COMPOSITIO MATHEMATICA

NICOLAS PASTIDES

Sur les équations fonctionnelles du type de Poincaré

Compositio Mathematica, tome 10 (1952), p. 168-212
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1952__10__168_0>

Sur les équations fonctionnelles du type de Poincaré

par

M. Nicolas Pastidès

Introduction

Dans son mémoire [1]) "Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes" H. Poincaré étudie le système suivant d'équations fonctionnelles:

$$\begin{aligned}
R_1[\varphi_1(u),\ \varphi_2(u),\ \ldots,\ \varphi_n(u)] &= \varphi_1(su)\\
R_2[\varphi_1(u),\ \varphi_2(u),\ \ldots,\ \varphi_n(u)] &= \varphi_2(su)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots\\
R_n[\varphi_1(u),\ \varphi_2(u),\ \ldots,\ \varphi_n(u)] &= \varphi_n(su)
\end{aligned}$$

où R_1, R_2, ..., R_n, sont des polynômes donnés de n variables, φ_1, φ_2, ..., φ_n, n fonctions inconnues, et s un nombre réel ou complexe *de module supérieur à un.*

Emile Picard, dans deux memoires [2]), a repris le même système d'équations par la méthode des approximations successives, et dans un troisième memoire [3]) il a étudié les équations suivantes, qui généralisent les précédentes:

$$\begin{aligned}
&R_1[\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots,\\
&\qquad\qquad \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = \varphi_1(s_1u_1, s_2u_2, \ldots, s_nu_n)\\
&R_2[\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots,\\
&\qquad\qquad \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = \varphi_2(s_1u_1, s_2u_2, \ldots, s_nu_n)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&R_n[\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots,\\
&\qquad\qquad \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = \varphi_n(s_1u_1, s_2u_2, \ldots, s_nu_n)
\end{aligned}$$

où les $\varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sont n fonctions des n variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, et les $s_1, s_2, \ldots, s_n$ des multiplicateurs *de modules supérieurs à un,* et qui ne sont pas nécessairement distincts entre eux. D'ailleurs le cas, où ces multiplicateurs sont tous égaux entre eux, avait été envisagé par H. Poincaré.

---

1) Journal de Liouville 4ème série tome 6, 1890.

2) Acta Mathematica t. XVIII et XXIII, et Annales de l'Ecole Normale 1913.

3) Comptes rendus 24 Juillet 1904.

Dans le présent travail nous reprenons l'étude du système considéré par Emile Picard par un nouveau procédé de majoration, que nous appliquons ensuite au cas où il existe un entier p tel que l'on ait:

$$s_1^p = s_2^p = \ldots = s_n^p = 1$$

ce cas n'ayant pas été traité par les auteurs sus-mentionnés.

Ce dernier cas nous a amenés à considérer aussi le système suivant d'équations fonctionnelles

$$\begin{aligned}
&\Phi_1[R_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), R_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \\
&\qquad R_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = s_1\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\Phi_2[R_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), R_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \\
&\qquad R_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = s_2\Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Phi_n[R_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), R_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \\
&\qquad R_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = s_n\Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

qui généralise l'équation de Schroeder

$$\Phi[R(x)] = s\Phi(x)$$

En dernier lieu nous étudions le système:

$$\begin{aligned}
&R_1[\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = \\
&\qquad \varphi_1[Q_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), Q_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, Q_n(u_1, \ldots, u_n)] \\
&R_2[\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n), \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = \\
&\qquad \varphi_2[Q_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), Q_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, Q_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&R_n[\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = \\
&\qquad \varphi_n[Q_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), Q_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, Q_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)]
\end{aligned}$$

où les $R_1, R_2, \ldots, R_n$ et les $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, sont des fonctions données et les $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ les fonctions inconnues.

H. Poincaré et E. Picard ont supposé que les $R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étaient des fractions rationnelles, et cela dans le but de faire le prolongement analytique des fonctions φ_i à l'aide des équations fonctionnelles considérées. Comme nous nous occupons de l'existence de solutions analytiques au voisinage d'un point fixe de la transformation

$$X_1 = R_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad X_2 = R_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \\ X_n = R_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

nous supposons seulement que les $R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont analytiques au voisinage du point en question. Comme point fixe nous prenons le point $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Nous sommes profondement reconnaissants à Monsieur Georges Valiron, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, pour nous avoir conseillé ces recherches.

CHAPITRE 1

Propriétés générales

1.1. Posons le problème.

$$
\begin{aligned}
R_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \alpha_1^1 x_1 + \alpha_2^1 x_2 + \ldots + \alpha_n^1 x_n + \ldots \\
R_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \alpha_1^2 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \ldots + \alpha_n^2 x_n + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
R_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \alpha_1^n x_1 + \alpha_2^n x_2 + \ldots + \alpha_n^n x_n + \ldots
\end{aligned}
$$

sont n séries entières, données, des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ces séries sont convergentes dans un certain domaine, renfermant l'origine $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, et s'annulent en ce point.

Nous cherchons des solutions:

$$
(\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n))
$$
$$
\varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \beta_1^i u_1 + \beta_2^i u_2 + \ldots + \beta_n^i u_n + \ldots
$$

du système

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&R_1[\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \\
&\qquad\qquad \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = \varphi_1(s_1 u_1, s_2 u_2, \ldots, s_n u_n) \\
&R_2[\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \\
&\qquad\qquad \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = \varphi_2(s_1 u_1, s_2 u_2, \ldots, s_n u_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&R_n[\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \\
&\qquad\qquad \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = \varphi_n(s_1 u_1, s_2 u_2, \ldots, s_n u_n)
\end{aligned}
\right.
$$

qui soient des fonctions des n variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, analytiques et s'annulant au point $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$. Nous imposons de plus la condition que *chaque u_j figure au premier degré au moins dans une des séries φ_i.*

En substituant dans les équations (1) les R_i et les φ_i par leur développements en série, et en ordonnant suivant les puissances des u_j, l'identification des coefficients de u_k nous donne:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1^1 \beta_k^1 + \alpha_2^1 \beta_k^2 + \ldots + \alpha_n^1 \beta_k^n &= s_k \beta_k^1 \\
\alpha_1^2 \beta_k^1 + \alpha_2^2 \beta_k^2 + \ldots + \alpha_n^2 \beta_k^n &= s_k \beta_k^2 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_1^n \beta_k^1 + \alpha_2^n \beta_k^2 + \ldots + \alpha_n^n \beta_k^n &= s_k \beta_k^n
\end{aligned}
$$

pour tout $k = 1, 2, \ldots n$.

Comme nous avons supposé que pour chaque k, au moins l'un des $\beta_k^1, \beta_k^2, \ldots, \beta_k^n$ est différent de 0, il s'ensuit que s_k doit être racine de l'équation en s, $\Phi(s) = 0$, où

$$\Phi(s) = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 - s, & \alpha_2^1, & \ldots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2, & \alpha_2^2 - s, & \ldots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^n, & \alpha_2^n, & \ldots & \alpha_n^n - s \end{vmatrix}$$

Puisque cette équation est de degré n, si l'on veut que $s_1, s_2, \ldots, s_n$ soient tous distincts entre eux, $\Phi(s) = 0$ doit avoir toutes ses racines distinctes, et les multiplicateurs $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont respectivement égaux à ces racines.

Posons:

$$\begin{aligned} f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \lambda_1^1 \varphi_1 + \lambda_2^1 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n^1 \varphi_n \\ f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \lambda_1^2 \varphi_1 + \lambda_2^2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n^2 \varphi_n \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \lambda_1^n \varphi_1 + \lambda_2^n \varphi_2 + \ldots + \lambda_n^n \varphi_n \end{aligned}$$

le déterminant $\| \lambda_i^j \|$ étant différent de 0.

Les fonctions φ_i vérifiant les équations (1), les fonctions f_i vérifient les équations suivantes de même forme que les équations (1):

$$(2)\quad \begin{cases} Q_1[f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \\ \qquad\qquad f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = f_1(s_1u_1, s_2u_2, \ldots, s_nu_n) \\ Q_2[f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \\ \qquad\qquad f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = f_2(s_1u_1, s_2u_2, \ldots, s_nu_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_n[f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \\ \qquad\qquad f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = f_n(s_1u_1, s_2u_2, \ldots, s_nu_n) \end{cases}$$

Les fonctions $Q_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ s'obtiennent, en partant des $R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, de la façon suivante:

Nous désignons par R la substitution

$$[x_i, R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)], \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

par Λ la substitution linéaire

$$[y_i, \lambda_1^i x_1 + \lambda_2^i x_2 + \ldots + \lambda_n^i x_n], \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

par Λ^{-1}, la substitution inverse de la précédente et par T la substitution

$$[y_i, Q_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

on a alors

$$T = A^{-1}RA$$

relation qui détermine les fonctions $Q_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Si nous posons

$$Q_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_1^i y_1 + a_2^i y_2 + \ldots + a_n^i y_n + \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots\nu_n>1} a^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_n^{\nu_n}$$

La théorie des substitutions linéaires nous donne les résultats suivants:

1. Si l'équation $\Phi(s) = 0$ a toutes ses racines distinctes, on peut choisir les λ_i^j de façon à avoir $a_k^i = 0$ si $k \neq i$ et $a_i^i = s_i$, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ étant les racines de $\Phi(s) = 0$.

2. Si les racines de $\Phi(s) = 0$ ne sont pas toutes distinctes, on peut choisir les λ_i^j, de façon à avoir: $a_i^i = s_i$, $a_k^i = 0$ pour $i < k$ et pour $i > k$ avec $s_i \neq s_k$.

Quant aux a_k^i pour lesquels on a $i > k$ avec $s_i = s_k$ on ne peut rien dire.

Nous supposons que les éléments de la matrice $\| \lambda_i^j \|$ ont été choisis de façon à avoir les propriétés ci-dessus (1 et 2), et nous étudions les équations (2) à la place des équations (1).

Nous posons:

$$(3)\quad \begin{cases} Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_1^1 y_1 + \sum\limits_{\nu_1+\nu_2+\ldots\nu_n>1} a^1_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_n^{\nu_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_1^i y_1 + a_2^i y_2 + \ldots \\ \qquad + a_i^i y_i + \sum\limits_{\nu_1+\nu_2+\ldots\nu_n>1} a^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_n^{\nu_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_1^n y_1 + a_2^n y_2 + \ldots + a_i^n y_i + \ldots \\ \qquad + a_n^n y_n + \sum\limits_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n>1} a^n_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_n^{\nu_n} \end{cases}$$

et

$$(4)\quad \begin{cases} f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) = b_1^1 u_1 + b_2^1 u_2 + \ldots + b_n^1 u_n \\ \qquad + \sum\limits_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n>1} b^1_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} u_1^{\nu_1} u_2^{\nu_2} \ldots u_n^{\nu_n} \\ f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) = b_1^2 u_1 + b_2^2 u_2 + \ldots + b_n^2 u_n \\ \qquad + \sum\limits_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n>1} b^2_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} u_1^{\nu_1} u_2^{\nu_2} \ldots u_n^{\nu_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) = b_1^n u_1 + b_2^n u_2 + \ldots + b_n^n u_n \\ \qquad + \sum\limits_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n>1} b^n_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} u_1^{\nu_1} u_2^{\nu_2} \ldots u_n^{\nu_n} \end{cases}$$

Remarquons que l'équation, qui pour le système (2) joue le même rôle que l'équation $\Phi(s)=0$ pour le système (1), est $F(s)=0$ avec

$$F(s)=\begin{vmatrix} a_1^1-s, & 0, & 0 & \dots & 0 \\ a_1^2, & a_2^2-s, & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n-s \end{vmatrix}$$

ses racines sont

$$a_1^1,\ a_2^2,\ \dots\ a_n^n$$

soit les mêmes que celles de $\Phi(s)=0$, puisque $a_i^i=s_i$.

1.2. *Etude formelle des équations* (2). En écrivant que les équations (2) sont formellement satisfaites, on obtient d'abord:

$$(5)\ \begin{cases} s_1 b_k^1 = s_k b_k^1 \\ a_1^2 b_k^1 + s_2 b_k^2 = s_k b_k^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^n b_k^1 + a_2^n b_k^2 + \dots + a_{n-1}^n b_k^{n-1} + s_n b_k^n = s_k b_k^n \end{cases}$$

pour tout $k=1,2,\dots n$.
(On a tenu compte de ce que $a_1^1=s^1$, $a_2^2=s_2$, ..., $a_n^n=s_n$). Ces équations déterminent tous les b_k^i, une fois que l'on a choisi arbitrairement un certain nombre d'entre eux. Par exemple dans le cas où les racines, $s_1, s_2, \dots, s_n$ sont toutes distinctes on a: $b_k^i=0$ pour $i\neq k$; b_i^i arbitraire pour tout i.

Les coefficients des termes du 1er degré des $f_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$ étant ainsi déterminés, les coefficients des autres termes sont donnés par les équations recurrentes qui suivent:

Nous considérons un ensemble de n entiers non négatifs $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ dont la somme est supérieure à 1. En indentifiant les termes en $u_1^{\mu_1}, u_2^{\mu_2}, \dots, u_n^{\mu_n}$ dans les deux membres des équations (2), on obtient

$$(6)\ \begin{cases} (s_1 - s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \dots s_n^{\mu_n})\, b^1_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = -T^1_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \\ a_1^2 b^1_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} + (s_2 - s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \dots s_n^{\mu_n})\, b^2_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = -T^2_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^i b^1_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} + a_2^i b^2_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} + \dots + a_{i-1}^i b^{i-1}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} + \\ \qquad + (s_i - s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \dots s_n^{\mu_n})\, b^i_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = -T^i_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^n b^1_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} + a_2^n b^2_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} + \dots + a_{n-1}^n b^{n-1}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} + \\ \qquad + (s_n - s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \dots s_n^{\mu_n})\, b^n_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = -T^n_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \end{cases}$$

où les $T^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ sont des polynômes à coefficients positifs des

$$a^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \text{ avec } \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n \leqq \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$$

et des

$$b^j_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \text{ avec } \nu_1 + \nu_i + \ldots + \nu_n < \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Le système (6) est possible si $F(s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_n^{\mu_n}) \neq 0$. D'où le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si les s_1, s_2, ..., s_n sont racines de l'équation $F(s) = 0$, et si de plus, pour tout système de n entiers non négatifs $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ dont la somme est plus grande que un, on a $F(s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_n^{\mu_n}) \neq 0$, alors la résolution des équations* (6) *est possible et les séries* (4) *qui en résultent, vérifient formellement les équations* (2).

1.3. *Convergence des séries obtenues.* Nous employons la méthode des fonctions majorantes [4]).

Formons les séries:

$$(7) \begin{cases} P_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = A_1^1 y_1 - \sum\limits_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n>1} A^1_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_n^{\nu_n} \\ P_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = -A_1^2 y_1 + A_2^2 y_2 - \\ \qquad - \sum\limits_{\nu_1+\nu_2+\ldots\nu_n>1} A^2_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_n^{\nu_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = -A_1^i y_1 - A_1^i y_2 - \ldots - A^i_{i-1} y_{i-1} + \\ \qquad + A_i^i y_i - \sum\limits_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n>1} A^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_n^{\nu_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) = -A_1^n y_1 - A_2^n y_2 - \ldots - A^n_{n-1} y_{n-1} + \\ \qquad + A_n^n y_n - \sum\limits_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n>1} A^n_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_n^{\nu_n} \end{cases}$$

les A étant tous positifs, avec

$$A^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \geqq | a^i_{\nu_8\nu_2\ldots\nu_n} |$$

et les A^j_i à déterminer ultérieurement. De plus les $A^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}$ sont choisis de façon que ces séries aient un domaine de convergence non nul.

---

[4]) Le procédé de majoration que nous employons est une extension de celui employé' par F. W. Bradley "Proceedings of the Mathematical Society of Egypt Vol. 3 No. 3, 1947".

Nous posons aussi

$$(8)\quad \begin{cases} P_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = q_1^1 Y_1 + q_2^1 Y_2 + \ldots + q_n^1 Y_n \\ P_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = q_1^2 Y_1 + q_2^2 Y_2 + \ldots + q_n^2 Y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) = q_1^n Y_1 + q_2^n Y_2 + \ldots + q_n^n Y_n \end{cases}$$

les q_i^j étant des nombres arbitraires plus grands que 0, et tels que

$$\Delta = \begin{vmatrix} q_1^1, & q_2^1, & \ldots, & q_n^1 \\ q_1^2, & q_2^2, & \ldots, & q_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_1^n, & q_2^n, & \ldots, & q_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

Comme

$$\left[\frac{D(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right]_{y_1=y_2=\ldots=y_n=0} = \frac{A_1^1 A_2^2 \ldots A_n^n}{\Delta} \neq 0$$

les équations (8) définissent implicitement $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en tant que séries entières des $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$, ces séries étant convergentes dans un certain domaine non nul renfermant l'origine.

Soit

$$(9)\quad \begin{cases} y_1 = B_1^1 Y_1 + B_2^1 Y_2 + \ldots + B_n^1 Y_n + \sum\limits_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n>1} B^1_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} Y_1^{\nu_1} Y_2^{\nu_2} \ldots Y_n^{\nu_n} \\ y_2 = B_1^2 Y_1 + B_2^2 Y_2 + \ldots + B_n^2 Y_n + \sum\limits_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n>1} B^2_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} Y_1^{\nu_1} Y_2^{\nu_2} \ldots Y_n^{\nu_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = B_1^n Y_1 + B_2^n Y_2 + \ldots + B_n^n Y_n + \sum\limits_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n>1} B^n_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} Y_1^{\nu_1} Y_2^{\nu_2} \ldots Y_n^{\nu_n} \end{cases}$$

ces séries.

En substituant dans les équations (8) les $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par ces développements, et en identifiant les deux membres, on obtient les équations recurrentes qui donnent les B en fonction des A et des q_i^j.

Ecrivons d'abord celles de ces équations qui donnent les B_k^i.

$$(10)\quad \begin{cases} A_1^1 B_k^1 = q_k^1 \\ -A_1^2 B_k^1 + A_2^2 B_k^2 = q_k^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -A_1^i B_k^1 - A_2^i B_k^2 - \ldots - A_{i-1}^i B_k^{i-1} + A_i^i B_k^i = q_k^i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -A_1^n B_k^1 - A_2^n B_k^2 - \ldots - A_{n-1}^n B_k^{n-1} + A_n^n B_k^n = q_k^n \end{cases}$$

En comparant ces équations aux équations (5), on voit que l'on peut toujours choisir les q_i^j, et les $A_i^j > | a_i^j |$, de façon à avoir pour tout couple d'indices (k, i),

$$B_k^i > | b_k^i |$$

Ecrivons maintenant les équations qui déterminent par recurrence les $B^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}$. Soit $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ un ensemble de n entiers non négatifs, dont la somme est plus grande que 1. On a

$$(11)\quad \begin{cases} A_1^1 B^1_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = S^1_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \\ -A_1^2 B^1_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} + A_2^2 B^2_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = S^2_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -A_1^i B^1_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} - \ldots - A^i_{i-1} B^{i-1}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} + A_i^i B^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = S^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -A_1^n B^1_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} - \ldots - A^n_{n-1} B^{n-1}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} + A_n^n B^n_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = S^n_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \end{cases}$$

où les $S^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ sont des polynômes à coefficients positifs, des

$$A^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \text{ avec } \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n \leqq \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$$

et des

$$B^j_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \text{ avec } \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n < \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

et ces polynômes s'obtiennent en partant des polynômes $T^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$, et en y substituant les A et les B respectivement aux a et aux b.

Nous faisons l'hypothèse supplémentaire qu'il existe un nombre positif ϱ tel que, quels que soient i et l'ensemble des n nombres $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ avec $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n > 1$, on ait

$$| s^i - s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_n^{\mu_n} | > \varrho$$

en faisant toutefois remarquer que, dans le cas où les modules des $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont tous supérieurs à 1 ou tous inférieurs à 1, cette condition est une conséquence de la condition $F(s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_n^{\mu_n}) \neq 0$.

On voit alors que si l'on remplace les A_i^i par des nouvelles valeurs plus petites que celles qui ont été déjà choisies, et aussi plus petites que ϱ, on aura

$$B^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} > | b^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} |$$

quels que soient i et $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ avec $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n > 1$. Ceci prouve la convergence des séries $f_1, f_2, \ldots, f_n$ du moins dans le même domaine que les séries (9). D'où le théorème:

Théorème II. *Si aux hypothèses du théorème* 1 *on ajoute la condition qu'il existe un* ϱ *tel que, quels que soient* i *et* *l'ensemble* $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ avec $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n > 1$, on ait $| s^i - s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_n^{\mu_n} | > \varrho$, *alors les séries dont les coefficients sont donnés par les équations* (5) *et* (6) *admettent un domaine de convergence non nul, et représentent des fonctions* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *qui vérifient les équations* (2).

CHAPITRE II

Etude particulière du cas où les hypothèses du théorème II sont satisfaites

2.1. Commençons par une légère généralisation du système (2). Nous considérons le système

$$(12) \quad \begin{cases} Q_i[f_1(u_1, u_2, \ldots, u_m), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_m), \ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_m)] \\ \qquad = f_i(s_1 u_1, s_2 u_2, \ldots, s_m u_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

où les fonctions inconnues dépendent de m variables au lieu de n. Tout ce qui a été dit au N° 1.2 s'applique sans changements au cas actuel; il en est de même pour le n° 1.3 à condition de remplacer les équations (8) par les suivantes

$$P_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = q_1^i Y_1 + q_2^i Y_2 + \ldots + q_m^i Y_m \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dans lesquelles les seconds membres renferment m variables au lieu de n. Les théorèmes 1 et II s'étendent donc aux équations (12). En particulier si nous prenons $m = 1$, nous obtenons les équations de H. Poincaré.

La question qui se pose alors, est de savoir quel est le plus grand m pour lequel les équations (12) admettent des solutions analytiques qui dépendent effectivement de m variables, et cette question est liée au nombre de constantes arbitraires dont dépend la solution analytique la plus générale des équations (12). Nous disons q'une solution de (12) dépend effectivement de m variables, lorsqu'on ne peut pas, par un changement linéaire de variables, la transformer en un système de fonctions, dépendant d'un nombre moindre de variables, et vérifiant un système de équations du même type que le système (12). Il est évident en effet, que si dans une solution

$$f_1(u_1, u_2, \ldots, u_m), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_m), \ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

du système (12), nous appliquons la substitution

$$u_1 = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \ldots + \delta_{r+1} v_{r+1}$$

nous obtenons un système de fonctions

$$\begin{gathered}\mathfrak{f}_i(v_1, v_2, \ldots, v_{r+1}, u_2, \ldots, u_m)\\ = f_i(\delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \ldots + \delta_{r+1} v_{r+1}, u_2, \ldots, u_m)\end{gathered}$$

de $m + r$ variables, qui vérife les équations

$$\begin{gathered}Q_i[\mathfrak{f}_1(v_1, v_2, \ldots, v_{r+1}, u_2, \ldots, u_m), \ldots, \mathfrak{f}_n(v_1, v_2, \ldots, v_{r+1}, u_2, \ldots, u_m)]\\ = \mathfrak{f}_i(s_1 v_1, s_1 v_2, \ldots, s_1 v_{r+1}, s_2 u_2, s_3 u_3, \ldots, s_n u_n)\\ i = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered}$$

Mais ce système de fonctions ne dépend pas *effectivement* des $m+r$ variables. Dans ce chapitre nous examinons la question qui précède, en supposant les hypothèses du théorème II satisfaites.

Nous commençons par faire deux remarques utiles.

2.1.1. Remarque 1. Si dans les équations (12) nous supposons les $s_1, s_2, \ldots, s_m$ tous distincts, ce qui suppose $m \leqq n$, alors toute solution analytique de ces équations dépend effectivement des m variables $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

En effet dans le cas contraire, il y aurait $r < m$ formes linéaires des $u_1, u_2, \ldots, u_m$, soit

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} v_1 = d_1^1 u_1 + d_2^1 u_2 + \ldots + d_m^1 u_m,\\ v_2 = d_1^2 u_1 + d_2^2 u_2 + \ldots + d_m^2 u_m,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ v_r = d_1^r u_1 + d_2^r u_2 + \ldots + d_m^r u_m \end{array}\right.$$

telles que l'on ait

$$\begin{array}{l} s_1' v_1 = d_1^1 s_1 u_1 + d_2^1 s_2 u_2 + \ldots + d_m^1 s_m u_m,\\ s_2' v_2 = d_1^2 s_1 u_1 + d_2^2 s_2 u_2 + \ldots + d_m^2 s_m u_m,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ s_r' v_r = d_1^r s_1 u_1 + \ldots + d_m^r s_m u_m \end{array}$$

où les $s_1', s_2', \ldots, s_r'$, sont des nombres choisis parmi les $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Ces dernières relations entraînent que chaque v_i doit être égal à un u_1 multiplié par une constante. Donc le changement de variables défini par (13) ne saurait diminuer le nombre de variables dont dépend une solution des équations (12).

2.1.2. Remarque 2. Considérons une solution du système (12)

$$f_1(u_1, u_2, \ldots, u_m),\ f_2(u_1, u_2, \ldots, u_m), \ldots,\ f_n(u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

et soit $r < m$.

Si dans cette solution nous faisons

$$u_{r+1} = u_{r+2} = \ldots = u_m = 0$$

nous obtenons le système de fonctions

$$\mathfrak{f}_1(u_1, u_2, \ldots, u_r),\ \mathfrak{f}_2(u_1, u_2, \ldots, u_r), \ldots,\ \mathfrak{f}_n(u_1, u_2, \ldots, u_r),$$

où $$\mathfrak{f}_i(u_1, u_2, \ldots, u_r) = f_i(u_1, u_2, \ldots, u_r, 0, 0, \ldots, 0)$$

qui est alors une solution du système

$$(14)\quad \begin{cases} Q_i[\mathfrak{f}_1(u_1, u_2, \ldots, u_r), \mathfrak{f}_2(u_1, u_2, \ldots, u_r), \ldots, \mathfrak{f}_n(u_1, u_2, \ldots, u_r)] \\ \qquad = \mathfrak{f}_i(s_1u_1, s_2u_2, \ldots, s_ru_r) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

dans lequel les fonctions inconnues dependent de r variables. Nous allons montrer que toutes les solutions analytiques de ce dernier système peuvent s'obtenir de cette façon. Il suffit en effet de remarquer que les équations analogues aux équations (5) et (6) relatives au système (14) s'obtiennent, en partant des mêmes équations relatives au système (12), et en y remplaçant par des zéros les coefficients des termes des f_i qui renferment les variables $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_m$.

2,2. *Etude du cas où les racines de $F(s) = 0$ sont toutes distinctes.*

D'après la remarque 1, le système (2) admet une solution analytique qui dépend effectivement de n variables. D'autre part les équations (5) nous montrent que la solution analytique la plus générale qui s'annule à l'origine, dépend en plus de n constantes arbitraires qui sont les coefficients $b_1^1, b_2^2, \ldots, b_n^n$. Un raisonnement par recurrence sur les équations (6) nous montre alors, que si nous désignons par $c^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ les valeurs que prennent les $b^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ dans le cas où $b_1^1 = b_2^2 = \ldots = b_n^n = 1$ nous aurons dans le cas général

$$b^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = c^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\,(b_1^1)^{\mu_1}\,(b_2^2)^{\mu_2}\ldots(b_n^n)^{\mu_n}.$$

Il s'ensuit que si nous désignons par

$$f_1^{(1)}(u_1, u_2, \ldots, u_n),\ f_2^{(1)}(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots,\ f_n^{(1)}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

la solution qui correspond à $b_1^1 = b_2^2 = \ldots = b_n^n = 1$
la solution la plus générale qui soit analytique et s'annule à l'origine, est donnée par

$$\begin{aligned} f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= f_1^{(1)}(b_1^1u_1, b_2^2u_2, \ldots, b_n^nu_n) \\ f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= f_2^{(1)}(b_1^1u_1, b_2^2u_2, \ldots, b_n^nu_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= f_n^{(1)}(b_1^1u_1, b_2^2u_2, \ldots, b_n^nu_n) \end{aligned}$$

où $b_1^1, b_2^2, \ldots, b_n^n$ sont des constantes arbitraires. Nous remarquons que l'existence de la solution $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ ci dessus, la solution $(f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_n^{(1)})$ étant donnée, est évidente à priori d'après la forme des équations (2).

2.3. *Etude du cas où les racines de $F(s) = 0$ ne sont pas toutes distinctes.* Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$, $(r < n)$ les racines de $F(s) = 0$ qui sont distinctes entre elles. Nous considérons alors le système suivant d'équations

$$
(15) \quad \begin{aligned} Q_i[f_1(u_1, u_2, \ldots, u_r), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_r), \ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_r)] \\ = f_i(\sigma_1 u_1, \sigma_2 u_2, \ldots, \sigma_r u_r) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}
$$

D'après la remarque 1, le système (15) admet une solution analytique qui dépend effectivement de r variables. Les coefficients de cette solution sont donnés par les équations récurrentes (5) et (6), adaptées au cas actuel. Examinons le nombre de constantes arbitraires qui figurent dans la solution. Pour cela considérons un des systèmes (5) soit

$$
(16) \quad \begin{cases} s_1 b_k^1 = \sigma_k b_k^1 \\ a_1^2 b_k^1 + s_2 b_k^2 = \sigma_k b_k^2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_1^n b_k^1 + a_2^n b_k^2 + \ldots + a_{n-1}^n b_k^{n-1} + s_n b_k^n = \sigma_k b_k^n \end{cases}
$$

qui correspond à un k donné. Nous supposons que σ_k est une racine multiple d'ordre ζ_k, soit $\sigma_k = s_{\eta+1} = s_{\eta+2} = \ldots = s_{\eta+\zeta_k}$. Le système (16) admet au plus ζ_k constantes arbitraires.

En effet:

Les b_k^i avec $i < \eta + 1$ sont nuls.

Chaque b_k^i avec $\eta + 1 \leqq i \leqq \eta + \zeta_k$ est nul ou arbitraire, et les b_k^i avec $i > \eta + \zeta_k$ sont des expressions linéaires des b_k^i qui sont arbitraires.

Il s'ensuit que le nombre maximum de constantes arbitraires, dont dépend la solution cherchée, est égal à n, $(\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_r = n)$, mais il peut se faire que la solution dépende d'un nombre de constantes inférieur à n et supérieur ou égal à r.

Examinons maintenant comment ces constantes arbitraires $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$, $(t \leqq \zeta_k)$, qui entrent dans les valeurs des $b_k^{\eta+1}$, $b_k^{\eta+k}, \ldots, b_k^n$, pour un k donné, figurent dans les coefficients des séries $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

a) Les $b_k^{\eta+1}, b_k^{\eta+2}, \ldots, b_k^n$ sont des expressions linéaires et homogènes des $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$, comme le montrent les équations (16)

b) Les $b^i_{\mu_1 \mu_2, \ldots \mu_k, \ldots \mu_r}$ sont des expressions entières des constantes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$, comme on le voit en raisonnant par récurrence sur les équations (8).

c) Nous allons montrer que $b^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k\ldots\mu_r}$ est une expression homogène de degré μ_k par rapport à $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$.

En effet $b^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k\ldots\mu_r}$ est le coefficient de $u_1^{\mu_1} u_2^{\mu_2} \ldots u_k^{\mu_k} \ldots u_r^{\mu_r}$ dans la série $f_i(u_1, u_2, \ldots, u_r)$, faisant partie de la solution

$$f_1(u_1, u_2, \ldots, u_r),\ f_2(u_1, u_2, \ldots, u_r), \ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_r)$$

qui correspond au système $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ de constantes arbitraires.

Mais

$$f_i(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, \gamma u_k, u_{k+1}, \ldots, u_r), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

est aussi une solution du système (15), et correspond au système $\gamma\gamma_1, \gamma\gamma_2, \ldots, \gamma\gamma_t$, de constantes arbitraires puisque les b^i_k sont linéaires et homogènes par rapport aux $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$. Il s'ensuit que la nouvelle valeur de $b^i_{\mu_1\mu_2,\ldots\mu_k,\ldots\mu_r}$ correspondant au système $\gamma\gamma_1, \gamma\gamma_2, \ldots, \gamma\gamma_t$ de constantes arbitraires, est $\gamma^{\mu_k} b^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k\ldots\mu_r}$. Ceci nous prouve que $b^i_{\mu_1\ldots\mu_k\ldots\mu_r}$ est bien homogène de degré μ_k par rapport à $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$.

De ce qui précède nous concluons que si dans la solution

$$f_i(u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots, u_r), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

nous posons

$$\gamma_1 u_k = u_k^{(1)},\ \gamma_2 u_k = u_k^{(2)}, \ldots, \gamma_t u_k = u_k^{(t)}$$

nous obtenons une solution du système

$$(17)\quad \begin{cases} Q_i[f_1(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \ldots, u_k^{(t)}, u_{k+1}, \ldots, u_r), \ldots, \\ f_n(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k^{(1)}, \ldots, u_k^{(t)}, u_{k+1}, \ldots, u_r)] = \\ f_i(\sigma_1 u_1, \sigma_2 u_2, \ldots, \sigma_{k-1} u_{k-1}, \sigma_k u_k^{(1)}, \ldots, \sigma_k u_k^{(t)}, \sigma_{k+1} u_{k+1}, \ldots, \sigma_r u_r) \\ \hfill (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

où les fonctions inconnues sont des fonctions des $r + t - 1$ variables

$$u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \ldots, u_k^{(t)}, u_{k+1}, \ldots, u_r$$

Nous allons montrer que la solution ainsi obtenue dépend effectivement de ces $r + t - 1$ variables.

En effet, les constantes arbitraires $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ sont t des nombres $b_k^{\eta+1}, b_k^{\eta+2}, \ldots, b_k^{\eta+\zeta_k}$, soit

$$\gamma_1 = b_k^{\eta+\eta_1}, \gamma_2 = b_k^{\eta+\eta_2}, \ldots, \gamma_t = b_k^{\eta+\eta_t}$$

(par ex. $b_k^{\eta+l}$ est un γ si l'on a $a_{\eta+l}^{\eta+l+1} = a_{\eta+l}^{\eta+l+2} = \ldots = a_{\eta+l}^{\eta+\zeta_k} = 0$). Donc ces constantes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ sont les coefficients de u_k

respectivement dans $f_{\eta+\eta_1}$, $f_{\eta+\eta_2}$, ..., $f_{\eta+\eta_t}$. Il s'ensuit que lorsqu'on pose

$$\gamma_1 u_k = u_k^{(1)}, \quad \gamma_2 u_k = u_k^{(2)}, \ldots, \gamma_t u_k = u_k^{(t)}$$

dans la solution $f_1, f_2, \ldots, f_n$, on obtient une solution du système (17), et la variable $u_k^{(l)}$ figure au premier degré dans la fonction $f_{\eta+\eta_l}$ de cette solution, alors qu'elle ne figure pas au premier degré dans les fonctions $f_{\eta+\eta_1}, \ldots, f_{\eta+\eta_{l-1}}$. Ceci nous prouve que cette solution de (17) dépend effectivement des $r + t - 1$ variables écrites plus haut.

Ce que nous venons de dire pour l'indice k, nous pouvons le répéter pour chacun des indices j qui correspondent à des racines multiples σ_j de $F(s) = 0$, ce qui nous donne, d'une part la plus grande valeur que peut prendre m dans les équations (12), et d'autre part que si

$$f_1(u_1, u_2, \ldots, u_m), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_m), \ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

est une solution particulière du système (15) qui correspond à ce plus grand m, et qui dépend effectivement de ces variables, alors la solution la plus générale qui soit analytique et s'annule au point $u_1 = u_2 = \ldots = u_m = 0$, est

$$f_1(c_1u_1, c_2u_2, \ldots, c_mu_m), \quad f_2(c_1u_1, c_2u_2, \ldots, c_mu_m), \ldots,$$
$$f_n(c_1u_1, c_2u_2, \ldots, c_mu_m)$$

où $c_1, c_2, \ldots, c_m$, sont des constantes arbitraires.

Ayant ainsi obtenu, dans le cas où $F(s) = 0$ admet ou n'admet pas racines multiples, les solutions analytiques des systèmes (12) qui correspondent aux valeurs maxima de m, les solutions des systèmes qui correspondent à d'autres valeurs de m sont données par la remarque 2. Il est à noter que dans tous les cas on a $m \leqq n$.

CHAPITRE III

3. *Etude du cas où il existe n entiers* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *plus grands que* 1 *tels que*: $s_1^{p_1} = s_2^{p_2} = \ldots = s_n^{p_n} = 1$.

Nous supposons que chaque p_i est le plus petit entier positif, pour lequel on a $s_i^{p_i} = 1$ et que les racines $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont distinctes entre elles. Les coefficients des termes du premier degré des développements des $f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sont donnés par les équations (5). Nous supposons de plus que *le déterminant de ces coefficients est différent de* 0.

Ceci revient à supposer que:

$$\left[\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}\right]_{u_1=u_2=\ldots=u_n=0} \neq 0$$

Comme pour chaque i on a $s_i^{p_i+1} = s_i$, il s'ensuit que, dans le cas général, même la détermination formelle des coefficients des $f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ par les équations (6), est impossible. Nous commençons par chercher les conditions pour que le système (2), et par conséquent aussi le système (1), admettent des solutions qui soient analytiques et s'annulent à l'origine.

3.1 *Recherche des conditions nécessaires*:

Nous supposons qu'il existe un système de fonctions

$$f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),\ f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots,\ f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

analytiques et s'annulant au point $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$ et telles que l'on ait:

$$\text{(18)}\quad \begin{aligned} Q_i[f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \\ \equiv f_i(s_1u_1, s_2u_2, \ldots, s_nu_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

Désignons par T la substitution

$$\left|\begin{matrix} y_1, & Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2, & Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n, & Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{matrix}\right|$$

Nous écrivons

$$T = [y_i,\ Q_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)], \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Désignons aussi:

par $\qquad Q_i^2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

les séries

$$\begin{aligned} Q_i^2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = Q_i[Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \end{aligned}$$

ordonnées suivant les puissances des $y_1, y_2, \ldots, y_n$;
par $Q_i^p(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, p entier quelconque, positif, les séries définies par la relation recurrente

$$\begin{aligned} Q_i^p(y_1, y_2, \ldots, y_n) = Q_i^{p-1}[Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \end{aligned}$$

Les itérées de la substitution T, soit $T^1 = T, T^2, T^3, \ldots, T^p, \ldots$ sont définies par

$$T^p = \begin{vmatrix} y_1, Q_1^p(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2, Q_2^p(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n, Q_n^p(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{vmatrix}$$

que nous écrivons

$$T^p = [y_i, Q_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)], \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces notations étant posées, revenons aux identités (18) et substituons aux deux membres, $s_1u_1, s_2u_2, \ldots, s_nu_n$ respectivement aux $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Nous obtenons

$$Q_i^2[f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \\ \equiv f_i(s_1^2u_1, s_2^2u_2, \ldots, s_n^2u_n) \quad i = 1, 2, \ldots n$$

et en répétant la même substitution p fois, nous obtenons

$$Q_i^p[f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \\ = f_i(s_1^pu_1, s_2^pu_2, \ldots, s_n^pu_n) \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Si nous prenons $p =$ le p.p.c.m. des $p_1, p_2, \ldots, p_n$ alors $s_1^p = s_2^p = \ldots = s_n^p = 1$, ce qui donne

$$Q_i^p[f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \\ \equiv f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

et comme nous avons supposé

$$\left[\frac{D[f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}\right]_{u_1=u_2=\ldots=u_n=0} \neq 0$$

nous concluons que la p-ème itérée de la substitution T doit être la substitution identique, soit: $T^p \equiv 1$

ou

$$\begin{aligned} Q_1^p(y_1, y_2, \ldots, y_n) &\equiv y_1 \\ Q_2^p(y_1, y_2, \ldots, y_n) &\equiv y_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Q_n^p(y_1, y_2, \ldots, y_n) &\equiv y_n \end{aligned}$$

c'est la condition nécessaire cherchée.

3.1.1 Remarque I. Montrons qu'il est équivalent d'appliquer la condition ci-dessus aux fonctions $Q_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, ou aux fonctions $R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, du N° 1.1. En effet, si nous représentons

par R la substitution $[x_i, R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$,
$(i = 1, 2, \ldots, n)$

par Λ la substitution $[y_i, \lambda_1^i x_1 + \lambda_2^i x_2 + \ldots + \lambda_n^i x_n]$,
$(i = 1, 2, \ldots, n)$, du N° 1.1

et par Λ^{-1} la substitution inverse de la précédente nous avons $T = \Lambda^{-1} R \Lambda$ d'où $T^p = \Lambda^{-1} R^p \Lambda$. Donc $R^p \equiv 1$ et $T^p \equiv 1$ sont des conditions équivalentes.

3.1.2 Remarque II. Nous allons montrer qu'il existe effectivement des systèmes $R_1, R_2, \ldots, R_n$ tels que la p-ième itérée de la substitution R soit la substitution identique.

Soient en effet:

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ldots,\ \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

n fonctions, qui sont analytiques au voisinage de

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

et s'annulent en ce point et telles que:

$$\left[\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]_{x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0} \neq 0$$

Nous posons:

$$X_1 = \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ X_2 = \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots,$$
$$X_n = \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

et nous inversons ce système, ce qui donne:

$$x_1 = \Psi_1(X_1, X_2, \ldots, X_n),\ x_2 = \Psi_2(X_1, X_2, \ldots, X_n), \ldots,$$
$$x_n = \Psi_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Soient alors $s_1, s_2, \ldots, s_n$, n nombres différents de 1 et tels que $s_1^{p_1} = s_2^{p_2} = \ldots = s_n^{p_n} = 1$, où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des entiers positifs. Nous prenons:

$$R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Psi_i[s_1\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$s_2\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, s_n\psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

Désignons alors:

par ψ la substitution $[x_i, \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$

par ψ^{-1} la substitution $[x_i, \Psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$

inverse de la précédente,

par V la substitution $[x_i, s_i x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

par R la substitution $[x_i, R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Nous avons $R = \psi V \psi^{-1}$ donc $R^p = \psi V^p \psi^{-1}$
et si p est le p.p.c.m, des $p_1, p_2, \ldots, p_n$, alors $V^p \equiv 1$, donc aussi $R^p \equiv 1$.

3.1.3. Remarque III. Il est facile de vérifier que la condition $Q_1^p \equiv y_1, Q_2^p \equiv y_2, \ldots, Q_n^p \equiv y_n$ entraîne $s_1^p = s_2^p = \ldots = s_n^p = 1$.

3.2 *Conditions suffisantes*:

Nous allons prouver que les conditions nécessaires obtenues au N° 3.1 sont aussi suffisantes. Pour cela nous supposons ces conditions vérifiées et nous construisons un système de solutions analytiques des équations (2).

Nous formons d'abord les n fonctions suivantes:

$$G_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_i + \frac{Q_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{s_i} + \frac{Q_i^2(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{s_i^2} + \ldots + \frac{Q_i^{p-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{s_i^{p-1}} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Il est facile de voir que ce système de fonctions vérifie les équations fonctionnelles:

$$(19) \quad \begin{aligned} &F_i[Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \\ &Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] = s_i F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

où $F_1, F_2, \ldots, F_n$, sont les fonctions inconnues.

On a en effet pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$

$$G_i[Q_1(y_1 y_2, \ldots, y_n), Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \equiv Q_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \frac{Q_i^2(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{s_i} + \ldots + \frac{Q_i^p(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{s_i^{p-1}}$$

et comme $s_i^p = 1$ et $Q_i^p(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv y_i$, les identités précédentes deviennent

$$(20) \quad \begin{aligned} &G_i[Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \\ &Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \equiv s_i G_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

ce qui prouve que le système $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ vérifie bien le système (19).

Remarquons alors que si nous posons:

$$(21) \quad \begin{aligned} &u_1 = G_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \; u_2 = G_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \\ &u_n = G_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

L'inversion de ce système d'équations est possible. En effet, si nous rappelons que:

$$Q_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = a_1^i y_1 + a_2^i y_2 + \ldots + a_{i-1}^i y_i + s_i y_i + \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n>1} a^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_n^{\nu_n}$$

nous voyons que, quel que soit $q = 1, 2, \ldots, p-1$, dans $Q_i^q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ les variables $y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_n$ ne figurent pas au premier degré, et le coefficient de y_i est s_i^q. Il s'ensuit que dans $G_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ les variables $y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_n$, ne figurent pas au premier degré, et le coefficient de y_i est p.

D'où l'on conclut que

$$\left[\frac{D(G_1, G_2, \ldots, G_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right]_{y_1=y_2=\ldots=y_n=0} = p^n \neq 0$$

Cela étant si

$$y_1 = g_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad y_2 = g_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \quad y_n = g_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \tag{22}$$

sont les fonctions qui proviennent de l'inversion du système (21), ces fonctions vérifient les équations (2).

En effet en résolvant les relations (20) par rapport aux $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ on obtient:

$$Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv g_1[s_1G_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), s_2G_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, s_nG_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$$

$$Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv g_2[s_1G_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), s_2G_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, s_nG_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$$

. . . .

$$Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv g_n[s_1G_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), s_2G_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, s_nG_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$$

Si maintenant nous substituons, aux deux membres de chacune de ces identités, les $g_1(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $g_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots$, $g_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ aux $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on obtient, en tenant compte que les systèmes (G_i) et (g_i) sont inverses l'un de l'autre,

$$Q_i[g_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), g_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, g_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \equiv g_i(s_1u_1, s_2u_2, \ldots, s_nu_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ce qui prouve la proposition énoncée, à savoir que les fonctions (22) vérifient le système (2), et que par conséquent ce système est possible dans le cas où les fonctions $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, satisfont à la condition 3.1

Remarque: D'une façon générale, soit

$$(23)\quad \begin{array}{c} y_1 = f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),\ y_2 = f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \\ y_n = f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{array}$$

un système de fonctions analytiques et s'annulant au point $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$ avec

$$\left[\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}\right]_{u_1=u_2=\ldots=u_n=0} \neq 0$$

et le système inverse:

$$(24)\quad \begin{array}{c} u_1 = F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ u_2 = F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \\ u_n = F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{array}$$

Si le système (23) vérifie les équations (2) alors le système (24) vérifie les équations (19) et réciproquement.

3.3 *Etude des solutions analytiques du système* (19).

$$(F_i[Q_1, Q_2, \ldots, Q_n] = s_i F_i).$$

Nous supposons les conditions du N° 3.1 vérifiées et nous procédons à l'étude des solutions analytiques du système. Nous commençons par prouver que toutes ces solutions s'expriment en fonction de l'une d'entre elles, par exemple, de celle obtenue au N° 3.2, que nous représentons par:

$$G_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), G_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, G_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Nous opérons sur les équations (19) le changement de fonctions inconnues et de variables défini par:

$$\begin{array}{r} F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \mathfrak{F}_i[G_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), G_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots, G_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}$$

et nous prenons comme nouvelles fonctions inconnues les $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ considérées comme fonctions des nouvelles variables $u_i = G_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Nous obtenons alors que la condition nécessaire et suffisante pour que les $F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vérifient les équations (19) est que les $\mathfrak{F}_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ vérifient les équations:

$$(25)\qquad \mathfrak{F}_i(s_1 u_1, s_2 u_2, \ldots, s_n u_n) = s_i \mathfrak{F}_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Si nous cherchons les solutions de ce système qui sont analytiques au voisinage de l'origine, nous obtenons les développements:

$$\mathfrak{F}_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Sigma^1 C^1_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} u_1^{\mu_1} u_2^{\mu_2} \ldots u_n^{\mu_n}$$
$$\mathfrak{F}_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Sigma^2 C^2_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} u_1^{\mu_1} u_2^{\mu_2} \ldots u_n^{\mu_n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{F}_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Sigma^n C^n_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} u_1^{\mu_1} u_2^{\mu_2} \ldots u_n^{\mu_n}$$

Σ^i étant étendu à tous les systèmes $(\mu_1\ \mu_2, \ldots, \mu_n)$ pour lesquels $s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_n^{\mu_n} = s_i$. Les $C^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ sont des constantes arbitraires.

Si nous acceptons pour les μ_i des valeurs entières négatives, nous obtenons des solutions ayant l'origine comme pôle ou comme point singulier essentiel. Les $C^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ doivent bien entendu être choisis de façon à nous donner des séries convergentes.

De toute solution $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n)$ du système (25) on passe à une solution $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ du système (19) en prenant

$$F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \Sigma^i C^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} [G_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)]^{\mu_1}$$
$$[G_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)]^{\mu_2} \ldots [G_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)]^{\mu_n}$$

le Σ^i relatif à F_i, étant étendu à tous les systèmes $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ pour lesquels on a $s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_n^{\mu_n} = s_i$.

3.3.2. Soit alors un ensemble de nombres $\mathfrak{M}_i = \{\Gamma^i_{\mu_1\mu_2,\ldots\mu_n}\}$ les $\mu_1\mu_2, \ldots, \mu_n$ prenant tous les systèmes de valeurs entières non-négatives telles que $s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_n^{\mu_n} = s_i$. On peut choisir les $C^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ dans le développement de $\mathfrak{F}_i$, de façon qu'en ordonnant $F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ suivant les puissances de y_i, soit

$$F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \Sigma\, \beta^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_n^{\nu_n},$$

on ait $\beta^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \Gamma^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ pour tout système $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ tel que $s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_n^{\mu_n} = s_i$. Comme $i = 1, 2, \ldots, n$ on déduit le théorème suivant:

Théorème III. *Etant donnés n ensembles de nombres*

$$\mathfrak{M}_1 = \{\Gamma^1_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\},\ \mathfrak{M}_2 = \{\Gamma^2_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\}, \ldots, \mathfrak{M}_n = \{\Gamma^n_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\}$$

chaque ensemble $\mathfrak{M}_i$ *étant défini pour tous les systèmes* $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ *d'entiers positifs ou nuls pour lesquels* $s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_n^{\mu_n} = s_i$ *il existe un système de séries entières* $F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\ldots, F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \Sigma\, \beta^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_n^{\nu_n}$$

qui vérifie formellement le système (19), *et tel que* $\beta^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \Gamma^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ *pour tout système d'entiers positifs ou nuls* $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ *pour lesquels* $s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_n^{\mu_n} = s_i$. (*Nous supposons toujours que les séries* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ *qui figurent dans le systéme* (19) *satisfont la condition établie au* N° 3.1.

3.3.3. En posant

$$u_1 = F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), u_2 = F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \\ u_n = F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

et en inversant ce système, on obtient les séries entières

$$y_1 = f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), y_2 = f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \\ y_n = f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

qui vérifient formellement les équations (2).

Le théorème III se traduit alors relativement aux séries $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de la façon suivante:

Théorème IV. *Etant donnés n ensembles de nombres*

$$M_1 = \{\gamma^1_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\}, \quad M_2 = \{\gamma^2_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\}, \quad \ldots, \quad M_n = \{\gamma^n_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\}$$

où pour chaque i les $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ prennent tous les systèmes de valeurs entières positives ou nulles telles que $s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_n^{\mu_n} = s_i$, il existe un système bien déterminé de séries entières $f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$$f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Sigma\, b^i_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} u_1^{\nu_1} u_2^{\nu_2} \ldots u_n^{\nu_n}$$

les Σ étant étendus à tous les systèmes d'entiers $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ positifs ou nuls. Ce système de séries vérifie formellement les équations (2), où les conditions du N° 3.1 sont supposées satisfaites, et il est de plus tel que l'on ait $b^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \gamma^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ pour tous les indices qui correspondent aux ensembles donnés.

Ce théorème est une conséquence du théorème III, et des formules d'inversion qui donnent les coefficients des séries $f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ en fonction de ceux des séries $F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

3.3.4. Nous allons montrer maintenant que si les ensembles donnés $M_i = \{\gamma^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, sont tels que les séries

$$\Sigma^i\, \gamma^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} u_1^{\mu_1} u_2^{\mu_2} \ldots u_n^{\mu_n}$$

où le Σ^i, pour chaque i, est étendu à tous les systèmes de n nombres positifs ou nuls pour lesquels on a $s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_n^{\mu_n} = s_i$, (dorénavant nous garderons aux symboles Σ^i et M_i la signification que nous venons de leur donner) — soient convergentes dans un certain domaine renfermant l'origine, alors les séries $f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dont il a été question dans le théorème IV, sont aussi convergentes dans un certain domaine non nul.

Remarquons d'abord qu'une conséquence du théorème IV est la suivante:

On se donne arbitrairement les n ensembles de nombres M_i et on associe aux équations (6) les équations

$$b^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \gamma^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \tag{26}$$

où les indices prenent les mêmes valeurs que pour les ensembles M_i. Alors les coefficients des séries

$$f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

sont univoquement déterminés par les systèmes d'équations (5) (6) et (26). Les séries ainsi obtenues sont les mêmes que celles dont il a été question dans le théorème IV.

Pour établir la convergence de ces séries, les ensembles M_1, $M_2, \ldots, M_n$ étant choisis comme il a été spécifié au début de ce paragraphe, nous reprenons les raisonnements du N° 1.3., avec les mêmes notations, et nous montrons que nous pouvons choisir les coefficients des séries majorantes (7) de manière à avoir

$$B^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} > \gamma^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$$

pour les systèmes d'indices $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ qui correspondent aux ensembles M_i, avec $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n > 1$.

Pour établir ce dernier point, posons:

$$Z_1 = D^1_1 y_1 - \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n>1} D^1_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_n^{\nu_n}$$

$$Z_2 = D^2_2 y_2 - \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n>1} D^2_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_n^{\nu_n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z_n = D^n_n y_n - \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n>1} D^n_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots y_n^{\nu_n}$$

les D étant des coefficients positifs arbitraires, sous les conditions, que les séries admettent un domaine de convergence non nul, et que

$$D^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \geqq \gamma^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$$

pour tous les systèmes $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ d'indices, qui correspondent aux ensembles M_i, avec $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n > 1$, et $D^i_i = \frac{1}{A^i_i}$.

L'inversion de ces séries, nous donne les séries entières suivantes, qui ont aussi un domaine de convergence non nul.

$$y_1 = A_1^1 Z_1 + \sum_{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n>1} \Delta^1_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n} Z_1^{\nu_1} Z_2^{\nu_2} \dots Z_n^{\nu_n}$$

$$y_2 = A_2^2 Z_2 + \sum_{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n>1} \Delta^2_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n} Z_1^{\nu_1} Z_2^{\nu_2} \dots Z_n^{\nu_n}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n = A_n^n Z_n + \sum_{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n>1} \Delta^n_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n} Z_1^{\nu_1} Z_2^{\nu_2} \dots Z_n^{\nu_n}$$

où les Δ sont tous positifs. Si nous formons alors les séries

$$W_i(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = A_i^i Z_i - \sum_{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n>1} \xi^i_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n} Z_1^{\nu_1} Z_2^{\nu_2} \dots Z_n^{\nu_n}$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$

où

$$\xi^i_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n} \geqq \Delta^i_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}$$

et nous faisons l'inversion du système

$$y_i = W_i(Z_1, Z_2, \dots, Z_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

nous obtenons les séries

$$Z_i = D_i^i y_i + \sum_{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n>1} \varsigma^i_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n} y_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \dots y_n^{\nu_n}$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$

dans lesquelles tous les ς sont positifs et $\varsigma^i_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n} \geqq D^i_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}$.

Il suffit donc, d'après ce qui précede, de prendre dans les équations (7) du paragraphe 1.2

$$A^i_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n} = \max\left(|a^i_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}|, \Delta^i_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}\right)$$

les A_i^i et les q_i^i étant choisis comme dans le paragraphe 1.3 pour avoir $B^i_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \geqq \gamma^i_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ pour tout $\gamma^i_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \in M^i$ avec $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n > 1$.

Il reste à examiner la condition $| s^i - s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \dots s_n^{\mu_n} | > \varrho$ du théorème II. Elle ne doit avoir lieu, dans le cas actuel, que pour les systèmes $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ pour lesquels on a $s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \dots s_n^{\mu_n} \neq s_i$. Cette condition se trouve satisfaite du fait que les produits $s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \dots s_n^{\mu_n}$ n'ont qu'un nombre fini de valeurs distinctes.

Dans ces conditions, les raisonnements du N° 1.3 prouvent que les séries

$$f_1(u_1, u_2, \dots, u_n),\ f_2(u_1, u_2, \dots, u_n), \dots,\ f_n(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

dont les coefficients sont donnés par les équations (5), (6), et (26), sont respectivement majorées par les séries (9) du N° 1.3, et par conséquent elles admettent un domaine de convergence non nul.

3.4. Remarque. Dans ce chapitre nous avons supposé jusqu'à présent que nous nous occupions uniquement du système (2). A priori, il semblerait que l'on doive aussi examiner, avec les hypothèses de ce chapitre, les équations (12), et se poser les mêmes questions qu'au N° 2.1. Mais en fait ces questions ne se posent pas, car la solution (22) est valable que les racines $s_1, s_2, \ldots, s_n$ soient distinctes ou non, et cette solution dépend effectivement de n variables, puisqu 'on a toujours

$$\left[\frac{D[G_1, G_2, \ldots, G_n]}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right]_{y_1=y_2=\ldots=y_n=0} \neq 0.$$

D'autre part, la remarque II, N° 2.1.2, s'applique aussi au cas qui nous a occupé dans ce chapitre.

CHAPITRE IV

Généralisation des équations de H. Poincaré. Systèmes permutables de fonctions.

4.1. *Généralisation des équations* (2). On donne deux systèmes de n fonctions de n variables chacun.

$$Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

et

$$S_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),\ S_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, S_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

analytiques et s'annulant respectivement aux points

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0.$$

Nous supposons de plus que les équations en s définies au N° 1.1 et relatives à ces systèmes de fonctions admettent les mêmes racines [5]). Nous cherchons un système de fonctions

$$F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),\ F_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, F_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

analytiques et s'annulant au point $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$, qui vérifient le système suivant d'équations fonctionnelles.

$$(27)\left\{\begin{aligned}
&Q_1[F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), F_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, F_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)]\\
&= F_1[S_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), S_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, S_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)]\\
&Q_2[F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), F_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, F_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)]\\
&= F_2[S_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), S_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, S_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&Q_n[F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), F_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, F_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)]\\
&= F_n[S_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), S_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, S_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)]
\end{aligned}\right.$$

[5]) Les racines $s_1, s_2, \ldots s_n$, de $F(s) = 0$ nous les désignerons dorénavant sous le nom de multiplicateurs du système de fonctions.

Soit

$$(28)\quad \begin{aligned} &u_1 = \varphi_1(z_1, z_2, \ldots, z_n),\ u_2 = \varphi_2(z_1, z_2, \ldots, z_n), \ldots, \\ &u_n = \varphi_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) \end{aligned}$$

un système particulier de solutions du système:

$$(29)\quad \begin{aligned} &S_i[\varphi_1(z_1, z_2, \ldots, z_n), \varphi_2(z_1, z_2, \ldots, z_n), \ldots, \\ &\varphi_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)] = \varphi_i(s_1z_1, s_2z_2, \ldots, s_nz_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

Nous supposons que les fonctions (28) peuvent être inversées, ce qui donne

$$(30)\quad \begin{aligned} &z_1 = \Phi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),\ z_2 = \Phi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \\ &z_n = \Phi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

Ces dernières fonctions vérifient les équations

$$(31)\quad \begin{aligned} &\Phi_i[S_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), S_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \\ &S_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = s_i\Phi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

Nous appliquons au système (27) le changement de fonctions et de variables défini par:

$$(32)\quad \begin{aligned} &F_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = f_i[\Phi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ &\Phi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \Phi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ étant les nouvelles fonctions inconnues, considérées comme fonctions des variables

$$\begin{aligned} &z_1 = \Phi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),\ z_2 = \Phi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \\ &z_n = \Phi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

Le système (27) devient alors

$$(33)\quad \begin{aligned} &Q_i[f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n), f_2(z_1, z_2, \ldots, z_n), \ldots, \\ &f_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)] = f_i(s_1z_1, s_2z_2, \ldots, s_nz_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

qui n'est autre que le système (1). Comme nous savons résoudre les systèmes (29) et (33) nous savons par le fait même résoudre le système (27).

4.1.1. Considérons par ex. le cas où $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont des racines distinctes qui satisfont les conditions du théoreme II. et soit

$$(34)\quad \mathfrak{f}_1(z_1, z_2, \ldots, z_n), \mathfrak{f}_2(z_1, z_2, \ldots, z_n), \ldots, \mathfrak{f}_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

une solution particulière, analytique et s'annulant à l'origine, des équations (33), alors la solution générale, analytique et s'annulant à l'origine, du système (27), est donnée par

$$(35)\quad \begin{cases} F^i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = f^i[l_1\Phi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ l_2\Phi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, l_n\Phi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$\Phi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\Phi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, ..., $\Phi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, étant les fonctions (30) et $l_1, l_2, \ldots, l_n$ étant des constantes arbitraires.

4.1.2. Examinons en second lieu le cas où il existe n entiers supérieurs à un, soit $p_1, p_2, \ldots, p_n$, tels que $s_1^{p_1} = s_2^{p_2} = \ldots = s_n^{p_n} = 1$ et où les fonctions Q_i et S_i vérifient les relations

$$Q_1^p(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv y_1,\ Q_2^p(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv y_2, \ldots, \\ Q_n^p(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv y_n$$

$$S_1^p(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv u_1,\ S_2^p(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv u_2, \ldots, \\ S_n^p(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv u_n$$

où p est le plus petit commun multiple des $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Dans ce cas nous pouvons prendre pour les fonctions (30)

$$\Phi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_i + \frac{S_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{s^i} + \frac{S_i^2(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{s_i^2} + \\ + \ldots + \frac{S_i^{p-1}(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{s_i^{p-1}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Et si

$$y_1 = f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n),\ y_2 = f_2(z_1, z_2, \ldots, z_n), \ldots,\ y_n = f_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

est le système de fonctions obtenu en inversant le système suivant

$$z_i = y_i + \frac{Q_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{s_i} + \frac{Q_i^2(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{s_i^2} + \\ + \ldots + \frac{Q_i^{p-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{s_i^{p-1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

alors la solution chérchée est obténue en formant d'abord les séries des variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$

$$\Sigma^i c^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} [f_1]^{\mu_1} [f_2]^{\mu_2} \ldots [f_n]^{\mu_n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où chaque Σ^i est étendu à tous les systèmes d'entiers non nuls $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ pour lesquels on a $s_1^{\mu_1} s_2^{\mu_2} \ldots s_n^{\mu_n} = s_i$, et les $c^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ sont des constantes arbitraires conduisant à des séries convergentes, et en substituant dans ces séries les fonctions

$$\Phi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),\ \Phi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots,\ \Phi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

aux variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

4.2. *Systèmes permutables.* Nous disons que deux systèmes de n fonctions à n variables

$$Q_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),\ Q_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots,\ Q_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

et

$$F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),\ F_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots,\ F_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

sont permutables si l'on a identiquement

$$\begin{gathered} Q_i[F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), F_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, F_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \equiv \\ F_1[Q_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),\ Q_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots,\ Q_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{gathered}$$

Si dans les équations (27) nous prenons

$$S_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = Q_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ces équations nous donnent alors les systèmes

$$F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),\ F_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots,\ F_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

qui sont permutables à un système donnée.

Nous pouvons alors facilement adapter au cas actuel les formules (35) et les résultats du N° 4.1.2.

4.2.1. THÉORÈME V. *Soient deux systèmes de n fonctions à n variables*

$$Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots,\ Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

dont les multiplicateurs, définis au N° 1.I, sont $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *et*

$$S_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ S_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots,\ S_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

dont les multiplicateurs sont: $s_1', s_2', \ldots, s_n'$. *Toutes ces fonctions sont analytiques et s'annulent au point* $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$. *Nous supposons de plus qu'elles vérifient les conditions*

$$Q_1^p(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv y_1,\ Q_2^p(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv y_2, \ldots, \quad Q_n^p(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv y_n$$

$$S_1^q(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv y_1,\ S_2^q(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv y_2, \ldots, \quad S_n^q(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv y_n$$

où p *et* q *sont deux entiers supérieurs à* 1.

La condition nécessaire et suffisante, pour que ces deux systèmes de fonctions soient permutables, est que les deux systèmes d'équations.

$$Q_i[f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = f_i(s_1u_1, s_2u_2, \ldots, s_nu_n); \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

et

$$S_i[f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = f_i(s_1'u_1, s_2'u_2, \ldots, s_n'u_n); \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

admettent une solution commune: $f_1, f_2, \ldots, f_n$, formée de fonctions analytiques et s'annulant au point $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$, avec

$$\left[\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}\right]_{u_1=u_2=\ldots=u_n=0} \neq 0.$$

1) *La condition est suffisante.* Par hypothèse il existe un système de fonctions

$$(36) \quad \begin{aligned} &y_1 = f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ y_2 = f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ \ldots, \\ &y_n = f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

tel que l'on ait

$$(37) \quad \begin{aligned} &Q_i[f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, \\ &f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \equiv f_i(s_1u_1, s_2u_2, \ldots, s_nu_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

et

$$(38) \quad \begin{aligned} &S_i[f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ \ldots, \\ &f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \equiv f_i(s_1'u_1, s_2'u_2, \ldots, s_n'u_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Soit alors

$$\begin{aligned} &u_1 = F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ u_2 = F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ \ldots, \\ &u_n = F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

les fonctions que l'on obtient en inversant le système (36). Substituons dans les identités (37) et (38), les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$ aux variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Nous obtenons

$$(39) \quad \begin{aligned} &Q_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv f_i[s_1F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ s_2F_2(y_1, \\ &y_2, \ldots, y_n), \ldots, s_nF_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)], \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

et

$$(40) \quad \begin{aligned} &S_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv f_i[s_1'F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), s_2'F_2(y_1, \\ &y_2, \ldots, y_n), \ldots, s_n'F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)], \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Si maintenant aux premiers membres des identités (39), on substitue les $S_1, S_2, \ldots, S_n$ aux $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et aux seconds membres des mêmes identités on substitue les seconds membres des indentités (40) aux $y_1, y_2, \ldots, y_n$, on obtient

$$Q_i[S_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), S_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, S_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \equiv f_i[s_1s_1'F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), s_2s_2'F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, s_ns_n'F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

On prouvera de même les relations

$$S_i[Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] = f_i[s_1's_1F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, s_n's_nF_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ce qui prouve que les système $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ et $S_1, S_2, \ldots, S_n$, sont permutables.

2) *La condition est nécessaire.* Par hypothèse les systèmes donnés sont permutables, on a donc

$$(41) \quad Q_i[S_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), S_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, S_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \equiv S^i[Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Soit alors

$$(42) \quad y_1 = f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), y_2 = f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, y_n = f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

$$\text{avec } \left[\frac{D[f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}\right]_{u_1=n_2=\ldots u_n=0} \neq 0.$$

une solution particulière du système

$$Q_i[f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = f_i(s_1u_1, s_2u_2, \ldots, s_nu_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et soit

$$u_1 = \mathfrak{F}_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ u_2 = \mathfrak{F}_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, u_n = \mathfrak{F}_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

les fonctions que l'on obtient en inversant les fonctions (42). Ces fonctions $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, forment, comme nous avons déja vu, une solution particulière du système

$$(43) \quad F_i[Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] = s_iF_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

On a donc les identités

$$\mathfrak{F}_i[Q_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \equiv s_i\mathfrak{F}_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Appliquons à ces identités la substitution

$$[y_i, \ S_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

nous obtenons

$$\mathfrak{F}_i[Q_1(S_1, S_2, \ldots, S_n), Q_2(S_1, S_2, \ldots, S_n), \ldots, Q_n(S_1, S_2, \ldots, S_n)] \equiv s_i\mathfrak{F}_i(S_1, S_2, \ldots, S_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui, en tenant compte de (41) devient

$$\mathfrak{F}_i[S_1(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n), S_2(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n), \ldots, S_n(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)] \equiv s_i\mathfrak{F}_i(S_1, S_2, \ldots, S_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ce qui nous prouve que les fonctions des variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\mathfrak{F}_i[S_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), S_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, S_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)], \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

forment aussi une solution du système (43). On a donc, d'après les résultats du N° 3.3,

$$(44) \quad \begin{aligned} &\mathfrak{F}_i[S_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), S_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \\ &S_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] = \Sigma^i c^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} [\mathfrak{F}_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)]^{\mu_1} \\ &\qquad [\mathfrak{F}_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)]^{\mu_2} \ldots, [\mathfrak{F}_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)]^{\mu_n} \end{aligned}$$

où les Σ^i ont la signification expliquée au N° 3.3 et les $c^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ sont des constantes bien déterminées.

Appliquons maintenant aux deux membres de (44) la substitution

$$[y_i, f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

nous obtenons

$$(45) \quad \begin{aligned} &\mathfrak{F}_i[S_1(f_1, f_2, \ldots, f_n), S_2(f_1, f_2, \ldots, f_n), \ldots, \\ &S_n(f_1, f_2, \ldots, f_n)] = \Sigma^i c^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} u_1^{\mu_1} u_2^{\mu_2}, \ldots, u_n^{\mu_n} \end{aligned}$$

Posons

$$U_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Sigma^i c^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} u_1^{\mu_1} u_2^{\mu_2} \ldots, u_n^{\mu_n}$$

Les fonctions $U_1, U_2, \ldots, U_n$, ont les propriétés suivantes:

a) La q-ème itérée de la substitution

$$U = [u_i, U_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

est la substitution identique.

En effet, si nous désignons par F la substitution

$$[y_i, f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

par F^{-1} la substitution

$$[u_i, \mathfrak{F}_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et par S la substitution

$$[y_i, S_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

on a $U = FSF^{-1}$ d'où $U^q = FS^qF^{-1}$, et comme $S^q \equiv 1$ on a $U^q \equiv 1$.

b) Nous considérons le système d'équations

$$(46) \quad G_i[U_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), U_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, U_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = \sigma_i G_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, où $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sont les multiplicateurs du système $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

D'après la propriété (a) et le N° 3.2, ce système d'équations admet la solution $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ où

$$G_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_i + \frac{U_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\sigma_i} + \frac{U_i^2(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\sigma_i^2} + \ldots + \frac{U_i^{q-1}(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\sigma_i^{q-1}}$$

et il est facile de voir que ces séries ordonnées, sont de la forme

$$(47) \quad G_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Sigma^i d^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} u_1^{\mu_1} u_2^{\mu_2} \ldots, u_n^{\mu_n}$$

les Σ^i ayant la même signification qu'au N° 3.3.

Nous posons

$$(48) \quad \begin{aligned} F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = G_i[&\mathfrak{F}_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\mathfrak{F}_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \mathfrak{F}_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \end{aligned}$$

Il est maintenant facile de prouver que le système $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ est une solution commune aux systèmes:

$$F_i[Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] = s_i F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$F_i[S_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), S_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, S_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] = s_i' F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ce qui est équivalent à ce que nous voulons prouver.

Comme $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ est une solution du premier de ces systèmes, d'après le N° 3.3 et les formules (47) et (48), il suffit de prouver que c'est aussi une solution du second.

Puisque $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ est une solution de (46) on a

$$G_i[U_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), U_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, U_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)] \equiv \sigma_i G_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et si nous appliquons aux deux membres de cette identité la substitution $[u_i, \mathfrak{F}_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et nous tenons compte des expressions $U_1, U_2, \ldots, U_n$ données par les formules (45), nous obtenons

$$G_i[\mathfrak{F}_1(S_1, S_2, \ldots, S_n), \mathfrak{F}_2(S_1, S_2, \ldots S_n), \ldots, \mathfrak{F}_n(S_1, S_2, \ldots, S_n)] \equiv \sigma_i G_i[\mathfrak{F}_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \mathfrak{F}_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \mathfrak{F}_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$$

D'après la forme (48) des F_i, ces dernières identités sont équivalentes au suivantes

$$F_i[S_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), S_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, S_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \equiv \sigma_i F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ces relations prouvent que les multiplicateurs $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sont les mêmes que les multiplicateurs $s_1', s_2', \ldots, s_n$, et que par conséquent

$$F_i[S_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), S_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, S_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] = s_i' F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui sont les relations que nous voulions prouver.

4.2.2. Le théorème qui précède s'applique aussi au cas de q systèmes au lieu de deux, ce qui nous donne le théorème suivant:

Théorème VI. *La condition nécessaire et suffisante pour que q systèmes de fonctions*

$$(Q_{1,1}, Q_{2,1}, \ldots, Q_{n,1}), (Q_{1,2}, Q_{2,2}, \ldots, Q_{n,2}), \ldots, (Q_{1,q}, Q_{2,q}, \ldots, Q_{n,q})$$

jouissant chacun des mêmes propriétés que dans le théorème V, soient permutables deux à deux, est que les systèmes d'équations fonctionnelles analogues aux équations (2) *et respectivement relatives à ces systèmes de fonctions, admettent une solution commune.*

(a) La démonstration de la condition suffisante étant la même que dans le cas où $q = 2$, nous ne la recommencerons pas.

(b) *La condition est nécessaire*: Nous supposons que les q systèmes de fonctions sont permutables deux à deux et nous voulons prouver qu'il existe une solution commune aux q systèmes d'équations [6]).

---

[6]) Nous prenons les systèmes d'équations sous la forme:

$$F_i[Q_{1,j}(u_1, u_2, \ldots u_n), Q_{2,j}(u_1, u_2, \ldots u_n), \ldots, Q_{n,j}(u_1, u_2, \ldots, u_n)] = s_{i,j} F_i(u_1, u_2, \ldots u_n) \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Nous procéderons par récurrence en supposant qu'il existe une solution commune aux $q-1$ premiers systèmes.

Soit:

$$(49)\quad \mathfrak{F}_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \mathfrak{F}_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \mathfrak{F}_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

une pareille solution.

Comme dans le cas des deux systèmes de fonctions, on prouvera que

$$\mathfrak{F}_i[Q_{1,q}(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_{2,q}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_{n,q}(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

est aussi une solution commune aux $(q-1)$ premiers systèmes d'équations ce qui entraîne, d'après le N° 3.3

$$(50)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{F}_i[Q_{1,q}(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_{2,q}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \\ &Q_{n,q}(y_1, y_2, \ldots, y_n)] = \Sigma_i c^i_{\mu_1\mu_2\mu_n} [\mathfrak{F}_1]^{\mu_1} [\mathfrak{F}_2]^{\mu_2} \ldots [\mathfrak{F}_n]^{\mu_n} \end{aligned}$$

où pour chaque i le Σ_i est étendu à tous les systèmes d'entiers non nuls pour lesquels on a:

$$(s_{1,j})^{\mu_1} (s_{2,j})^{\mu_2} \ldots (s_{n,j})^{\mu_n} = s_{i,j} \text{ pour tout } j = 1, 2, \ldots (q-1)$$

où $(s_{1,j}, s_{2,j}, \ldots, s_{n,j})$ représentent les multiplicateurs relatifs au système $Q_{1,j}, Q_{2,j}, \ldots, Q_{n,j}$. Les $c^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ sont des constantes bien détérminées, puisque la solution (49) d'où nous sommes partis est choisie bien détérminée. Dans (50) appliquons la substitution $[u_i, f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)]$ $i = 1, 2, \ldots, n$, les systèmes

$$f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

provenant de l'inversion des fonctions (49).

Nous obtenons

$$\mathfrak{F}_i[Q_{1,q}(f_1, f_2, \ldots, f_n), Q_{2,q}(f_1, f_2, \ldots, f_n), \ldots, Q_{n,q}(f_1, f_2, \ldots, f_n)] = \Sigma_i\, c^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} u_1^{\mu_1} u_2^{\mu_2} \ldots u_u^{\mu_n}$$

Nous posons encore

$$U_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Sigma_i c^i_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} u_1^{\mu_1} u_2^{\mu_2} \ldots u_n^{\mu_n}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ce qui nous donne un système de n fonctions $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ et la démonstration se poursuit comme dans le théorème V.

4.2.3. Corollaire I. *Si deux systèmes de n fonctions de n variables,*

$$Q_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), Q_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, Q_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

et

$$S_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), S_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, S_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

jouissent des mêmes propriétés que dans le théorème V, de plus sont permutables et ont les mêmes multiplicateurs $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *alors ces deux systèmes sont identiques.*

Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème V.

4.2.4. Corollaire II. *Soit p un entier donné. Le nombre de systèmes*

$$Q_{1,j}(u_1, u_2, \ldots, u_n), Q_{2,j}(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, Q_{nj}(u_1, u_2, \ldots, u_n), \qquad j = 1, 2, \ldots, q$$

tels que:

a) *le p-ème itéré de chacun de ces systèmes est identique à*

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

b) *ils sont permutables deux à deux*

est borné (c.a.d. q ne peut pos dépasser un nombre N qui dépend de p).

Désignons

par T_j la substitution

$$[u_i, Q_{i,j}(u_1, u_2, \ldots, u_n)], \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

par F la substitution

$$[u_i, f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)], \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une solution commune aux systèmes d'équations du type (2) associés aux systèmes $Q_{1j}, Q_{2j}, \ldots, Q_{nj}$.
par F^{-1} la substitution inverse de la précedente.
et par V_j la substitution $[u_i, s_{i,j}u]$ $i = 1, 2, \ldots, n$
où $s_{1,j}, s_{2,j}, \ldots, s_{n,j}$ sont les multiplicateurs du système $(Q_{1,j}, Q_{2,j}, \ldots, Q_{n,j})$.

Les résultats du théorème VI, peuvent s'écrire

$$FT_j = V_jF \quad \text{ou} \quad T_j = F^{-1}V_jF$$

Mais pour un p donné il n'existe qu'un nombre fini de substitutions V_j telles que $V_j^p \equiv 1$, ce qui prouve le corollaire.

4.2.6. Corollaire III. *Soit*

$$Q_{1,j}(u_1, u_2, \ldots, u_n), Q_{2,j}(u_1, u_2, \ldots, u_n), \ldots, Q_{n,j}(u_1, u_2, \ldots, u_n), \qquad (j = 1, 2, \ldots, q)$$

q systèmes, jouissant des mêmes propriétés que dans le théorème VI, et permutables deux à deux.

Les q substitutions $T_1, T_2, \ldots, T_q$

$$T_j = [u_i, Q_{i,j}(u_1, u_2, \ldots, u_n)], \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

s'obtiennent comme produits de substitutions choisies parmi n substitutions, que nous allons déterminer, et leurs itérées.

Employons les mêmes notations que dans le corellaire II. D'après nos hypothèses, il existe un entier p tel que $T_j^p \equiv 1$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, q$. Dans ces conditions on a $s_{k,j} = e^{\frac{2r_{k,j} i\pi}{p}}$ les $r_{k,j}$ étant des entiers positifs. Nous désignons par L_k la substitution qui consiste à remplacer u_k par $e^{\frac{2i\pi}{p}} u_k$ sans change les autres variables u_j, $j \neq k$.

On a alors

$$V_j = L_1^{r_{1,j}} L_2^{r_{2,j}} \ldots L_n^{r_{n,j}}$$

et
$$T_j = F^{-1}V_jF = F^{-1}L_1^{r_{1,j}} L_2^{r_{2,j}} \ldots L_n^{r_{n,j}} F$$

où F a la même signification que dans le corollaire II.

Les n substitutions de l'énoncé sont:

$$F^{-1}L_1F,\ F^{-2}L_2F,\ \ldots,\ F^{-1}L_nF$$

4.2.7. Extension du théorème VI. On peut étendre le théorème VI au cas d'une suite infinie de systèmes permutables, en faisant une hypothèse supplémentaire sur les multiplicateurs.

Soit une suite infinie de systèmes distincts de fonctions, chaque système comprenant n fonctions des n variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$,

$$Q_{1,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_{2,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_{n,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

et jouissant des propriétés suivantes:

a) Ces systèmes sont permutables deux à deux.

b) A chaque système (d'indice j) correspond un entier $p_j > 1$ tel que l'on ait

$$Q_{i,j}^{p_j}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv y_1,\ Q_{2,j}^{p_j}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv y_2, \ldots, \quad Q_{n,j}^{p_j}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv y_n$$

c) Nous savons qu'à chaque système (d'indice j) correspond un système de multiplicateurs $(s_{1,j}, s_{2,j}, \ldots, s_{n,j})$, qui d'après la propriété (b) et la remarque III du paragraphe 3.1.3 satisfont la condition

$$s_{1,j}^{p_j} = s_{2,j}^{p_j} = \ldots = s_{n,j}^{p_j} = 1$$

Désignons par $M_1^j, M_2^j, \ldots, M_n^j$, n ensembles dont les éléments sont des systèmes de n entiers non négatifs

$$M_n^j = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$$

un système $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ appartenant à M_i^j seulement si l'on a

$$s_{1,k}^{\mu_1} s_{2,k}^{\mu_2} \ldots s_{n,k}^{\mu_n} = s_{i,k} \text{ pour tout } k \leqq j.$$

Il est évident que l'on a

$$M_i^{j+1} \subset M_i^j \text{ pour chaque } (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Soit

$$h_{i,j} = \underset{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in M_i^j}{\text{minimum}} (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n)$$

La condition (c), qui est la condition supplémentaire annoncée au debut, est que pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, on ait:

$$\lim_{j \to \infty} h_{i,j} = \infty$$

Remarquons en passant, que cette condition est automatiquement satisfaite dans le cas où $n = 1$ [7]).

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant:

Théorème VII. *Si les conditions (a), (b) et (c), sont satisfaites, il existe un système de n séries entières sans termes constants*

$$F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

dont le domaine de convergence peut être nul, et qui vérifie formellement chacun des systèmes de la suite infinie $E_1, E_2, \ldots, E_j, \ldots$

$$E_j. \begin{cases} F_1[Q_{1,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_{2,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \\ \qquad Q_{n,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n)] = s_{2,j}F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ F_2[Q_{1,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_{2,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \\ \qquad Q_{n,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n)] = s_{2,j}F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ F_n[Q_{1,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_{2,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \\ \qquad Q_{n,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n)] = s_{n,j}F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Pour le prouver, désignons par

$$(51) \quad \begin{array}{l} F_{1,l}(y_1 y_2, \ldots, y_n), F_{2,l}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \\ F_{n,l}(y_1 y_2, \ldots, y_n) \end{array}$$

une solution commune aux l premiers systèmes d'équations, dont l'existence est assurée par le théorème VI, et qui soit telle que le coefficient de y^i dans $F_{i,l}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$

[7]) Pour l'étude détaillée de ce cas voir: N. Pastides „Sur quelques équations fonctionnelles". Annales de l'Ecole Normale Supérieure (3) LXV. Fasc. 4.

soit égal à I. Cette dernière hypothèse est légitime car on peut multiplier les séries (51) par des constantes arbitraires, sans qu'elles cessent de former une solution commune des l premiers système de la suite.

D'après le paragraphe 3.3, nous pouvons écrire

$$F_{i,\,l+1} = F_{i,l} + \Sigma_i^l\, c^{i,l}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}\, [F_{1,l}(y_1, y_2, \ldots, y_n)]^{\mu_1} \\ [F_{2,l}(y_1, y_2, \ldots, y_n)]^{\mu_2} \ldots [F_{n,l}(y_1, y_2, \ldots, y_n)]^{\mu_n}$$

le Σ_i^l étant étendu à tous les systèmes $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ qui sont éléments de l'ensemble M_i^l. Il s'ensuit que dans $F_{i,l}$ et $F_{i,l+1}$ les termes de degrés inférieurs à $h_{i,l}$ ont les mêmes coefficients. Comme d'après la condition (c), pour chaque i, $\lim\limits_{l \to \infty} h_{i,l} = \infty$, il s'ensuit que, pour chaque i, la suite de séries entières

$$F_{i,1}, F_{i,2}, \ldots, F_{i,l}, \ldots \tag{52}$$

converge formellement vers une série entière que nous désignons par $F^i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Cela signifie que si nous considérons un terme quelconque, ses coefficients dans la suite (52) de séries convergent vers le coefficient du même terme dans F^i. Pour le prouver, il suffit de remarquer que lorsqu'on considère n'importe quel terme, ses coefficients dans les séries de la suite (52) sont tous égaux entre eux à partir d'un certain l, qui dépend du terme considéré.

On obtient ainsi un système de séries

$$F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

dont le domaine de convergence peut être nul. Prouvons que ce système vérifie formellement tous les systèmes de la suite (E_j).

En effet, considérons un j déterminé. Le système correspondant est vérifié pour tout ensemble

$$F_{1,l}(y_1, y_2, \ldots, y_n), F_{2,l}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, F_{n,l}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

pour lequel $l > j$. On a donc

$$\begin{aligned} &F_{i,l}[Q_{1,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_{2,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \\ &Q_{n,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \equiv s_{i,j} F_{i,l}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{et} \quad l > j \end{aligned} \tag{53}$$

en faisant tendre l vers ∞, les premiers membres des identités (53) tendent formellement vers

$$F_i[Q_{1,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_{2,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_{n,j}(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$$

et les seconds vers $F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ce qui prouve le théorème énoncé.

4.3. Dans les théorèmes V et VI nous nous sommes occupés de systèmes de fonctions qui satisfont les conditions du paragraphe 3.1. Nous allons examiner maintenant le cas de systèmes permutables qui satisfont les conditions du théorème II.

THÉORÈME VIII. *Soit deux systèmes de n fonctions de n variables,*

$$Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

et

$$S_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ S_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, S_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

analytiques, et s'annulant à l'origine. Nous supposons que ces systèmes sont permutables, satisfont chacun les conditions du théorème II, et que chacun admet n multiplicateurs distincts

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n \text{ et } s_1', s_2', \ldots, s_n').$$

Il existe un système de séries entières, sans termes constants, à domaine de convergence non nul,

$$F_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, F_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

qui est une solution commune aux deux systèmes d'équations [8]):

$$\begin{aligned} F_i[Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_n(y_1, y_2, \ldots,&\\ y_n)] = s_i F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n& \end{aligned} \tag{54}$$

et

$$\begin{aligned} F_i[S_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ S_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, S_n(y_1, y_2, \ldots,&\\ y_n)] = s_i F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n& \end{aligned} \tag{55}$$

En effet soit

$$\mathfrak{F}_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ \mathfrak{F}_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \mathfrak{F}_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

un système de n séries entières, avec

$$\left[\frac{D[\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n]}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right]_{v_1 = v_2 = \ldots = v_n = 0} \neq 0,$$

qui vérifie les équations (54). Le système le plus général de séries entières qui vérifie les mêmes équations est

$$l_1\mathfrak{F}_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ l_2\mathfrak{F}_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, l_n\mathfrak{F}_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ étant des constantes arbitraires (paragraphe 3.3). Si dans les identités

---

[8]) En réalité nous prouverous que ces deux systèmes d'équations ont les mêmes solutions analytiques.

$$\mathfrak{F}_i[Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \equiv s_i\mathfrak{F}_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

nous appliquons la substitution

$$[y_i, S_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)], \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

en tenant compte de la permutabilité des systèmes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ et $S_1, S_2, \ldots, S_n$, nous obtenons

$$\mathfrak{F}_i[S_1(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n), S_2(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n), \ldots, S_n(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)] \equiv s_i\mathfrak{F}_i(S_1, S_2, \ldots, S_n)$$

ce qui nous prouve que les séries

$$\mathfrak{F}_i[S_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), S_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, S_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)], \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

forment aussi une solution des équations (54) et que par conséquent

$$\mathfrak{F}_i[S_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), S_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, S_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \equiv l'_i\mathfrak{F}_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où $l'_1, l'_2, \ldots, l'_n$ sont des constantes déterminées; mais ces dernières identités ne sont possibles que si $l'_1 = s'_1$, $l'_2 = s'_2, \ldots, l'_n = s'_n$, ce qui nous prouve que les séries $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$, vérifient aussi le système (55), et que par conséquent les systèmes (54) et (55) ont les mêmes solutions analytiques.

Théorème IX. *Soit deux systèmes de n fonctions de n variables*

$$Q_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), Q_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, Q_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

et

$$S_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), S_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, S_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

analytiques, et s'annulant à l'origine. Nous supposons que ces systèmes sont permutables, que le premier satisfait les conditions du théorème II, que les deuxième satisfait les condition du paragraphe 3.1, *et que chacun de ces systèmes admet n multiplicateurs distincts.*

Toute solution analytique du système (54), *vérifie aussi le système* (55).

La démonstration est la même que dans le théorème précedent, et s'applique aussi au cas d'un nombre quelconque de systèmes permutables, pourvu qu'un de ces systèmes satisfasse les conditions du théorème II, et les autres, soit les conditions du théorème II, soit celles du paragraphe 3.1.

CHAPITRE V

Enoncé général de quelques théorèmes

5.1. Nous désignons respectivement par E et S deux ensembles sur les éléments desquels on a pu définir les lois de composition qui suivent.

I. A tout couple e_1 et e_2 d'éléments de E, correspond un élément de E appelé somme désigné par $e_1 + e_2$, et qui jouit des propriétés suivantes:

a) $e_1 + e_2 = e_2 + e_1$ commutativité,

b) $e_1 + (e_2 + e_3) = (e_1 + e_2) + e_3$ associativité.

II. A tout couple ordonné e_1 et e_2 d'éléments de E correspond un élément de E, appelé produit, désigné par e_1e_2, et qui jouit des propriétés suivantes:

a) $e_1(e_2e_3) = (e_1e_2)e_3$ associativité,

b) $e_1 \in E$ et $e_2 \in E$ étant donnés, il existe un et un seul $e_3 \in E$, et un et seul $e_4 \in E$ tels que $e_1e_3 = e_2$, $e_4e_1 = e_2$,

c) Il existe un $u \in E$ tel que, quelque soit $e \in E$, $ue = e$,

d) $(e_1 + e_2)e_3 = e_1e_3 + e_2e_3$.

III. A tout couple s_1 et s_2 d'éléments de S correspond un élément de S, appelé produit, désigné par s_1s_2, et qui jouit des propriétés:

a) $s_1s_2 = s_2s_1$,

b) $s_1(s_2s_3) = (s_1s_2)s_3$,

c) étant donné $s_1 \in S$ et $s_2 \in S$ il existe un seul $s_3 \in S$ tel que $s_1s_3 = s_2$.

IV. A tout couple $e \in E$ et $s \in S$ correspond un élément de E, désigné par se, qui jouit des propriétés suivantes:

a) $s_1(s_2e) = (s_1s_2)e$,

b) $(s_1e_1)e_2 = s_1(e_1e_2)$,

c) $s_1(e_1 + e_2) = s_1e_1 + s_1e_2$.

V. Il existe un élément de S, appelé élément unité; désigné par 1, et qui jouit des propriétés suivantes:

a) $1e = e$ quel que soit $e \in E$,

b) $1s = s$ quel que soit $s \in S$,

c) A tout entier p correspond au moins un élément s de S tel que $s^p = 1$ (par définition $s^2 = ss$, $s^p = s^{p-1}s$).

Des propriétés II(a), II(b), et II(c), on déduit $e_1u = e_1$, quel que soit $e_1 \in E$.

En effet si l'on avait $e_1 u = e_2 \neq e_1$, on aurait $(e_1 u)e_2 = e_2 e_2$ ou $e_1(ue_2) = e_2 e_2$ ou $e_1 e_2 = e_2 e_2$ ce qui est impossible si $e_1 \neq e_2$.

Des propriétés II(b) et II(c), on déduit que si $e \in E$, il existe un et un seul $e^{-1} \in E$ tel que $e^{-1}e = u$. On a alors $e^{-1}ee^{-1} = ue^{-1} = e^{-1}u$ ou $e^{-1}(ee^{-1}) = e^{-1}u$ ou $ee^{-1} = u$.

De même à tout $s \in S$ correspond un et un seul $s^{-1} \in S$, tel que $ss^{-1} = s^{-1}s = 1$.

5.2. Théorèmes.

5.2.1. Théorème X. *A tout entier p correspond au moins un $e \in E$ tel que $e^p = u$ (par définition $e^2 = ee$, $e^p = e^{p-1}e$).*

En effet, soit $e_1 \in E$ et $s \in S$ tel que $s^p = 1$.

Prenons $e = e_1^{-1}se_1$ (nous écrivons $e_1^{-1}se_1$ pour $e_1^{-1}(se_1)$) alors $e^p = e_1^{-1}s^p e_1 = e_1^{-1}e_1 = u$.

5.2.2. Théorème XI. *(réciproque) Soit $e \in E$ tel que $e^p = u$. Il existe un $e_1 \in E$ et un $s \in S$ avec $s^p = 1$, tels que $e = e_1^{-1}se_1$.*

Nous prenons

$$e_1 = u + s^{-1}e + s^{-2}e^2 + \ldots + s^{-p+1}\, e^{p-1}$$

(par définition $s^{-2} = s^{-1}s^{-1}$, $s^{-p} = s^{-p+1}\, s^{-1}$) alors

$$e_1 e = e + s^{-1}e^2 + s^{-2}e^3 + \ldots + s^{-p+1}e^p = s(s^{-1}e + s^{-2}e^2 + \ldots + s^{-p}e^p)$$

comme $s^{-p} = 1$ et $e^p = u$, et vu la commutativité de l'addition dans E, la relation précédente s'écrit

$$e_1 e = s(u + s^{-1}e^2 + \ldots + s^{-p+1}\, e^{p-1})$$

ou $e_1 e = se_1$ ou encore $e = e_1^{-1}se_1$.

5.3.3. Théorème XII. *Soit $e \in E$, avec $e^p = u$, et $e_1 \in E$ tel que $e = e_1^{-1}se_1$ ($s \in S$, $s^p = 1$). Posons $e_2 = xe_1$, $x \in E$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $e = e_2^{-1}se_2$ est que l'on ait $xse' = sxe'$ pour tout $e' \in E$.*

La condition est nécessaire. Par hypothèse on a $e = e_2^{-1}se_2$ d'où $e_2 e = se_2$ ou $xe_1 e = sxe_1$. Mais par hypothèse $e_1 e = se_1$, on a donc $xse_1 = sxe_1$ d'où l'on tire que pour e' quelconque $e' \in E$, $xse' = sxe'$.

La condition est suffisante. Par hypothèse $xse_1 = sxe_1$. Mais $se_1 = e_1 e$; on a donc $xe_1 e = sxe_1$, ou $e_2 e = se_2$ d'où l'on tire $e = e_2^{-1}se_2$.

5.3.4. THÉORÈME XIII. *Soit* $e_1 \in E$ *et* $e_2 \in E$, *tels qu'il existe un entier* p *et un entier* q *tels que* $e_1^p = u$, $e_2^q = u$.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $e_1e_2 = e_2e_1$ *est qu'il existe un* $e_3 \in E$ *tel que l'on ait*:

$$e_1 = e_3^{-1}s_1e_3 \text{ où } s_1 \in S,\ s_1^p = 1$$
$$e_2 = e_3^{-1}s_2e_3 \text{ où } s_2 \in S,\ s_2^q = 1.$$

La condition est manifestement suffisante. Prouvons qu'elle est nécessaire.

Par hypothèse $\qquad e_1e_2 = e_2e_1$

Soit $s_1 \in S$, $s_1^p = 1$. D'après le théorème XI il existe un $\alpha \in E$ tel que $\alpha e_1 = s_1\alpha$ et comme $e_1e_2 = e_2e_1$, on en tire $\alpha e_2e_1 = s\alpha e_2$. Par conséquent si l'on pose $\alpha e_2 = x\alpha$, $x \in E$ on a d'après le théorème XII, $xs_1e' = s_1xe'$ quel que soit $e' \in E$. Or $x = \alpha e_2\alpha^{-1}$ d'où $x^q = \alpha e_2^q\alpha^{-1} = \alpha u\alpha^{-1} = u$.

Prenons $V = u + s_2^{-1}x + s_2^{-2}x^2 + \ldots + s_2^{-q+1}x^{q-1}$, alors $V \in E$.

On a d'une part $Vx = s_2V$, comme on peut facilement le vérifier, et d'autre part quel que soit $e' \in E$, $Vs_1e' = s_1Ve'$. De la première de ces relations on déduit $V\alpha e_2\alpha^{-1} = s_2V$ ou $V\alpha e_2 = s_2V\alpha$; de la deuxième on tire d'après le théorème XII, $V\alpha e_1 = sV\alpha$, ce qui nous prouve que $V\alpha$ peut être pris comme élément e_3 de l'énoncé.

5.3.5. THÉORÈME XIV. *Soit un nombre fini* $e_1, e_2, \ldots, e_m$, *d'éléments de* E, *tels que à chacun d'eux correspond un entier* p_i *pour lequel* $e_i^{p_i} = u$. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait* $e_ie_j = e_je_i$ *quels que soient les indices* $i = 1, 2, \ldots, m$ *et* $j = 1, 2, \ldots, m$, *est qu'il existe un* $e \in E$ *tel quel'on ait* $e_i = e^{-1}s_ie$, $s_i \in S$, $s_i^{p_i} = 1$, *pour tout* $i = 1, 2, \ldots, m$.

La condition est manifestement suffisante. Pour prouver qu'elle est nécessaire nous procédons par récurrence. Nous supposons qu'il existe un $\alpha \in E$ tel que l'on ait

$$\alpha e_i = s_i\alpha,\ s_i \in S,\ s_i^{q_i} = 1 \text{ et } i = 1, 2, \ldots, m - 1$$

donc $\alpha e_ie_m = s_i\alpha e_m$, $i \leqq m - 1$ et comme $e_ie_m = e_me_i$, la relation précedente s'écrit aussi $\alpha e_me_i = s_i\alpha e_m$; il s'ensuit d'après le théorème XII que si l'on pose $\alpha e_m = x\alpha$, $x \in E$, on a $xs_ie' = s_ixe'$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, m - 1$ et tout $e' \in E$.

Or $x = \alpha e_m\alpha^{-1}$ d'où $x^{p_m} = \alpha e_m^{p_m}\alpha^{-1} = \alpha u\alpha^{-1} = u$.

Posons $V = u + s_m^{-1}x + s_m^{-2}x^2 + \ldots + s_m^{-p_m+1}x^{p_m-1}$, $s_m \in S$ $s_m^{p_m} = 1$, alors $V \in E$.

On a d'une part $Vx = s_m V$ donc $V\alpha e_m \alpha^{-1} = s_m V$ ou $V\alpha e_m = s_m V\alpha$, et d'autre part $Vs_i e' = s_i Ve'$ quel que soit $e' \in E$.

Donc d'après le théorème XII, $V\alpha e_i = s_i V\alpha$. $V\alpha$ est donc l'élément de l'énoncé.

5.4. Remarque. Les résultats des paragraphes 3.1.2, 3.2, ainsi que les théorèmes VI et VII, sont, sous certaines réserves portant sur l'existence d'éléments inverses, des cas particuliers des théorèmes de ce chapitre.

BIBLIOGRAPHIE

F. W. Bradley

[1] Analytic solutions of certain functional equations. Proceedings of the Math. Society of Egypt, Vol 3 No. 3, 1947.

G. Koenigs

[1] Recherches sur les substitutions uniformes. Bulletin des Sciences Mathématiques 1883.

[2] Recherches sur les equations fonctionnelles. Annales Sc. de l'Ecole Normale Supérieure 1884.

[3] Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles. Annales Sc. de l'Ecole Normale Supérieure 1885.

Emile Picard

[1] Sur une classe de transcendantes nouvelles. Acta Mathematica t. XVIII et XXIII.

[2] Sur une classe de transcendantes généralisant les fonctions elliptiques et abéliennes. Annales Sc. de l'Ecole Normale Sup. t. X 3e série 1913. Comptes Rendus de l'académie des Sc. de Paris 24 Juillet 1904.

[3] Leçons sur quelques équations fonctionnelles. Cahiers Scientifiques fasc. III. Gauthier Villars. Paris 1928.

N. Pastides

[1] Sur quelques équations fonctionnelles. Ann. Sc. de l'Ecole Normale Sup. (3) LXV.-Fasc. 4. 1949.

H. Poincare

[1] Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes. Journal de Liouville 4e série t. 6. 1890.

Schroeder

[1] Ueber iterirte Functionen. Math. Ann. 3. 1871.

(Oblatum 26-9-51).