Compositio Mathematica

Oswald Wyler

Ueber einen Rangbegriff in der Theorie der Ringe, speziell der regulären Ringe

Compositio Mathematica, tome 9 (1951), p. 193-208
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1951__9__193_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ueber einen Rangbegriff in der Theorie der Ringe, speziell der regulären Ringe

von

Oswald Wyler

Einleitung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Verallgemeinerung des Rangbegriffes von Ringen quadratischer Matrizen auf beliebige assoziative Ringe. Der Rang eines Ringelements wird so definiert daß wesentliche Eigenschaften des Ranges einer Matrix teils allgemein, teils für reguläre Ringe gültig bleiben.

Im Ring der n-reihigen quadratischen Matrizen über einem Schiefkörper [1]) wird jedes Links- oder Rechtsideal von einem Element erzeugt, ist also ein Hauptideal. Zwei Matrizen a und b des Ringes erzeugen dann und nur dann dasselbe Linksideal, wenn die Zeilen von a denselben Vektorraum aufspannen wie die Zeilen von b. Dasselbe gilt für Rechtsideale und Kolonnen. Zwei Matrizen, die dasselbe Links- oder Rechtsideal erzeugen, haben also denselben Rang. Haben umgekehrt die Matrizen a und b denselben Rang, so gibt es stets eine Matrix c, welche dasselbe Rechtsideal wie a und dasselbe Linksideal wie b erzeugt [2]).

In der letzten Aussage kommen nur Begriffe vor, die in jedem Ring erklärt sind; sie kann daher für einen beliebigen Ring als Definition der Ranggleichheit zweier Elemente verwendet werden. Es ist allerdings vorteilhafter, eine gleichwertige Definition zu verwenden, aus der sofort hervorgeht, daß die Ranggleichheit eine Aequivalenzbeziehung ist.

Im ersten, vorbereitenden Abschnitt stellen wir einige wohlbekannte Sätze über Idempotente und reguläre Ringe zusammen, die wir später brauchen werden.

In § 2 wird der Rang eines Ringelementes definiert. Es werden Kriterien dafür gegeben, wann zwei Ringelemente, speziell zwei Idempotente, denselben Rang haben.

---

[1]) n bedeutet immer eine natürliche Zahl.

[2]) Ist $b = paq$, wo p und q reguläre Matrizen sind, so gilt dies für $c = q = p^{-1}b$.

In § 3 wird die Addition von Rängen eingeführt. Bezeichnen wir mit Rx den Rang des Ringelementes x, und sind e und f orthogonale Idempotente [3]), so ist

$$Re + Rf = R(e + f).$$

Die Addition von Rängen braucht nicht stets ausführbar zu sein, ist aber, soweit definiert, assoziativ und kommutativ.

In § 4 betrachten wir zunächst Systeme, in denen eine nicht stets ausführbare, assoziative Operation definiert ist. Solche Systeme sind in [1] [4]) allgemein untersucht worden. Wir benützen hier wesentlich die Begriffe und Resultate der ersten drei Abschnitte jener Arbeit. Analog zum Begriff der Summation in [1] führen wir den Begriff der „starken Summation" einer Folge von Elementen eines solchen „additiven Systems" ein. Einige grundlegende Eigenschaften der starken Summation werden bewiesen. Wir können nun insbesondere zeigen, daß es eine „freie" Erweiterung des Systems der Ränge eines Ringes zu einem System mit unbeschränkt ausführbarer, assoziativer Addition gibt. Für reguläre Ringe ist das erweiterte System kommutativ, und es gilt das Analogon des folgenden geometrischen Satzes: Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Unterräume eines Vektorraumes über einem Schiefkörper, so ist die Summe der Ränge von $\mathfrak{a}$ und von $\mathfrak{b}$ gleich der Summe der Ränge des Durchschnittes und der Summe (Vereinigungsraum) von $\mathfrak{a}$ und von $\mathfrak{b}$.

In § 5 werden die Resultate der ersten beiden Abschnitte zum Beweise des Satzes von I. Kaplansky verwendet, daß jeder halbeinfache Ring mit Minimalbedingung für Links-Hauptideale die direkte Summe einfacher Ringe ist [5]). Dieser Satz verallgemeinert die eine Hälfte des bekannten Satzes von Artin-Wedderburn über die Struktur halbeinfacher Ringe. Der Rangbegriff gestattet auch eine einfache Konstruktion des zu einem einfachen Ring mit Minimalbedingung für Linksideale isomorphen Matrizenringes.

Die meisten Sätze dieser Arbeit gelten für beliebige Ringe, dürften aber vor allem für reguläre Ringe von Interesse sein. Alle betrachteten Ringe sind assoziativ. Alle für Linksideale ausgesprochenen Sätze und Beweise gelten mutatis mutandis auch

---

[3]) e heißt ein *Idempotent*, wenn $e^2 = e$. Zwei Idempotente e und f heißen *orthogonal*, wenn $ef = fe = 0$.

[4]) Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die Literaturangaben am Schluß der Arbeit.

[5]) [3], Theorem 8.1, p. 74.

für Rechtsideale. Unter einem Hauptideal verstehen wir ein einseitiges Ideal, das von einem Element erzeugt wird.

Einige Beispiele mögen die Bedeutung des eingeführten Rangbegriffes und der Addition der Ränge in einem Ring veranschaulichen.

Beispiel 1. Ein halbeinfacher Ring $\mathfrak{R}$ mit Minimalbedingung für Linksideale ist die direkte Summe von Matrizenringen $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ über Schiefkörpern. Ist $a = a_1 + \ldots + a_n$, a_i in $\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, so ist $Ra = Ra_1 + \ldots + Ra_n$, und Ra_i ist der Rang von a_i sowohl in $\mathfrak{R}$ als auch in $\mathfrak{M}_i$. Die Ränge in $\mathfrak{M}_i$ können wir als natürliche Zahlen auffassen, wobei der (erweiterten) Addition der Ränge die Addition der zugeordneten natürlichen Zahlen entspricht. In dieser Weise wird jeder Rang in $\mathfrak{R}$ durch ein n-tupel natürlicher Zahlen charakterisiert, und die Ränge werden nach der Formel

$$(k_1, \ldots, k_n) + (l_1, \ldots, l_n) = (k_1 + l_1, \ \ldots, \ k_n + l_n)$$

addiert. Im Verband der Linksideale von $\mathfrak{R}$ können wir einen Dimensionsbegriff einführen [6]). Entspricht dann der Rang des Elementes a von $\mathfrak{R}$ dem Zahlen-n-tupel $(k_1, \ldots, k_n)$, so hat das von a erzeugte Linksideal $(a)_l$ im Verband der Linksideale von $\mathfrak{R}$ die Dimension $k_1 + \ldots + k_n$.

Beispiel. 2. Sei $\mathfrak{R}$ der Ring derjenigen Matrizen mit $\aleph$ Zeilen und Kolonnen ($\aleph$ eine beliebige Kardinalzahl) und Elementen in einem Schiefkörper $\mathfrak{K}$, für die jede Zeile höchstens endlichviele von Null verschiedene Elemente enthält. Addition und Multiplikation sind in $\mathfrak{R}$ in der gewohnten Weise definierbar. Die Zeilen einer Matrix in $\mathfrak{R}$ können wir als Vektoren eines $\aleph$-dimensionalen Linksvektorraumes $\mathfrak{B}$ über $\mathfrak{K}$ auffassen, wobei die Zeilen der Einheitsmatrix in $\mathfrak{R}$ eine Basis von $\mathfrak{B}$ bilden. Dann haben zwei Matrizen in $\mathfrak{R}$ dann und nur dann denselben Rang, wenn die von ihren Zeilen aufgespannten Unterräume von $\mathfrak{B}$ dieselbe Dimension haben. Wir erhalten so eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Rängen in $\mathfrak{R}$ und denjenigen Kardinalzahlen, welche nicht größer als $\aleph$ sind. Der Summe zweier Ränge in $\mathfrak{R}$ entspricht dabei die Summe der zugeordneten Kardinalzahlen. $\mathfrak{R}$ ist ein regulärer Ring mit Einselement.

Beispiel 3. Im Ringe $\mathfrak{R}$ des Beispiels 2 betrachten wir das Rechtsideal $\mathfrak{S}$ aller Matrizen, die höchstens endlich viele von Null verschiedene Elemente haben. Ebenso wie oben erhalten

---

[6]) Vgl. [2], Kap. V.

wir eine eindeutige Zuordnung der Ränge in $\mathfrak{S}$ zu natürlichen Zahlen, wobei wieder der Addition der Ränge die Addition der zugeordneten Zahlen entspricht. $\mathfrak{S}$ ist ein einfacher Ring mit Minimalbedingung für Links- und Rechts-Hauptideale. Ist $\aleph$ transfinit, so ist $\mathfrak{S}$ ein regulärer Ring ohne Einselement.

Beispiel 4. Im Ring der geraden ganzen Zahlen besteht jeder vom Nullrang 0 verschiedene Rang aus zwei Elementen $\pm 2n$, $n = 1, 2, \ldots$. Außer der trivialen Summe $0 + 0 = 0$ ist keine Summe zweier Ränge als Rang definiert. Im erweiterten System der Ränge erzeugen die vom Nullrang verschiedenen Ränge eine nicht-Abelsche freie Halbgruppe mit abzählbar-unendlichvielen Erzeugenden.

1. Idempotente und reguläre Ringe.

Das von einem Element a eines Ringes $\mathfrak{R}$ erzeugte Linksideal von $\mathfrak{R}$ bezeichnen wir mit $(a)_l$, das von a erzeugte Rechtsideal mit $(a)_r$. Da alle Sätze dieses vorbereitenden Abschnittes wohlbekannt sind, werden die Beweise entweder ganz weggelassen oder nur skizziert.

Satz 1.1. Ist e ein Idempotent eines Ringes $\mathfrak{R}$, so besteht $(e)_l$ aus allen Elementen x von $\mathfrak{R}$, für die $xe = x$ ist.

Satz. 1.2. Ist $\mathfrak{a}$ ein Linksideal eines Ringes $\mathfrak{R}$ und e ein Idempotent in $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{a}$ die direkte Summe von $(e)_l$ und des Linksideals $\mathfrak{b}$ aller Elemente $x - xe$, x in $\mathfrak{a}$. Ein Element y von $\mathfrak{a}$ ist dann und nur dann in $\mathfrak{b}$, wenn $ye = 0$ ist. Ist $\mathfrak{a} = (a)_l$, a in $\mathfrak{R}$, ein Hauptideal, so ist auch $\mathfrak{b} = (a - ae)_l$ ein Hauptideal.

Satz 1.3. Ist e ein Element eines Ringes $\mathfrak{R}$, so sind die folgenden beiden Aussagen über e gleichwertig:

a) e ist idempotent, und $(e)_l$ ist die direkte Summe von n Linksidealen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$.

b) Es gibt n Idempotente $e_1, \ldots, e_n$ in $\mathfrak{R}$, für die gilt:

$$e = e_1 + \ldots + e_n;$$
$$e_i e_j = 0 \text{ für } i \neq j \quad (i, j = 1, \ldots, n);$$
$$\mathfrak{a}_1 = (e_1)_l, \quad \ldots, \quad \mathfrak{a}_n = (e_n)_l.$$

Definition 1. Ein Element c eines Ringes $\mathfrak{R}$ heißt *regulär*, wenn es in $\mathfrak{R}$ ein Element y gibt, so daß $cyc = c$ ist. Ein Ring heißt *regulär*, wenn jedes seiner Elemente regulär ist.

Für Ringe mit Einselement ist dies die Definition der Regularität in [4]. Auch die Sätze 1.4 und 1.5. werden in [4] für Ringe mit Einselement bewiesen. Die Beweise dieser Sätze sind daher hier nur soweit angedeutet, als sie sich nicht fast wörtlich aus [4] übernehmen lassen.

SATZ 1.4. Die folgenden Eigenschaften eines Elementes c eines Ringes $\mathfrak{R}$ sind gleichwertig:

a) Es gibt ein Idempotent e in $\mathfrak{R}$, so daß $(c)_l = (e)_l$ ist.
b) Es gibt ein Idempotent f in $\mathfrak{R}$, so daß $(c)_r = (f)_r$ ist.
c) Es gibt ein Element x von $\mathfrak{R}$ und eine ganze Zahl k, so daß $c = cxc + kc^2$.
d) c ist regulär.

Beweis: Aus d) folgt a), aus a) folgt c). Gilt c), so erhalten wir $c = cyc$, also d), mit $y = x(cx + kc) + k(cx + kc)$.

KOROLLARE. Ist c ein reguläres Element eines Ringes $\mathfrak{R}$, so besteht $(c)_l$ aus allen Elementen zc, z in $\mathfrak{R}$. Jedes Idempotent des Ringes $\mathfrak{R}$ ist regulär. In einem regulären Ring wird jedes Hauptideal von einem Idempotent erzeugt.

SATZ 1.5. In einem regulären Ring sind Summe und Durchschnitt zweier Links-Hauptideale wieder Links-Hauptideale.

Sind e und f zwei Idempotente des Ringes, so gibt es ein Idempotent h, für das $(h)_r = (e - ef)_r$ ist. Dann ist $(e - he)_l$ der Durchschnitt von $(e)_l$ und $(f)_l$.

SATZ 1.6. Eine Rechtseinheit eines regulären Ringes ist auch eine Linkseinheit, also ein Einselement.

Ist e die Rechtseinheit und a ein Element des Ringes, so gibt es ein Element y des Ringes, für das $(a - ea)y(a - ea) = a - ea$ ist. Nun ist aber $y(a - ea) = 0$, also $a = ea$.

2. Der Rang eines Ringelementes.

Der folgende Hilfssatz wird sich als nützlich erweisen.

SATZ 2.1. Zu jedem Ring $\mathfrak{R}$ gibt es einen Ring $\mathfrak{R}'$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\mathfrak{R}$ ist ein Unterring von $\mathfrak{R}'$.
b) Ist a in $\mathfrak{R}$ und p' in $\mathfrak{R}'$, so gibt es ein Element x in $\mathfrak{R}$ und eine ganze Zahl k, so daß $p'a = xa + ka$ und $ap' = ax + ka$ ist.
c) Ist a in $\mathfrak{R}$, so gibt es Elemente u' und v' in $\mathfrak{R}'$, so daß $u'a = av' = s$ ist.

Beweis: Die Menge aller Paare (a, h), a in $\mathfrak{R}$, h eine ganze Zahl, bildet einen Ring, wenn wir Addition und Multiplikation durch die Formeln

$$(a, h)+(b, k)=(a + b,\ h + k);\quad (a, h)(b, k)=(ab + ka + hb,\ hk)$$

definieren. Ersetzen wir in diesem Ring $(a, 0)$ durch a, so erhalten wir einen Ring $\mathfrak{R}'$, der die Bedingungen des Satzes erfüllt, c) mit $u' = v' = (0, 1)$, wo 0 das Nullelement von $\mathfrak{R}$ ist.

Bemerkung: Hat $\mathfrak{R}$ ein Einselement oder ist $\mathfrak{R}$ regulär, so gilt Satz 2.1 bereits für $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$.

a) und b) sind von selbst erfüllt; c) gilt im ersten Fall mit $u' = v' = 1$, im zweiten Fall mit $u' = ay$, $v' = ya$, wo $aya = a$ ist.

Sei nun $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Ring und $\mathfrak{R}'$ ein Ring, der die Bedingungen von Satz 2.1 erfüllt. Dann besteht für jedes Element a von $\mathfrak{R}$ das Linksideal $(a)_l$ aus allen Elementen $p'a$, p' in $\mathfrak{R}'$, von $\mathfrak{R}$, und $(a)_r$ besteht aus den Elementen aq', q' in $\mathfrak{R}'$.

Wir definieren nun den Rang eines Elementes des Ringes $\mathfrak{R}$.

Definition 2. Ist a ein Element des Ringes $\mathfrak{R}$, so ist der *Rang Ra von a in* $\mathfrak{R}$ definiert als die Menge aller Elemente b in $\mathfrak{R}$, für die es Elemente q' und r' in $\mathfrak{R}'$ gibt, so daß gilt:

α) Ist x in $(a)_l$, so ist xq' in $(b)_l$ und $xq'r' = x$.

β) Ist y in $(b)_l$, so ist yr' in $(a)_l$ und $yr'q' = y$.

Satz 2.2. Ist a ein Element des Ringes $\mathfrak{R}$, so ist a in Ra.

Zum Beweis setzen wir $q' = r' = u'$ in der Definition, wo $au' = a$ ist.

Satz 2.3. Sind a und b Elemente des Ringes $\mathfrak{R}$, so sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

a) b ist in Ra; b) a ist in Rb; c) $Ra = Rb$.

a) folgt aus c) mit Satz 2.2; die Gleichwertigkeit von a) und b) folgt sofort aus der Definition. Gilt nun a), und ist c in Rb, so haben wir α) und β), und es gibt Elemente s' und t' in $\mathfrak{R}'$, für die gilt: Ist y in $(b)_l$, so ist ys' in $(c)_l$ und $ys't' = y$, und ist z in $(c)_l$, so ist zt' in $(b)_l$ und $zt'z' = z$. Ist nun x in $(a)_l$, so ist $xq's'$ in $(c)_l$ und $xq's't'r' = x$, und ist z in $(c)_l$, so ist $zt'r'$ in $(a)_l$ und $zt'r'q's' = z$; c ist in Ra. Ebenso folgt aus b), daß jedes Element von Ra in Rb enthalten ist und damit c).

Für $Ra = Rb$ sagen wir auch: a und b *haben in* $\mathfrak{R}$ *denselben Rang*. Wir geben einige Kriterien für das Bestehen dieser Beziehung an.

Satz 2.4. Sind a und b Elemente des Ringes $\mathfrak{R}$, so sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

a) a und b haben in $\mathfrak{R}$ denselben Rang.

b) Es gibt Elements s' und t' in $\mathfrak{R}'$, für die gilt:
Ist x in $(a)_l$, so ist $s'x$ in $(b)_l$ und $t's'x = x$.
Ist y in $(b)_r$, so ist $t'y$ in $(a)_r$ und $s't'y = y$.

c) Es gibt ein Element c in $\mathfrak{R}$, für das $(a)_r = (c)_r$ und $(c)_l = (b)_l$ ist.

d) Es gibt ein Element d in $\mathfrak{R}$, für das $(a)_l = (d)_l$ und $(d)_r = (b)_r$ ist.

Gilt a), so haben wir α) und β). Ist $c = aq'$, so ist $a = cr'$, also $(a)_r = (c)_r$. Wegen α) ist c in $(b)_l$, und wegen β) gibt es ein Element p' in $\mathfrak{R}'$, so daß $br' = p'a$ und $b' = p'aq' = p'c$. Dann ist auch b in $(c)_l$, und wir haben $(c)_l = (b)_l$ und damit c).

Gilt c), so haben wir Elemente s' und t' in $\mathfrak{R}'$, so daß $b = s'c$ und $c = t'b$ ist. Dann gilt b) für diese Wahl von s' und t'.

Analog folgt d) aus b) und a) aus d), womit der Satz bewiesen ist.

In c), welches die Rangdefinition der Einleitung ist, kommt $\mathfrak{R}'$ nicht vor, also ist Ra in der Definition 2 unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{R}'$.

Satz 2.5. Zwei Elemente a und b des Ringes $\mathfrak{R}$ haben dann und nur dann den gleichen Rang, wenn es Elemente p' und q' in $\mathfrak{R}'$ gibt, für die gilt:

$$b = p'aq', \ (p'a)_l = (a)_l, \ (p'a)_r = (b)_r,$$
$$(aq')_l = (b)_l, \ (aq')_r = (a)_r.$$

Ist $Ra = Rb$, und gelten α) und β) in der Definition, so ist, wie im Beweis von Satz 2.4, $(aq')_r = (a)_r$ und $(aq')_l = (b)_l$. Es gibt also Elemente p' und s' in $\mathfrak{R}'$, für die $b = p'aq'$ und $aq' = s'b$ ist. Dann ist $p'a = p'aq'r' = br'$ und $a = aq'r' = s'br' = s'p'aq'r' = s'p'a$, also auch $(p'a)_l = (a)_l$ und $(p'a)_r = (b)_r$; wir haben alle gewünschten Beziehungen. Die Umkehrung folgt sofort aus Satz 2.4.

Korollar. Der Rang des Nullelementes von $\mathfrak{R}$, der *Nullrang* in $\mathfrak{R}$, besteht nur aus dem Nullelement.

Wir wenden nun den Satz 2.5 an, wenn eines der Elemente idempotent ist.

Satz 2.6. Ist e ein Idempotent des Ringes $\mathfrak{R}$, und hat das Element b von $\mathfrak{R}$ denselben Rang in $\mathfrak{R}$ wie e, so gibt es Elemente p und q von $\mathfrak{R}$, für die gilt:

$$(1) \qquad b = pq, \ (p)_l = (e)_l, \ (q)_r = (e)_r.$$

Gilt umgekehrt (1), so ist $(b)_l = (q)_l$ und $(b)_r = (p)_r$, also ist $Rb = Re$.

Beweis: Wir wenden Satz 2.5 an mit $a = e$. Gilt die Behauptung jenes Satzes für die Elemente p' und q' von $\mathfrak{R}'$, und ist $p = p'e$ und $q = eq'$, so ist auch $b = pq$, p und q sind in $\mathfrak{R}$, (1) gilt. Ist umgekehrt (1) erfüllt, so ist $eq = q$, und es gibt ein Element s in $\mathfrak{R}$, so daß $sp = e$ ist. Dann ist $sb = spq = eq = q$, also

$(b)_l = (q)_l$. Ebenso erhalten wir $(b)_r = (p)_r$ aus (1) und damit auch $Rb = Re$.

Satz 2.7. Zwei Idempotente e und f des Ringes $\mathfrak{R}$ haben dann und nur dann denselben Rang in $\mathfrak{R}$, wenn es Elemente p und q in $\mathfrak{R}$ gibt, für die gilt:

$$(2) \qquad pq = f,\ qp = e,\ pe = fp = p,\ eq = qf = q.$$

Beweis: Ist $Re = Rf$, so wenden wir Satz 2.6 an mit $b = f$. Aus (1) folgen alle Beziehungen (2) außer $qp = e$. Ist aber $sp = e$, s in $\mathfrak{R}$, so ist $spq = sf = eq = q$ und $e = sfp = qp$, also gilt auch diese Beziehung. Gilt umgekehrt (2), so ist $(e)_r = (q)_r$ und $(q)_l = (f)_l$, also $Re = Rf$.

Wir beweisen noch einen Satz über Ränge von regulären Ringelementen.

Satz 2.8. Die folgenden Eigenschaften eines Elementes c des Ringes $\mathfrak{R}$ sind gleichwertig:

a) c hat denselben Rang in $\mathfrak{R}$ wie ein reguläres Element von $\mathfrak{R}$.
b) c hat denselben Rang in $\mathfrak{R}$ wie ein Idempotent von $\mathfrak{R}$.
c) c ist regulär.

Beweis: a) folgt trivialerweise aus c), und mit Satz 1.5 folgt b) sofort aus a). Gibt b), und ist $Rc = Re$, e idempotent, so haben wir die Beziehungen (1) von Satz 2.6. Dann ist $(e)_l = (p)_l$, und nach Satz 1.5 gibt es ein Idempotent f in $\mathfrak{R}$, so daß $(p)_r = (c)_r = (f)_r$ ist, also ist c regulär: c) gilt.

3. Addition von Rängen.

Den Rang eines Elementes des Ringes $\mathfrak{R}$ nennen wir auch kurz einen *Rang in* $\mathfrak{R}$. Solche Ränge bezeichnen wir mit kleinen griechischen Buchstaben.

Definition 3. Sind α und β Ränge im Ring $\mathfrak{R}$, so ist $\alpha + \beta$ definiert als die Menge aller Elemente x von $\mathfrak{R}$, für die gilt: Es gibt Idempotente e und f in $\mathfrak{R}$, so daß

$$ef = fe = 0,\ \alpha = Re,\ \beta = Rf,\ R(e+f) = Rx.$$

Satz 3.1. Sind α und β Ränge im Ringe $\mathfrak{R}$, so ist $\alpha + \beta$ entweder leer oder ein Rang in $\mathfrak{R}$.

Beweis: Wir brauchen nur zu zeigen: Sind e, e', f und f' Idempotente, für die gilt: $Re = Re'$, $Rf = Rf'$, $ef = fe = 0$, $e'f' = f'e' = 0$, so ist auch $R(e+f) = R(e'+f')$. Dazu wählen wir p, q, r und s in $\mathfrak{R}$ nach Satz 2.7, so daß die Gleichungen $pq = e'$, $qp = e$, $rs = f'$, $sr = f$ und sinngemäß auch die andern Beziehungen von (2) gelten. Dann ist $ps = pefs = 0$, und ebenso $sp = 0$ und $qr = rq = 0$. Daraus folgen nun die Gleichungen

$$(p + r)(q + s) = e' + f' , \qquad (q + s)(p + r) = e + f.$$

Ferner ist $pf = pef = 0$ und $re = rfe = 0$, also auch $(p + r)(e + f) = p + r$. Auf dieselbe Weise erhalten wir die übrigen Beziehungen von (2) und damit $R(e + f) = R(e' + f')$, wie behauptet.

Korollar. Sind e und f orthogonale [3]) Idempotente des Ringes $\mathfrak{R}$, so ist

$$Re + Rf = R(e + f).$$

Nach Satz 2.2 ist ein Rang in $\mathfrak{R}$ nie leer; die beiden Möglichkeiten in Satz 3.1 schließen einander also aus. Gilt $\alpha + \beta = \gamma$, wo α, β und γ Ränge in $\mathfrak{R}$ sind, so sind α, β und γ Ränge regulärer Elemente von $\mathfrak{R}$ (Satz 2.8). Ein solcher Rang ist insbesondere der Nullrang, und wir haben den folgenden Satz.

Satz 3.2. In einem regulären Ring ist der Nullrang 0 das Nullelement der Addition der Ränge: Für jeden Rang α des Ringes ist $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.

Ist α ein Rang nicht-regulärer Ringelemente, so ist $\alpha + 0$ leer.

Satz 3.3. Sind α und β Ränge im Ringe $\mathfrak{R}$ und ist c ein Element von $\mathfrak{R}$, so sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

a) c ist regulär, und es gibt Elemente a in α und b in β, für die $(c)_l$ die direkte Summe von $(a)_l$ und $(b)_l$ ist.

b) c ist regulär, und es gibt Elemente a' in α und b' in β, für die $(c)_r$ die direkte Summe von $(a')_r$ und $(b')_r$ ist.

c) $Rc = \alpha + \beta$.

Beweis: Gilt a), und ist $(c)_l = (g)_l$, g idempotent, so gibt es nach Satz 1.3 orthogonale Idempotente e und f, sodaß $(e)_l = (a)_l$, $(f)_l = (b)_l$ und $e + f = g$ ist. Dann ist $\alpha = Re$, $\beta = Rf$, $Rc = R(e + f) = Re + Rf = \alpha + \beta$, c) gilt.

Gilt c), so gibt es orthogonale Idempotente e und f, für die $\alpha = Re$, $\beta = Rf$ und $Rc = R(e + f)$ ist. Ist $(e + f)_r = (d)_r$ und $(d)_l = (c)_l$, d in $\mathfrak{R}$, so gilt a) mit $a = ed$ und $b = fd$. Ist nämlich $e + f = dp$, p in $\mathfrak{R}$, so ist $ap = edp = e$ und ebenso $bp = f$. Dann ist $(a)_r = (e)_r$ und $Ra = Re = \alpha$ und analog $Rb = \beta$. Ferner ist $a + b = (e + f)d = d$, also $(a)_l + (b)_l = (d)_l = (c)_l$. Ist nun $xa = yb$, so ist $xap = ybp = xe = yf$ und damit auch $yf = yf^2 = xef = 0$, also $xa = yb = yfd = 0$, die Summe $(a)_l + (b)_l$ ist direkt, a) gilt. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 3.4. Sind α, β und γ Ränge im Ringe $\mathfrak{R}$, und sind $\alpha + \beta$ und $(\alpha + \beta) + \gamma$ Ränge in $\mathfrak{R}$, so sind auch $\beta + \gamma$ und $\alpha + (\beta + \gamma)$

Ränge in $\mathfrak{R}$, und umgekehrt, und es ist $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta+\gamma)$.

Beweis: Sei $\alpha + \beta = Rh$, $\gamma = Rg$, wo g und h orthogonale Idempotente von $\mathfrak{R}$ sind. Nach Satz 3.3 und Satz 1.3 gibt es orthogonale Idempotente e und f in $\mathfrak{R}$, so daß $\alpha = Re$, $\beta = Rf$ und $e + f = h$ gelten. Dann ist $eg = ehg = 0$, und ebenso ist $ge = 0$ und $fg = gf = 0$. Nun ist $\beta + \gamma = R(f + g)$ und $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = R(e + f + g)$.

Korollar. Sind e, f und g paarweise orthogonale Idempotente des Ringes $\mathfrak{R}$, so ist $R(e + f + g) = Re + Rf + Rg$.

Satz 3.5. Sind α und β Ränge im Ringe $\mathfrak{R}$, so ist $\alpha+\beta = \beta+\alpha$.

Das folgt sofort aus der Definition.

Satz 3.6. Sind a und b Elemente des *regulären* Ringes $\mathfrak{R}$, und ist $(c)_l$ der Durchschnitt, $(d)_l$ die Summe der Hauptideale $(a)_l$ und $(b)_l$, c und d in $\mathfrak{R}$, so gibt es Ränge λ und μ in $\mathfrak{R}$, für die gilt:

$$Ra = Rc + \lambda,\ Rb = Rc + \mu\ ,\quad Rd = \lambda + Rb = \mu + Ra.$$

Beweis: Nach Satz 1.2 können wir Elemente p und q von $\mathfrak{R}$ finden, für die $(a)_l$ die direkte Summe von $(c)_l$ und $(p)_l$ und $(b)_l$ die direkte Summe von $(c)_l$ und $(q)_l$ ist. Dann ist $Ra = Rc+Rp$ und $Rb = Rc + Rq$. $(d)_l$ ist direkte Summe von $(a)_l$ und $(q)_l$, also ist $Rd = Rq + Ra$, und ebenso folgt $Rd = Rp + Rb$; der Satz gilt für $\lambda = Rp$ und $\mu = Rq$.

Korollar. Sind α und β Ränge in einem regulären Ring $\mathfrak{R}$, so gibt es stets Ränge γ, δ, λ und μ in $\mathfrak{R}$, für die gilt:

$$\alpha = \gamma + \lambda,\ \beta = \gamma + \mu,\ \delta = \mu + \alpha = \lambda + \beta.$$

4. Das additive System der Ränge.

In diesem Abschnitt betrachten wir — mit Ausnahme von Satz 4.5 — die formalen Eigenschaften der in § 3 definierten Addition von Rängen in einem Ring. Die Resultate gelten allgemein für jede nicht-leere Menge A, in welcher eine Addition definiert ist, welche zwei Elementen α und β von A höchstens ein Element $\alpha + \beta$ von A zuordnet. Wir nennen eine solche Menge ein *additives System*. Ein additives System ist dasselbe wie ein „*Add*" im Sinne von [1].

Auf Grund von Satz 3.1 bilden die Ränge in einem Ringe $\mathfrak{R}$ ein additives System, welches mit $A_{\mathfrak{R}}$ bezeichnet sei.

Analog zum Begriff der *Summation* $\mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ in [1] [7]) sei hier der Begriff der *starken Summation* $\Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von Ele-

---

[7]) Def. 1, p. 707.

menten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eines additiven Systems A eingeführt. $\Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ wird als Teilmenge von A in folgender Weise rekursiv definiert.

Definition 4. Ist α_1 in A, so besteht $\Sigma(\alpha_1)$ aus dem einen Element α_1. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $n > 1$, Elemente von A, so gehört β in A dann und nur dann zu $\Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, wenn es für *jede* Zahl i, für die $0 < i < n$ ist, Elemente γ_i in $\Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ und δ_i in $\Sigma(\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ gibt, so daß $\beta = \gamma_i + \delta_i$ ist.

Der Unterschied zur Definition der Summation in [1] besteht darin, daß es dort heißen müßte: „für *eine* Zahl i . . .," anstatt wie hier: „für *jede* Zahl i . . .," Für weniger als drei Elemente kommt das auf dasselbe heraus:

Sind α und β in A, so ist $\Sigma(\alpha) = \mathfrak{S}(\alpha)$ und $\Sigma(\alpha, \beta) = \mathfrak{S}(\alpha, \beta)$.

Eine Summe δ dreier Elemente α, β und γ von A läßt sich auf zwei Arten definieren:

a) Es gibt ein Element λ in A, für das gilt: $\lambda = \alpha + \beta$ und $\delta = \lambda + \gamma$.

b) Es gibt ein Element μ in A, für das gilt: $\mu = \beta + \gamma$ und $\delta = \alpha + \mu$.

δ ist in $\mathfrak{S}(\alpha, \beta, \gamma)$, wenn a) oder b) gilt, in $\Sigma(\alpha, \beta, \gamma)$ nur dann, wenn a) und b) zugleich gelten.

Den Satz 3.4 können wir nun auch so formulieren:

Sind α, β und γ Ränge im Ringe $\mathfrak{R}$, so gilt im additiven System $A_{\mathfrak{R}}$ der Ränge in $\mathfrak{R}$ die Gleichung $\Sigma(\alpha, \beta, \gamma) = \mathfrak{S}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Wir beweisen nun zwei allgemeine Sätze über die starke Summation.

Satz 4.1. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Elemente des additiven Systems A, so gilt stets in A:

a) $\Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ist Teilmenge von $\mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

b) $\Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ besteht aus höchstens einem Element.

c) Ist $\Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ nicht leer, so ist $\Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Beweis: a) folgt mit vollständiger Induktion sofort aus der Definition. b) und c) beweisen wir zusammen mit vollständiger Induktion. Wegen a) genügt es zu zeigen: Ist β in $\Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und β' in $\mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, so ist $\beta = \beta'$. Für $n = 1$ ist dann $\beta = \beta' = \alpha_1$, die Behauptung ist richtig. Ist $n > 1$, so gibt es eine Zahl j, so daß $\beta' = \gamma' + \delta'$, γ' in $\mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)$ und δ' in $\mathfrak{S}(\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$. Es gibt aber auch Elemente γ in $\Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)$ und δ in $\Sigma(\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$, für die $\beta = \gamma + \delta$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\gamma = \gamma'$ und $\delta = \delta'$, also auch $\beta = \beta'$, wie behauptet.

Satz 4.2. Die folgenden Eigenschaften eines additiven Systems A sind gleichwertig:

a) Sind α, β und γ in A, so ist stets $\Sigma(\alpha, \beta, \gamma) = \mathfrak{S}(\alpha, \beta, \gamma)$.

b) Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in A, so ist stets

$$\Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

c) Sind v und w in $V(A)$ ähnlich ([1], p. 709), so ist $\Sigma v = \Sigma w$.

Beweis: Wir beweisen zunächst b) aus a) mit vollständiger Induktion. Ist $n = 1$, so ist $\Sigma(\alpha_1) = \mathfrak{S}(\alpha_1)$. Sei nun $n > 1$, und b) gelte für alle Folgen von weniger als n Elementen von A. Ist β in $\mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, so gibt es für *ein* j, $0 < j < n$, Elemente γ_j in $\mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_j) = \Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)$ und δ_j in $\mathfrak{S}(\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n) = \Sigma(\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$, so daß $\beta = \gamma_j + \delta_j$; wir müssen zeigen, daß solche Elemente für *jedes* $i = 1, \ldots, n-1$ existieren. Ist $i < j$, so gibt es Elemente γ_i in $\Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ und λ in $\Sigma(\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_j)$, so daß $\gamma_j = \gamma_i + \lambda$ ist. Dann ist β in $\mathfrak{S}(\gamma_i, \lambda, \delta_j)$, also nach a) in $\Sigma(\gamma_i\ \lambda, \delta_j)$, und es gibt ein Element δ_i in A, so daß in A gilt: $\delta_i = \lambda + \gamma_j$ und $\beta = \gamma_i + \delta_i$. Dann ist δ_i in $\mathfrak{S}(\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = \Sigma(\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. Ebenso zeigen wir die Existenz der Elemente γ_i und δ_i für $i > j$, und damit ist gezeigt, daß b) aus a) folgt. Umgekehrt ist a) ein Spezialfall von b), also sind a) und b) gleichwertig.

Sind nun $v = u + (\alpha, \beta) + u'$ und $w = u + (\alpha + \beta) + u'$ direkt ähnliche „Vektoren" aus $V(A)$ (u und u' können hier auch die „Länge Null" haben), so ist stets Σv eine Teilmenge von $\mathfrak{S}w$ und $\mathfrak{S}w$ eine Teilmenge von $\mathfrak{S}v$. Gilt b), so folgt daraus $\Sigma v = \Sigma w$, und daraus folgt sofort c). Sind umgekehrt $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Elemente von A und ist β in $\mathfrak{S}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, so gilt ([1], Lemma 1, p. 713): $(\beta) \sim (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Gilt c), so ist β in $\Sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, also gilt b). Damit ist der Satz bewiesen.

Kombinieren wir b) und c), so erhalten wir das folgende

Korollar. Hat ein additives System die Eigenschaft a) von Satz 4.2, so gilt in ihm das „starke Assoziativgesetz" ([1], p. 714).

Auf Grund der dem Satz 4.1 vorangehenden Bemerkung gilt dies insbesondere für das additive System $A_{\mathfrak{R}}$ der Ränge in einem Ring $\mathfrak{R}$. Bilden wir nach [1] die „abgeleitete additive Mannigfaltigkeit" $D(A_{\mathfrak{R}})$, so gilt für den „natürlichen Homomorphismus" $h(\alpha) = \alpha^* = \langle(\alpha)\rangle$ von $A_{\mathfrak{R}}$ in $D(A_{\mathfrak{R}})$ ([1], p. 710) der folgende Satz.

Satz 4.3. Ist $A_{\mathfrak{R}}$ das additive System der Ränge in einem Ring $\mathfrak{R}$, so gilt mit den Bezeichnungen von [1]:

a) Ist $\alpha^* = \beta^*$ für α und β in $A_{\mathfrak{R}}$, so ist $\alpha = \beta$.

b) Sind α, β und γ in $A_{\mathfrak{R}}$, so gilt $\alpha^* + \beta^* = \gamma^*$ in $D(A_{\mathfrak{R}})$ dann und nur dann, wenn $\alpha + \beta = \gamma$ in $A_{\mathfrak{R}}$ gilt.

c) Jedes Element von $D(A_{\mathfrak{R}})$ ist die Summe von Elementen der Menge $A^*_{\mathfrak{R}}$ aller Elemente α^*, α in $A_{\mathfrak{R}}$.

d) Ist φ ein Homomorphismus von $A_{\mathfrak{R}}$ in eine additive Mannigfaltigkeit M, so gibt es einen durch φ eindeutig bestimmten Homomorphismus ψ von $D(A_{\mathfrak{R}})$ in M, so daß für α in $A_{\mathfrak{R}}$ stets gilt: $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha^*)$.

Mit andern Worten: Der natürliche Homomorphismus h definiert eine „freie" Einbettung von $A_{\mathfrak{R}}$ in eine additive Mannigfaltigkeit, d.i. ein additives System mit stets ausführbarer, assoziativer Addition.

Satz 4.4 Gilt in einem additiven System A das Korollar zu Satz 3.6, so ist die Addition in $D(A)$ kommutativ.

Zum Beweis genügt es zu zeigen: Sind α und β in A, so ist $\alpha^* + \beta^* = \beta^* + \alpha^*$, d.h. $(\alpha, \beta) \sim (\beta, \alpha)$. Mit den Bezeichnungen des Korollars zu Satz 3.6 ist nun $(\alpha, \beta) \sim (\gamma, \lambda, \beta) \sim (\gamma, \delta) \sim (\gamma, \mu, \alpha) \sim (\beta, \alpha)$, wie behauptet.

Korollar. Ist $\mathfrak{R}$ ein regulärer Ring, so ist die Addition in $D(A_{\mathfrak{R}})$ kommutativ.

Satz 4.5. Sind a und b Elemente des regulären Ringes $\mathfrak{R}$, und ist $(c)_l$ der Durchschnitt, $(d)_l$ die Summe der Hauptideale $(a)_l$ und $(b)_l$ (c und d in $\mathfrak{R}$), so ist $(Ra)^* + (Rb)^* = (Rc)^* + (Rd)^*$ in $D(A_{\mathfrak{R}})$.

Satz 4.5 folgt aus Satz 3.6 in gleicher Weise wie Satz 4.4 aus dem Korollar zu Satz 3.6. Der Satz entspricht in Inhalt und Bedeutung dem in der Einleitung erwähnten Satze über Dimensionen von Vektorräumen.

5. Anwendungen auf halbeinfache Ringe.

Ist e ein Idempotent des Ringes $\mathfrak{R}$, so bilden die Elemente x in $\mathfrak{R}$, für die $ex = xe = x$ ist, einen Unterring von $\mathfrak{R}$ mit Einselement e. Diesen Unterring bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}(e)$. Ein Idempotent e des Ringes $\mathfrak{R}$ heißt *primitiv*, wenn die Ideale $(e)_l$ und $(e)_r$ minimal sind.

Wir stellen zunächst einige Hilfssätze zusammen, von denen die beiden ersten wohlbekannt sind und daher hier nicht bewiesen werden.

Satz 5.1. Ein nicht-nilpotentes minimales Linksideal des Ringes $\mathfrak{R}$ hat die Form $(e)_l$, wo e ein Idempotent von $\mathfrak{R}$ ist.

Satz 5.2. In einem Ring $\mathfrak{R}$ ohne Radikal sind die folgenden Eigenschaften eines Idempotents e gleichwertig:
a) $(e)_l$ ist einfach; b) $(e)_r$ ist einfach;
c) $\mathfrak{R}(e)$ ist ein Schiefkörper; d) e ist primitiv.

Satz 5.3. Sind a und b Elemente von gleichen Range im Ringe $\mathfrak{R}$, und ist $(a)_l$ minimal, so ist auch $(b)_l$ minimal.

Beweis: Seien q' und r' so gegeben, daß α) und β) in Definition 2 gelten. Ist $\mathfrak{b}$ ein in $(b)_l$ enthaltenes Linksideal, so bilden die Elemente yr', y in $\mathfrak{b}$, ein in $(a)_l$ enthaltenes Linksideal $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{b}$ besteht aus den Elementen xq', x in $\mathfrak{a}$. Ist $(a)_l$ einfach, so ist $\mathfrak{a} = (a)_l$ oder $\mathfrak{a} = (0)$, also auch $\mathfrak{b} = (b)_l$ oder $\mathfrak{b} = (0)$, also ist $(b)_l$ minimal.

Korollar. Haben zwei Idempotente des Ringes $\mathfrak{R}$ denselben Rang in $\mathfrak{R}$, und ist das eine primitiv, dann auch das andere.

Satz 5.4. Zwei primitive Idempotente e und f des Ringes $\mathfrak{R}$ haben dann und nur dann denselben Rang in $\mathfrak{R}$, wenn es ein Element c in $\mathfrak{R}$ gibt, für das ecf von Null verschieden ist.

Beweis: Ist $ecf \neq 0$, c in $\mathfrak{R}$, und sind $(e)_r$ und $(f)_l$ minimal, so ist $(e)_r = (ecf)_r$ und $(ecf)_l = (f)_l$, also $Re = Rf$. Ist umgekehrt $(e)_r = (c)_r$ und $(e)_l = (c)_l$, so ist $ecf = c \neq 0$.

Wir geben nun einen Beweis des folgenden Satzes von I. Kaplansky [5]).

Satz 5.5. Ein halbeinfacher Ring mit Minimalbedingung für Links-Hauptideale ist die direkte Summe von einfachen Ringen mit minimalen Idealen.

Ist e ein primitives Idempotent des Ringes $\mathfrak{R}$, so bezeichne $(e)_*$ das von e erzeugte zweiseitige Ideal in $\mathfrak{R}$. Wir wollen zeigen, daß die Ideale $(e)_*$ einfache Ringe sind, und daß $\mathfrak{R}$ die direkte Summe dieser Ideale ist. Dazu beweisen wir zunächst zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Sind e und f primitive Idempotente des halbeinfachen Ringes $\mathfrak{R}$, so sind die folgenden Aussagen gleichwertig:
a) f ist in $(e)_*$; b) e ist in $(f)_*$;
c) $Re = Rf$; d) $(e)_* = (f)_*$.

Beweis: Ist $Re \neq Rf$, und ist $c = a_1eb_1 + \ldots + a_neb_n$ in $(e)_*$, so ist $cf = 0$ nach Satz 5.4, also $c \neq f$. Damit folgt c) aus a) und ebenso aus b). Mit Satz 2.7 folgt d) unmittelbar aus c). Gilt schließlich d), so gelten a fortiori a) und b).

Hilfssatz 2. Ist a ein Element des halbeinfachen Ringes $\mathfrak{R}$ mit Minimalbedingung für Links-Hauptideale, so ist $(a)_l$ eine direkte Summe minimaler Linksideale und wird von einem Idempotent erzeugt.

Beweis: Ist $a \neq 0$, so enthält $(a)_l$ ein minimales Linksideal und damit nach den Sätzen 5.1 und 5.2 ein primitives Idempotent e_1. Nach Satz 1.2 ist $(a)_l$ die direkte Summe von $(e_1)_l$ und von $(a - ae_1)_l$. Ist $ae_1 \neq a$, so enthält $(a - ae_1)_l$ ein primitives Idempotent e_2 und ist die direkte Summe von $(e_2)_l$ und einem Ideal $(b)_l$, b in $\mathfrak{R}$, usw. Wegen der vorausgesetzten Minimalbedingung bricht das Verfahren nach endlichvielen Schritten ab. Wir erhalten nun auf bekannte Weise [8]) ein Idempotent, welches $(a)_l$ erzeugt.

Korollar. $\mathfrak{R}$ ist ein regulärer Ring.

Beweis von Satz 5.5: Nach Hilfssatz 2 ist $\mathfrak{R}$ die Summe der Ideale $(e)_*$. Sind e und f primitive Idempotente von $\mathfrak{R}$, und haben $(e)_*$ und $(f)_*$ ein von Null verschiedenes Element a gemeinsam, so ist $(a)_l$ in $(e)_*$ und in $(f)_*$ enthalten. $(a)_l$ enthält ein primitives Idempotent g, und nach Hilfssatz 1 ist $(e)_* = (g)_* = (f)_*$; die Summe der Ideale $(e)_*$ ist also direkt. Ist e ein primitives Idempotent von $\mathfrak{R}$, so ist ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{a}$ von $(e)_*$ auch ein Ideal von $\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{a} \neq (0)$, so enthält $\mathfrak{a}$ ein primitives Idempotent g, und wir haben wieder $\mathfrak{a} = (g)_* = (e)_*$. Die Ideale $(e)_*$ sind also einfache Ringe, und damit ist der Satz bewiesen.

Aus dem Satz 5.5 folgt die eine Hälfte des Satzes von Artin-Wedderburn über die Struktur halbeinfacher Ringe. Die andere Hälfte ist der folgende Satz.

Satz 5.6. Ein einfacher Ring mit Minimalbedingung für Linksideale ist ein Nullring oder isomorph zu einem vollständigen Matrizenring über einem Schiefkörper.

Beweis: Ein einfacher Ring $\mathfrak{R}$, der kein Nullring ist, ist halbeinfach. Erfüllt $\mathfrak{R}$ die Minimalbedingung für Linksideale, so besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einselement e und ist direkte Summe minimaler Linksideale [8]). Mit Satz 1.3 erhalten wir eine Darstellung von $\mathfrak{R}$ als Summe von paarweise orthogonalen, primitiven Idempotenten. Da $\mathfrak{R}$ einfach ist, haben diese Idempotente nach Hilfssatz 1 denselben Rang. Nun folgt der Satz mit Satz 5.2 sofort aus dem untenstehenden Hilfssatz 3.

Hilfssatz 3. Ist $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einselement e, und ist e die Summe von n paarweise orthogonalen Idempotenten $e_1, \ldots, e_n$ desselben Ranges in $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{R}$ isomorph zum Ring $\mathfrak{M}$ aller n-reihigen quadratischen Matrizen mit Elementen in $\mathfrak{R}(e_1)$.

---

[8]) Vgl. z.B. [5], § 117, S. 145 ff.

Beweis: Für $i = 1, \ldots, n$ wählen wir p_i und q_i in $\mathfrak{R}$ nach Satz 2.7, so daß gilt:

$$p_i q_i = e_i, \quad q_i p_i = e_1, \quad e_i p_i = p_i e_1 = p_i, \quad e_1 q_i = q_i e_i = q_i.$$

Dann wird durch die Formeln

$$a_{ij} = q_i a p_j \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

jedem Element a von $\mathfrak{R}$ eine Matrix $\varphi(a) = \| a_{ij} \|$ in $\mathfrak{M}$ zugeordnet. Sind a und b in $\mathfrak{R}$, so ist $q_i(a + b)p_j = q_i a p_j + q_i b p_j$ und

$$q_i a b p_j = q_i a e b p_j = q_i a \cdot \sum_{h=1}^{n} p_h q_h \cdot b p_j = \sum_{h=1}^{n} (q_i a p_h)(q_h b p_j),$$

die Abbildung φ ist also ein Homomorphismus.

Ist umgekehrt $B = \| b_{ij} \|$ eine Matrix in $\mathfrak{M}$, so ist

$$\psi(B) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j$$

ein Element von $\mathfrak{R}$. Ist nun $\varphi(a) = \| a_{ij} \|$, a in $\mathfrak{R}$, so ist

$$\psi(\varphi(a)) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i \cdot q_i a p_j \cdot q_j = (\sum_i p_i q_i) a (\sum_j p_j q_j) = eae = a.$$

Ist $i \neq j$, so ist $q_i p_j = q_i e_i e_j p_j = 0$, also ist

$$\varphi(\psi(B)) = \| q_i \psi(B) p_j \| = \| b_{ij} \| = B$$

für $B = \| b_{ij} \|$ in $\mathfrak{M}$. Die Abbildungen φ und ψ sind also Umkehrungen voneinander, und φ ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{M}$.

LITERATURANGABEN

REINHOLD BAER,

[1] Free sums of groups and their generalizations. An analysis of the associative law. Amer. Jour. of Math, vol. 71 (1949), pp. 706—742 (speziell pp. 706—718).

GARRETT BIRKHOFF,

[2] Lattice Theory. Revised Edition. New York 1948.

IRVING KAPLANSKY,

[3] Topological representations of algebras. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 68 (1950), pp. 62—75.

JOHN VON NEUMANN,

[4] On regular rings. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., vol. 22 (1936), pp. 707—713.

B. L. VAN DER WAERDEN,

[5] Moderne Algebra, Band II, 2. verb. Aufl., Berlin 1940.

(Oblatum 28-3-51)