_2'^*$ est fidèle et essentielle. Comme $\varphi_2'^*(A) = \varphi_2(A)$ pour $A \in \mathfrak{n}^+$, on voit que $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{m}^+$, donc $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$. Montrons que tout $A \in \mathfrak{m}^+$ est dans un idéal $\mathfrak{n}$ pour φ_2 bien choisie. Soit φ une pseudo-application $\natural$ normale fidèle et essentielle. On a $\varphi(A) < +\infty$ sur un ensemble ouvert partout dense, donc il existe une $K \in \mathbf{Z}$ telle que $0 < K(x) < +\infty$ sur un ensemble ouvert partout dense, et telle que $\varphi(A)K \leqq 1$; soit $\bar{\varphi}$ la pseudo-application $\natural$ normale fidèle et essentielle définie par $\bar{\varphi}(B) = \varphi(B)K$; on a $\bar{\varphi}(A) \leqq 1$, donc A est dans l'idéal de définition de $\bar{\varphi}_*$, qui est une application $\natural$ normale fidèle.

Remarque. — Soient $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\overline{\mathbf{C}}$ l'ensemble $\mathbf{C}$ complété par un point à l'infini. Soit $\mathbf{Z}'$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω à valeurs dans $\overline{\mathbf{C}}$, finies sur un ensemble ouvert partout dense. Il est facile, grâce aux propriétés topologiques de Ω (cf. [7]), de munir $\mathbf{Z}'$ d'une structure naturelle d'algèbre sur $\mathbf{C}$. Soit φ une pseudo-application $\natural$ normale fidèle et essentielle. La restriction de φ à l'ensemble $\mathfrak{m}^+$ de la proposition 6 peut se prolonger en une application $\natural$ d'une troisième espèce φ', appliquant $\mathfrak{m}$ dans $\mathbf{Z}'$. Nous n'expliciterons pas les propriétés évidentes de φ'. Notons que φ' prolonge φ_*, mais à l'avantage d'être toujours définie sur le même idéal $\mathfrak{m}$. On peut considérer que $\mathfrak{m}$ est l'idéal naturel de définition de toutes les applications $^{\natural}$. Peut-être ce point de vue s'avèrera-t-il dans l'avenir comme le plus fructueux. En tous cas, l'idéal $\mathfrak{m}$ joue certainement un rôle important dans l'étude de $\mathbf{M}$.

V. Traces.

1. Il existe en général des traces non normales. Cependant, nous ne savons étudier complètement que les traces normales. Nous allons d'abord nous occuper du prolongement de celles-ci. Les démonstrations du chapitre IV s'appliquent mot pour mot, et nous nous bornons à donner les résultats.

Définition 5.1. — *On appellera pseudo-trace toute application φ de $\mathbf{M}^+$ dans $[0, +\infty]$, possédant les propriétés suivantes:*

1. *Si $A \in \mathbf{M}^+$ et $A_1 \in \mathbf{M}^+$, on a: $\varphi(A + A_1) = \varphi(A) + \varphi(A_1)$.*
2. *Si $A \in \mathbf{M}^+$ et si λ est un nombre $\geqq 0$, on a: $\varphi(\lambda A) = \lambda\varphi(A)$.*
3. *Si $A \in \mathbf{M}^+$ et si $U \in \mathbf{M}_U$, on a: $\varphi(UAU^{-1}) = \varphi(A)$.*

Une pseudo-trace φ sera dite normale si, $\mathscr{F} \subset \mathbf{M}^+$ étant un ensemble filtrant croissant de borne supérieure $A \in \mathbf{M}^+$, $\varphi(A)$ est la borne supérieure de $\varphi(\mathscr{F})$.

Lemme 5.1. — *Soit φ une pseudo-trace normale, et $\mathfrak{m}^+$ l'ensemble des $A \in \mathbf{M}^+$ tels que $\varphi(A) < +\infty$. L'ensemble $\mathfrak{m}^+$ est l'ensemble des opérateurs self-adjoints $\geqq 0$ d'un idéal $\mathfrak{m}$.*

Lemme 5.2. — *Soit φ une pseudo-trace normale. Il existe trois variétés $\mathscr{M}_0^\varphi$, $\mathscr{M}_\infty^\varphi$, $\mathscr{M}_1^\varphi$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$, deux à deux orthogonales, sous-tendant H, bien déterminées par les propriétés suivantes:*

1. *Si $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}_0^\varphi \rangle}$, on a: $\varphi(A) = 0$.*
2. *Si $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}_\infty^\varphi \rangle}$, $A \neq 0$, on a: $\varphi(A) = +\infty$.*
3. *Si $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}_1^\varphi \rangle}$, et si $\varphi(A) = 0$, on a $A = 0$. De plus, pour tout $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}_1^\varphi \rangle}$, $A \neq 0$, il existe un $A' \leqq A$, $A' \neq 0$, tel que $\varphi(A') < +\infty$.*

Avec les notations du lemme 5.1, on a $\mathscr{M}(\mathfrak{m}) = H \ominus \mathscr{M}_\infty^\varphi = \mathscr{M}_0^\varphi \oplus \mathscr{M}_1^\varphi$.

Définition 5.2. — *Soit φ une pseudo-trace normale. On dira que φ est fidèle si $\mathscr{M}_0^\varphi = 0$, c'est-à-dire si $A \in \mathbf{M}^+$, $A \neq 0$ entraînent $\varphi(A) \neq 0$. On dira que φ est essentielle si $\mathscr{M}_\infty^\varphi = 0$, c'est-à-dire si $\mathscr{M}(\mathfrak{m}) = H$, (ou $\overline{\mathfrak{m}} = \mathbf{M}$), c'est-à-dire encore si, pour tout $A \in \mathbf{M}^+$, $A \neq 0$, il existe un $A' \leqq A$, $A' \neq 0$, tel que $\varphi(A') < +\infty$.*

Lemme 5.3. — *Soit φ une trace normale, définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$. Il existe une et une seule pseudo-trace normale φ^* coïncidant avec φ sur $\mathfrak{m}^+$ et telle que $\mathscr{M}_\infty^{\varphi^*} = H \ominus \mathscr{M}(\mathfrak{m})$. L'application φ^* est* *fidèle si et seulement si φ est fidèle, essentielle si et seulement si* $\overline{\mathfrak{m}} = \mathbf{M}$.

Lemme 5.4. — *Soient φ une pseudo-trace normale, $\mathfrak{m}$ l'idéal défini au lemme 5.1. Il existe une et une seule trace normale φ_* définie sur $\mathfrak{m}$ et coïncidant avec φ sur $\mathfrak{m}^+$. On a $(\varphi_*)^* = \varphi$. L'application φ_* possède de plus la propriété suivante:*

Soient $A \in \overline{\mathfrak{m}}^+$, et $\mathscr{F} \subset \mathfrak{m}^+$ un ensemble filtrant croissant de borne supérieure A. Si $\varphi_*(\mathscr{F})$ est majoré par un nombre fini, on a $A \in \mathfrak{m}^+$.

Lemme 5.5. — *Soit φ une trace normale, définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$. Les propriétés suivantes de φ sont équivalentes:*

1 — *Aucune trace normale, définie sur un idéal $\mathfrak{m}' \subset \overline{\mathfrak{m}}$, ne prolonge effectivement φ.*

2 — *Si $A \in \overline{\mathfrak{m}}^+$, et si $\mathscr{F} \subset \mathfrak{m}^+$ est un ensemble filtrant croissant de borne supérieure A tel que $\varphi(\mathscr{F})$ soit majoré par un nombre fini, on a $A \in \mathfrak{m}$.*

3 — *On a: $\varphi = (\varphi^*)_*$.*

Définition 5.3. — *Si une trace normale possède les propriétés du lemme 5.5, elle sera dite maximale.*

Proposition 7. — *a. Il existe une correspondance biunivoque entre les pseudo-traces normales φ et les traces normales maximales φ'. Cette correspondance est définie par les formules $\varphi' = \varphi_*$, $\varphi = \varphi'^*$.*

b. Soit ψ une trace normale définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$. Les traces normales, définies sur un idéal $\mathfrak{m}' \subset \overline{\mathfrak{m}}$, qui prolongent ψ, sont toutes contenues dans l'une d'entre elles, qui est la seule maximale. Celle-ci n'est autre que $(\psi^*)_*$.

Ainsi, l'étude des traces normales est ramenée à celle des traces normales maximales, ou, ce qui revient au même, à celle des pseudo-traces.

Notons explicitement le résultat évident que voici: soit φ une trace normale, définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$; soit φ' l'application de $\mathbf{M}^+$ dans $[0, +\infty]$ définie de la manière suivante: $\varphi'(A) = \varphi(A)$ si $A \in \mathfrak{m}^+$; $\varphi'(A) = +\infty$ si $A \notin \mathfrak{m}^+$. Alors, φ est maximale si et seulement si φ' est une pseudo-trace normale; et, s'il en est ainsi, $\varphi' = \varphi^*$.

2. Relations entre les traces et les applications $\natural$ normales.

Proposition 8. — *Soit Φ une application $\natural$ normale fidèle définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{M}$, appliquant $\mathfrak{m}$ sur l'idéal $\mathfrak{n}$ de $\mathbf{M}^\natural$* [23]).

---

[23]) L'image de $\mathfrak{m}$ par Φ est un idéal de $\mathbf{M}^\natural$, à cause de la formule $\Phi(AB) = \Phi(A)B$, où $A \in \mathfrak{m}$, $B \in \mathbf{M}^\natural$. Remarquons aussi, pour tout à l'heure, que $\Phi(\mathfrak{m}^+) = \mathfrak{n}^+$. Car $\Phi(\mathfrak{m}^+) \subset \mathfrak{n}^+$ résulte de la positivité de Φ. Ensuite, soit $A \in \mathfrak{n}^+$. On a $A = \Phi(B)$, avec $B \in \mathfrak{m}$. D'où $\Phi(\frac{1}{2}(B + B^*)) = \frac{1}{2}(A + A^*) = A$, autrement dit on peut sup-

a. *Si* $\mathfrak{m}$ *est restreint, il existe une correspondance biunivoque* $\varphi \to \psi$ *entre l'ensemble des traces* φ *définies sur* $\mathfrak{m}$ *et l'ensemble des formes linéaires positives* ψ *définies sur* $\mathfrak{n}$. *Cette correspondance est définie par la relation* $\varphi(A) = \psi(\Phi(A))$. φ *est fidèle (resp. normale) si et seulement si* ψ *est fidèle (resp. normale).*

b. *Si* $\mathfrak{m}$ *est quelconque, il existe une correspondance biunivoque* $\varphi \to \psi$ *entre l'ensemble des traces normales* [24]) φ *définies sur* $\mathfrak{m}$ *et l'ensemble des formes linéaires positives normales* ψ *définies sur* $\mathfrak{n}$. *Cette correspondance est définie par la relation* $\varphi(A) = \psi(\Phi(A))$. φ *est fidèle si et seulement si* ψ *est fidèle.*

Démonstration. — Soit ψ une forme linéaire positive sur $\mathfrak{n}$. Il est immédiat que la formule $\varphi(A) = \psi(\Phi(A))$ définit une trace sur $\mathfrak{m}$, normale si ψ est normale. Le caractère biunivoque de la correspondance est évident puisque, quand A parcourt $\mathfrak{m}$, $\Phi(A)$ parcourt $\mathfrak{n}$ tout entier. Si ψ est fidèle, $A \in \mathfrak{m}^+$ et $A \neq 0$ entraînent $\Phi(A) \in \mathfrak{n}^+$ et $\Phi(A) \neq 0$ donc $\varphi(A) \neq 0$: φ est fidèle. Si ψ n'est pas fidèle, il existe un $B \in \mathfrak{n}^+$, $B \neq 0$, avec $\psi(B) = 0$; mais $B = \Phi(A)$ pour un $A \in \mathfrak{m}^+$ (cf. note [23])), $A \neq 0$; alors $\varphi(A) = 0$: φ n'est pas fidèle.

Maintenant, la trace φ, définie sur $\mathfrak{m}$, étant donnée, nous allons prouver l'existence de ψ quand $\mathfrak{m}$ est restreint ou quand φ est normale. Il suffit de prouver que, si des opérateurs A, A' de $\mathfrak{m}$ vérifient $\Phi(A) = \Phi(A')$, on a $\varphi(A) = \varphi(A')$ (en effet, on posera $\psi(\Phi(A)) = \varphi(A)$; ceci définira sur $\mathfrak{n}$ une forme linéaire; cette forme sera aussi positive parce que $\Phi(\mathfrak{m}^+) = \mathfrak{n}^+$). Supposons d'abord $\mathfrak{m}$ restreint. Alors A et A' appartiennent à un même $\mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\rangle}$ avec $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathfrak{m}}$. On peut supposer $\mathcal{M}$ finie (lemme 4.1). D'après le lemme 4.2 et la proposition 1, on a, pour $B \in \mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\rangle}$, $(\Phi(B))_{(\mathcal{M})} = (B_{(\mathcal{M})})^{\natural} (\Phi(P_{\mathcal{M}}))_{(\mathcal{M})}$ (il s'agit de l'application $\natural$ canonique de $\mathbf{M}_{(\mathcal{M})}$). L'hypothèse $\Phi(A) = \Phi(A')$ entraîne donc:

$$(1) \qquad (A_{(\mathcal{M})})^{\natural} (\Phi(P_{\mathcal{M}}))_{(\mathcal{M})} = (A'_{(\mathcal{M})})^{\natural} (\Phi(P_{\mathcal{M}}))_{(\mathcal{M})}.$$

Observons que, si $\mathcal{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$, l'hypothèse $\Phi(P_{\mathcal{M}})P_{\mathcal{N}} = 0$ est équivalente à $\Phi(P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}) = 0$, donc à $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = 0$ puisque Φ est fidèle, donc à l'orthogonalité de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$; donc $(\Phi(P_{\mathcal{M}}))_{(\mathcal{M})}$ n'a pas de zéro $\neq 0$; donc les $(\Phi(P_{\mathcal{M}})_{(\mathcal{M})} x$, où $x \in \mathcal{M}$, sont partout denses dans $\mathcal{M}$, de sorte que (1) entraîne

$$(2) \qquad (A_{(\mathcal{M})})^{\natural} = (A'_{(\mathcal{M})})^{\natural}.$$

---

poser B self-adjoint. Soit B^+ la partie positive de B. On a: $\Phi(B^+) \geqq A$. Donc il existe un $A' \in \mathbf{M}^{\natural +}$, avec $A = \Phi(B^+)A' = \Phi(B^+A')$, et $B^+A' \in \mathfrak{m}^+$.

[24]) L'auteur ignore si cette restriction est essentielle. Cette question est liée au problème de l'existence d'applications $\natural$ non normales.

Ceci posé, remarquons que la restriction de φ à $\mathbf{M}_{\langle\mathscr{M}\rangle}$ définit, de manière évidente, une trace sur $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})}$. Alors, (2) et la proposition 2 prouvent que cette trace a même valeur pour $A_{(\mathscr{M})}$ et $A'_{(\mathscr{M})}$. Donc $\varphi(A) = \varphi(A')$.

Supposons maintenant $\mathfrak{m}$ quelconque, mais φ normale. Soient $A \in \mathfrak{m}^+$, $A' \in \mathfrak{m}^{r+}$, avec $\Phi(A) = \Phi(A')$. Soit $\mathscr{F} \subset \mathfrak{m}^{r+}$ l'ensemble filtrant croissant des $B \in \mathfrak{m}^{r+}$ tels que $B \leqq A$. A est la borne supérieure de $\mathscr{F}$, $\Phi(A)$ est la borne supérieure de $\Phi(\mathscr{F})$. Soit $\mathscr{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ la variété des zéros de $\Phi(A)$, et $\mathscr{M} = H \ominus \mathscr{N}$. On a $\Phi(A'P_\mathscr{N}) = \Phi(A')P_\mathscr{N} = \Phi(A)P_\mathscr{N} = 0$, donc, à cause de la fidélité de Φ, $A'P_\mathscr{N} = 0$, $A' = A'P_\mathscr{M}$. D'autre part, soit $B \in \mathscr{F}$. On a $\Phi(B) \leqq \Phi(A)$, donc il existe un $C \in (\mathbf{M}^\natural)^+_{\langle\mathscr{M}\rangle}$ unique tel que $\Phi(B) = \Phi(A)C$; on a $C \leqq P_\mathscr{M}$; quand B parcourt $\mathscr{F}$, C parcourt un ensemble filtrant croissant majoré par $P_\mathscr{M}$, de borne supérieure $P \leqq P_\mathscr{M}$; alors la borne supérieure des $\Phi(B)$ est $\Phi(A)P$, donc $\Phi(A)P = \Phi(A)$, ce qui, avec $P \leqq P_\mathscr{M}$, donne $P = P_\mathscr{M}$. Soit $B' = A'C \in \mathfrak{m}^{r+}$. On a $\Phi(B) = \Phi(A)C = \Phi(A')C = \Phi(A'C) = \Phi(B')$, donc, d'après un résultat antérieur, $\varphi(B) = \varphi(B')$. Quand B parcourt $\mathscr{F}$, $\varphi(B)$ a pour borne supérieure $\varphi(A)$ à cause de la normalité de φ. Les $A'C$ ont pour borne supérieure $A'P_\mathscr{M} = A'$, donc $\varphi(B')$ a pour borne supérieure $\varphi(A')$. D'où $\varphi(A) = \varphi(A')$. Passons au cas où $A \in \mathfrak{m}^+$, $A' \in \mathfrak{m}^+$, avec $\Phi(A) = \Phi(A')$, et soit encore $\mathscr{F}$ l'ensemble filtrant croissant des $B \in \mathfrak{m}^{r+}$ tels que $B \leqq A$. Si $B \in \mathscr{F}$, on a $\Phi(B) \leqq \Phi(A) = \Phi(A')$ donc il existe un $C \in \mathbf{M}^{\natural+}$, $C \leqq 1$, avec $\Phi(B) = \Phi(A')C$; on a $B \in \mathfrak{m}^{r+}$, $A'C \in \mathfrak{m}^+$, donc $\Phi(B) = \Phi(A'C)$ entraîne $\varphi(B) = \varphi(A'C) \leqq \varphi(A')$ Comme $\varphi(\mathscr{F})$ admet $\varphi(A)$ pour borne supérieure, on en déduit $\varphi(A) \leqq \varphi(A')$ et, par symétrie, $\varphi(A) = \varphi(A')$. Si maintenant A et A' sont des opérateurs self-adjoints de $\mathfrak{m}$, on a $A = A_1 - A_2$, $A' = A'_1 - A'_2$, avec $A_i \in \mathfrak{m}^+$, $A'_i \in \mathfrak{m}^+$ $(i = 1, 2)$, donc $\Phi(A) = \Phi(A')$ entraîne $\Phi(A_1 + A'_2) = \Phi(A'_1 + A_2)$, d'où $\varphi(A_1 + A'_2) = \varphi(A'_1 + A_2)$, d'où $\varphi(A) = \varphi(A')$. Enfin, si A et A' sont quelconques dans $\mathfrak{m}$, avec $\Phi(A) = \Phi(A')$, on a $\Phi(A^*) = \Phi(A'^*)$, donc $\Phi(A + A^*) = \Phi(A' + A'^*)$ et $\Phi(i(A - A^*)) = \Phi(i(A' - A'^*))$, donc $\varphi(A + A^*) = \varphi(A' + A'^*)$ et $\varphi(i(A - A^*)) = \varphi(i(A' - A'^*))$ donc finalement $\varphi(A) = \varphi(A')$.

Donc la forme linéaire positive ψ sur $\mathfrak{n}$ existe. Il reste à montrer qu'elle est normale (φ étant toujours supposée normale). Or, soit $A \in \mathfrak{n}^+$ et $\mathscr{F} \subset \mathfrak{n}^+$ un ensemble filtrant croissant de borne supérieure A. Soit $\mathscr{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ la variété des zéros de A, et $\mathscr{M} = H \ominus \mathscr{N}$. Pour tout $B \in \mathscr{F}$, on a $0 \leqq B \leqq A$, donc il existe un $B' \in (\mathbf{M}^\natural)^+_{\langle\mathscr{M}\rangle}$

unique tel que $B = B'A$; on a $B' \leqq P_{\mathscr{M}}$. D'après un raisonnement déjà fait, la borne supérieure de l'ensemble filtrant croissant $\mathscr{F}'$ des B' est $P_{\mathscr{M}}$. Soit maintenant $C \in \mathfrak{m}^+$ tel que $\Phi(C) = A$. Les CB', où $B' \in \mathscr{F}'$, forment un ensemble filtrant croissant de borne supérieure $CP_{\mathscr{M}}$, donc $\varphi(CP_{\mathscr{M}})$ est la borne supérieure des $\varphi(CB')$, donc $\psi(A) = \psi(AP_{\mathscr{M}}) = \psi(\Phi(C)P_{\mathscr{M}}) = \psi(\Phi(CP_{\mathscr{M}})) = \varphi(CP_{\mathscr{M}})$ est la borne supérieure des $\psi(B) = \psi(AB') = \psi(\Phi(C)B') = \psi(\Phi(CB')) = \varphi(CB')$: ψ est normale.

Nous allons maintenant énoncer le b de la proposition 8 sous de nouvelles formes. Nous nous bornerons au cas où $H^{pi} = 0$, mais le cas général se traiterait aisément avec quelques précisions supplémentaires.

Théorème 3. — *Supposons $H^{pi} = 0$.*

a. *Soit Φ une pseudo-application $\natural$ normale fidèle essentielle (il en existe d'après le théorème 1). La formule:*

$$(1) \qquad \varphi = \psi \circ \Phi$$

définit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des pseudo-traces normales φ et l'ensemble des pseudo-mesures normales ψ sur Ω (cf. [7]). De plus, φ est fidèle (resp. essentielle) si et seulement si ψ est fidèle (resp. essentielle).

b. *Soit ψ une pseudo-mesure normale fidèle et essentielle sur Ω (il en existe d'après [7]). La formule (1) définit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des pseudo-traces normales φ et l'ensemble des pseudo-applications $\natural$ normales Φ. De plus, φ est fidèle (resp. essentielle) si et seulement si Φ est fidèle (resp. essentielle).*

c. *Soit φ une pseudo-trace normale fidèle et essentielle (il en existe d'après ce qui précède). La formule (1) définit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des pseudo-applications $\natural$ normales Φ et l'ensemble des pseudo-mesures normales ψ sur Ω. De plus, ψ est fidèle (resp. essentielle) si et seulement si Φ est fidèle (resp. essentielle).*

Démonstration. — 1. Soient Φ une pseudo-application $\natural$ normale, et ψ une pseudo-mesure normale sur Ω. Il est immédiat que la formule (1) définit une pseudo-trace normale φ, évidemment unique.

2. Soient Φ une pseudo-application $\natural$ normale fidèle essentielle, et φ une pseudo-trace normale. Soit $\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{m}'$) l'idéal de définition de Φ_* (resp. φ_*). On a: $\overline{\mathfrak{m}} = \mathbf{M}$, donc, en posant $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{m}'$, on a: $\overline{\mathfrak{m}}_1 = \overline{\mathfrak{m}}'$. Soit $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\mathfrak{m}_1)$. Soient Φ' et φ' les restrictions de Φ_* et φ_* à $\mathfrak{m}_1$, et $\mathfrak{n} = \Phi'(\mathfrak{m}_1)$. D'après la proposition 8, il existe une forme linéaire positive normale ψ' sur $\mathfrak{n}$ telle que $\varphi' = \psi' \circ \Phi'$.

On a: $\mathfrak{n} \subset \mathbf{M}^{\natural}_{\langle\mathscr{M}\rangle}$. En suivant la marche de la démonstration du lemme 4.6, on prouve aisément qu'il existe une pseudo-mesure normale ψ sur Ω qui prend les mêmes valeurs que ψ' sur $\mathfrak{n}^+$, et qui est telle que $\psi'(B) = +\infty$ si $B \in \mathbf{M}^{\natural+}_{\langle H\ominus\mathscr{M}\rangle}$, $B \neq 0$. Alors par normalité, on a $\varphi(A) = \psi(\Phi(A))$ si $A \in \overline{\mathfrak{m}}_1^+$. Si $A \in \mathbf{M}^+_{\langle H\ominus\mathscr{M}\rangle}$, $A \neq 0$, on a $\varphi(A) = +\infty$; d'autre part, $\Phi(A) \in \mathbf{M}^{\natural+}_{\langle H\ominus\mathscr{M}\rangle}$ et $\Phi(A) \neq 0$, donc $\psi(\Phi(A)) = +\infty$. Donc on a encore $\varphi(A) = \psi(\Phi(A))$ dans ce cas, et par linéarité, cette égalité est valable pour tout $A \in \mathbf{M}^+$. Montrons que la pseudo-mesure ψ telle que $\varphi = \psi \circ \Phi$ est unique. La donnée de φ détermine ψ sur $\Phi(\mathbf{M}^+)$. Or, $\Phi(\mathbf{M}^+) \cap \mathbf{M}^\natural$ engendre un idéal de $\mathbf{M}^\natural$ fortement partout dense dans $\mathbf{M}^\natural$ parce que Φ est fidèle et essentielle. Donc tout élément de $\mathbf{M}^{\natural+}$, et par suite de $\mathbf{Z}$, est borne supérieure d'un ensemble filtrant croissant d'éléments de $\Phi(\mathbf{M}^+)$. Comme ψ est normale, ψ est bien déterminée sur $\mathbf{Z}$ tout entier.

3. Soient ψ une pseudo-mesure normale fidèle essentielle sur Ω, et φ une pseudo-trace normale. Soit Φ' une pseudo-application $^\natural$ normale fidèle essentielle quelconque, et soit ψ' la pseudo-mesure normale sur Ω telle que $\varphi = \psi' \circ \Phi'$. D'après [7], proposition 8, il existe une $g \in \mathbf{Z}$ telle que $\psi'(f) = \psi(gf)$ pour toute $f \in \mathbf{Z}$. Alors, pour tout $A \in \mathbf{M}^+$, on a: $\varphi(A) = \psi(g\Phi'(A))$. Or l'application $A \to g\Phi'(A)$ est une application $^\natural$ normale (théorème 2), soit Φ, et on a: $\varphi = \psi \circ \Phi$. Montrons que la pseudo-application $^\natural$ normale Φ telle que $\varphi = \psi \circ \Phi$ est unique. Soit Φ_1 une autre pseudo-application $^\natural$ normale. Si $\mathscr{M}^{\Phi}_{\infty} \neq \mathscr{M}^{\Phi_1}_{\infty}$, il existe par exemple un $A \in \mathbf{M}^+$ tel que $\Phi(A)$ soit bornée et $\Phi_1(A)$ infinie sur un ensemble ouvert non vide de Ω; puis, comme ψ est essentielle, il existe un $A_1 \in \mathbf{M}^{\natural+}$ tel que $\psi(A_1\Phi(A)) = \psi(\Phi(AA_1)) < +\infty$ et $\psi(A_1\Phi_1(A)) = \psi(\Phi_1(AA_1)) = +\infty$; donc $\psi \circ \Phi \neq \psi \circ \Phi_1$. Si $\mathscr{M}^{\Phi}_{\infty} = \mathscr{M}^{\Phi_1}_{\infty} = \mathscr{M}$, mais $\Phi \neq \Phi_1$, posons $\Phi'(B) = \Phi(B)P_{H\ominus\mathscr{M}}$, $\Phi_1'(B) = \Phi_1(B)P_{H\ominus\mathscr{M}}$ pour tout $B \in \mathbf{M}^+$. Les applications Φ' et Φ_1' sont des pseudo-applications $^\natural$ normales essentielles distinctes. Soit $C \in \mathbf{M}^+$, tel que $\mathscr{N}(C) = 0$, $\Phi'(C) \leqq 1$, $\Phi_1'(C) \leqq 1$ (lemme 4.16). On a $\Phi'(C) \neq \Phi_1'(C)$ (lemme 4.15). Comme ψ est fidèle et essentielle, il existe un $C_1 \in \mathbf{M}^+_{\langle H\ominus\mathscr{M}\rangle}$ tel que

$$\begin{aligned}\psi(\Phi(CC_1)) &= \psi(\Phi'(CC_1)) = \psi(C_1\Phi'(C)) \neq \psi(C_1\Phi_1'(C))\\ &= \psi(\Phi_1'(CC_1)) = \psi(\Phi_1(CC_1)).\end{aligned}$$

Donc $\psi \circ \Phi \neq \psi \circ \Phi_1$.

4. Considérons la relation (1). On va prouver que si deux éléments y sont fidèles, le troisième l'est aussi. Si Φ et ψ sont

fidèles, φ est évidemment fidèle. D'autre part, si φ est fidèle, ψ et Φ sont fidèles: car, si ψ n'est pas fidèle, il existe une $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$, $\mathscr{M} \neq 0$, telle que $\psi(A) = 0$ pour tout $A \in \mathbf{M}^{\natural+}_{\langle \mathscr{M} \rangle}$; alors $\Phi(P_{\mathscr{M}}) \in \mathbf{M}^{\natural+}_{\langle \mathscr{M} \rangle}$, donc $\psi(\Phi(P_{\mathscr{M}})) = 0$, ce qui contredit la fidélité de φ. On prouve de même qu'il est impossible que Φ soit non fidèle.

5. Si Φ et ψ sont essentielles, φ est essentielle: soit $A \in \mathbf{M}^+$; il existe un $A' \in \mathbf{M}^+$, $A' \leqq A$, $A' \neq 0$, tel que $\Phi(A')$ soit borné; puis un $A_1 \in \mathbf{M}^{\natural+}$, $A_1 \leqq 1$, tel que $A_1\Phi(A') \neq 0$ et $\psi(\Phi(A'A_1)) = \psi(A_1\Phi(A')) < +\infty$; alors $A_1A' \leqq A$, $A_1A' \neq 0$, $A_1A' \in \mathbf{M}^+$, et $\varphi(A_1A') < +\infty$: φ est essentielle.

Si φ est essentielle, et si ψ est fidèle, Φ est essentielle: pour $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M}^{\Phi}_{\infty} \rangle}$, on a: $\Phi(A) = +\infty . P_{\mathscr{M}(A)}$, donc, comme ψ est fidèle, $\psi(\Phi(A)) = +\infty$ si $A \neq 0$; si φ est essentielle, il faut donc que $\mathscr{M}^{\Phi}_{\infty} = 0$: Φ est essentielle.

Si φ est essentielle, et si Φ est fidèle, ψ est essentielle: sinon, il existerait une $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$, $\mathscr{M} \neq 0$, telle que $\varphi(A) = +\infty$ pour tout $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M} \rangle}$, $A \neq 0$ (tenant compte de la fidélité de Φ): ceci contredit le fait que φ est essentielle.

THÉORÈME 3'. *Supposons $H^{vi}=0$. Soient Φ (resp. ψ) une pseudo-application $^{\natural}$ (resp. une pseudo-mesure sur Ω) normale fidèle essentielle. Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des pseudo-traces normales φ et l'ensemble des $g \in \mathbf{Z}$. Cette correspondance est définie par la formule $\varphi(A) = \psi(g\Phi(A))$ pour $A \in \mathbf{M}^+$. De plus, φ est fidèle (resp. essentielle) si et seulement si $g(x) > 0$ (resp. $< +\infty$) sur un ensemble ouvert partout dense.*

Posant $\Phi(A) = A^{\natural}$ pour simplifier les notations, la formule précédente peut s'écrire: $\varphi(A) = \int_{\Omega} g(\chi) A^{\natural}(\chi)\, d\psi(\chi)$. Si, dans $\mathbf{M}^{\natural}$, toute famille de projecteurs non nuls deux à deux orthogonaux est au plus dénombrable (en particulier si H est séparable), on peut supposer (cf. [7]) que ψ est une mesure positive sur Ω.

Ce théorème est une conséquence immédiate des théorèmes 2 et 3.

PROPOSITION 9. *Pour qu'il existe des pseudo-traces normales fidèles et essentielles, il faut et il suffit que $H^{vi} = 0$.*

Démonstration. — La suffisance résulte du théorème 3.

Si $H^{vi} \neq 0$, soit φ une pseudo-trace normale essentielle. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal de définition de φ_*. Puisque $\bar{\mathfrak{m}} = \mathbf{M}$, il existe des $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathfrak{m}}$ avec $\mathscr{M} \neq 0$, $\mathscr{M} \subset H^{vi}$. D'après le lemme 4.1, $\varphi(P_{\mathscr{M}}) = 0$, donc φ n'est pas fidèle.

VI. Fonctions-poids.

DÉFINITION 6.1. — *On appellera w-fonction toute fonction numérique D définie sur un idéal* $\mathfrak{I}$ *de* $\widetilde{\mathbf{M}}$, *possédant les propriétés suivantes:*

1. $0 \leqq D(\mathscr{M}) < +\infty$.

2. *Si* $\mathscr{M}_1 \in \mathfrak{I}$ *et* $\mathscr{M}_2 \in \mathfrak{I}$ *sont orthogonales, on a* $D(\mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2) = D(\mathscr{M}_1) + D(\mathscr{M}_2)$.

3. *Si* $\mathscr{M} \in \mathfrak{I}$ *et* $U \in \mathbf{M}_U$, *on a* $D(U(\mathscr{M})) = D(\mathscr{M})$.

D sera dite normale si elle possède la propriété suivante (plus forte que 2): si $(\mathscr{M}_i)_{i \in I}$ *est une famille quelconque de variétés de* $\mathfrak{I}$ *deux à deux orthogonales et si* $\mathscr{M} = \bigoplus_{i \in I} \mathscr{M}_i \in \mathfrak{I}$, *on a* $D(\mathscr{M}) = \sum_{i \in I} D(\mathscr{M}_i)$. *D sera dite fidèle si l'hypothèse* $D(\mathscr{M}) = 0$ *entraîne* $\mathscr{M} = 0$.

Si D est une w-fonction, il est immédiat que $\mathscr{M} \sim \mathscr{N} \in \mathfrak{I}$ entraîne $D(\mathscr{M}) = D(\mathscr{N})$ (à cause du lemme 1.7 de [6]); que $D(0) = 0$; que $D(\mathscr{M}) \leqq D(\mathscr{N})$ si $\mathscr{M} \subset \mathscr{N}$ donc aussi si $\mathscr{M} \prec \mathscr{N}$.

1. LEMME 6.1. — *Soit D une w-fonction définie sur* $\mathfrak{I}$. *Soient* $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \ldots, \mathscr{M}_n$ *des variétés de* $\mathfrak{I}$, *et* $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathscr{M}_n$. *On a:* $D(\mathscr{M}) \leqq \sum_{i=1}^{n} D(\mathscr{M}_i)$.

Démonstration. — Par récurrence, il suffit de prouver le lemme pour $n = 2$. Alors, on a $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2'$, avec $\mathscr{M}_2' = \mathscr{M} \ominus \mathscr{M}_1$. $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2'$ sont orthogonales, et $\mathscr{M}_2' \prec \mathscr{M}_2$, donc $D(\mathscr{M}) = D(\mathscr{M}_1) + D(\mathscr{M}_2') \leqq D(\mathscr{M}_1) + D(\mathscr{M}_2)$.

LEMME 6.2. — *Soient* D_1, D_2 *deux w-fonctions définies sur* $\mathfrak{I}$, $\mathscr{M}$ *une variété de* $\mathfrak{I}$. *Si* $D_1(\mathscr{N}) = D_2(\mathscr{N})$ *pour* $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$, $\mathscr{N} \in \mathfrak{I}$, *on a* $D_1(\mathscr{N}) = D_2(\mathscr{N})$ *pour* $\mathscr{N} \in \widetilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}} \subset \mathfrak{I}$.

Démonstration. — Si $\mathscr{N} \prec \mathscr{M}$, on a $\mathscr{N} \sim \mathscr{N}'$ avec $\mathscr{N}' \subset \mathscr{M}$, donc $D_1(\mathscr{N}) = D_1(\mathscr{N}') = D_2(\mathscr{N}') = D_2(\mathscr{N})$. On a donc encore $D_1(\mathscr{N}) = D_2(\mathscr{N})$ si $\mathscr{N} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathscr{N}_i$ avec $\mathscr{N}_i \prec \mathscr{M}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, les $\mathscr{N}_i$ étant deux à deux orthogonales. Or, toute variété de $\widetilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}}$ est de cette forme d'après le lemme 3.9.

LEMME 6.3. — *Si* $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ *est proprement infinie, et si D est une w-fonction définie sur* $\widetilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}}$, *on a* $D = 0$.

Démonstration. — Soit $(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2)$ une partition de $\mathscr{M}$ avec $\mathscr{M} \sim \mathscr{M}_1 \sim \mathscr{M}_2$. On a $D(\mathscr{M}) = D(\mathscr{M}_1) + D(\mathscr{M}_2) = 2D(\mathscr{M})$, $D(\mathscr{M}) = 0$. Donc $D(\mathscr{N}) = 0$ pour toute $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$. Donc $D = 0$ (lemme 6.2).

Lemme 6.4. — *Soit $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$. Soit D une w-fonction définie sur $\widetilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}}$. Il existe une trace φ sur $\mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$ telle que $\varphi(P_{\mathscr{M}'}) = D(\mathscr{M}')$ pour $\mathscr{M}' \in \widetilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}}$.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ telle que $\mathscr{M} \cap \mathscr{N}$ soit finie et $\mathscr{M} \cap (H \ominus \mathscr{N})$ proprement infinie (ou $= 0$). Il est immédiat que les variétés $\mathscr{M}' \in \widetilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}}$ sont de la forme $\mathscr{M}_1' \oplus \mathscr{M}_2'$, avec $\mathscr{M}_1' \subset \mathscr{N}$, $\mathscr{M}_1' \in \widetilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M} \cap \mathscr{N}}$, $\mathscr{M}_2' \subset H \ominus \mathscr{N}$, $\mathscr{M}_2' \in \widetilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M} \cap (H \ominus \mathscr{N})}$. On a $D(\mathscr{M}_2') = 0$ (lemme 6.3) de sorte qu'on est ramené aussitôt au cas où $\mathscr{M}$ est finie. La restriction de D aux variétés de $\mathfrak{l}$ contenues dans $\mathscr{M}$ conduit à une w-fonction pour l'anneau de classe finie $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})}$. Appliquons les propositions 2 et 3: il existe une forme linéaire positive $\overline{\psi}$ sur $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})}^\natural$ telle que $D(\mathscr{N}) = \overline{\psi}[((P_{\mathscr{N}})_{(\mathscr{M})})^\natural]$ pour $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$, $\mathscr{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ (il s'agit de l'application $^\natural$ canonique de $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})}$). Pour $A \in (\mathbf{M}^\natural)_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$, posons $\psi(A) = \overline{\psi}(A_{(\mathscr{M})})$. Comme $A \to A_{(\mathscr{M})}$ est un isomorphisme de $(\mathbf{M}^\natural)_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$ sur $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})}^\natural$, on définit ainsi une forme linéaire positive ψ sur $(\mathbf{M}^\natural)_{\langle \mathscr{M}^\natural \rangle}$. Tenant compte de $(P_{\mathscr{N}}^{\natural \mathscr{M}})_{(\mathscr{M})} = ((P_{\mathscr{N}})_{(\mathscr{M})})^\natural$ qui résulte du lemme 4.2 et de $(P_{\mathscr{M}}^{\natural \mathscr{M}})_{(\mathscr{M})} = (1)_{(\mathscr{M})}$, on a alors $D(\mathscr{N}) = \psi(P_{\mathscr{N}}^{\natural \mathscr{M}})$ pour $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$, $\mathscr{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}$. Maintenant, la formule $\varphi(B) = \psi(B^{\natural \mathscr{M}})$ définit, pour $B \in \mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$, une trace, et l'on a $D(\mathscr{N}) = \varphi(P_{\mathscr{N}})$ pour $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$, $\mathscr{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}$. Cette formule s'étend à toute $\mathscr{N} \in \widetilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}}$, car $D(\mathscr{N})$ et $\varphi(P_{\mathscr{N}})$ sont deux w-fonctions sur $\widetilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}}$ qui coïncident lorsque $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}$, et il suffit d'appliquer le lemme 6.2.

Proposition 10. — *Soit $\mathfrak{m}$ un idéal restreint. Il existe une correspondance biunivoque $\varphi \to D$ entre les traces définies sur $\mathfrak{m}$ et les w-fonctions définies sur $\widetilde{\mathfrak{m}}$. Cette correspondance est définie par la formule $D(\mathscr{M}) = \varphi(P_{\mathscr{M}})$ pour $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathfrak{m}}$. D est fidèle (resp. normale) si et seulement si φ est fidèle (resp. normale).*

Démonstration. — Si une trace φ est donnée sur $\mathfrak{m}$, on voit immédiatement que la formule $D(\mathscr{M}) = \varphi(P_{\mathscr{M}})$ définit une w-fonction sur $\widetilde{\mathfrak{m}}$.

Soit maintenant D une w-fonction sur $\widetilde{\mathfrak{m}}$. Montrons d'abord l'unicité de φ. D'après le lemme 3.7, il suffit de prouver que la restriction de φ à $\mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \rangle}$, où $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathfrak{m}}$, est bien déterminée. Il existe une $\mathscr{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ telle que $\mathscr{M} \cap (H \ominus \mathscr{N})$ soit proprement infinie ou $= 0$ et $\mathscr{M} \cap \mathscr{N}$ finie, et on a: $\mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \rangle} = \mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \cap (H \ominus \mathscr{N}) \rangle} + \mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \cap \mathscr{N} \rangle}$; d'autre part (lemme 4.1) la restriction de φ à $\mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \cap (H \ominus \mathscr{N}) \rangle}$ est nulle; il suffit donc de prouver que la restriction de φ à

$\mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \cap \mathscr{N} \rangle}$ est bien déterminée. Supposons donc désormais $\mathscr{M}$ finie. La restriction de φ à $\mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \rangle}$ définit de manière évidente une trace sur l'anneau de classe finie $\mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \rangle}$, et, comme on connait la valeur de cette trace pour les projecteurs de l'anneau, φ est bien déterminée d'après la proposition 3.

Prouvons l'existence de φ. Considérons les idéaux restreints $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}$ de $\mathbf{M}$ qui possèdent la propriété suivante: il existe une trace φ' sur $\mathfrak{m}'$ telle que $D(\mathscr{M}) = \varphi'(P_{\mathscr{M}})$ pour $\mathscr{M} \in \tilde{\mathfrak{m}}'$. L'ensemble des $\mathfrak{m}'$ est inductif. Car, contenant l'idéal 0, il est non vide. Ensuite, si $(\mathfrak{m}_i)_{i \in I}$ est une famille totalement ordonnée d'idéaux $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}^* = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{m}_i$ est un idéal $\mathfrak{m}'$. En effet, soit φ_i la trace associée par hypothèse à $\mathfrak{m}_i$. Si $A \in \mathfrak{m}^*$, A appartient à certains $\mathfrak{m}_i$; et, si $A \in \mathfrak{m}_i \cap \mathfrak{m}_j$, on a $\varphi_i(A) = \varphi_j(A)$ puisque φ_i et φ_j prennent les mêmes valeurs pour les projecteurs de l'idéal restreint $\mathfrak{m}_i \cap \mathfrak{m}_j$ (on applique le résultat précédent d'unicité); on peut donc poser $\varphi^*(A) = \varphi_i(A)$, et il est immédiat que φ^* est une trace sur $\mathfrak{m}^*$, avec $D(\mathscr{M}) = \varphi^*(P_{\mathscr{M}})$ si $\mathscr{M} \in \tilde{\mathfrak{m}}^*$. Donc il existe un idéal $\mathfrak{m}'$ maximal, soit $\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{m}$; soit φ_0 la trace associée. On va prouver que $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$, et pour cela que, si $\mathscr{M} \in \tilde{\mathfrak{m}}$, on a $\mathscr{M} \in \tilde{\mathfrak{m}}_0$. Or, d'après le lemme 6.4, il existe une trace φ_1 définie sur $\mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$, telle que $\varphi_1(P_{\mathscr{N}}) = D(\mathscr{N})$ pour $\mathscr{N} \in \tilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}}$. Les traces φ_0 et φ_1 prennent les mêmes valeurs pour les projecteurs de $\mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$, donc coïncident sur $\mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$; si $A + B = A' + B'$ avec $A \in \mathfrak{m}_0$, $B \in \mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$, $A' \in \mathfrak{m}_0$, $B' \in \mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$, on a $A - A' = B - B' \in \mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$, donc $\varphi_0(A) - \varphi_0(A') = \varphi_0(A - A') = \varphi_1(B - B') = \varphi_1(B) - \varphi_1(B')$, donc $\varphi_0(A) + \varphi_1(B) = \varphi_0(A') + \varphi_1(B')$ de sorte que, par $\varphi_2(A + B) = \varphi_0(A) + \varphi_1(B)$, on définit une fonctionnelle φ_2 sur l'idéal restreint $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$; φ_2 est évidemment linéaire et centrale; φ_2 est aussi positive (donc est une trace); car supposons que $A + B$, où $A \in \mathfrak{m}_0$ et $B \in \mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$, soit self-adjoint $\geqq 0$; on va montrer $\varphi_2(A + B) = \varphi_0(A) + \varphi_1(B) \geqq 0$; comme $A + B = (A + B)^* = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(B + B^*)$, on peut supposer A et B self-adjoints; on a $A \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{N} \rangle}$, $B \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{N}_1 \rangle}$, avec $\mathscr{N} \in \tilde{\mathfrak{m}}_0$ et $\mathscr{N}_1 \in \tilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}}$; donc $A + B \in \mathbf{M}_{\langle \mathscr{N} \oplus \mathscr{N}_1 \rangle}$; soit $\mathscr{N}' = (\mathscr{N} \oplus \mathscr{N}_1) \ominus \mathscr{N}$; $\mathscr{N}$ et $\mathscr{N}'$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathscr{N} \oplus \mathscr{N}_1$, et $\mathscr{N}' \prec \mathscr{N}_1$, donc $\mathscr{N}' \in \tilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}}$; on a, par le calcul du lemme 4.1, $\varphi_0(A) = \varphi_0(P_{\mathscr{N}} A P_{\mathscr{N}}) + \varphi_0(P_{\mathscr{N}'} A P_{\mathscr{N}'})$, $\varphi_1(B) = \varphi_1(P_{\mathscr{N}} B P_{\mathscr{N}}) + \varphi_1(P_{\mathscr{N}'} B P_{\mathscr{N}'})$; $A + B \geqq 0$ entraîne $P_{\mathscr{N}} A P_{\mathscr{N}} + P_{\mathscr{N}} B P_{\mathscr{N}} = P_{\mathscr{N}}(A + B) P_{\mathscr{N}} \geqq 0$, donc, comme $P_{\mathscr{N}} A P_{\mathscr{N}} \in \mathfrak{m}_0$ et $P_{\mathscr{N}} B P_{\mathscr{N}} \in \mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{m}_{\mathscr{N}}$, et comme φ_1, φ_0 coïncident sur $\mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{m}_{\mathscr{M}}$, $\varphi_0(P_{\mathscr{N}} A P_{\mathscr{N}}) + \varphi_1(P_{\mathscr{N}} B P_{\mathscr{N}}) = \varphi_0(P_{\mathscr{N}} A P_{\mathscr{N}} + P_{\mathscr{N}} B P_{\mathscr{N}}) \geqq 0$; de même, $\varphi_0(P_{\mathscr{N}'} A P_{\mathscr{N}'}) + \varphi_1(P_{\mathscr{N}'} B P_{\mathscr{N}'}) = \varphi_1(P_{\mathscr{N}'} A P_{\mathscr{N}'} + P_{\mathscr{N}'} B P_{\mathscr{N}'}) \geqq 0$; d'où notre assertion. Ainsi φ_2 est une trace, et sa restriction aux projecteurs de $\mathfrak{m}_2$ définit une w-fonction sur $\widetilde{\mathfrak{m}}_2$, qui coïncide avec D sur $\widetilde{\mathfrak{m}}_0$ et $\widetilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}}$; comme on a observé que toute variété de $\widetilde{\mathfrak{m}}_2$ est sous-tendue par deux variétés orthogonales, l'une de $\widetilde{\mathfrak{m}}_0$, l'autre de $\widetilde{\mathfrak{m}}_{\mathscr{M}}$, on a $\varphi_2(P_{\mathscr{N}}) = D(\mathscr{N})$ pour $\mathscr{N} \in \widetilde{\mathfrak{m}}_2$. Alors, $\mathfrak{m}_2$ est un idéal $\mathfrak{m}'$ contenant $\mathfrak{m}_0$, et, puisque $\mathfrak{m}_0$ est maximal, $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_0$; ceci prouve que $\mathfrak{m}_{\mathscr{M}} \subset \mathfrak{m}_0$, donc $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathfrak{m}}_0$.

Si φ est fidèle, D est évidemment fidèle. Si φ n'est pas fidèle, il existe un $A \in \mathfrak{m}^+$ avec $A \neq 0$, $\varphi(A) = 0$; soit $A = \int_0^{2a} \lambda dE_\lambda$ la décomposition spectrale de A, avec $2a = \| A \| \neq 0$; on a $1 - E_a = A \int_a^{2a} \lambda^{-1} dE_\lambda \in \mathfrak{m}$, $1 - E_a \leqq \frac{1}{a} A$, donc $\varphi(1 - E_a) = 0$, et $1 - E_a \neq 0$: D n'est pas fidèle.

Supposons φ normale. Soit $(\mathscr{M}_i)_{i \in I}$ une famille de variétés de $\widetilde{\mathfrak{m}}$ deux à deux orthogonales, avec $\mathscr{M} = \bigoplus_{i \in I} \mathscr{M}_i \in \widetilde{\mathfrak{m}}$. $P_{\mathscr{M}}$ est la borne supérieure de l'ensemble filtrant croissant des $\sum_{i \in J} P_{\mathscr{M}_i}$, où J parcourt l'ensemble des parties finies de I, donc $D(\mathscr{M}) = \varphi(P_{\mathscr{M}})$ est la borne supérieure des $\varphi(\sum_{i \in J} P_{\mathscr{M}_i}) = \sum_{i \in J} \varphi(P_{\mathscr{M}_i}) = \sum_{i \in J} D(\mathscr{M}_i)$; donc $D(\mathscr{M}) = \sum_{i \in I} D(\mathscr{M}_i)$: D est normale.

Réciproquement, supposons D normale. Soit $A \in \mathfrak{m}^+$ et soit $\mathscr{F} \subset \mathfrak{m}^+$ un ensemble filtrant croissant de borne supérieure A. On a $A \in \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M} \rangle}$ et $\mathscr{F} \subset \mathbf{M}^+_{\langle \mathscr{M} \rangle}$ avec une $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathfrak{m}}$. Il faut prouver que $\varphi(A)$ est la borne supérieure de $\varphi(\mathscr{F})$. Considérant dans $\mathscr{M}$, comme on l'a fait souvent, une composante proprement infinie et une composante finie, on est ramené au cas où $\mathscr{M}$ est finie. On considère la restriction de φ à $\mathbf{M}_{\langle \mathscr{M} \rangle}$ et la trace induite sur $\mathbf{M}_{(\mathscr{M})}$, la restriction de D aux variétés contenues dans $\mathscr{M}$, qui définit une w-fonction normale sur $\widetilde{\mathbf{M}}_{(\mathscr{M})}$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 3'.

2. — Etudions maintenant, par analogie avec les chapitres IV et V, les prolongements d'une w-fonction normale.

Définition 6.2. — *On appellera pseudo-w-fonction toute fonction D définie sur $\widetilde{\mathbf{M}}$, possédant les propriétés suivantes:*

1. $0 \leqq D(\mathscr{M}) \leqq +\infty$.
2. *Si $\mathscr{M}_1 \in \widetilde{\mathbf{M}}$ et $\mathscr{M}_2 \in \widetilde{\mathbf{M}}$ sont orthogonales, on a $D(\mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2) = D(\mathscr{M}_1) + D(\mathscr{M}_2)$.*
3. *Si $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ et $U \in \mathbf{M}_U$, on a $D(U(\mathscr{M})) = D(\mathscr{M})$.*

D sera dite normale si, pour toute famille $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ de variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$ deux à deux orthogonales, on a $D(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i) = \sum_{i\in I} D(\mathcal{M}_i)$.

L'ensemble des $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ telles que $D(\mathcal{M}) < +\infty$ est évidemment un idéal $\mathfrak{I}$ de $\widetilde{\mathbf{M}}$.

Lemme 6.5. — *Soit D une pseudo-w-fonction normale. Il existe trois variétés $\mathcal{M}_0^D$, $\mathcal{M}_\infty^D$, $\mathcal{M}_1^D$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, deux à deux orthogonales, sous-tendant H, bien déterminées par les propriétés suivantes:*

1. *Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_0^D$, $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$, on a: $D(\mathcal{M}) = 0$.*
2. *Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_\infty^D$, $\mathcal{M} \neq 0$, $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$, on a: $D(\mathcal{M}) = +\infty$.*
3. *Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1^D$, $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$, $D(\mathcal{M}) = 0$ entraîne $\mathcal{M} = 0$. De plus, pour toute $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1^D$, $\mathcal{M} \neq 0$, $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$, il existe une $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{M}' \neq 0$, $\mathcal{M}' \in \widetilde{\mathbf{M}}$ avec $D(\mathcal{M}') < +\infty$.*

Si $\mathfrak{I}$ est l'idéal déjà considéré, on a: $\mathcal{M}(\mathfrak{I}) = H \ominus \mathcal{M}_\infty^D = \mathcal{M}_0^D \oplus \mathcal{M}_1^D$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{I}_0$ l'ensemble des $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ telles que $D(\mathcal{M}) = 0$. Les propriétés de D entraînent aussitôt que $\mathfrak{I}_0$ est un idéal de $\widetilde{\mathbf{M}}$. Soit $\mathcal{M}_0^D = \mathcal{M}(\mathfrak{I}_0)$. On a $\mathcal{M}_0^D \subset \mathcal{M}(\mathfrak{I})$, soient $\mathcal{M}_1^D = \mathcal{M}(\mathfrak{I}) \ominus \mathcal{M}_0^D$, et $\mathcal{M}_\infty^D = H \ominus \mathcal{M}(\mathfrak{I})$. Les variétés $\mathcal{M}_0^D$, $\mathcal{M}_1^D$, $\mathcal{M}_\infty^D$ sont dans $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, deux à deux orthogonales, et sous-tendent H. D'après le lemme 3.14 et la normalité de D, on a $D(\mathcal{M}) = 0$ pour toute $\mathcal{M}$ de $\widetilde{\mathbf{M}}$ contenue dans $\mathcal{M}_0^D$. Soit maintenant $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_\infty^D$, $\mathcal{M} \neq 0$, $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$. Si $D(\mathcal{M}) < +\infty$, on a $\mathcal{M} \in \mathfrak{I}$, donc $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}(\mathfrak{I})$ contrairement à la définition de $\mathcal{M}_\infty^D$. Si enfin $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1^D$, $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$, $D(\mathcal{M}) = 0$ entraîne $\mathcal{M} = 0$ par construction de $\mathcal{M}_1^D$; de plus, toute $\mathcal{M} \neq 0$ de $\widetilde{\mathbf{M}}$ contenue dans $\mathcal{M}(\mathfrak{I})$ est sous-tendue par des variétés de $\mathfrak{I}$, donc il existe $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{M}' \neq 0$, $\mathcal{M}' \in \widetilde{\mathbf{M}}$ avec $D(\mathcal{M}') < +\infty$.

L'unicité de $\mathcal{M}_0^D$, $\mathcal{M}_\infty^D$, $\mathcal{M}_1^D$ se démontre comme le résultat correspondant du chapitre IV.

Définition 6.3. — *Soit D une pseudo-w-fonction normale. On dira que D est fidèle si $\mathcal{M}_0^D = 0$, c'est-à-dire si $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$, $\mathcal{M} \neq 0$ entraînent $D(\mathcal{M}) \neq 0$. On dira que D est essentielle si $\mathcal{M}_\infty^D = 0$, c'est-à-dire si $\mathcal{M}(\mathfrak{I}) = H$, (ou $\bar{\mathfrak{I}} = \widetilde{\mathbf{M}}$), c'est-à-dire encore si, pour toute $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$, $\mathcal{M} \neq 0$, il existe une $\mathcal{M}' \in \widetilde{\mathbf{M}}$, $\mathcal{M}' \neq 0$, $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, avec $D(\mathcal{M}') < +\infty$.*

Le lemme 6.5 ramène donc l'étude des pseudo-w-fonctions normales à celle des pseudo-w-fonctions normales fidèles et essentielles.

Les pseudo-w-fonctions normales fidèles s'appellent aussi fonctions-poids. Si H est séparable, toute famille de variétés non nulles de $\widetilde{\mathbf{M}}$ deux à deux orthogonales est au plus dénombrable, de sorte qu'on retrouve bien la définition des weight-functions donnée par J. von Neumann dans [17].

Lemme 6.6. — *Soit D une w-fonction normale, définie sur l'idéal $\mathfrak{I}$. Il existe une et une seule pseudo-w-fonction normale D^* coïncidant avec D sur $\mathfrak{I}$ et telle que $\mathcal{M}_\infty^D = H \ominus \mathcal{M}(\mathfrak{I})$. De plus, D^* est fidèle si et seulement si D est fidèle, essentielle si et seulement si $\bar{\mathfrak{I}} = \widetilde{\mathbf{M}}$.*

Démonstration. — Nous allons construire D^* successivement dans les espaces $H \ominus \mathcal{M}(\mathfrak{I})$ et $\mathcal{M}(\mathfrak{I})$. Si $\mathcal{M} \subset H \ominus \mathcal{M}(\mathfrak{I})$, $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$, $\mathcal{M} \neq 0$, on pose $D^*(\mathcal{M}) = +\infty$. Si $\mathcal{M} \in \bar{\mathfrak{I}}$, on désignera par $D^*(\mathcal{M})$ la borne supérieure des nombres $D(\mathcal{N})$, où $\mathcal{N}$ parcourt l'ensemble des variétés de $\mathfrak{I}$ contenues dans $\mathcal{M}$. On va voir qu'on définit ainsi dans l'espace $\mathcal{M}(\mathfrak{I})$ une pseudo-w-fonction normale. D'abord, D^* possède évidemment les propriétés 1 et 3 de la définition 6.2. Etablissons le résultat intermédiaire suivant:

Si $\mathcal{M} \in \bar{\mathfrak{I}}$, et si $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ est une famille de variétés de $\mathfrak{I}$, deux à deux orthogonales, sous-tendant $\mathcal{M}$, on a $\sum\limits_{i \in I} D(\mathcal{M}_i) = D^*(\mathcal{M})$.

Les nombres $\sum\limits_{i \in J} D(\mathcal{M}_i) = D(\bigoplus\limits_{i \in J} \mathcal{M}_i)$, où J parcourt l'ensemble des parties finies de I, sont majorés par $D^*(\mathcal{M})$, donc $\sum\limits_{i \in I} D(\mathcal{M}_i) \leqq D^*(\mathcal{M})$. Maintenant, soit $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ une variété de $\mathfrak{I}$. On va montrer que $D(\mathcal{M}') \leqq \sum\limits_{i \in I} D(\mathcal{M}_i)$, ce qui prouvera que $D^*(\mathcal{M}) \leqq \sum\limits_{i \in I} D(\mathcal{M}_i)$. Soit J une partie finie de I. Posons $\mathcal{M}_J = \bigoplus\limits_{i \in J} \mathcal{M}_i$, $\mathcal{M}'_J = [P_{\mathcal{M}'} \mathcal{M}_J]$. $\mathcal{M}'_J$ est en position p' avec une variété contenue dans $\mathcal{M}_J$, donc $D(\mathcal{M}'_J) \leqq D(\mathcal{M}_J) \leqq \sum\limits_{i \in I} D(\mathcal{M}_i)$. Les $\mathcal{M}_J$ forment un ensemble filtrant croissant de borne supérieure $\mathcal{M}$, donc les $\mathcal{M}'_J$ forment un ensemble filtrant croissant de borne supérieure $\mathcal{M}'$. Comme D est supposée normale, $D(\mathcal{M}')$ est la borne supérieure des $D(\mathcal{M}'_J)$ (lemme 1.4), donc $D(\mathcal{M}') \leqq \sum\limits_{i \in I} D(\mathcal{M}_i)$.

Ceci posé, pour achever de prouver que D^* est une pseudo-w-fonction normale, considérons une famille $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ de variétés de $\bar{\mathfrak{I}}$ deux à deux orthogonales, et soit $\mathcal{M} = \bigoplus\limits_{i \in I} \mathcal{M}_i$. Pour chaque $i \in I$, il existe (lemme 3.14) une famille $(\mathcal{N}_i^j)_{j \in J_i}$ de variétés de $\mathfrak{I}$ deux à deux orthogonales sous-tendant $\mathcal{M}_i$. On a: $D^*(\mathcal{M}_i) = \sum\limits_{j \in J_i} D(\mathcal{N}_i^j)$ d'après ce qu'on vient de voir. De même, comme les $\mathcal{N}_i^j$ sous-tendent $\mathcal{M}$, on a $D^*(\mathcal{M}) = \sum\limits_{i \in I, j \in J_i} D(\mathcal{N}_i^j)$. D'où $D^*(\mathcal{M}) = \sum\limits_{i \in I} D^*(\mathcal{M}_i)$.

En combinant les fonctions D construites dans les espaces $\mathcal{M}(\mathfrak{I})$

et $H \ominus \mathcal{M}(\mathfrak{I})$, on obtient une pseudo-$w$-fonction normale D^* dans H qui coïncide avec D sur $\mathfrak{I}$. Comme $D^*(\mathcal{M}) < +\infty$ pour $\mathcal{M} \in \mathfrak{I}$, on voit tout de suite que $\mathcal{M}_\infty^{D^*} = H \ominus \mathcal{M}(\mathfrak{I})$. L'unicité de D^* est immédiate puisque D^* doit être normale et coïncider avec D sur $\mathfrak{I}$. Enfin il est aussi immédiat que D^* est fidèle si et seulement si D est fidèle. Le lemme est démontré.

Si D est une pseudo-w-fonction normale, on désignera par D_* la restriction de D à l'idéal $\mathfrak{I}$ des $\mathcal{M} \in \widehat{\mathbf{M}}$ telles que $D(\mathcal{M}) < +\infty$. La fonction D_* est une w-fonction normale.

Comme au chapitre IV, on établit alors les résultats suivants:

LEMME 6.7. — *Soit D une w-fonction normale définie sur l'idéal $\mathfrak{I}$. Les propriétés suivantes de D sont équivalentes:*

1. *Aucune w-fonction normale, définie sur un idéal $\mathfrak{I}' \subset \bar{\mathfrak{I}}$, ne prolonge effectivement D.*

2. *Si $\mathcal{M} \in \bar{\mathfrak{I}}$, et si $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ est une famille de variétés de $\mathfrak{I}$ deux à deux orthogonales sous-tendant $\mathcal{M}$ telle que $\sum_{i \in I} D(\mathcal{M}_i) < +\infty$, on a $\mathcal{M} \in \mathfrak{I}$.*

3. *On a $D = (D^*)_*$.*

4. *En posant $D'(\mathcal{M}) = D(\mathcal{M})$ pour $\mathcal{M} \in \mathfrak{I}$ et $D'(\mathcal{M}) = +\infty$ pour $\mathcal{M} \in \widehat{\mathbf{M}}$, $\mathcal{M} \notin \mathfrak{I}$, on définit une fonction D' qui est une pseudo-w-fonction normale et qui n'est autre que D^*.*

DÉFINITION 6.4. *Si une w-fonction normale possède les propriétés du lemme 6.7 elle sera dite maximale.*

PROPOSITION 11. — *a. Il existe une correspondance biunivoque entre les pseudo-w-fonctions normales D et les w-fonctions normales maximales D'. Cette correspondance est définie par les formules $D' = D_*$, $D = D'^*$.*

b. *Soit D'' une w-fonction normale définie sur l'idéal $\mathfrak{I}$. Les w-fonctions normales définies sur un idéal $\mathfrak{I}' \subset \bar{\mathfrak{I}}$, qui prolongent D'', sont toutes contenues dans l'une d'entre elles, qui est la seule maximale. Celle-ci n'est autre que $(D''^*)_*$.*

Ainsi, l'étude des w-fonctions normales est ramenée à celle des w-fonctions normales maximales, ou, ce qui revient exactement au même, à celle des pseudo-w-fonctions normales.

3. — Nous pouvons maintenant énoncer le résultat essentiel de ce chapitre, qui ramène entièrement l'étude des w-fonctions normales à celle des traces normales.

THÉORÈME 4. — *Il existe une correspondance biunivoque $\varphi \to D$ entre les pseudo-traces normales φ et les pseudo-w-fonctions normales D. Cette correspondance est définie par la formule $D(\mathcal{M}) = \varphi(P_{\mathcal{M}})$. De plus, D est fidèle (resp. essentielle) si et seulement si φ est fidèle (resp. essentielle).*

Démonstration. — Soit φ une pseudo-trace normale. La formule $D(\mathscr{M}) = \varphi(P_{\mathscr{M}})$ définit évidemment une pseudo-$\mathfrak{w}$-fonction normale. Maintenant, soit D une pseudo-$\mathfrak{w}$-fonction normale. Soit $\mathfrak{I}$ l'idéal de définition de D_*. D'après la proposition 10, il existe sur $\mathfrak{m}(\mathfrak{I})$ une trace normale φ' telle que $D_*(\mathscr{M}) = \varphi'(P_{\mathscr{M}})$ pour $\mathscr{M} \in \mathfrak{I}$. Soit $\varphi = \varphi'^*$. Par normalité on a $D(\mathscr{M}) = \varphi(P_{\mathscr{M}})$ pour toute $\mathscr{M} \in \bar{\mathfrak{I}}$. D'autre part, pour toute $\mathscr{M}$ de $\widetilde{\mathbf{M}}$ contenue dans $H \ominus \mathscr{M}(\mathfrak{I})$ et $\neq 0$, on a $D(\mathscr{M}) = +\infty = \varphi(P_{\mathscr{M}})$. Donc $D(\mathscr{M}) = \varphi(P_{\mathscr{M}})$ pour toute $\mathscr{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$. Encore d'après la proposition 10, la restriction de φ à $\mathfrak{m}(\mathfrak{I})$ est bien déterminée par D_*, donc φ est bien déterminée par D: la correspondance $\varphi \to D$ est biunivoque. Si p est fidèle, D est évidemment fidèle. Si D est fidèle, il en est de même de D_*, donc de φ' (proposition 10), donc de $\varphi'^* = \varphi$. Enfin, $\mathscr{M}^D_\infty = \mathscr{M}^\varphi_\infty$, ce qui prouve que D est essentielle si et seulement si φ est essentielle.

BIBLIOGRAPHIE.

J. W. Calkin,

[1] Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space, Ann. of Math., 42 (1941), pp. 839—873.

J. Dixmier,

[2] Les anneaux d'opérateurs de classe finie, Ann. Ec. Norm. Sup., 66 (1949), pp. 209—261.

J. Dixmier,

[3] Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert, Ann. of Math., 51 (1950), pp. 387—408.

J. Dixmier,

[4] Sur les opérateurs self-adjoints d'un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sci. Paris, 230 (1950), pp. 267—269.

J. Dixmier,

[5] Applications $\natural$ dans les anneaux d'opérateurs, C.R. Acad. Sci. Paris, 230 (1950), pp. 607—608.

J. Dixmier,

[6] Sur la réduction des anneaux d'opérateurs, Ann. Ec. Norm. Sup., 68 (1951), pp. 185—202.

J. Dixmier,

[7] Sur certains espaces considérés par M. H. Stone, à paraître au Summa Brasiliensis Mathematicae.

I. Gelfand et M. Neumark,

[8] On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, Math. Sb., 12 (1943), pp. 197—212.

R. Godement,

[9] Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires, Journ. de Math., 30 (1951), pp. 1—110.

F. J. Murray et J. von Neumann,
[10] On rings of operators, Ann. of Math., 37 (1936), pp. 116—229.

F. J. Murray et J. von Neumann,
[11] On rings of operators II, Trans. Amer. Math. Soc., 41 (1937), pp. 208—248.

F. J. Murray et J. von Neumann,
[12] On rings of operators IV, Ann. of Math., 44 (1943), pp. 716—808.

J. von Neumann,
[13] Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren, Math. Ann., 102 (1929), pp. 370—427.

J. von Neumann,
[14] On a certain topology for rings of operators, Ann. of Math., 37 (1936), pp. 111—115.

J. von Neumann,
[15] On rings of operators III, Ann. of Math., 41 (1940), pp. 94—161.

J. von Neumann,
[16] On some algebraical properties of operator rings, Ann. of Math., 44 (1943), pp. 709—715.

J. von Neumann,
[17] On rings of operators. Reduction theory, Ann. of Math., 50 (1949), pp. 401–485.

(Oblatum 25-10-50).