

COMPOSITIO MATHEMATICA

CARLO BIRINDELLI

**Su nuove formule interpolatorie del Picone per
funzioni in piu variabili e loro contributo al
calcolo numerico degli integrali multipli**

Compositio Mathematica, tome 10 (1952), p. 117-167

http://www.numdam.org/item?id=CM_1952__10__117_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Su nuove formule interpolatorie del Picone per funzioni in più variabili e loro contributo al calcolo numerico degli integrali multipli ¹⁾

Memoria di

Carlo Birindelli

(a Roma)

In questo lavoro si mostra che i risultati del Prof. Picone, sulla interpolazione competente alla derivazione totale, in un intervallo del piano, delle funzioni in due variabili ²⁾, sono estendibili allo spazio ordinario per le funzioni in tre variabili e, tra l'altro, che la formula di Cavalieri-Simpson per la approssimazione degli integrali doppi stabilita dal Picone é suscettibile di naturale estensione allo spazio tridimensionale, cosicché si può affermare l'esistenza della formula di Cavalieri-Simpson per l'approssimazione degli integrali tripli.

Tale naturale estensione dall' $S_{(2)}$ all' $S_{(3)}$ di tutti i risultati, del § 6 del l.c. ²⁾, presi in blocco, é consentita dal fatto di far uso sistematico dell'operatore derivata totale dei vari ordini ³⁾, che per le funzioni di due o più variabili ha lo stesso ufficio che per quelle di una variabile ha la derivata ordinaria, e della conseguente formula esprime le funzioni in più variabili con uno sviluppo tipo Taylor, che estende nel modo più semplice possibile quello noto per funzioni di una.

Ovviamente, la estensione del procedimento che si fa sistematicamente nel presente lavoro, per dimostrare che tutti i risultati validi nell' $S_{(2)}$ permangono nell' $S_{(3)}$, consente di poter affermare che i risultati del § 6 del l.c. ²⁾ si possono estendere in blocco all' $S_{(r)}$ e che per l'approssimazione degli integrali multipli d'ordine r , $r = 1, 2, 3, \dots$, esiste sempre la formula, tipo Cavalieri-Simpson, atta a questo scopo, e, denominandola *formula centro-periferica secondo Picone*, possiamo concludere il nostro dire affermando che

¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

²⁾ Cfr. M. PICONE [1], (Cifre tra parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia al fine del lavoro).

³⁾ M. PICONE [2], Vedi p. 598.

scopo fondamentale di questo lavoro é di pervenire ad essa per $r = 3$.

1. Per ovvie ragioni di opportunità manterremo qui il simbolismo e le denominazioni relative al l.c. ²⁾ e segnatamente per tutto ciò che ha riferimento con gli argomenti del § 6 del lavoro stesso.

Di una funzione $u(x, y, z)$ definita in un intervallo T dello spazio ordinario di punti estremo inferiore (a, b, c) e superiore (a', b', c') , chiamiamo, col Picone, derivata totale d'ordine h la derivata parziale di ordine $3h$

$$(1) \quad u^{(h)}(x, y, z) = \frac{\partial^{3h} u}{\partial x^h \partial y^h \partial z^h}$$

con l'intesa che u sia continua in T con tutte le derivate parziali d'ordine minore.

Indichi (a_0, b_0, c_0) il centro di T e siano α, β, γ le tre semi-dimensioni di T ; con L_T si rappresenti poi la superficie mediana di T , cioè l'insieme di punti di T per cui

$$(x - a_0)(y - b_0)(z - c_0) = 0.$$

Al solito, col cambiamento

$$x = a_0 + \alpha r, \quad y = b_0 + \beta s, \quad z = c_0 + \gamma t,$$

l'intervallo T , dello spazio (x, y, z) , viene rappresentato nell'intervallo quadrato $Q[(-1, -1, -1); (1, 1, 1)]$ dello spazio (r, s, t) , e di tale intervallo diremo L la superficie mediana $xyz = 0$.

Ciò premesso passiamo, senza altri richiami, alle estensioni dei Teoremi VI, VII, VIII (del § 6 l.c. ²⁾) allo spazio ordinario.

2. Vale il teorema

I. *Assegnata, ad arbitrio, una funzione $F(r, s, t)$ di classe $n + 2$ nel cubo Q (n intero positivo o nullo), esiste una ed una sola soluzione, della stessa classe in Q , della equazione*

$$(2) \quad v^{(n+2)}(r, s, t) = \frac{\partial^{3(n+2)} v}{\partial r^{n+2} \partial s^{n+2} \partial t^{n+2}} = 0,$$

che coincide con la $F(r, s, t)$ sulla periferia $\mathfrak{S}Q$ di Q (e, per $n > 0$, supposto che per ciascuna delle funzioni in due variabili $F(\pm 1, s, t)$, $F(r, \pm 1, t)$, $F(r, s, \pm 1)$, tenendo fissa comunque una qualsiasi delle due variabili mentre si rende infinitesima l'altra, la funzione risulti allora pur essa un infinitesimo almeno di ordine n rispetto a

quello costituito dalla variabile che si fa $\rightarrow 0$) è identicamente nulla, con le sue derivate totali fino a quella inclusa d'ordine $n - 1$, sulla superficie mediana L di Q , ed è data da

$$\begin{aligned}
 (2^*) \quad & v(r, s, t) \\
 = & \frac{(-r)^n}{2} (1-r)F(-1, s, t) + \frac{(-s)^n}{2} (1-s)F(r, -1, t) \\
 + & \frac{(-t)^n}{2} (1-t)F(r, s, -1) + \frac{r^n}{2} (1+r)F(1, s, t) \\
 + & \frac{s^n}{2} (1+s)F(r, 1, t) + \frac{t^n}{2} (1+t)F(r, s, 1) \\
 - & \frac{r^n s^n}{4} (1-r)(1-s)F(-1, -1, t) - \frac{r^n t^n}{4} (1-r)(1-t)F(-1, s, -1) \\
 - & \frac{s^n t^n}{4} (1-s)(1-t)F(r, -1, -1) - \frac{r^n (-s)^n}{4} (1+r)(1-s)F(1, -1, t) \\
 - & \frac{r^n (-t)^n}{4} (1+r)(1-t)F(1, s, -1) - \frac{(-r)^n s^n}{4} (1-r)(1+s)F(-1, 1, t) \\
 - & \frac{s^n (-t)^n}{4} (1+s)(1-t)F(r, 1, -1) - \frac{(-r)^n t^n}{4} (1-r)(1+t)F(-1, s, 1) \\
 - & \frac{(-s)^n t^n}{4} (1-s)(1+t)F(r, -1, 1) - \frac{r^n s^n}{4} (1+r)(1+s)F(1, 1, t) \\
 - & \frac{r^n t^n}{4} (1+r)(1+t)F(1, s, 1) - \frac{s^n t^n}{4} (1+s)(1+t)F(r, 1, 1) \\
 + & \frac{(-r)^n (-s)^n (-t)^n}{8} (1-r)(1-s)(1-t)F(-1, -1, -1) \\
 + & \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1-s)(1-t)F(1, -1, -1) \\
 + & \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1-t)F(-1, 1, -1) \\
 + & \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1+t)F(-1, -1, 1) \\
 + & \frac{r^n s^n (-t)^n}{8} (1+r)(1+s)(1-t)F(1, 1, -1) \\
 + & \frac{r^n (-s)^n t^n}{8} (1+r)(1-s)(1+t)F(1, -1, 1) \\
 + & \frac{(-r)^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1+t)F(-1, 1, 1) \\
 + & \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1+t)F(1, 1, 1)
 \end{aligned}$$

Dimostrazione — Con facili verifiche si vede anzitutto che il secondo membro di (2*) si riduce effettivamente ad $F(\pm 1, s, t)$ per $r = \pm 1$, ad $F(r, \pm 1, t)$ per $s = \pm 1$, e ad $F(r, s, \pm 1)$

per $t = \pm 1$, sicchè tale funzione $v(r, s, t)$ coincide con la $F(r, s, t)$ su $\mathfrak{F}Q$. Si verifica pure che $v(r, s, t)$ é di classe $n + 2$ in Q e si vede immediatamente, per le proprietà di F , che per $n > 0$ la v é effettivamente nulla, con le prime $n - 1$ derivate totali, sulla superficie mediana L di Q e che é, in Q , $v^{(n+2)} = 0$.

Resta, per completare la dimostrazione del teorema, da stabilire l'unicità per la soluzione del problema inerente al teorema stesso ⁴⁾.

Le soluzioni di (2), per $n = 0$, di classe 2 nel cubo Q , sono tutte date dalla formula

$$v(r, s, t) = A(r, s) + tB(r, s) + C(r, t) + sD(r, t) + E(s, t) + rG(s, t)$$

ove

$$A(r, s), B(r, s), C(r, t), D(r, t), E(s, t), G(s, t)$$

sono arbitrarie funzioni di classe due nell'intervallo quadrato $[(-1, -1); (1, 1)]$ dell' $S_{(2)}$.

Le soluzioni della equazione, per $n > 0$, di classe $n + 2$ nel cubo Q , identicamente nulle sulla superficie mediana L con le derivate totali fino a quella inclusa d'ordine $n - 1$, son tutte date dalla formula

$$(3) \quad v(r, s, t) \\ = r^n E(s, t) + r^{n+1} G(s, t) + s^n C(r, t) + s^{n+1} D(r, t) + t^n A(r, s) + t^{n+1} B(r, s),$$

ove

$$A(r, s), B(r, s), C(r, t), D(r, t), E(s, t), G(s, t)$$

sono funzioni arbitrarie, nelle rispettive due variabili, di classe $n + 2$ nell'intervallo quadrato $[(-1, -1), (1, 1)]$, tali che tenendo comunque fissa una qualsiasi delle due variabili nel mentre che si rende infinitesima l'altra avvenga che pure le funzioni $A(r, s), \dots$, risultino infinitesime, almeno d'ordine n , rispetto all'infinitesimo costituito da quella delle due variabili che si fa tendere a zero.

Il detto teorema d'unicità resta stabilito, per $n \geq 0$, se si può far vedere che esiste una sola funzione della forma data dal secondo membro di (3) che coincida con la assegnata $F(r, s, t)$ su $\mathfrak{F}Q$. Tale coincidenza avverrà allora ed allora soltanto che si verifichino le seguenti sei equazioni

$$(4) \quad A(r, s) + B(r, s) + s^n C(r, 1) + s^{n+1} D(r, 1) \\ + r^n E(s, 1) + r^{n+1} G(s, 1) = F(r, s, 1),$$

⁴⁾ Il procedimento che a tale scopo seguiamo qui é in sostanza la estensione all' $S_{(3)}$, die quello svolto dal Prof PICONE per la stessa proposizione nell' $S_{(2)}$.

- (5) $A(r, s) - B(r, s) + (-1)^n s^n C(r, -1) + (-1)^n s^{n+1} D(r, -1) + (-1)^n r^n E(s, -1) + (-1)^n r^{n+1} G(s, -1) = (-1)^n F(r, s, -1),$
- (6) $t^n A(r, 1) + t^{n+1} B(r, 1) + C(r, t) + D(r, t) + r^n E(1, t) + r^{n+1} G(1, t) = F(r, 1, t),$
- (7) $(-1)^n t^n A(r, -1) + (-1)^n t^{n+1} B(r, -1) + C(r, t) - D(r, t) + (-1)^n r^n E(-1, t) + (-1)^n r^{n+1} G(-1, t) = (-1)^n F(r, -1, t),$
- (8) $t^n A(1, s) + t^{n+1} B(1, s) + s^n C(1, t) + s^{n+1} D(1, t) + E(s, t) + G(s, t) = F(1, s, t),$
- (9) $(-1)^n t^n A(-1, s) + (-1)^n t^{n+1} B(-1, s) + (-1)^n s^n C(-1, t) + (-1)^n s^{n+1} D(-1, t) + E(s, t) - G(s, t) = (-1)^n F(-1, s, t).$

Da queste si ottengono subito intanto le seguenti otto relazioni

- (10) $A(1, 1) + B(1, 1) + C(1, 1) + D(1, 1) + E(1, 1) + G(1, 1) = F(1, 1, 1),$
- (11) $A(1, 1) - B(1, 1) + (-1)^n C(1, -1) + (-1)^n D(1, -1) + (-1)^n E(1, -1) + (-1)^n G(1, -1) = (-1)^n F(1, 1, -1),$
- (12) $A(1, -1) + B(1, -1) + (-1)^n C(1, 1) - (-1)^n D(1, 1) + E(-1, 1) + G(-1, 1) = F(1, -1, 1),$
- (13) $A(1, -1) - B(1, -1) + C(1, -1) - D(1, -1) + (-1)^n E(-1, -1) + (-1)^n G(-1, -1) = (-1)^n F(1, -1, -1),$
- (14) $A(-1, 1) + B(-1, 1) + C(-1, 1) + D(-1, 1) + (-1)^n E(1, 1) - (-1)^n G(1, 1) = F(-1, 1, 1),$
- (15) $A(-1, 1) - B(-1, 1) + (-1)^n C(-1, -1) + (-1)^n D(-1, -1) + E(1, -1) - G(1, -1) = (-1)^n F(-1, 1, -1)$
- (16) $A(-1, -1) + B(-1, -1) + (-1)^n C(-1, 1) - (-1)^n D(-1, 1) + (-1)^n E(-1, 1) - (-1)^n G(-1, 1) = F(-1, -1, 1),$
- (17) $A(-1, -1) - B(-1, -1) + C(-1, -1) - D(-1, -1) + E(-1, -1) - G(-1, -1) = (-1)^n F(-1, -1, -1).$

Sommando e sottraendo membro a membro: le (4), (5); le (6), (7); le (8), (9); si ottengono successivamente le espressioni delle $A(r, s)$, $B(r, s)$, $C(r, t)$, $D(r, t)$, $E(s, t)$, $G(s, t)$, sicchè sostituendo in (3) si trova che $v(r, s, t)$ é data da

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & v(r, s, t) \\
 &= \frac{t^n}{2} [F(r, s, 1) + (-1)^n F(r, s, -1)] - \frac{r^n t^n}{2} [E(s, 1) \\
 &+ (-1)^n E(s, -1)] - \frac{r^{n+1} t^n}{2} [G(s, 1) + (-1)^n G(s, -1)] \\
 &- \frac{s^n t^n}{2} [C(r, 1) + (-1)^n C(r, -1)] - \frac{s^{n+1} t^n}{2} [D(r, 1) \\
 &+ (-1)^n D(r, -1)] + \frac{t^{n+1}}{2} [F(r, s, 1) - (-1)^n F(r, s, -1)] \\
 &- \frac{r^n t^{n+1}}{2} [E(s, 1) - (-1)^n E(s, -1)] - \frac{r^{n+1} t^{n+1}}{2} [G(s, 1) \\
 &- (-1)^n G(s, -1)] - \frac{s^n t^{n+1}}{2} [C(r, 1) - (-1)^n C(r, -1)] \\
 &- \frac{s^{n+1} t^{n+1}}{2} [D(r, 1) - (-1)^n D(r, -1)] + \frac{s^n}{2} [F(r, 1, t) \\
 &+ (-1)^n F(r, -1, t)] - \frac{r^n s^n}{2} [E(1, t) + (-1)^n E(-1, t)] \\
 &- \frac{r^{n+1} s^n}{2} [G(1, t) + (-1)^n G(-1, t)] - \frac{s^n t^n}{2} [A(r, 1) \\
 &+ (-1)^n A(r, -1)] - \frac{s^n t^{n+1}}{2} [B(r, 1) + (-1)^n B(r, -1)] \\
 &+ \frac{s^{n+1}}{2} [F(r, 1, t) - (-1)^n F(r, -1, t)] - \frac{r^n s^{n+1}}{2} [E(1, t) \\
 &- (-1)^n E(-1, t)] - \frac{r^{n+1} s^{n+1}}{2} [G(1, t) - (-1)^n G(-1, t)] \\
 &- \frac{s^{n+1} t^n}{2} [A(r, 1) - (-1)^n A(r, -1)] - \frac{s^{n+1} t^{n+1}}{2} [B(r, 1) \\
 &- (-1)^n B(r, -1)] + \frac{r^n}{2} [F(1, s, t) + (-1)^n F(-1, s, t)] \\
 &- \frac{r^n s^n}{2} [C(1, t) + (-1)^n C(-1, t)] - \frac{r^n s^{n+1}}{2} [D(1, t) \\
 &+ (-1)^n D(-1, t)] - \frac{r^n t^n}{2} [A(1, s) + (-1)^n A(-1, s)] \\
 &- \frac{r^n t^{n+1}}{2} [B(1, s) + (-1)^n B(-1, s)] + \frac{r^{n+1}}{2} [F(1, s, t) \\
 &- (-1)^n F(-1, s, t)] - \frac{r^{n+1} s^n}{2} [C(1, t) - (-1)^n C(-1, t)] \\
 &- \frac{r^{n+1} s^{n+1}}{2} [D(1, t) - (-1)^n D(-1, t)] - \frac{r^{n+1} t^n}{2} [A(1, s) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^n A(-1, s) - \frac{r^{n+1} t^{n+1}}{2} [B(1, s) - (-1)^n B(-1, s)] \\
&= \frac{t^n(1+t)}{2} F(r, s, 1) + \frac{(-t)^n(1-t)}{2} F(r, s, -1) \\
&+ \frac{s^n(1+s)}{2} F(r, 1, t) + \frac{(-s)^n(1-s)}{2} F(r, -1, t) \\
&+ \frac{r^n(1+r)}{2} F(1, s, t) + \frac{(-r)^n(1-r)}{2} F(-1, s, t) \\
&- \frac{r^n t^n}{2} (1+t) E(s, 1) - \frac{r^n (-t)^n}{2} (1-t) E(s, -1) \\
&- \frac{r^n t^n}{2} (1+r) A(1, s) - \frac{t^n (-r)^n}{2} (1-r) A(-1, s) \\
&- \frac{r^{n+1} t^n}{2} (1+t) G(s, 1) - \frac{r^{n+1} (-t)^n}{2} (1-t) G(s, -1) \\
&- \frac{r^n t^{n+1}}{2} (1+r) B(1, s) - \frac{(-r)^n t^{n+1}}{2} (1-r) B(-1, s) \\
&- \frac{s^n t^n}{2} (1+t) C(r, 1) - \frac{s^n (-t)^n}{2} (1-t) C(r, -1) \\
&- \frac{s^n t^n}{2} (1+s) A(r, 1) - \frac{(-s)^n t^n}{2} (1-s) A(r, -1) \\
&- \frac{s^{n+1} t^n}{2} (1+t) D(r, 1) - \frac{s^{n+1} (-t)^n}{2} (1-t) D(r, -1) \\
&- \frac{s^n t^{n+1}}{2} (1+s) B(r, 1) - \frac{(-s)^n t^{n+1}}{2} (1-s) B(r, -1) \\
&- \frac{r^n s^n}{2} (1+r) C(1, t) - \frac{(-r)^n s^n}{2} (1-r) C(-1, t) \\
&- \frac{r^n s^n}{2} (1+s) E(1, t) - \frac{r^n (-s)^n}{2} (1-s) E(-1, t) \\
&- \frac{r^n s^{n+1}}{2} (1+r) D(1, t) - \frac{(-r)^n s^{n+1}}{2} (1-r) D(-1, t) \\
&- \frac{r^{n+1} s^n}{2} (1+s) G(1, t) - \frac{r^{n+1} (-s)^n}{2} (1-s) G(-1, t).
\end{aligned}$$

Operando ancora nello stesso modo con le (4), ..., (9) dopo aver posto $r = \pm 1, \dots$, allo scopo di esprimere $A(\pm 1, s)$, $B(\pm 1, s), \dots$, mediante le altre, si trova, sviluppando e semplificando con la riduzione dei termini simili, che

$$\begin{aligned}
& - \frac{r^n t^n}{2} (1+r) A(1, s) - \frac{(-r)^n t^n}{2} (1-r) A(-1, s) \\
& - \frac{r^n t^{n+1}}{2} (1+r) B(1, s) - \frac{(-r)^n t^{n+1}}{2} (1-r) B(-1, s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{r^{n+1}t^n}{2}(1+t)G(s, 1) - \frac{r^{n+1}(-t)^n}{2}(1-t)G(s, -1) \\
& -\frac{r^n t^n}{2}(1+t)E(s, 1) - \frac{r^n(-t)^n}{2}(1-t)E(s, -1) \\
& = \frac{r^n s^n t^n}{4}(1+r)(1+t)C(1, 1) + \frac{r^n s^n(-t)^n}{4} \\
& \cdot (1+r)(1-t)C(1, -1) - \frac{r^n t^n}{4}(1+r)(1+t)F(1, s, 1) \\
& + \frac{r^n s^{n+1} t^n}{4}(1+r)(1+t)D(1, 1) + \frac{r^n s^{n+1}(-t)^n}{4} \\
& \cdot (1+r)(1-t)D(1, -1) - \frac{r^n(-t)^n}{4}(1+r)(1-t)F(1, s, -1) \\
& + \frac{(-r)^n s^n t^n}{4}(1-r)(1+t)C(-1, 1) + \frac{(-r)^n s^n(-t)^n}{4} \\
& \cdot (1-r)(1-t)C(-1, -1) - \frac{(-r)^n t^n}{4}(1-r)(1+t)F(-1, s, 1) \\
& + \frac{(-r)^n s^{n+1} t^n}{4}(1-r)(1+t)D(-1, 1) + \frac{(-r)^n s^{n+1}(-t)^n}{4} \\
& \cdot (1-r)(1-t)D(-1, -1) - \frac{r^n t^n}{4}(1-r)(1-t)F(-1, s, -1); \\
& -\frac{r^n s^n}{2}(1+r)C(1, t) - \frac{(-r)^n s^n}{2}(1-r)C(-1, t) \\
& -\frac{r^n s^{n+1}}{2}(1+r)D(1, t) - \frac{(-r)^n s^{n+1}}{2}(1-r)D(-1, t) \\
& -\frac{r^{n+1} s^n}{2}(1+s)G(1, t) - \frac{r^{n+1}(-s)^n}{2}(1-s)G(-1, t) \\
& -\frac{r^n s^n}{2}(1+s)E(1, t) - \frac{r^n(-s)^n}{2}(1-s)E(-1, t) \\
& = \frac{r^n s^n t^n}{4}(1+r)(1+s)A(1, 1) + \frac{r^n(-s)^n t^n}{4} \\
& \cdot (1+r)(1-s)A(1, -1) - \frac{r^n s^n}{4}(1+r)(1+s)F(1, 1, t) \\
& + \frac{r^n s^n t^{n+1}}{4}(1+r)(1+s)B(1, 1) + \frac{r^n(-s)^n t^{n+1}}{4} \\
& \cdot (1+r)(1-s)B(1, -1) - \frac{r^n(-s)^n}{4}(1+r)(1-s)F(1, -1, t) \\
& + \frac{(-r)^n s^n t^n}{4}(1-r)(1+s)A(-1, 1) + \frac{(-r)^n(-s)^n t^n}{4} \\
& \cdot (1-r)(1-s)A(-1, -1) - \frac{(-r)^n s^n}{4}(1-r)(1+s)F(-1, 1, t) \\
& + \frac{(-r)^n s^n t^{n+1}}{4}(1-r)(1+s)B(-1, 1) + \frac{(-r)^n(-s)^n t^{n+1}}{4} \\
& \cdot (1-r)(1-s)B(-1, -1) - \frac{r^n s^n}{4}(1-r)(1-s)F(-1, -1, t);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{s^{nt^n}}{2}(1+s)A(r, 1) - \frac{(-s)^{nt^n}}{2}(1-s)A(r, -1) \\
& -\frac{s^{nt^{n+1}}}{2}(1+s)B(r, 1) - \frac{(-s)^{nt^{n+1}}}{2}(1-s)B(r, -1) \\
& -\frac{s^{n+1}t^n}{2}(1+t)D(r, 1) - \frac{s^{n+1}(-t)^n}{2}(1-t)D(r, -1) \\
& -\frac{s^{nt^n}}{2}(1+t)C(r, 1) - \frac{s^n(-t)^n}{2}(1-t)C(r, -1) \\
& = \frac{r^n s^{nt^n}}{4}(1+s)(1+t)E(1, 1) + \frac{r^n s^n (-t)^n}{4} \cdot \\
& \cdot (1+s)(1-t)E(1, -1) - \frac{s^{nt^n}}{4}(1+s)(1+t)F(r, 1, 1) \\
& + \frac{r^{n+1} s^{nt^n}}{4}(1+s)(1+t)G(1, 1) + \frac{r^{n+1} s^n (-t)^n}{4} \cdot \\
& \cdot (1+s)(1-t)G(1, -1) - \frac{s^n (-t)^n}{4}(1+s)(1-t)F(r, 1, -1) \\
& + \frac{r^n (-s)^{nt^n}}{4}(1-s)(1+t)E(-1, 1) + \frac{r^n (-s)^n (-t)^n}{4} \cdot \\
& \cdot (1-s)(1-t)E(-1, -1) - \frac{(-s)^{nt^n}}{4}(1-s)(1+t)F(r, -1, 1) \\
& + \frac{r^{n+1} (-s)^{nt^n}}{4}(1-s)(1+t)G(-1, 1) + \frac{r^{n+1} (-s)^n (-t)^n}{4} \cdot \\
& \cdot (1-s)(1-t)G(-1, -1) - \frac{s^{nt^n}}{4}(1-s)(1-t)F(r, -1, -1).
\end{aligned}$$

Esprimendo: i coefficienti A, B mediante i restanti C, D, E, G ; quelli E, G mediante quelli A, B, C, D ; quelli C, D mediante quelli A, B, E, G ; servendosi delle (10), . . . , (17), si trova, dopo avere svolti i calcoli, che la somma del 1°, 2°, 4°, 5°, 7°, 8°, 10°, 11°, termine del secondo membro nelle tre espressioni ultime scritte, è, rispettivamente, data da

$$\begin{aligned}
& \frac{r^n s^{nt^n}}{8}(1+r)(1+s)(1+t)F(1, 1, 1) \\
& + \frac{r^n (-s)^{nt^n}}{8}(1+r)(1-s)(1+t)F(1, -1, 1) \\
& - \frac{r^n s^{nt^n}}{8}(1+r)(1+s)(1+t)[A(1, 1) + B(1, 1) + E(1, 1) + G(1, 1)] \\
& - \frac{r^n (-s)^{nt^n}}{8}(1+r)(1-s)(1+t)[A(1, -1) + B(1, -1) \\
& \qquad \qquad \qquad + E(-1, 1) + G(-1, 1)] \\
& + \frac{r^n s^{nt^n}}{8}(1+r)(1+s)(1-t)(-1)^n F(1, 1, -1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1-s)(1-t)F(1, -1, -1) \\
& - \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1-t)[A(1, 1) - B(1, 1) \\
& \quad + (-1)^n E(1, -1) + (-1)^n G(1, -1)] \\
& - \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1-s)(1-t)[(-1)^n A(1, -1) - (-1)^n B(1, -1) \\
& \quad + E(-1, -1) + G(-1, -1)] \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1+t)(-1)^n F(-1, 1, 1) \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1+t)F(-1, -1, 1) \\
& - \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1+t)[E(1, 1) - G(1, 1) \\
& \quad + (-1)^n \{A(-1, 1) + B(-1, 1)\}] \\
& - \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1+t)[(-1)^n \{E(-1, 1) \\
& \quad - G(-1, 1)\} + A(-1, -1) + B(-1, -1)] \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1-t)F(-1, 1, -1) \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1-t)(-1)^n F(-1, -1, -1) \\
& - \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1-t)(-1)^n [E(1, -1) - G(1, -1) \\
& \quad + A(-1, 1) - B(-1, 1)] \\
& - \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1-t)[E(-1, -1) - G(-1, -1) \\
& \quad + A(-1, -1) - B(-1, -1)]; \\
& \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1+t)F(1, 1, 1) \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1-t)(-1)^n F(1, 1, -1) \\
& - \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1+t)[E(1, 1) + G(1, 1) + C(1, 1) + D(1, 1)] \\
& - \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1-t)(-1)^n [E(1, -1) + G(1, -1) \\
& \quad + C(1, -1) + D(1, -1)] \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1-s)(1+t)(-1)^n F(1, -1, 1) \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1-s)(1-t)F(1, -1, -1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1-s)(1+t)[(-1)^n\{E(-1, 1) + G(-1, 1)\} \\
& \qquad \qquad \qquad + C(1, 1) - D(1, 1)] \\
& -\frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1-s)(1-t)[E(-1, -1) + G(-1, -1) \\
& \qquad \qquad \qquad + (-1)^n\{C(1, -1) - D(1, -1)\}] \\
& +\frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1+t)(-1)^n F(-1, 1, 1) \\
& +\frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1-t)F(-1, 1, -1) \\
& -\frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1+t)[E(1, 1) - G(1, 1) \\
& \qquad \qquad \qquad + (-1)^n\{C(-1, 1) + D(-1, 1)\}] \\
& -\frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1-t)[(-1)^n\{E(1, -1) - G(1, -1)\} \\
& \qquad \qquad \qquad + C(-1, -1) + D(-1, -1)] \\
& +\frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1+t)F(-1, -1, 1) \\
& +\frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1-t)(-1)^n F(-1, -1, -1) \\
& -\frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1+t)(-1)^n [E(-1, 1) - G(-1, 1) \\
& \qquad \qquad \qquad + C(-1, 1) - D(-1, 1)] \\
& -\frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1-t)[E(-1, -1) - G(-1, -1) \\
& \qquad \qquad \qquad + C(-1, -1) - D(-1, -1)]; \\
& \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1+t)F(1, 1, 1) \\
& +\frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1+t)(-1)^n F(-1, 1, 1) \\
& -\frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1+t)[C(1, 1) + D(1, 1) + A(1, 1) + B(1, 1)] \\
& -\frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1+t)(-1)^n [C(-1, 1) + D(-1, 1) \\
& \qquad \qquad \qquad + A(-1, 1) + B(-1, 1)] \\
& +\frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1-t)(-1)^n F(1, 1, -1) \\
& +\frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1-t)F(-1, 1, -1) \\
& -\frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1-t)[(-1)^n\{C(1, -1) + D(1, -1)\} \\
& \qquad \qquad \qquad + A(1, 1) - B(1, 1)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1-t)[C(-1, -1) + D(-1, -1)] \\
& \quad + (-1)^n \{A(-1, 1) - B(-1, 1)\} \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1-t)(-1)^n F(1, -1, 1) \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1+t)F(-1, -1, 1) \\
& - \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1-t)[C(1, 1) - D(1, 1)] \\
& \quad + (-1)^n \{A(1, -1) + B(1, -1)\} \\
& - \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1+t)[(-1)^n \{C(-1, 1) - D(-1, 1)\} \\
& \quad + A(-1, -1) + B(-1, -1)] \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1-s)(1-t)F(1, -1, -1) \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1-t)(-1)^n F(-1, -1, -1) \\
& - \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1-s)(1-t)(-1)^n [C(1, -1) - D(1, -1)] \\
& \quad + A(1, -1) - B(1, -1)] \\
& - \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1-t)[C(-1, -1) - D(-1, -1)] \\
& \quad + A(-1, -1) - B(-1, -1)];
\end{aligned}$$

Se infine si sommano tali tre ultime espressioni, avendo cura di tenere sempre presenti le (10), . . . , (17), si ottiene che l'espressione complessiva di tale somma é esprimibile nelle forme seguenti

$$\begin{aligned}
& \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1+t) [\mathfrak{B}F(1, 1, 1) - 2\{E(1, 1) + G(1, 1) \\
& \quad + C(1, 1) + D(1, 1) + A(1, 1) + B(1, 1)\}] \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1-s)(1+t)(-1)^n [\mathfrak{B}F(1, -1, 1) - 2\{E(-1, 1) \\
& \quad + G(-1, 1) + (-1)^n C(1, 1) - (-1)^n D(1, 1) + A(1, -1) + B(1, -1)\}] \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1-t)(-1)^n [\mathfrak{B}F(1, 1, -1) - 2\{E(1, -1) \\
& \quad + G(1, -1) + C(1, -1) + D(1, -1) + (-1)^n A(1, 1) - (-1)^n B(1, 1)\}] \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1-s)(1-t) [\mathfrak{B}F(1, -1, -1) - 2\{E(-1, -1) \\
& \quad + G(-1, -1) + (-1)^n [C(1, -1) - D(1, -1) + A(1, -1) - B(1, -1)]] \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1+t)(-1)^n [\mathfrak{B}F(-1, 1, 1) - 2\{(-1)^n [E(1, 1) \\
& \quad - G(1, 1)] + C(-1, 1) + D(-1, 1) + A(-1, 1) + B(-1, 1)\}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1+t) [3F(-1, -1, 1) - 2\{(-1)^n [E(-1, 1) \\
& - G(-1, 1) + C(-1, 1) - D(-1, 1)] + A(-1, -1) + B(-1, -1)\}] \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1-t) [3F(-1, 1, -1) - 2\{(-1)^n [E(1, -1) \\
& - G(1, -1) + A(-1, 1) - B(-1, 1)] + C(-1, -1) + D(-1, -1)\}] \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1-t)(-1)^n [3F(-1, -1, -1) \\
& - 2\{(-1)^n [E(-1, -1) - G(-1, -1) + C(-1, -1) \\
& - D(-1, -1) + A(-1, -1) - B(-1, -1)]] \\
& = \frac{r^n s^n t^n}{8} \{(1+r)(1+s)(1+t)[3F(1, 1, 1) - 2F(1, 1, 1)] \\
& + (1+r)(1-s)(1+t)(-1)^n [3F(1, -1, 1) - 2F(1, -1, 1)] \\
& + (1+r)(1+s)(1-t)(-1)^n [3F(1, 1, -1) - 2F(1, 1, -1)] \\
& + (1+r)(1-s)(1-t)[3F(1, -1, -1) - 2F(1, -1, -1)] \\
& + (1-r)(1+s)(1+t)(-1)^n [3F(-1, 1, 1) - 2F(-1, 1, 1)] \\
& + (1-r)(1-s)(1+t)[3F(-1, -1, 1) - 2F(-1, -1, 1)] \\
& + (1-r)(1+s)(1-t)[3F(-1, 1, -1) - 2F(-1, 1, -1)] \\
& + (1-r)(1-s)(1-t)(-1)^n [3F(-1, -1, -1) - 2F(-1, -1, -1)]\} \\
& = \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1+t)F(1, 1, 1) \\
& + \frac{r^n (-s)^n t^n}{8} (1+r)(1-s)(1+t)F(1, -1, 1) \\
& + \frac{r^n s^n (-t)^n}{8} (1+r)(1+s)(1-t)F(1, 1, -1) \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1-s)(1-t)F(1, -1, -1) \\
& + \frac{(-r)^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1+t)F(-1, 1, 1) \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1+t)F(-1, -1, 1) \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1-t)F(-1, 1, -1) \\
& + \frac{(-r)^n (-s)^n (-t)^n}{8} (1-r)(1-s)(1-t)F(-1, -1, -1);
\end{aligned}$$

Se si tiene conto di tale ultima forma per l'espressione della somma complessiva di cui sopra e se ne fa la sostituzione nell'ultimo membro della (18), l'espressione della $v(r, s, t)$ diventa

$$\begin{aligned}
(19) \quad & v(r, s, t) \\
= & \frac{t^n(1+t)}{2} F(r, s, 1) + \frac{(-t)^n(1-t)}{2} F(r, s, -1) + \frac{s^n(1+s)}{2} \cdot \\
& \cdot F(r, 1, t) + \frac{(-s)^n(1-s)}{2} F(r, -1, t) + \frac{r^n(1+r)}{2} F(1, s, t) \\
& + \frac{(-r)^n(1-r)}{2} F(-1, s, t) - \frac{r^n t^n}{4} (1+r) \cdot \\
& \cdot (1+t)F(1, s, 1) - \frac{r^n(-t)^n}{4} (1+r)(1-t)F(1, s, -1) \\
& - \frac{t^n(-r)^n}{4} (1-r)(1+t)F(-1, s, 1) - \frac{r^n t^n}{4} (1-r) \cdot \\
& \cdot (1-t)F(-1, s, -1) - \frac{r^n s^n}{4} (1+r)(1+s)F(1, 1, t) \\
& - \frac{r^n(-s)^n}{4} (1+r)(1-s)F(1, -1, t) - \frac{(-r)^n s^n}{4} (1-r) \cdot \\
& \cdot (1+s)F(-1, 1, t) - \frac{r^n s^n}{4} (1-r)(1-s)F(-1, -1, t) \\
& - \frac{s^n t^n}{4} (1+s)(1+t)F(r, 1, 1) - \frac{s^n(-t)^n}{4} (1+s) \cdot \\
& \cdot (1-t)F(r, 1, -1) - \frac{(-s)^n t^n}{4} (1-s)(1+t)F(r, -1, 1) \\
& - \frac{s^n t^n}{4} (1-s)(1-t)F(r, -1, -1) + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s) \cdot \\
& \cdot (1+t)F(1, 1, 1) + \frac{r^n(-s)^n t^n}{8} (1+r)(1-s) \cdot \\
& \cdot (1+t)F(1, -1, 1) + \frac{r^n s^n(-t)^n}{8} (1+r)(1+s) \cdot \\
& \cdot (1-t)F(1, 1, -1) + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1-s) \cdot \\
& \cdot (1-t)F(1, -1, -1) + \frac{(-r)^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s) \cdot \\
& \cdot (1+t)F(-1, 1, 1) + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s) \cdot \\
& \cdot (1+t)F(-1, -1, 1) + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s) \cdot (1-t)F(-1, 1, -1) \\
& + \frac{(-r)^n(-s)^n(-t)^n}{8} (1-r)(1-s)(1-t)F(-1, -1, -1)
\end{aligned}$$

che si rivela subito non essere altro che la espressione del secondo membro di (2*). Resta così giustificata l'unicità detta e il teorema I è, di conseguenza, dimostrato.

2. Assegnata, nel cubo Q di $S_{(3)}$, una arbitraria funzione continua $e(r, s, t)$, risulta subito che la funzione

$$(19') \quad \int_0^r \int_0^s \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \cdot (r - \varrho)(s - \sigma)(t - \tau) d\varrho d\sigma d\tau$$

é di classe 2 in Q ed é soluzione della $U^{(2)} = e$ in Q .

Se allora oltre alla $e(r, s, t)$ é assegnata in Q un'altra arbitraria funzione $\varphi(r, s, t)$ di classe due e si vuol trovare una $U(r, s, t)$ di classe 2 soddisfacente le equazioni

$$\begin{aligned} U^{(2)} &= e(r, s, t), \text{ in } Q, \\ U &= \varphi, \text{ su } \mathfrak{F}Q, \end{aligned}$$

basta rilevare che, con siffatta $U(r, s, t)$, l'altra funzione

$$(20) \quad U(r, s, t) - \int_0^r \int_0^s \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \cdot (r - \varrho)(s - \sigma)(t - \tau) d\varrho d\sigma d\tau$$

soddisfa le

$$(21) \quad \frac{\partial^2 [U(r, s, t) - \int_0^r \int_0^s \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \cdot (r - \varrho)(s - \sigma)(t - \tau) d\varrho d\sigma d\tau]}{\partial r^2 \partial s^2 \partial t^2} = 0, \text{ in } Q,$$

$$\begin{aligned} &U(r, s, t) - \int_0^r \int_0^s \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \cdot (r - \varrho)(s - \sigma)(t - \tau) d\varrho d\sigma d\tau \\ &= \varphi(r, s, t) - \int_0^r \int_0^s \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \cdot (r - \varrho)(s - \sigma)(t - \tau) d\varrho d\sigma d\tau, \text{ su} \end{aligned}$$

$\mathfrak{F}Q$, sicchè invocando il teorema I, per $n=0$, e ponendo in esso

$$(22) \quad F(r, s, t) = \varphi(r, s, t) - \int_0^r \int_0^s \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \cdot (r - \varrho)(s - \sigma)(t - \tau) d\varrho d\sigma d\tau,$$

si conclude con l'esistenza ed unicit  della soluzione (20) pel sistema (21) e che tale unica soluzione   espressa dalla (2*) ponendo in questa la (22) al posto di F e facendo $n=0$.

Ne consegue la validit  del teorema

II. *Assegnata ad arbitrio nel cubo Q di $S_{(3)}$ una funzione continua $e(r, s, t)$ ed inoltre un'altra funzione $\varphi(r, s, t)$ arbitraria di classe due in Q , esiste una ed una sola soluzione $u(r, s, t)$, di classe due, delle equazioni*

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= e(r, s, t), \text{ in } Q, \\ u &= \varphi, \text{ su } \mathfrak{F}Q, \end{aligned}$$

soluzione costituita dalla somma delle due espressioni (19') e (2), quando nella (2*) si ponga per F l'espressione (22) e si assuma $n=0$.*

3. OSSERVAZIONE — Siano assegnate, nel solito cubo Q $[(-1, -1, -1); (1, 1, 1)]$ dell' $S_{(3)}$, una funzione continua $e(r, s, t)$ e un'altra $\varphi(r, s, t)$ di classe $n + 2$ in Q , con $n > 0$, tale che mediante arbitrarie funzioni continue

$$\varphi^{(h)}(r, s, t)[su L] = \varphi_h(r, s, t) = \varphi^{(h)}(r, s, 0) + \varphi^{(h)}(0, s, t) + \varphi^{(h)}(r, 0, t) + \varphi^{(h)}(0, 0, 0) - \varphi^{(h)}(r, 0, 0) - \varphi^{(h)}(0, s, 0) - \varphi^{(h)}(0, 0, t)$$

per $h = 0, 1, \dots, n - 1$. E' noto ⁵⁾ che per le equazioni

$$\begin{aligned} W^{(n+2)}(r, s, t) &= e(r, s, t), \quad \text{in } Q, \\ W^{(h)} &= \varphi_h(r, s, t), \quad \text{su } L \text{ e per } h = 0, 1, \dots, n - 1, \\ W^{(n)} &= W^{(n+1)} = 0, \quad \text{su } L, \end{aligned}$$

esiste ed é unica la soluzione W , di classe $n + 2$, e questa é espressa dalla formula tipo Taylor

$$(23) \quad \begin{aligned} W(r, s, t) &= \varphi_0(r, s, t) \\ &+ \sum_{h=1}^{n-1} \int_0^r \int_0^s \int_0^t \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\ &+ \int_0^r \int_0^s \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau, \end{aligned}$$

ove va qui inteso che per $n = 1$ il sommatorio $\sum_{h=1}^{n-1} (\dots)$ deve essere omissso.

Essendo $\varphi(r, s, t)$ di classe $n + 2$, in Q , vale per essa la relativa formula tipo Taylor, in Q ,

$$\begin{aligned} \varphi(r, s, t) &= \varphi_0(r, s, t) \\ &+ \sum_{h=1}^{n+1} \int_0^r \int_0^s \int_0^t \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\ &+ \int_0^r \int_0^s \int_0^t \varphi^{(n+2)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \end{aligned}$$

ed allora la funzione $F(r, s, t) = \varphi(r, s, t) - W(r, s, t)$, vale a dire la

$$(24) \quad \begin{aligned} F(r, s, t) &= \varphi(r, s, t) - \varphi_0(r, s, t) \\ &- \sum_{h=1}^{n-1} \int_0^r \int_0^s \int_0^t \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\ &- \int_0^r \int_0^s \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau, \end{aligned}$$

⁵⁾ Per il caso di $r = 2$ c.f.r., oltre M. PICONE [2], PAOLO TORTORICI [3]. Per il caso di $r \geq 3$ c.f.r. C. BIRINDELLI [4].

a mezzo della differenza delle formule tipo Taylor delle φ , W , si può scrivere

$$\begin{aligned}
 F(r, s, t) &= \int_0^r \int_0^s \int_0^t \varphi_n(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^{n-1}}{[(n-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
 &+ \int_0^r \int_0^s \int_0^t \varphi_{n+1}(\varrho, \sigma, \tau) \cdot \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^n}{[n!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
 &+ \int_0^r \int_0^s \int_0^t [\varphi^{(n+2)}(\varrho, \sigma, \tau) - e(\varrho, \sigma, \tau)] \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau
 \end{aligned}$$

e dal secondo membro di questa ultima si vede subito che tale $F(r, s, t)$ é, per $n > 0$, infinitesima, d'ordine n almeno, rispetto a ciascuna delle r, s, t , rispettivamente, quando, mantenendo comunque costanti le altre due, la r , o la s , o la t , venga resa infinitesima; ciò in particolare avviene nei punti di $L \cdot \mathfrak{F}Q$, come è in sostanza richiesto nell'enunciato del teorema I per la relativa $F(r, s, t)$ quando $n > 0$. Si noti ancora che la $F(r, s, t)$ data dalla (24) é di classe $n + 2$ in Q , e che nel 2° membro di (24) il sommatorio $\sum_{h=1}^{n-1} (\dots)$ va ommesso se $n = 1$.

Dalla OSSERVAZIONE precedente segue il teorema

III. *Assegnate, ad arbitrio, nel cubo $Q[(-1, -1, -1); (1, 1, 1)]$ dell' $S_{(3)}$ una funzione $e(r, s, t)$ ed una funzione $\varphi(r, s, t)$ di classe $n + 2$ ($n > 0$) in Q , esiste una ed una sola soluzione u , di tale classe, delle equazioni*

$$\begin{aligned}
 u^{(n+2)}(r, s, t) &= e(r, s, t), \text{ in } Q, \\
 u &= \varphi, \text{ su } \mathfrak{F}Q, \\
 u^{(h)} &= \varphi^{(h)}, \text{ su } L, (h = 0, 1, \dots, n-1),
 \end{aligned}$$

e, riprendendo la $F(r, s, t)$ espressa dalla (24), tale soluzione u é data dalla somma delle espressioni (2*) e (23) cioè da (scrivendo per disteso ed effettuando le integrazioni possibili)

$$\begin{aligned}
 (25) \quad u(r, s, t) &= W(r, s, t) + v(r, s, t) \\
 &= \varphi(r, s, 0) + \varphi(0, s, t) + \varphi(r, 0, t) + \varphi(0, 0, 0) - \varphi(r, 0, 0) - \varphi(0, s, 0) \\
 &- \varphi(0, 0, t) + \sum_{h=1}^{n-1} \left\{ \frac{r^h}{h!} \int_0^s \int_0^t \varphi^{(h)}(0, \sigma, \tau) \frac{[(s-\sigma)(t-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^2} d\sigma d\tau \right. \\
 &+ \frac{s^h}{h!} \int_0^r \int_0^t \varphi^{(h)}(\varrho, 0, \tau) \cdot \frac{[(r-\varrho)(t-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^2} d\varrho d\tau \\
 &+ \frac{t^h}{h!} \int_0^r \int_0^s \varphi^{(h)}(\varrho, \sigma, 0) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)]^{h-1}}{[(h-1)!]^2} d\varrho d\sigma + \frac{r^h s^h t^h}{[h!]^3} \varphi^{(h)}(0, 0, 0) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{s^h r^h}{[h!]^2} \int_0^t \varphi^{(h)}(0, 0, \tau) \frac{(t-\tau)^{h-1}}{(h-1)!} d\tau - \frac{r^h t^h}{[h!]^2} \int_0^s \varphi^{(h)}(0, \sigma, 0) \frac{(s-\sigma)^{h-1}}{(h-1)!} d\sigma \\
& - \left. \frac{s^h t^h}{[h!]^2} \cdot \int_0^r \varphi^{(h)}(\varrho, 0, 0) \frac{(r-\varrho)^{h-1}}{(h-1)!} d\varrho \right\} \\
& + \int_0^r \int_0^s \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& + \frac{(-r)^n}{2} (1-r) \left[\varphi(-1, s, t) - \varphi(-1, s, 0) - \varphi(0, s, t) - \varphi(-1, 0, t) \right. \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, t) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h \int_{-1}^0 \int_0^s \int_0^t \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& \left. - (-1)^n \int_{-1}^0 \int_0^s \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& + \frac{(-s)^n}{2} (1-s) \left[\varphi(r, -1, t) - \varphi(r, -1, 0) - \varphi(0, -1, t) \right. \\
& - \varphi(r, 0, t) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, t) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h \int_0^r \int_{-1}^0 \int_0^t \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1+\sigma)(t-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& \left. - (-1)^n \int_0^r \int_{-1}^0 \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1+\sigma)(t-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& + \frac{(-t)^n}{2} (1-t) \left[\varphi(r, s, -1) - \varphi(r, s, 0) - \varphi(0, s, -1) \right. \\
& - \varphi(r, 0, -1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, -1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h \int_0^r \int_0^s \int_{-1}^0 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(1+\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& \left. - (-1)^n \int_0^r \int_0^s \int_{-1}^0 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(1+\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& + \frac{r^n}{2} (1+r) \left[\varphi(1, s, t) - \varphi(1, s, 0) - \varphi(0, s, t) - \varphi(1, 0, t) \right. \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, t) \\
& \left. - \sum_{h=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^s \int_0^t \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \int_0^s \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \Big] \\
& + \frac{s^n}{2} (1+s) \left[\varphi(r, 1, t) - \varphi(r, 1, 0) - \varphi(0, 1, t) - \varphi(r, 0, t) \right. \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, t) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} \int_0^r \int_0^s \int_0^t \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1-\sigma)(t-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \left. \int_0^r \int_0^1 \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1-\sigma)(t-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& + \frac{t^n}{2} (1+t) \left[\varphi(r, s, 1) - \varphi(r, s, 0) - \varphi(0, s, 1) - \varphi(r, 0, 1) \right. \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, 1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} \int_0^r \int_0^s \int_0^1 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(1-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \left. \int_0^r \int_0^s \int_0^1 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(1-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& - \frac{r^n s^n}{4} (1-r)(1-s) \left[\varphi(-1, -1, t) - \varphi(-1, -1, 0) - \varphi(0, -1, t) \right. \\
& - \varphi(-1, 0, t) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, t) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^t \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1+\sigma)(t-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \left. \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1+\sigma)(t-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& - \frac{r^n t^n}{4} (1-r)(1-t) \left[\varphi(-1, s, -1) - \varphi(-1, s, 0) - \varphi(0, s, -1) \right. \\
& - \varphi(-1, 0, -1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, -1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} \int_{-1}^0 \int_0^s \int_{-1}^0 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(s-\sigma)(1+\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \left. \int_{-1}^0 \int_0^s \int_{-1}^0 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(s-\sigma)(1+\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& - \frac{s^n t^n}{4} (1-s)(1-t) \left[\varphi(r, -1, -1) - \varphi(r, -1, 0) - \varphi(0, -1, -1) \right. \\
& - \varphi(r, 0, -1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, -1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{h=1}^{n-1} \int_0^r \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1+\sigma)(1+\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \int_0^r \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)[1+\sigma](1+\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \Big] \\
& - \frac{r^n(-s)^n}{4} (1-s)(1+r) \Big[\varphi(1, -1, t) - \varphi(0, -1, t) - \varphi(1, 0, t) \\
& - \varphi(1, -1, 0) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) + \varphi(0, -1, 0) \\
& + \varphi(0, 0, t) - \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^t \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1+\sigma)(t-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - (-1)^n \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1+\sigma)(t-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \Big] \\
& - \frac{r^n(-t)^n}{4} (1+r)(1-t) \Big[\varphi(1, s, -1) - \varphi(1, s, 0) - \varphi(0, s, -1) \\
& - \varphi(1, 0, -1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, -1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h \int_0^1 \int_0^s \int_{-1}^0 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(s-\sigma)(1+\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - (-1)^n \int_0^1 \int_0^s \int_{-1}^0 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(s-\sigma)(1+\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \Big] \\
& - \frac{(-r)^n s^n}{4} (1-r)(1+s) \Big[\varphi(-1, 1, t) - \varphi(-1, 1, 0) - \varphi(0, 1, t) \\
& - \varphi(-1, 0, t) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, t) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^t \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1-\sigma)(t-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - (-1)^n \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1-\sigma)(t-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \Big] \\
& - \frac{s^n(-t)^n}{4} (1+s)(1-t) \Big[\varphi(r, 1, -1) - \varphi(r, 1, 0) - \varphi(0, 1, -1) \\
& - \varphi(r, 0, -1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, -1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h \int_0^r \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1-\sigma)(1+\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - (-1)^n \int_0^r \int_0^1 \int_{-1}^0 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1-\sigma)(1+\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(-r)^n t^n}{4} (1-r)(1+t) \left[\varphi(-1, s, 1) - \varphi(-1, s, 0) - \varphi(0, s, 1) \right. \\
& - \varphi(-1, 0, 1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, 1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h \int_{-1}^0 \int_0^s \int_0^1 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(s-\sigma)(1-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& \left. - (-1)^n \int_{-1}^0 \int_0^s \int_0^1 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(s-\sigma)(1-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& - \frac{(-s)^n t^n}{4} (1-s)(1+t) \left[\varphi(r, -1, 1) - \varphi(r, -1, 0) - \varphi(0, -1, 1) \right. \\
& - \varphi(r, 0, 1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, 1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h \int_0^r \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1+\sigma)(1-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& \left. - (-1)^n \int_0^r \int_{-1}^0 \int_0^1 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1+\sigma)(1-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& - \frac{r^n s^n}{4} (1+r)(1+s) \left[\varphi(1, 1, t) - \varphi(1, 1, 0) - \varphi(0, 1, t) - \varphi(1, 0, t) \right. \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, t) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^t \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1-\sigma)(t-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& \left. - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^t e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1-\sigma)(t-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& - \frac{r^n t^n}{4} (1+r)(1+t) \left[\varphi(1, s, 1) - \varphi(1, s, 0) - \varphi(0, s, 1) - \varphi(1, 0, 1) \right. \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, 1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^s \int_0^1 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(s-\sigma)(1-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& \left. - \int_0^1 \int_0^s \int_0^1 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(s-\sigma)(1-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& - \frac{s^n t^n}{4} (1+s)(1+t) \left[\varphi(r, 1, 1) - \varphi(r, 1, 0) - \varphi(0, 1, 1) - \varphi(r, 0, 1) \right. \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, 1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} \int_0^r \int_0^1 \int_0^1 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1-\sigma)(1-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& \left. - \int_0^r \int_0^1 \int_0^1 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1-\sigma)(1-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^n \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1-t) \left[\varphi(-1, -1, -1) \right. \\
& - \varphi(-1, -1, 0) - \varphi(0, -1, -1) - \varphi(-1, 0, -1) \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, -1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1+\sigma)(1+\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \left. (-1)^n \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1+\sigma)(1+\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+\varrho)(1-\sigma)(1-\tau) \left[\varphi(1, -1, -1) - \varphi(1, -1, 0) \right. \\
& - \varphi(0, -1, -1) - \varphi(1, 0, -1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) \\
& + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, -1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1+\sigma)(1+\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \left. \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1+\sigma)(1+\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1-t) \left[\varphi(-1, 1, -1) - \varphi(-1, 1, 0) \right. \\
& - \varphi(0, 1, -1) - \varphi(-1, 0, -1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) \\
& + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, -1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1-\sigma)(1+\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \left. \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_{-1}^0 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1-\sigma)(1+\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1-s)(1+t) \left[\varphi(-1, -1, 1) - \varphi(-1, -1, 0) \right. \\
& - \varphi(0, -1, 1) - \varphi(-1, 0, 1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) \\
& + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, 1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1+\sigma)(1-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \left. \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^1 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1+\sigma)(1-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^n \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1-t) \left[\varphi(1, 1, -1) - \varphi(1, 1, 0) \right. \\
& - \varphi(0, 1, -1) - \varphi(1, 0, -1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) \\
& + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, -1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1-\sigma)(1+\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& \left. - (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^0 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1-\sigma)(1+\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& + (-1)^n \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1-s)(1+t) \left[\varphi(1, -1, 1) - \varphi(1, -1, 0) \right. \\
& - \varphi(0, -1, 1) - \varphi(1, 0, 1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) \\
& + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, 1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1+\sigma)(1-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& \left. - (-1)^n \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1+\sigma)(1-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& + (-1)^n \frac{r^n s^n t^n}{8} (1-r)(1+s)(1+t) \left[\varphi(-1, 1, 1) - \varphi(-1, 1, 0) \right. \\
& - \varphi(0, 1, 1) - \varphi(-1, 0, 1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) \\
& + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, 1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^1 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1-\sigma)(1-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& \left. - (-1)^n \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^1 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1-\sigma)(1-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right] \\
& + \frac{r^n s^n t^n}{8} (1+r)(1+s)(1+t) \left[\varphi(1, 1, 1) - \varphi(1, 1, 0) - \varphi(0, 1, 1) \right. \\
& - \varphi(1, 0, 1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, 1) \\
& - \sum_{h=1}^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \varphi_h(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1-\sigma)(1-\tau)]^{h-1}}{[(h-1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& \left. - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1-\sigma)(1-\tau)]^{n+1}}{[(n+1)!]^3} d\varrho d\sigma d\tau \right],
\end{aligned}$$

ove, al solito, per $n=1$ i varî sommatorî $\sum_{h=1}^{n-1}$ devono essere omissi.

Per giustificare il teorema basta rammentare che in Q é

$$v^{(n+2)}(r, s, t) = 0, \quad W^{(n+2)}(r, s, t) = e(r, s, t);$$

$$\text{e lungo } L \quad \begin{aligned} W^{(h)} &= \varphi_h & \text{per } h = 0, 1, \dots, n-1; \\ v^{(h)} &= 0 \end{aligned}$$

e lungo $\mathfrak{F}Q$

$$\begin{aligned} W &= W \\ v &= F (= \varphi - W) \end{aligned}$$

sicché sommando membro a membro risulta che la $u = v + W$ é effettiva soluzione unica delle equazioni

$$\begin{aligned} u^{(n+2)} &= e(r, s, t), \text{ in } Q, \\ u &= \varphi, & \text{su } \mathfrak{F}Q, \\ u^{(h)} &= \varphi^{(h)}, & \text{su } L \text{ e per } h = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Interpolazione centro-periferica per funzioni $f(x, y, z)$ nello spazio ordinario.

4. Una volta effettuata per mezzo dei teoremi I, II, III, la estensione all' $S_{(3)}$ dei teoremi VI, VII, VIII, indicati dal Picone nel l.c. ²⁾, é chiaro come, mediante le formule cui siamo pervenuti nei precedenti n^i , si debba procedere per ottenere la naturale estensione all' $S_{(3)}$ di tutti i notevoli risultati stabiliti dal detto Autore al § 6 del c.l. come pure per realizzare tutto ciò nell. $S_{(r)}$ in genere, cioè anche per $r > 3$.

Purtroppo l'ovvia necessità imposta dalla relativa ristrettezza di spazio per ragioni di stampa ci consente, per lo studio della estensione degli importanti risultati detti, di svolgere qui solamente quanto ha riferimento con la formula *centro-periferica secondo* PICONE che esprime in generale la naturale estensione all' $S_{(r)}$ (qui per noi é $r = 3$) della classica formula CAVALIERI-SIMPSON che da secoli in modo ben noto svolge il ruolo di quella nel caso più semplice di $r = 1$.

Con le convenzioni precisate al n. 1 si ottiene l'*interpolazione centro-periferica* di una funzione $f(x, y, z)$, di classe $n + 2$ nello intervallo T dello spazio ordinario, $n \geq 1$, adottando come funzione interpolatrice la soluzione u , della stessa classe, delle equazioni

$$\begin{aligned} u^{(n+2)} &= 0, \text{ in } T, \\ u &= f, \text{ su } \mathfrak{F}T \\ u^{(h)} &= f^{(h)}, \text{ su } L_T \text{ e per } h = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Con la solita trasformazione di T in Q e quindi della $f(x, y, z)$

nella $\varphi(r, s, t)$ non resta che procedere in base alla applicazione del TEOREMA III e servirsi della (25) (pensando, in questa, $e(r, s, t) = 0$).

Per $n = 1$, per la nota omissione dei sommatorei $\sum_{h=1}^{n-1}$, con la (25) facendo in (24) $F = \varphi(r, s, t) - \varphi_0(r, s, t) = F_1(r, s, t)$ si trova come funzione interpolatrice $u_{1\varphi}$, della φ , nel cubo Q , (ove coi simboli [1], [2], ..., [26] si vuol solo indicare un elemento distintivo per le 26 espressioni [...] per poterle, nel seguito, distinguere sinteticamente l'una dall'altra)

$$\begin{aligned}
 & u_{1\varphi}(r, s, t) \\
 = & \varphi(r, s, 0) + \varphi(0, s, t) + \varphi(r, 0, t) + \varphi(0, 0, 0) - \varphi(r, 0, 0) \\
 & \quad - \varphi(0, s, 0) - \varphi(0, 0, t) \\
 + & \frac{-r}{2}(1-r)[\varphi(-1, s, t) - \varphi(-1, s, 0) - \varphi(0, s, t) - \varphi(-1, 0, t) \\
 - & \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, t)]_{[1]} \\
 + & \frac{-s}{2}(1-s)[\varphi(r, -1, t) - \varphi(r, -1, 0) - \varphi(0, -1, t) - \varphi(r, 0, t) \\
 - & \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, t)]_{[2]} \\
 + & \frac{-t}{2}(1-t)[\varphi(r, s, -1) - \varphi(r, s, 0) - \varphi(0, s, -1) - \varphi(r, 0, -1) \\
 - & \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, -1)]_{[3]} \\
 + & \frac{r}{2}(1+r)[\varphi(1, s, t) - \varphi(1, s, 0) - \varphi(0, s, t) - \varphi(1, 0, t) \\
 - & \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, t)]_{[4]} \\
 + & \frac{s}{2}(1+s)[\varphi(r, 1, t) - \varphi(r, 1, 0) - \varphi(0, 1, t) - \varphi(r, 0, t) \\
 & \quad - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, t)]_{[5]} \\
 + & \frac{t}{2}(1+t)[\varphi(r, s, 1) - \varphi(r, s, 0) - \varphi(0, s, 1) - \varphi(r, 0, 1) \\
 - & \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, 1)]_{[6]} \\
 - & \frac{rs}{2}(1-r)(1-s)[\varphi(-1, -1, t) - \varphi(-1, -1, 0) - \varphi(0, -1, t) \\
 - & \varphi(-1, 0, t) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, t)]_{[7]} \\
 - & \frac{rt}{4}(1-r)(1-t)[\varphi(-1, s, -1) - \varphi(-1, s, 0) - \varphi(0, s, -1) \\
 - & \varphi(-1, 0, -1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, -1)]_{[8]} \\
 - & \frac{st}{4}(1-s)(1-t)[\varphi(r, -1, -1) - \varphi(r, -1, 0) - \varphi(0, -1, -1) \\
 - & \varphi(r, 0, -1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, -1)]_{[9]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{rs}{4}(1+r)(1-s)[\varphi(1, -1, t) - \varphi(0, -1, t) - \varphi(1, 0, t) - \varphi(1, -1, 0) \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, t)]_{[10]} \\
& + \frac{rt}{4}(1+r)(1-t)[\varphi(1, s, -1) - \varphi(1, s, 0) - \varphi(0, s, -1) - \varphi(1, 0, -1) \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, -1)]_{[11]} \\
& + \frac{rs}{4}(1-r)(1+s)[\varphi(-1, 1, t) - \varphi(-1, 1, 0) - \varphi(0, 1, t) - \varphi(-1, 0, t) \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, t)]_{[12]} \\
& + \frac{st}{4}(1+s)(1-t)[\varphi(r, 1, -1) - \varphi(r, 1, 0) - \varphi(0, 1, -1) - \varphi(r, 0, -1) \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, -1)]_{[13]} \\
& + \frac{rt}{4}(1-r)(1+t)[\varphi(-1, s, 1) - \varphi(-1, s, 0) - \varphi(0, s, 1) - \varphi(-1, 0, 1) \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, 1)]_{[14]} \\
& + \frac{st}{4}(1-s)(1+t)[\varphi(r, -1, 1) - \varphi(r, -1, 0) - \varphi(0, -1, 1) \\
& - \varphi(r, 0, 1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, 1)]_{[15]} \\
& - \frac{rs}{4}(1+r)(1+s)[\varphi(1, 1, t) - \varphi(1, 1, 0) - \varphi(0, 1, t) - \varphi(1, 0, t) \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, t)]_{[16]} \\
& - \frac{rt}{4}(1+r)(1+t)[\varphi(1, s, 1) - \varphi(1, s, 0) - \varphi(0, s, 1) - \varphi(1, 0, 1) \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) + \varphi(0, s, 0) + \varphi(0, 0, 1)]_{[17]} \\
& - \frac{st}{4}(1+s)(1+t)[\varphi(r, 1, 1) - \varphi(r, 1, 0) - \varphi(0, 1, 1) - \varphi(r, 0, 1) \\
& - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(r, 0, 0) + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, 1)]_{[18]} \\
& - \frac{rst}{8}(1-r)(1-s)(1-t)[\varphi(-1, -1, -1) - \varphi(-1, -1, 0) - \varphi(0, -1, -1) \\
& - \varphi(-1, 0, -1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, -1)]_{[19]} \\
& + \frac{rst}{8}(1+r)(1-s)(1-t)[\varphi(1, -1, -1) - \varphi(1, -1, 0) - \varphi(0, -1, -1) \\
& - \varphi(1, 0, -1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, -1)]_{[20]} \\
& + \frac{rst}{8}(1-r)(1+s)(1-t)[\varphi(-1, 1, -1) - \varphi(-1, 1, 0) - \varphi(0, 1, -1) \\
& - \varphi(-1, 0, -1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, -1)]_{[21]} \\
& + \frac{rst}{8}(1-r)(1-s)(1+t)[\varphi(-1, -1, 1) - \varphi(-1, -1, 0) - \varphi(0, -1, 1) \\
& - \varphi(-1, 0, 1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, 1)]_{[22]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{rst}{8}(1+r)(1+s)(1-t)[\varphi(1, 1, -1) - \varphi(1, 1, 0) - \varphi(0, 1, -1) \\
& - \varphi(1, 0, -1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, -1)]_{[23]} \\
& -\frac{rst}{8}(1+r)(1-s)(1+t)[\varphi(1, -1, 1) - \varphi(1, -1, 0) - \varphi(0, -1, 1) \\
& - \varphi(1, 0, 1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) + \varphi(0, -1, 0) + \varphi(0, 0, 1)]_{[24]} \\
& -\frac{rst}{8}(1-r)(1+s)(1+t)[\varphi(-1, 1, 1) - \varphi(-1, 1, 0) - \varphi(0, 1, 1) \\
& - \varphi(-1, 0, 1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0) + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, 1)]_{[25]} \\
& +\frac{rst}{8}(1+r)(1+s)(1+t)[\varphi(1, 1, 1) - \varphi(1, 1, 0) - \varphi(0, 1, 1) \\
& - \varphi(1, 0, 1) - \varphi(0, 0, 0) + \varphi(1, 0, 0) + \varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, 0, 1)]_{[26]}
\end{aligned}$$

con l'errore

$$\begin{aligned}
R_1(r, s, t) = & \int_0^r \int_0^s \int_0^t \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^3}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& -\frac{r(1-r)}{2} \int_{-1}^0 \int_0^s \int_0^t \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& -\frac{s(1-s)}{2} \int_0^r \int_{-1}^0 \int_0^t \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1+\sigma)(t-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& -\frac{t(1-t)}{2} \int_0^r \int_0^s \int_{-1}^0 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(1+\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& -\frac{r(1+r)}{2} \int_0^1 \int_0^s \int_0^t \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& -\frac{s(1+s)}{2} \int_0^r \int_0^1 \int_0^t \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1-\sigma)(t-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& -\frac{t(1+t)}{2} \int_0^r \int_0^s \int_0^1 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(1-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& +\frac{rs(1-r)(1-s)}{4} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^t \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1+\sigma)(t-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& +\frac{rt(1-r)(1-t)}{4} \int_{-1}^0 \int_0^s \int_{-1}^0 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(s-\sigma)(1+\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& +\frac{st(1-s)(1-t)}{4} \int_0^r \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1+\sigma)(1+\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{rs(1+r)(1-s)}{4} \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^t \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1+\sigma)(t-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& + \frac{rt(1+r)(1-t)}{4} \int_0^1 \int_0^s \int_{-1}^0 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(s-\sigma)(1+\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& + \frac{rs(1-r)(1+s)}{4} \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^t \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1-\sigma)(t-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& + \frac{st(1+s)(1-t)}{4} \int_0^r \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1-\sigma)(1+\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& + \frac{rt(1-r)(1+t)}{4} \int_{-1}^0 \int_0^s \int_0^1 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(s-\sigma)(1-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& + \frac{st(1-s)(1+t)}{4} \int_0^r \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1+\sigma)(1-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& + \frac{rs(1+r)(1+s)}{4} \int_0^1 \int_0^0 \int_0^t \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1-\sigma)(t-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& + \frac{rt(1+r)(1+t)}{4} \int_0^1 \int_0^s \int_0^1 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(s-\sigma)(1-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& + \frac{st(1+s)(1+t)}{4} \int_0^r \int_0^0 \int_0^1 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1-\sigma)(1-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \frac{rst(1-r)(1-s)(1-t)}{8} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1+\sigma)(1+\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \frac{rst(1+r)(1-s)(1-t)}{8} \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1+\sigma)(1+\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \frac{rst(1-r)(1+s)(1-t)}{8} \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1-\sigma)(1+\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \frac{rst(1-r)(1-s)(1+t)}{8} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1+\sigma)(1-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \frac{rst(1+r)(1+s)(1-t)}{8} \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1-\sigma)(1+\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \frac{rst(1+r)(1-s)(1+t)}{8} \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1+\sigma)(1-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{rst(1-r)(1+s)(1+t)}{8} \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^1 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1-\sigma)(1-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau \\
 & - \frac{rst(1+r)(1+s)(1+t)}{8} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1-\sigma)(1-\tau)]^2}{8} d\varrho d\sigma d\tau.
 \end{aligned}$$

Si osservi ora che $F_1(r, s, t) = \varphi(r, s, t) - \varphi_0(r, s, t) = \Delta_0^r \Delta_0^s \Delta_0^t \varphi(\varrho, \sigma, \tau)^6$, e facendo $n = 2$ la (24) dà allora per $F(r, s, t)$ la

$$\begin{aligned}
 F_2(r, s, t) &= F_1(r, s, t) - \int_0^r \int_0^s \int_0^t [\varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) + \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) \\
 &+ \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) + \varphi^{(1)}(0, 0, 0) - \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) - \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) \\
 &- \varphi^{(1)}(0, 0, \tau)] d\varrho d\sigma d\tau = \Delta_0^r \Delta_0^s \Delta_0^t \varphi(\varrho, \sigma, \tau) - r \int_0^s \int_0^t \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
 &- s \int_0^r \int_0^t \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau - t \int_0^r \int_0^s \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma \\
 &+ rs \int_0^t \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau + rt \int_0^s \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma + st \int_0^r \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \\
 &- rst \varphi^{(1)}(0, 0, 0).
 \end{aligned}$$

Di conseguenza, per $n = 2$, con la (25) si trova come funzione interpolatrice $u_{2\varphi}$ della φ , nel cubo Q (pensando, nella (25), $e(r, s, t) = 0$),

$$\begin{aligned}
 u_{2\varphi}(r, s, t) &= \varphi(r, s, 0) + \varphi(0, s, t) + \varphi(r, 0, t) + \varphi(0, 0, 0) \\
 &- \varphi(r, 0, 0) - \varphi(0, s, 0) - \varphi(0, 0, t) + r \int_0^s \int_0^t \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
 &+ s \int_0^r \int_0^t \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau + t \int_0^r \int_0^s \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma + rst \varphi^{(1)}(0, 0, 0) \\
 &- rs \int_0^t \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau - rt \int_0^s \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma - st \int_0^r \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \\
 &+ \frac{r^2}{2} (1-r) \left\{ []_{[1]} + \int_0^s \int_0^t \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau + s \int_{-1}^0 \int_0^t \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau \right. \\
 &\left. + t \int_{-1}^0 \int_0^s \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma - st \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho + st \varphi^{(1)}(0, 0, 0) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -s \int_0^t \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau - t \int_0^s \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma \Big\} + \frac{s^2}{2} (1-s) \Big\{ []_{[2]} \\
& + \int_0^r \int_0^t \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau + r \int_{-1}^0 \int_0^t \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
& + t \int_0^r \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma - rt \int_{-1}^s \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma + rt \varphi^{(1)}(0, 0, 0) \\
& - r \int_0^t \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau - t \int_0^r \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \Big\} + \frac{t^2}{2} (1-t) \Big\{ []_{[3]} \\
& + \int_0^r \int_0^s \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma + r \int_0^s \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
& + s \int_0^r \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau - rs \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau + rs \varphi^{(1)}(0, 0, 0) \\
& - r \int_0^s \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma - s \int_0^r \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \Big\} + \frac{r^2}{2} (1+r) \Big\{ []_{[4]} \\
& - \int_0^s \int_0^t \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau - s \int_0^1 \int_0^t \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau \\
& - t \int_0^1 \int_0^s \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma + st \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho - st \varphi^{(1)}(0, 0, 0) \\
& + s \int_0^t \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau + t \int_0^s \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma \Big\} + \frac{s^2}{2} (1+s) \Big\{ []_{[5]} \\
& - \int_0^r \int_0^t \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau - r \int_0^1 \int_0^t \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
& - t \int_0^r \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma + rt \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma - rt \varphi^{(1)}(0, 0, 0) \\
& + r \int_0^t \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau + t \int_0^r \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \Big\} + \frac{t^2}{2} (1+t) \Big\{ []_{[6]} \\
& - \int_0^r \int_0^s \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma - r \int_0^s \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
& - s \int_0^r \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau + rs \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau - rs \varphi^{(1)}(0, 0, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + r \int_0^s \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma + s \int_0^r \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \left\} - \frac{r^2 s^2}{4} (1-r)(1-s) \left\{ []_{[7]} \right. \\
& - \int_{-1}^0 \int_0^t \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau - \int_{-1}^0 \int_0^t \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
& - t \int_{-1}^0 \int_0^s \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma - t\varphi^{(1)}(0, 0, 0) + t \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \\
& + t \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma + \int_0^t \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau \left\} - \frac{r^2 t^2}{4} (1-r)(1-t) \left\{ []_{[8]} \right. \\
& - \int_{-1}^0 \int_0^s \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma - \int_0^s \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
& - s \int_{-1}^0 \int_0^s \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau - s\varphi^{(1)}(0, 0, 0) + s \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \\
& + s \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau + \int_0^s \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma \left\} - \frac{s^2 t^2}{4} (1-s)(1-t) \left\{ []_{[9]} \right. \\
& - \int_0^r \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma - \int_0^r \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau \\
& - r \int_{-1}^0 \int_0^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau - r\varphi^{(1)}(0, 0, 0) + r \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma \\
& + r \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau + \int_0^r \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \left\} - \frac{r^2 s^2}{4} (1+r)(1-s) \left\{ []_{[10]} \right. \\
& + \int_0^1 \int_0^t \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau + \int_{-1}^0 \int_0^t \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
& + t \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma + t\varphi^{(1)}(0, 0, 0) - t \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \\
& - t \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma - \int_0^t \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau \left\} - \frac{r^2 t^2}{4} (1+r)(1-t) \left\{ []_{[11]} \right. \\
& + \int_0^1 \int_0^s \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma + \int_0^s \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
& + s \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau + s\varphi^{(1)}(0, 0, 0) - s \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -s \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau - \int_0^s \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma \left\{ -\frac{r^2 s^2}{4} (1-r) \cdot (1+s) \right\} \left[\right]_{[12]} \\
& + \int_{-1}^0 \int_0^t \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau + \int_0^1 \int_0^t \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
& + t \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma + t\varphi^{(1)}(0, 0, 0) - t \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \\
& - t \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma - \int_0^t \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau \left\{ -\frac{s^2 t^2}{4} (1+s)(1-t) \right\} \left[\right]_{[13]} \\
& + \int_0^r \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma + \int_0^r \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau \\
& + r \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau + r\varphi^{(1)}(0, 0, 0) - r \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma \\
& - r \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau - \int_0^r \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \left\{ -\frac{r^2 t^2}{4} (1-r)(1+t) \right\} \left[\right]_{[14]} \\
& + \int_{-1}^0 \int_0^s \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma + \int_0^s \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
& + s \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau + s\varphi^{(1)}(0, 0, 0) - s \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \\
& - s \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau - \int_0^s \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma \left\{ -\frac{s^2 t^2}{4} (1-s)(1+t) \right\} \left[\right]_{[15]} \\
& + \int_0^r \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma + \int_0^r \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau \\
& + r \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau + r\varphi^{(1)}(0, 0, 0) - r \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma \\
& - r \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau - \int_0^r \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \left\{ -\frac{r^2 s^2}{4} (1+r)(1+s) \right\} \left[\right]_{[16]} \\
& - \int_0^1 \int_0^t \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau - \int_0^1 \int_0^t \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
& - t \int_0^1 \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma - t\varphi^{(1)}(0, 0, 0) + t \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + t \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma + \int_0^t \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau \left\{ []_{[17]} - \frac{r^2 t^2}{4} (1+r)(1+t) \right\} \\
& - \int_0^1 \int_0^s \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma - \int_0^1 \int_1^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
& - s \int_0^1 \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau - s\varphi^{(1)}(0, 0, 0) + s \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \\
& + s \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau + \int_0^s \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma \left\{ []_{[18]} - \frac{s^2 t^2}{4} (1+s)(1+t) \right\} \\
& - \int_0^r \int_0^0 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma - \int_0^r \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau \\
& - r \int_0^1 \int_0^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau - r\varphi^{(1)}(0, 0, 0) + r \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma \\
& + r \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau + \int_0^r \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho \left\{ \right. \\
& + \frac{r^2 s^2 t^2}{8} (1-r)(1-s)(1-t) \left\{ []_{[19]} + \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma \right. \\
& + \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau + \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau + \varphi^{(1)}(0, 0, 0) \\
& - \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho - \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma - \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau \left. \right\} \\
& + \frac{r^2 s^2 t^2}{8} (1+r)(1-s)(1-t) \left\{ []_{[20]} - \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma \right. \\
& - \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau - \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau - \varphi^{(1)}(0, 0, 0) \\
& + \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho + \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma + \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau \left. \right\} \\
& + \frac{r^2 s^2 t^2}{8} (1-r)(1+s)(1-t) \left\{ []_{[21]} - \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma \right. \\
& - \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau - \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau - \varphi^{(1)}(0, 0, 0) \\
& \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho + \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma + \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau \Big\} \\
& + \frac{r^2 s^2 t^2}{8} (1-r)(1-s)(1+t) \Big\{ []_{[22]} - \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma \\
& - \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau - \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau - \varphi^{(1)}(0, 0, 0) \\
& + \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho + \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma + \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau \Big\} \\
& + \frac{r^2 s^2 t^2}{8} (1+r)(1+s)(1-t) \Big\{ []_{[23]} + \int_0^1 \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma \\
& + \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau + \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau + \varphi^{(1)}(0, 0, 0) \\
& - \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho - \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma - \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau \Big\} \\
& + \frac{r^2 s^2 t^2}{8} (1+r)(1-s)(1+t) \Big\{ []_{[24]} + \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma \\
& + \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau + \int_0^1 \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau + \varphi^{(1)}(0, 0, 0) \\
& - \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho - \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma - \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau \Big\} \\
& + \frac{r^2 s^2 t^2}{8} (1-r)(1+s)(1+t) \Big\{ []_{[25]} + \int_0^1 \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau + \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau + \varphi^{(1)}(0, 0, 0) \\
& - \int_{-1}^0 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho - \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma - \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau \Big\} \\
& + \frac{r^2 s^2 t^2}{8} (1+r)(1+s)(1+t) \Big\{ []_{[26]} - \int_0^1 \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, \sigma, 0) d\varrho d\sigma \\
& - \int_0^1 \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, \tau) d\sigma d\tau - \int_0^1 \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, \tau) d\varrho d\tau - \varphi^{(1)}(0, 0, 0) \\
& + \int_0^1 \varphi^{(1)}(\varrho, 0, 0) d\varrho + \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, \sigma, 0) d\sigma + \int_0^1 \varphi^{(1)}(0, 0, \tau) d\tau \Big\},
\end{aligned}$$

con l'errore

$$\begin{aligned}
 R_2(r, s, t) = & \int_0^r \int_0^s \int_0^t \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
 & - \frac{r^2(1-r)}{2} \int_{-1}^0 \int_0^s \int_0^t \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
 & - \frac{s^2(1-s)}{2} \int_0^r \int_{-1}^0 \int_0^t \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1+\sigma)(t-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
 & - \frac{t^2(1-t)}{2} \int_0^r \int_0^s \int_{-1}^0 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(1+\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
 & - \frac{r^2(1+r)}{2} \int_0^1 \int_0^s \int_0^t \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(s-\sigma)(t-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
 & - \frac{s^2(1+s)}{2} \int_0^r \int_0^1 \int_0^t \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1-\sigma)(t-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
 & - \frac{t^2(1+t)}{2} \int_0^r \int_0^s \int_0^1 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(s-\sigma)(1-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
 & + \frac{r^2 s^2 (1-r)(1-s)}{4} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^t \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1+\sigma)(t-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
 & + \frac{r^2 t^2 (1-r)(1-t)}{4} \int_{-1}^0 \int_0^s \int_{-1}^0 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(s-\sigma)(1+\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
 & + \frac{s^2 t^2 (1-s)(1-t)}{4} \int_0^r \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1+\sigma)(1+\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
 & + \frac{r^2 s^2 (1+r)(1-s)}{4} \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^t \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1+\sigma)(t-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
 & + \frac{r^2 t^2 (1+r)(1-t)}{4} \int_0^1 \int_0^s \int_{-1}^0 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(s-\sigma)(1+\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
 & + \frac{r^2 s^2 (1-r)(1+s)}{4} \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^t \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1-\sigma)(t-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
 & + \frac{s^2 t^2 (1+s)(1-t)}{4} \int_0^r \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1-\sigma)(1+\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r^2 t^2 (1-r)(1+t)}{4} \int_{-1}^0 \int_0^s \int_0^1 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(s-\sigma)(1-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& + \frac{s^2 t^2 (1-s)(1+t)}{4} \int_0^r \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1+\sigma)(1-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& + \frac{r^2 s^2 (1+r)(1+s)}{4} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^t \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1-\sigma)(t-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& + \frac{r^2 t^2 (1+r)(1+t)}{4} \int_0^1 \int_0^s \int_0^1 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(s-\sigma)(1-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& + \frac{s^2 t^2 (1+s)(1+t)}{4} \int_0^r \int_0^1 \int_0^1 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(r-\varrho)(1-\sigma)(1-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \frac{r^2 s^2 t^2 (1-r)(1-s)(1-t)}{8} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1+\sigma)(1+\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \frac{r^2 s^2 t^2 (1+r)(1-s)(1-t)}{8} \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1+\sigma)(1+\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \frac{r^2 s^2 t^2 (1-r)(1+s)(1-t)}{8} \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1-\sigma)(1+\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \frac{r^2 s^2 t^2 (1-r)(1-s)(1+t)}{8} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1+\sigma)(1-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \frac{r^2 s^2 t^2 (1+r)(1+s)(1-t)}{8} \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^0 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1-\sigma)(1+\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \frac{r^2 s^2 t^2 (1+r)(1-s)(1+t)}{8} \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1+\sigma)(1-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \frac{r^2 s^2 t^2 (1-r)(1+s)(1+t)}{8} \int_{-1}^0 \int_0^1 \int_0^1 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1+\varrho)(1-\sigma)(1-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau \\
& - \frac{r^2 s^2 t^2 (1+r)(1+s)(1+t)}{8} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \varphi^{(4)}(\varrho, \sigma, \tau) \frac{[(1-\varrho)(1-\sigma)(1-\tau)]^3}{[2 \cdot 3]^3} d\varrho d\sigma d\tau.
\end{aligned}$$

Tenendo presente che

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(1-x) dx = -\frac{1}{8}, \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(1+x) dx = \frac{1}{8},$$

come pure che

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2(1+x)dx = \frac{1}{3},$$

si pensi di eseguire l'integrazione tripla in Q per le funzioni $u_{1\varphi}(r, s, t)$, $u_{2\varphi}(r, s, t)$, $R_1(r, s, t)$, $R_2(r, s, t)$. Le integrazioni dei vari termini, della $u_{2\varphi}(r, s, t)$, che sono funzioni dispari si riducono tutte a 0 e le altre, eccettuate quelle che si riferiscono ai primi 7 termini e a quelli $[]_{(1)}$, $[]_{(2)}$, \dots , $[]_{(2\sigma)}$, si elidono due a due come subito si vede col materiale calcolo ad esse relativo, cosicché nella

espressione definitiva di $\iiint_Q u_{2\varphi}(r, s, t) dr ds dt$ non appare più traccia della $\varphi^{(1)}$ e la espressione stessa si rivela non essere altro che l'altra espressione $\iiint_Q u_{1\varphi}(r, s, t) dr ds dt$.

Se ne conclude che anche nell' $S_{(3)}$ permane il fatto saliente d'essere

$$(26) \quad \iiint_Q u_{1\varphi}(r, s, t) dr ds dt = \iiint_Q u_{2\varphi}(r, s, t) dr ds dt,$$

come del resto la generale teoria in esame fa prevedere per ogni valore di r^2 .

Eseguendo le integrazioni si trova che

$$(27) \quad \begin{aligned} \iiint_Q u_{1\varphi}(r, s, t) dr ds dt &= \frac{2}{3} \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varphi(r, s, 0) dr ds \right. \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varphi(0, s, t) ds dt + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varphi(r, 0, t) dr dt \left. \right] \\ &+ \frac{1}{3} \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\varphi(r, 1, t) + \varphi(r, -1, t)\} dr dt \right. \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\varphi(r, s, 1) + \varphi(r, s, -1)\} dr ds + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\varphi(1, s, t) + \varphi(-1, s, t)\} ds dt \left. \right] \\ &- \frac{16}{9} \left[\int_{-1}^1 \varphi(r, 0, 0) dr + \int_{-1}^1 \varphi(0, s, 0) ds + \int_{-1}^1 \varphi(0, 0, t) dt \right] \\ &- \frac{4}{9} \left[\int_{-1}^1 \{\varphi(1, s, 0) + \varphi(-1, s, 0)\} ds + \int_{-1}^1 \{\varphi(r, 1, 0) + \varphi(r, -1, 0)\} dr \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-1}^1 \{\varphi(0, s, 1) + \varphi(0, s, -1)\} ds + \int_{-1}^1 \{\varphi(0, 1, t) + \varphi(0, -1, t)\} dt \\
& + \int_{-1}^1 \{\varphi(r, 0, 1) + \varphi(r, 0, -1)\} dr + \int_{-1}^1 \{\varphi(1, 0, t) + \varphi(-1, 0, t)\} dt \Big] \\
& - \frac{1}{9} \left\{ \int_{-1}^1 [\varphi(1, 1, t) + \varphi(1, -1, t) + \varphi(-1, 1, t) + \varphi(-1, -1, t)] dt \right. \\
& + \int_{-1}^1 [\varphi(1, s, 1) + \varphi(1, s, -1) + \varphi(-1, s, 1) + \varphi(-1, s, -1)] ds \\
& + \left. \int_{-1}^1 [\varphi(r, 1, 1) + \varphi(r, 1, -1) + \varphi(r, -1, 1) + \varphi(r, -1, -1)] dr \right\} \\
& + \frac{16}{27} [\{\varphi(1, 0, 0) + \varphi(-1, 0, 0)\} + \{\varphi(0, 1, 0) + \varphi(0, -1, 0)\} \\
& + \{\varphi(0, 0, 1) + \varphi(0, 0, -1)\} + 4\varphi(0, 0, 0)] \\
& + \frac{4}{27} \left[[\varphi(1, 1, 0) + \varphi(1, -1, 0) + \varphi(-1, 1, 0) + \varphi(-1, -1, 0)] \right. \\
& + [\varphi(0, 1, 1) + \varphi(0, 1, -1) + \varphi(0, -1, 1) + \varphi(0, -1, -1)] \\
& + [\varphi(1, 0, 1) + \varphi(1, 0, -1) + \varphi(-1, 0, 1) + \varphi(-1, 0, -1)] \Big] \\
& + \frac{1}{27} [\varphi(1, 1, 1) + \varphi(1, 1, -1) + \varphi(-1, 1, 1) + \varphi(1, -1, 1) \\
& + \varphi(-1, -1, 1) + \varphi(-1, 1, -1) + \varphi(1, -1, -1) + \varphi(-1, -1, -1)].
\end{aligned}$$

Dalla (26) segue che, se la $f(x, y, z)$ é di classe 4 in T , risulta necessariamente l'identità

$$(28) \quad \iiint_{\mathcal{Q}} R_1(r, s, t) dr ds dt = \iiint_{\mathcal{Q}} R_2(r, s, t) dr ds dt.$$

Osservando che é

$$\begin{aligned}
(1-r)^2(1-s)^2(1-t)^2rst &= \frac{(-1)^3}{[3 \cdot 4]^3} \cdot \\
&\cdot \frac{\partial^3}{\partial r \partial s \partial t} ((1-r)^3(1-s)^3(1-t)^3(1+3r)(1+3s)(1+3t))
\end{aligned}$$

e svolgendo le integrazioni con la formola di inversione di Dirichlet si trova, successivamente, che ⁶⁾

⁶⁾ In relazione ad una funzione $f(x, y, z)$ si denomina sua **VARIAZIONE TRIPLA** $\Delta_{a, b, c} \Delta_{a', b', c'} f(x, y, z) = f(a', b', c') - f(a', b', c) - f(a, b', c') - f(a', b, c') - f(a, b, c) + f(a', b, c) + f(a, b', c) + f(a, b, c')$, relativa all'intervallo di punti estremi (a, b, c) e (a', b', c') .

$$\begin{aligned}
 (29) \quad & \int \int \int_Q R_1(r, s, t) dr ds dt = \\
 & \frac{1}{[2 \cdot 3]^3} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{r}{-r} \frac{s}{-s} \frac{t}{-t} \Delta \Delta \Delta \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \cdot [(1-r)(1-s)(1-t)]^3 dr ds dt \\
 & - \frac{1}{[2 \cdot 3]^3} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{r}{-r} \frac{s}{-s} \frac{t}{-t} \Delta \Delta \Delta \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \cdot \{(1-r)^2 \cdot (1-s)^3(1-t)^3 \\
 & + (1-r)^3(1-s)^2(1-t)^3 + (1-r)^3(1-s)^3(1-t)^2\} dr ds dt \\
 & + \frac{1}{[2 \cdot 3]^3} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{r}{-r} \frac{s}{-s} \frac{t}{-t} \Delta \Delta \Delta \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \cdot \{(1-r)^2(1-s)^2(1-t)^3 \\
 & + (1-r)^2(1-s)^3(1-t)^2 + (1-r)^3(1-s)^2(1-t)^2\} dr ds dt \\
 & - \frac{1}{[2 \cdot 3]^3} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{r}{-r} \frac{s}{-s} \frac{t}{-t} \Delta \Delta \Delta \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \cdot [(1-r)(1-s)(1-t)]^2 dr ds dt \\
 & = \frac{(-1)^3}{[2 \cdot 3]^3} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{r}{-r} \frac{s}{-s} \frac{t}{-t} \Delta \Delta \Delta \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \cdot [(1-r)(1-s)(1-t)]^2 rst dr ds dt,
 \end{aligned}$$

sicché, se $f(x, y, z)$ é di classe 4 in T , proseguendo per questa via il calcolo di $\int \int \int_Q R_1(r, s, t) dr ds dt$, vale a dire anche, per la (28), quello di $\int \int \int_Q R_2(r, s, t) dr ds dt$, si trova che

$$\begin{aligned}
 (30) \quad & \int \int \int_Q R_2(r, s, t) dr ds dt = \\
 & \frac{1}{[3 \cdot 4]^3} \cdot \frac{1}{[2 \cdot 3]^3} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{r}{-r} \frac{s}{-s} \frac{t}{-t} \Delta \Delta \Delta \varphi^{(3)}(\varrho, \sigma, \tau) \cdot \\
 & \frac{\partial^3}{\partial r \partial s \partial t} \{ [(1-r)(1-s)(1-t)]^3 (1+3r)(1+3s)(1+3t) \} dr ds dt \\
 & = \frac{(-1)^3}{2^9 \cdot 3^6} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [\varphi^{(4)}(r, s, t) + \varphi^{(4)}(-r, s, t) + \varphi^{(4)}(r, -s, t) \\
 & + \varphi^{(4)}(r, s, -t) + \varphi^{(4)}(r, -s, -t) + \varphi^{(4)}(-r, -s, t) \\
 & + \varphi^{(4)}(-r, s, -t) + \varphi^{(4)}(-r, -s, -t)] \cdot \\
 & [(1-r)(1-s)(1-t)]^3 (1+3r)(1+3s)(1+3t) dr ds dt = \\
 & = \frac{(-1)^3}{2^9 3^6} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \varphi^{(4)}(r, s, t) \cdot \\
 & [(1-|r|)(1-|s|)(1-|t|)]^3 (1+3|r|)(1+3|s|)(1+3|t|) dr ds dt.
 \end{aligned}$$

Formula centro-periferica secondo Picone, per la valutazione approssimata degli integrali (triplici) nello spazio ordinario.

5. Dopo le questioni precisate al precedente N. 4, si perviene dunque, anche nel caso dello spazio ordinario $S_{(3)}$, al risultato:

Indicato con $C(a_0, b_0, c_0)$ il centro dell'intervallo rettangolare $T[(a, b, c); (a', b', c')]$, indicati con C_i i centri dei 12 lati di T , con C_F i centri delle 6 facce di T e con V_i gli 8 vertici di T , posto

$$\begin{aligned}
 (81) \quad & \iiint_T f(x, y, z) dT \\
 &= \frac{a'-a}{6} \int_b^{b'} \int_c^{c'} [f(a, y, z) + 4f(a_0, y, z) + f(a', y, z)] dy dz \\
 &+ \frac{b'-b}{6} \int_a^{a'} \int_c^{c'} [f(x, b, z) + 4f(x, b_0, z) + f(x, b', z)] dx dz \\
 &+ \frac{c'-c}{6} \int_a^{a'} \int_b^{b'} [f(x, y, c) + 4f(x, y, c_0) + f(x, y, c')] dx dy \\
 &- \frac{(a'-a)(b'-b)}{36} \int_c^{c'} \{f(a, b, z) + f(a, b', z) + f(a', b, z) + f(a', b', z) \\
 &+ 4\{f(a, b_0, z) + f(a', b_0, z) + f(a_0, b, z) + f(a_0, b', z)\} \\
 &+ 16f(a_0, b_0, z)\} dz - \frac{(a'-a)(c'-c)}{36} \int_b^{b'} \{f(a, y, c) + f(a, y, c') \\
 &+ f(a', y, c) + f(a', y, c') + 4\{f(a, y, c_0) + f(a', y, c_0) + f(a_0, y, c) \\
 &+ f(a_0, y, c')\} + 16f(a_0, y, c_0)\} dy - \frac{(b'-b)(c'-c)}{36} \int_a^{a'} \{f(x, b, c) \\
 &+ f(x, b, c') + f(x, b', c) + f(x, b', c') + 4\{f(x, b, c_0) + f(x, b', c_0) \\
 &+ f(x, b_0, c) + f(x, b_0, c')\} + 16f(x, b_0, c_0)\} dx \\
 &+ \frac{\text{Vol. } T}{216} [\Sigma f(V_i) + 4\Sigma f(C_i) + 16\Sigma f(C_F) + 64f(C)],
 \end{aligned}$$

si commette un errore, dato da

$$\begin{aligned}
 P = \\
 (82') \quad & \frac{(-1)^3}{2^{15} \cdot 3^3} [\text{Vol. } T]^4 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \Delta_r \Delta_s \Delta_t f^{(3)}(a_0 + \alpha r, b_0 + \beta s, c_0 + \gamma t) \cdot \\
 & \cdot [(1-r)(1-s)(1-t)]^2 r s t dr ds dt
 \end{aligned}$$

se $f(x, y, z)$ è di classe tre, in T , dato anche da

$$(32'') \quad P = \frac{(-1)^3 [\text{Vol. } T]^5}{2^{24} \cdot 3^6} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f^{(4)}(a_0 + \alpha r, b_0 + \beta s, c_0 + \gamma t) \cdot$$

$\cdot [(1 - |r|)(1 - |s|)(1 - |t|)]^3 \cdot (1 + 3|r|)(1 + 3|s|)(1 + 3|t|) dr ds dt$
 se $f(x, y, z)$ è di classe quattro, in T , che può essere così maggiorato

$$(33') \quad |P| \leq \frac{[\text{Vol. } T]^4}{1152^3} \text{Max}_T \left| \begin{array}{ccc} \Delta_x^{2a_0-x} & \Delta_y^{2b_0-y} & \Delta_z^{2c_0-z} \\ f^{(3)}(\xi, \eta, \zeta) \end{array} \right|,$$

nel primo caso, e anche così

$$(33'') \quad |P| \leq \frac{[\text{Vol. } T]^5}{2880^3} \text{Max}_T |f^{(4)}(x, y, z)|,$$

nel secondo.

Un perfezionamento della formula centro-periferica.

6. Decomposto l'intervallo T d'integrazione in n^3 intervalli eguali $T_{h,k,p}$ di punti estremi inferiore $(a_{h-1}, b_{k-1}, c_{p-1})$ e superiore

$$h = 1, 2, \dots, n$$

(a_h, b_k, c_p) e di centro (a_h^0, b_k^0, c_p^0) , $k = 1, 2, \dots, n$, $a_0 = a$,

$$p = 1, 2, \dots, n$$

$a_n = a'$; $b_0 = b$, $b_n = b'$; $c_0 = c$, $c_n = c'$; allora, applicando la (31) per il calcolo dell'integrale della f esteso a ciascuno degli intervalli $T_{h,k,p}$ e facendo la somma delle espressioni che così si realizzano, si ottiene la nuova formula, di approssimazione dell'

$\iiint_T f(x, y, z) dT$, che, specie se T ha dimensioni non piccole,

meglio ancora del secondo membro della (31) si presta a dare dell'integrale triplo di f in T un valore approssimato estremamente vicino al valore esatto dell'integrale; Tale perfezionamento della formula centro-periferica secondo Picone è espresso dalla

$$(33''') \quad \frac{a' - a}{6n} \int_b^{b'} \int_c^{c'} \left\{ f(a, y, z) + f(a', y, z) + 2 \sum_{h=1}^{n-1} f(a_h, y, z) \right.$$

$$+ \left. 4 \sum_{h=1}^n f(a_h^0, y, z) \right\} dy dz + \frac{b' - b}{6n} \int_a^a \int_c^c \left\{ f(x, b, z) + f(x, b', z) \right.$$

$$+ \left. 2 \sum_{K=1}^{n-1} f(x, b_K, z) + 4 \sum_{K=1}^n f(x, b_K^0, z) \right\} dx dz + \frac{c' - c}{6n} \int_a^{a'} \int_b^b \left\{ f(x, y, c) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + f(x, y, c') + 2 \sum_{p=1}^{n-1} f(x, y, c_p) + 4 \sum_{p=1}^n f(x, y, c_p^0) \Big\} dx dy \\
& - \frac{(a'-a)(b'-b)}{36n^2} \int_c^{c'} \left\{ f(a, b, z) + f(a, b', z) + f(a', b, z) + f(a', b', z) \right. \\
& + 2 \left\{ \sum_{h=1}^{n-1} [f(a_h, b, z) + f(a_h, b', z)] + \sum_{K=1}^{n-1} [f(a, b_K, z) + f(a', b_K, z)] \right\} \\
& + 4 \left\{ \sum_{h=1}^n [f(a_h^0, b, z) + f(a_h^0, b', z)] + \sum_{K=1}^n [f(a, b_K^0, z) + f(a', b_K^0, z)] \right. \\
& + \left. \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{K=1}^{n-1} f(a_h, b_K, z) \right\} + 8 \left\{ \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{K=1}^n f(a_h, b_K^0, z) + \sum_{h=1}^n \sum_{K=1}^{n-1} f(a_h^0, b_K, z) \right\} \\
& + 16 \sum_{h=1}^n \sum_{K=1}^n f(a_h^0, b_K^0, z) \Big\} dz - \frac{(a'-a)(c'-c)}{36n^2} \cdot \int_b^{b'} \left\{ f(a, y, c) + f(a, y, c') \right. \\
& + f(a', y, c) + f(a', y, c') + 2 \left\{ \sum_{h=1}^{n-1} [f(a_h, y, c) + f(a_h, y, c')] \right. \\
& + \left. \sum_{p=1}^{n-1} [f(a, y, c_p) + f(a', y, c_p)] \right\} + 4 \left\{ \sum_{h=1}^n [f(a_h^0, y, c) + f(a_h^0, y, c')] \right. \\
& + \left. \sum_{p=1}^n [f(a, y, c_p^0) + f(a', y, c_p^0)] + \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} f(a_h, y, c_p) \right\} \\
& + 8 \left\{ \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{p=1}^n f(a_h, y, c_p^0) + \sum_{h=1}^n \sum_{p=1}^{n-1} f(a_h^0, y, c_p) \right\} + 16 \sum_{h=1}^n \sum_{p=1}^n f(a_h^0, y, c_p^0) \Big\} dy \\
& - \frac{(b'-b)(c'-c)}{36n^2} \int_a^{a'} \left\{ f(x, b, c) + f(x, b, c') + f(x, b', c) + f(x, b', c') \right. \\
& + 2 \left\{ \sum_{K=1}^{n-1} [f(x, b_K, c) + f(x, b_K, c')] + \sum_{p=1}^{n-1} [f(x, b, c_p) + f(x, b', c_p)] \right\} \\
& + 4 \left\{ \sum_{K=1}^n [f(x, b_K^0, c) + f(x, b_K^0, c')] + \sum_{p=1}^n [f(x, b, c_p^0) + f(x, b', c_p^0)] \right. \\
& + \left. \sum_{K=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} f(x, b_K, c_p) \right\} + 8 \left\{ \sum_{K=1}^{n-1} \sum_{p=1}^n f(x, b_K, c_p^0) + \sum_{K=1}^n \sum_{p=1}^{n-1} f(x, b_K^0, c_p) \right\} \\
& + 16 \sum_{K=1}^n \sum_{p=1}^n f(x, b_K^0, c_p^0) \Big\} dx + \frac{\text{Vol. } T}{216n^3} \sum_{\substack{\text{per tutti} \\ \text{gli } T_{hKp}}} \left\{ \sum f(V_{i_{T_{hKp}}}) + 4 \sum f(C_{l_{T_{hKp}}}) \right. \\
& \left. + 16 \sum f(C_{F_{T_{hKp}}}) + 64 f(C_{T_{hKp}}) \right\}
\end{aligned}$$

e con l'uso di tale formula, pel calcolo approssimato di $\iint_T f(x, y, z)$ dT , si commette un errore P_n tale che

$$|P_n| \leq \frac{[\text{Vol. } T]^4}{1152^3 \cdot n^9} \text{Max}_{\substack{\text{per tutti} \\ \text{gli } T_{hKp}}} \left| \begin{array}{ccc} 2a_n^0 - x & 2b_K^0 - y & 2c_p^0 - z \\ \Delta & \Delta & \Delta \\ x & y & z \end{array} f^{(3)}(\xi, \eta, \zeta) \right|$$

se f è di classe tre in T , come pure

$$|P_n| \leq \frac{[\text{Vol. } T]^5}{2880^3 \cdot n^{12}} \text{Max}_T |f^{(4)}(x, y, z)|$$

se f è di classe quattro in T .

7. Se si pensa che, a mezzo della *formula centro-periferica* competente allo spazio bidimensionale (cfr. ²⁾, formula (31)), si possono valutare, con nota specificazione dell'errore che si commette, i valori approssimati dei primi tre integrali (doppi) della formula *centro-periferica* (31), si trova, con facile procedimento, la seguente *altra uguaglianza approssimata*

$$(34) \quad \iiint_T f(x, y, z) dT = \frac{(a' - a)(b' - b)}{36} \int_c^{c'} \left\{ f(a, b, z) + f(a, b', z) + f(a', b, z) + f(a', b', z) + 4\{f(a, b_0, z) + f(a', b_0, z) + f(a_0, b, z) + f(a_0, b', z)\} + 16f(a_0, b_0, z) \right\} dz + \frac{(a' - a)(c' - c)}{36} \int_b^{b'} \left\{ f(a, y, c) + f(a, y, c') + f(a', y, c) + f(a', y, c') + 4\{f(a, y, c_0) + f(a', y, c_0) + f(a_0, y, c) + f(a_0, y, c')\} + 16f(a_0, y, c_0) \right\} dy + \frac{(b' - b)(c' - c)}{36} \cdot \int_a^{a'} \left\{ f(x, b, c) + f(x, b, c') + f(x, b', c) + f(x, b', c') + 4\{f(x, b, c_0) + f(x, b', c_0) + f(x, b_0, c) + f(x, b_0, c')\} + 16f(x, b_0, c_0) \right\} dx - \frac{2\text{Vol. } T}{216} [\Sigma f(V_i) + 4\Sigma f(C_i) + 16\Sigma f(C_F) + 64f(C)],$$

e, se a ciascun integrale lineare si applicasse in tale (34) la *formula centro-periferica* nell' $S_{(1)}$ (cioè la *formula di Cavalieri-Simpson*), quindi anche l'altra *uguaglianza approssimata*

$$(35) \quad \iiint_T f(x, y, z) dT = \frac{\text{Vol. } T}{216} [\Sigma f(V_i) + 4\Sigma f(C_i) + 16\Sigma f(C_F) + 64f(C)],$$

come del resto l'attuale teoria e quella già esaurita ²⁾, pei casi precedenti di $S_{(1)}$ e di $S_{(2)}$, facevano facilmente prevedere.

Se la $f(x, y, z)$ é, per esempio, di classe quattro in T , l'errore P^* che si commette, facendo uso della (34), assume la espressione seguente

$$\begin{aligned}
 (34') \quad P^* &= \frac{(a' - a)(b' - b)^5(c' - c)^5}{6 \cdot 2304^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [f_{y^2 z^2}(a, b_0 + \beta s, c_0 + \gamma t) \\
 &+ 4f_{y^2 z^2}(a_0, b_0 + \beta s, c_0 + \gamma t) + f_{y^2 z^2}(a', b_0 + \beta s, c_0 + \gamma t)] \cdot \Gamma(s)\Gamma(t) ds dt \\
 &+ \frac{(a' - a)^5(b' - b)(c' - c)^5}{6 \cdot 2304^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [f_{x^2 z^2}(a_0 + \alpha r, b, c_0 + \gamma t) \\
 &+ 4f_{x^2 z^2}(a_0 + \alpha r, b_0, c_0 + \gamma t) + f_{x^2 z^2}(a_0 + \alpha r, b', c_0 + \gamma t)] \cdot \Gamma(r)\Gamma(t) dr dt \\
 &+ \frac{(a' - a)^5(b' - b)^5(c' - c)}{6 \cdot 2304^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [f_{x^2 y^2}(a_0 + \alpha r, b_0 + \beta s, c) \\
 &+ 4f_{x^2 y^2}(a_0 + \alpha r, b_0 + \beta s, c_0) + f_{x^2 y^2}(a_0 + \alpha r, b_0 + \beta s, c')] \cdot \Gamma(r)\Gamma(s) dr ds \\
 &- \frac{[\text{Vol. } T]^5}{2304^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f^{(4)}(a_0 + \alpha r, b_0 + \beta s, c_0 + \gamma t) \Gamma(r)\Gamma(s)\Gamma(t) dr ds dt
 \end{aligned}$$

avendo posto, al solito, $(1 - |r|)^3 \cdot (1 + 3|r|) = \Gamma(r)$.

Sfruttando infine il fatto che per la formula di Cavalieri-Simpson

$$\int_a^{a'} f(x) dx = \frac{a' - a}{6} [f(a) + 4f(a_0) + f(a')] \text{ si commette l'errore}$$

$-\frac{(a' - a)^5}{2^5 \cdot 3^2} \int_{-1}^1 f^{IV}(a_0 + \alpha r) \Gamma(r) dr$ se $f(x)$ è di classe quattro [Cfr. ²],

formula (17)], si ha che:
 Se $f(x, y, z)$ é di classe quattro in T , l'errore $P^{*'}$ che si commette, facendo uso della (35), assume la espressione seguente

$$\begin{aligned}
 (35') \quad P^{*'} &= - \frac{(a' - a)(b' - b)(c' - c)^5}{36 \cdot 2304} \int_{-1}^1 \left\{ f_{z^4}(a, b, c_0 + \gamma t) \right. \\
 &+ f_{z^4}(a, b', c_0 + \gamma t) + f_{z^4}(a', b, c_0 + \gamma t) + 4\{f_{z^4}(a, b_0, c_0 + \gamma t) \\
 &+ f_{z^4}(a_0, b, c_0 + \gamma t) + f_{z^4}(a_0, b', c_0 + \gamma t) + 16f_{z^4}(a_0, b_0, c_0 + \gamma t)\} \Gamma(t) dt \\
 &- \frac{(a' - a)(b' - b)^5(c' - c)}{36 \cdot 2304} \int_{-1}^1 \left\{ f_{y^4}(a, b_0 + \beta s, c) + f_{y^4}(a, b_0 + \beta s, c') \right. \\
 &+ f_{y^4}(a', b_0 + \beta s, c) + f_{y^4}(a', b_0 + \beta s, c') + 4\{f_{y^4}(a, b_0 + \beta s, c_0) \\
 &+ f_{y^4}(a', b_0 + \beta s, c_0) + f_{y^4}(a_0, b_0 + \beta s, c) + f_{y^4}(a_0, b_0 + \beta s, c')\} \\
 &+ 16f_{y^4}(a_0, b_0 + \beta s, c_0)\} \Gamma(s) ds - \frac{(a' - a)^5(b' - b)(c' - c)}{36 \cdot 2304} \int_{-1}^1 \left\{ f_{x^4}(a_0 + \alpha r, b, c) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ f_{x^a}(a_0 + \alpha r, b, c') + f_{x^a}(a_0 + \alpha r, b', c) + f_{x^a}(a_0 + \alpha r, b', c') \\
 &+ 4 \{ f_{x^a}(a_0 + \alpha r, b, c_0) + f_{x^a}(a_0 + \alpha r, b', c_0) + f_{x^a}(a_0 + \alpha r, b_0, c) \\
 &+ f_{x^a}(a_0 + \alpha r, b_0, c') \} + 16 f_{x^a}(a_0 + \alpha r, b_0, c_0) \} \Gamma(r) dr \\
 &+ \frac{a'(a-b)(b'-b)^s(c'-c)^s}{6 \cdot 2304^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [f_{y^2 z^2}(a, b_0 + \beta s, c_0 + \gamma t) \\
 &+ 4 f_{y^2 z^2}(a_0, b_0 + \beta s, c_0 + \gamma t) + f_{y^2 z^2}(a', b_0 + \beta s, c_0 + \gamma t)] \Gamma(s) \Gamma(t) ds dt \\
 &+ \frac{(a'-a)^s(b'-b)(c'-c)^s}{6 \cdot 2304^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [f_{x^2 z^2}(a_0 + \alpha r, b, c_0 + \gamma t) \\
 &+ 4 f_{x^2 z^2}(a_0 + \alpha r, b_0, c_0 + \gamma t) + f_{x^2 z^2}(a_0 + \alpha r, b', c_0 + \gamma t)] \Gamma(r) \Gamma(t) dr dt \\
 &+ \frac{(a'-a)^s(b'-b)^s(c'-c)}{6 \cdot 2304^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [f_{x^2 y^2}(a_0 + \alpha r, b_0 + \beta s, c) \\
 &+ 4 f_{x^2 y^2}(a_0 + \alpha r, b_0 + \beta s, c_0) + f_{x^2 y^2}(a_0 + \alpha r, b_0 + \beta s, c')] \Gamma(r) \Gamma(s) dr ds \\
 &- \frac{[\text{Vol. } T]^s}{2304^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f^{(4)}(a_0 + \alpha r, b_0 + \beta s, c_0 + \gamma t) \Gamma(r) \Gamma(s) \Gamma(t) dr ds dt.
 \end{aligned}$$

8. Sia ora l'intervallo (rettangolare) $T[(a_1, a_2, \dots, a_r); (a'_1, a'_2, \dots, a'_r)]$ dell' $S_{(r)}$, $r > 3$, di centro $C(a_1^0, a_2^0, \dots, a_r^0)$, avente quindi le r semidimensioni $\alpha_1 = \frac{a'_1 - a_1}{2}, \dots, \alpha_r = \frac{a'_r - a_r}{2}$, e si supponga assegnata in T una arbitraria funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ di classe tre o di classe quattro in T (sempre nel senso competente all'operatore derivazione totale in queste r variabili x_1, x_2, \dots, x_r). Come conseguenza della estensione all' $S_{(r)}$ di tutti i procedimenti e formule del § 6 l.c. ²⁾ (pel caso di $r = 2$) nonché di quelli svolti nel corso di questo lavoro (pel caso di $r = 3$) si perviene, in particolare, al risultato generale seguente:

Indichi s un arbitrario intero positivo, $1 \leq s \leq r - 1$, e (h_1, h_2, \dots, h_s) la generica combinazione semplice, priva di inversioni, di classe s , per gli r numeri $1, 2, \dots, r$. In corrispondenza alla (h_1, \dots, h_s) viene definita l'altra (K_1, \dots, K_{r-s}) pure priva di inversioni, di classe $r - s$, i cui elementi assieme a quelli della (h_1, \dots, h_s) esauriscono l'insieme di tutti gli interi da 1 ad r .

In relazione a qualsiasi prescelta s^{pla} (h_1, \dots, h_s) si pensino fatte per ogni n intero, $0 \leq n \leq s$, le combinazioni semplici di classe n e prive di inversioni sugli s elementi h_1, \dots, h_s e denominando $(h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_n})$ della (h_1, \dots, h_s) ognuna di tali combinazioni si indichi con $(h_{j_1}, h_{j_2}, \dots, h_{j_{s-n}})$ della (h_1, \dots, h_s) la corrispondente altra, pure

semplice di classe $s - n$ e priva di inversioni, che assieme agli n elementi della precedente esaurisce l' s^{pla} (h_1, \dots, h_s) prescelta.

In base a queste considerazioni si pensi di valutare la f ponendo per le coordinate d'indice h_1, \dots, h_s uno qualsiasi dei due estremi a od a' del relativo intervallo $(a_{h_1}, a'_{h_1}), \dots, (a_{h_s}, a'_{h_s})$ e di astenersi dal far ciò per le restanti coordinate d'indice K_1, \dots, K_{r-s} ; tali valutazioni per la f si convenga di indicarli per il seguito coi simboli

$$f \left(\begin{array}{c} a \\ \text{od} \\ a' \end{array} \right)_{(h_1, \dots, h_s)}, x_{K_1}, \dots, x_{K_{r-s}}$$

Dopo di ciò é ovvio il significato che si deve attribuire ai simboli di analogo tipo

$$f \left(\begin{array}{c} a \\ \text{od} \\ a' \end{array} \right)_{(h_{i_1}, \dots, h_{i_n})} \text{ della } (h_1, \dots, h_s), (a^0)_{(h_{j_1}, \dots, h_{j_{s-n}})} \text{ della } (h_1, \dots, h_s), x_{K_1}, \dots, x_{K_{r-s}}$$

Premesse tali convenzioni, la formula centro-periferica secondo Picone, nell' $S_{(r)}$, per qualsiasi r intero positivo, é costituita dalla espressione seguente

$$(31_r) \quad \int_{a_1}^{a'_1} \dots \int_{a_r}^{a'_r} f(x_1, \dots, x_r) dx_1 \dots dx_r =$$

$$\sum_{s=1}^{r-1} \frac{(-1)^{s+1}}{3^s} \sum_{\substack{\text{per tutte le} \\ (h_1, \dots, h_s)}} \alpha_{h_1} \dots \alpha_{h_s} \int_{a_{K_1}}^{a'_{K_1}} \dots \int_{a_{K_{r-s}}}^{a'_{K_{r-s}}} \left[\sum f \left(\begin{array}{c} a \\ \text{od} \\ a' \end{array} \right)_{(h_1, \dots, h_s)}, x_{K_1}, \dots, x_{K_{r-s}} \right]$$

$$+ \sum_{n=0}^{s-1} 4^{s-n} \left\{ \sum_{\substack{\text{per tutte le} \\ (h_{i_1}, \dots, h_{i_n})}} \text{ della } (h_1, \dots, h_s), f \left(\begin{array}{c} a \\ \text{od} \\ a' \end{array} \right)_{(h_{i_1}, \dots, h_{i_n})} \text{ della } (h_1, \dots, h_s), (a^0)_{(h_{j_1}, \dots, h_{j_{s-n}})} \text{ della } (h_1, \dots, h_s), x_{K_1}, \dots, x_{K_{r-s}} \right\} dx_{K_1} \cdot$$

$$+ \frac{(-1)^{r+1} \text{Mis.}^{\text{ra}} T}{2^r \cdot 3^r} \left[\sum f \left(\begin{array}{c} a \\ \text{od} \\ a' \end{array} \right)_{(1, \dots, r)} \right]$$

$$+ \sum_{n=0}^{r-1} 4^{r-n} \left\{ \sum_{\substack{\text{per tutte le} \\ (h_1, \dots, h_n)}} \text{ della } (1, \dots, r), f \left(\begin{array}{c} a \\ \text{od} \\ a' \end{array} \right)_{(h_1, \dots, h_n)} \text{ della } (1, \dots, r), (a^0)_{\substack{\text{(nelle restanti)} \\ \text{(r-n coord. te)}}} \right\}$$

e l'errore P che si commette, usando tale espressione per esprimere l' $\int \dots \int f(P) dT$, é dato da

$$(32'_r) \quad P = \frac{(-1)^r [\text{Mis.}^{ra} T]^4}{[2^5 \cdot 3]^r} \int_0^1 \dots \int_0^1 \Delta_{-\xi_1} \dots \Delta_{-\xi_r} f^{(3)}(a_1^0 + \alpha_1 \chi_1, \dots, a_r^0 + \alpha_r \chi_r) \cdot \left[\prod_{i=1}^r (1 - \xi_i)^2 \xi_i \right] d\xi_1 \dots d\xi_r$$

se $f(x_1, \dots, x_r)$ é di classe tre in T , dato anche da

$$(32''_r) \quad P = \frac{(-1)^r [\text{Mis.}^{ra} T]^5}{[2^8 \cdot 3^2]^r} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 f^{(4)}(a_1^0 + \alpha_1 \xi_1, \dots, a_r^0 + \alpha_r \xi_r) \Gamma(\xi_1) \dots \Gamma(\xi_r) d\xi_1 \dots d\xi_r$$

se $f(x_1, \dots, x_r)$ é di classe quattro in T , così maggiorato

$$(33'_r) \quad |P| \leq \frac{[\text{Mis.}^{ra} T]^4}{1152^r} \text{Max}_T \left| \Delta_{x_1}^{2a_1^0 - x_1} \dots \Delta_{x_r}^{2a_r^0 - x_r} f^{(3)}(\xi_1, \dots, \xi_r) \right|,$$

nel primo caso, e anche così:

$$(33''_r) \quad |P| \leq \frac{[\text{Mis.}^{ra} T]^5}{2880^r} \text{Max}_T |f^{(4)}(x_1, \dots, x_r)|$$

nel secondo.

9. Tenendo presente quanto si é fatto al precedente n. 7 per dedurre dalla (31), pel caso di $r=3$, le (34), (35), é chiaro come una corrispondente catena di espressioni approssimanti l' $\int \dots \int_T f(P) dT$ si ottenga (per ogni valore di r) dalla (31_r); ci limitiamo qui a far notare che l'ultima di tali deducibili espressioni é costituita dal termine finale del secondo membro della (31_r) con la sola eliminazione del fattore $(-1)^{r+1}$.

E' evidente come si possa anche ottenere un perfezionamento della formula centro-periferica (31_r) ripetendo, nel caso di r qualunque, il procedimento seguito al n. 6 per dedurre la (33''') quando $r=3$.

Esempi. — Mettiamo a raffronto le espressioni approssimate, che si ottengono coi vari metodi trovati, relative al calcolo numerico di particolari esempi d'integrali multipli.

a) Si prenda in primo luogo l' $\int_0^1 \int_0^1 \log(1+x+y) dx dy$; come valutazione diretta si trova

$$0,67116 \dots;$$

mentreché a mezzo di una formula che perfeziona quella centrale, cfr. ⁵⁾, il Tortorici trova il seguente risultato

$$0,6712 \dots;$$

Con la formula *centro-periferica* nell' $S_{(2)}$, cioè a mezzo della (31) cfr. *Picone* ²⁾, si trova invece il seguente risultato

$$0,6711701 \dots$$

b) Volendo calcolare l' $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \log(1+x+y+z) dx dy dz$, si trova come valutazione diretta

$$0,8951292 \dots;$$

Servendosi della *formula centro-periferica* (31) pura e semplice si trova come risultato complessivo per le *integrazioni: doppie*, il numero 2,6851600 . . . ; *semplici*, il numero — 2,6849316; mentreché la somma dei restanti termini é 0,8948997 (cioé il valore della (35)). Come valutazione pertinente alla *formula centro-periferica* si ottiene dunque il sorprendente risultato seguente (per difetto)

$$0,8951281 \dots;$$

Con la (34) si trova l'altro numero 0,8951322 (per eccesso);

Usando invece la (35) si trova 0,8948997 come valutazione, (come già si era detto), assai meno buona delle due precedenti e per difetto.

Formula periferica.

10. Pur data la ristrettezza di spazio, non possiamo, anche per i legami intimi che ha con tutta la precedente trattazione, passar sotto silenzio un'altra notevole formula che si può subito stabilire nel caso generale di r qualsiasi, e in particolare per $r = 3$ partendo dalla (2*), estendendo il procedimento solito, seguito nei precedenti numeri, quale é stato indicato dal Prof. *Picone* al § 6 del l.c. ²⁾ per ottenere la formula in questione per $r = 2$ cioè la *Formula periferica* (27) l.c. ²⁾ relativa al calcolo approssimato degli integrali doppi. Ci limitiamo qui ad esporre gli enunciati dei teoremi.

a) Per $r = 3$ si trova il risultato: *Se la $f(x, y, z)$ é di classe due nell'intervallo T dello spazio ordinario, ponendo*

$$\begin{aligned} \iint\limits_T f dT &= \frac{a'-a}{2} \int_b^{b'} \int_c^{c'} [f(a, y, z) + f(a', y, z)] dy dz \\ &+ \frac{b'-b}{2} \int_a^{a'} \int_c^{c'} [f(x, b, z) + f(x, b', z)] dx dz \\ &+ \frac{c'-c}{2} \int_a^{a'} \int_b^{b'} [f(x, y, c) + f(x, y, c')] dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(a' - a)(b' - b)}{4} \int_c^{a'} [f(a, b, z) + f(a, b', z) + f(a', b, z) + f(a', b', z)] dz \\
 & - \frac{(a' - a)(c' - c)}{4} \int_b^{b'} [f(a, y, c) + f(a, y, c') + f(a', y, c) + f(a', y, c')] dy \\
 & - \frac{(b' - b)(c' - c)}{4} \int_a^{a'} [f(x, b, c) + f(x, b, c') + f(x, b', c) + f(x, b', c')] dx \\
 & + \frac{\text{Vol. } T}{8} \Sigma f(V_i),
 \end{aligned}$$

si commette un errore dato da

$$P = \frac{(-1)^s [\text{Vol. } T]^3}{16^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f^{(2)}(a_0 + \alpha r, b_0 + \beta s, c_0 + \gamma t) (1 - r^2)(1 - s^2)(1 - t^2) dr ds dt$$

che può essere così maggiorato:

$$|P| \leq \frac{[\text{Vol. } T]^3}{12^3} \text{Max}_T |f^{(2)}(x, y, z)|.$$

b) Riferendoci alle considerazioni e notazioni precisate al n. 8, si trova che: la formula periferica secondo Picone, nell' $S_{(r)}$, per qualsiasi r intero positivo, è costituita dalla $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ essendo di classe 2 in T

$$\begin{aligned}
 & \int_{a_1}^{a_1'} \dots \int_{a_r}^{a_r'} f(x_1, \dots, x_r) dx_1 \dots dx_r \\
 & \sum_{s=1}^{r-1} (-1)^{s+1} \cdot \sum_{\substack{\text{per tutte le} \\ (h_1, \dots, h_s)}} \alpha_{h_1} \dots \alpha_{h_s} \int_{a_{K_1}}^{a_{K_1}'} \dots \int_{a_{K_{r-s}}}^{a_{K_{r-s}}'} \left\{ \sum f \left(\begin{matrix} a \\ \text{od} \\ a' \end{matrix}, x_{K_1}, \dots, x_{K_{r-s}} \right) \right\} dx_{K_1} \dots dx_{K_{r-s}} \\
 & + \frac{(-1)^{r+1} \text{Mis.}^{ra} T}{2^r} \sum f \left(\begin{matrix} a \\ \text{od} \\ a' \end{matrix} \right)_{(1, \dots, r)}
 \end{aligned}$$

e l'errore P che si commette, usando il secondo membro per esprimere P è dato da

$$P = \frac{(-1)^r [\text{Mis.}^{ra} T]^3}{16^r} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 f^{(2)}(a_1^0 + \alpha_1 \xi_1, \dots, a_r^0 + \alpha_r \xi_r) \cdot \left[\prod_{i=1}^r (1 - \xi_i^2) \right] \cdot d\xi_1 \dots d\xi_r$$

che può essere così maggiorato:

$$|P| \leq \frac{[\text{Mis.}^{ar} T]^3}{12^r} \text{Max}_T |f^{(2)}(x_1, \dots, x_r)|.$$

a') *Un perfezionamento della formula periferica.*

Mettendoci, per semplicità, nel caso particolare dell' $S_{(3)}$, si decomponga T nei soliti n^3 intervalli eguali $T_{h,K,p}$ (vedi n. 6). La formula, di approssimazione dell' $\iiint_T f(P)dT$, che, specie se T ha dimensioni non piccole, si presta, meglio di quella periferica, a dare valori approssimati dell' $\iiint_T f(P)dT$ é la seguente

$$\begin{aligned}
 & \frac{a'-a}{2n} \int_b^{b'} \int_c^{c'} [f(a, y, z) + f(a', y, z) + 2 \sum_{h=1}^{n-1} f(a_h, y, z)] dy dz \\
 & + \frac{b'-b}{2n} \int_a^{a'} \int_c^{c'} [f(x, b, z) + f(x, b', z) + 2 \sum_{K=1}^{n-1} f(x, b_K, z)] dx dz \\
 & + \frac{c'-c}{2n} \int_a^{a'} \int_b^{b'} [f(x, y, c) + f(x, y, c') + 2 \sum_{p=1}^{n-1} f(x, y, c_p)] dx dy \\
 & - \frac{(a'-a)(b'-b)}{4n^2} \int_c^{c'} \left\{ f(a, b, z) + f(a, b', z) + f(a', b, z) + f(a', b', z) \right. \\
 & \left. + 2 \left[\sum_{h=1}^{n-1} \{f(a_h, b, z) + f(a_h, b', z)\} + \sum_{K=1}^{n-1} \{f(a, b_K, z) + f(a', b_K, z)\} \right] \right. \\
 & \left. + 4 \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{K=1}^{n-1} f(a_h, b_K, z) \right\} dz - \frac{(a'-a)(c'-c)}{4n^2} \int_b^{b'} \left\{ f(a, y, c) + f(a, y, c') \right. \\
 & \left. + f(a', y, c) + f(a', y, c') + 2 \left[\sum_{h=1}^{n-1} \{f(a_h, y, c) + f(a_h, y, c')\} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sum_{p=1}^{n-1} \{f(a, y, c_p) + f(a', y, c_p)\} \right] + 4 \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} f(a_h, y, c_p) \right\} dy \\
 & - \frac{(b'-b)(c'-c)}{4n^2} \int_a^{a'} \left\{ f(x, b, c) + f(x, b, c') + f(x, b', c) + f(x, b', c') \right. \\
 & \left. + 2 \left[\sum_{K=1}^{n-1} \{f(x, b_K, c) + f(x, b_K, c')\} + \sum_{p=1}^{n-1} \{f(x, b, c_p) + f(x, b', c_p)\} \right] \right. \\
 & \left. + 4 \sum_{K=1}^{n-1} \sum_{p=1}^{n-1} f(x, b_K, c_p) \right\} dx + \frac{\text{Vol. } T}{8n^3} \sum_{\substack{\text{per tutti} \\ \text{gli } T_{h,K,p}}} \left\{ \sum f(V_{i_{T_{h,K,p}}}) \right\}
 \end{aligned}$$

e l'errore che si sommette con l'uso di tale formula, per calcolo di $\iiint_T f(P)dT$, é

$$P'_n = - \frac{[\text{Vol. } T]^3}{16^3 n^9} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-r^2)(1-s^2)(1-t^2) \left\{ \sum_{h=1}^n \sum_{K=1}^n \sum_{p=1}^n f^{(2)} \left(a_h^0 + \frac{a'-a}{2n} \cdot r, \right. \right. \\ \left. \left. b_K^0 + \frac{b'-b}{2n} \cdot s, c_p^0 + \frac{c'-c}{2n} \cdot t \right) \right\} dr ds dt$$

che si può maggiorare nel modo che segue

$$|P'_n| \leq \frac{[\text{Vol. } T]^3}{1728 \cdot n^6} \text{Max}_T |f^{(2)}(x, y, z)|.$$

BIBLIOGRAFIA.

M. PICONE

- [1] Vedute generali sull'interpolazione e qualche loro conseguenza, Ann. scuola norm. sup. Pisa, (3) 4, 193—244 (1951).
- [2] Appunti di Analisi Superiore, Napoli: Rondinella Editore, 1940.

P. TORTORICI

- [3] Su un metodo numerico di calcolo approssimato per gli integrali doppi, Pubblicazione INAC no. 303 (Serie II), Roma 1951.

C. BIRINDELLI

- [4] Sul calcolo numerico degli integrali multipli, Rend. Acc. Naz. Linc. (8) XI, 40—44 (1951).

(Oblatum 8-1-52).