

COMPOSITIO MATHEMATICA

HEINZ HUBER

Über analytische Abbildungen von Ringgebieten in Ringgebiete

Compositio Mathematica, tome 9 (1951), p. 161-168

http://www.numdam.org/item?id=CM_1951__9__161_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Über analytische Abbildungen von Ringgebieten in Ringgebiete ¹⁾

von

Heinz Huber

Zürich

1. Ringgebiete.

Ein Gebiet \mathfrak{R} der komplexen z -Ebene heiße ein Ringgebiet, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- a) \mathfrak{R} ist zweifach zusammenhängend
- b) \mathfrak{R} hat keine isolierten Randpunkte
- c) \mathfrak{R} enthält den unendlichfernen Punkt nicht.

Die Komplementärmenge eines Ringgebietes \mathfrak{R} zerfällt in eindeutiger Weise in zwei Komponenten, welche eine positive Entfernung von einander haben. Genau eine dieser beiden Komponenten ist beschränkt; sie werde mit $b(\mathfrak{R})$ bezeichnet. $b(\mathfrak{R})$ ist eine abgeschlossene und zusammenhängende Punktmenge. Die Menge derjenigen Randpunkte von \mathfrak{R} , welche in $b(\mathfrak{R})$ enthalten sind, heiße der innere Rand von \mathfrak{R} .

2. Der Modul eines Ringgebietes.

Ein Ringgebiet \mathfrak{R} läßt sich bekanntlich stets durch eine in \mathfrak{R} reguläre analytische Funktion eindeutig auf einen konzentrischen Kreisring $0 < r < |z| < R$ abbilden. Dabei ist das Radienverhältnis R/r durch das Gebiet \mathfrak{R} eindeutig bestimmt. Die positive Zahl $M = \log(R/r)$ nennen wir den Modul des Ringgebietes \mathfrak{R} .

3. Analytische Abbildungen.

Es seien \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 zwei Ringgebiete.

$w = f(z)$ heißt eine analytische Abbildung von \mathfrak{R}_1 in \mathfrak{R}_2 wenn gilt:

- a) $f(z)$ ist in \mathfrak{R}_1 regulär und eindeutig
- b) Es ist $w = f(z) \in \mathfrak{R}_2$ für alle $z \in \mathfrak{R}_1$.

¹⁾ Die Ergebnisse sind in Nr. 6 und 7 formuliert.

Die Menge aller analytischen Abbildungen von \mathfrak{R}_1 in \mathfrak{R}_2 bezeichnen wir mit $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2]$.

4. Die Umlaufszahl einer Abbildung.

Es sei w_0 ein beliebiger Punkt aus $b(\mathfrak{R}_2)$ und \mathfrak{R} eine rektifizierbare Jordankurve, welche in \mathfrak{R}_1 liegt und $b(\mathfrak{R}_1)$ in ihrem Innengebiet enthält. Ist nun $f \in \mathfrak{F}[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2]$, so ist

$$U[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}} d \log [f(z) - w_0]$$

offenbar eine ganze Zahl. Man überlegt sich leicht, daß $U[f]$ unabhängig ist von der speziellen Wahl der Kurve \mathfrak{R} und des Punktes w_0 , sofern nur \mathfrak{R} die angegebene Bedingung erfüllt und $w_0 \in b(\mathfrak{R}_2)$ ist.

$U[f]$ heiße die Umlaufszahl der analytischen Abbildung f .

Ist $\left. \begin{array}{l} U[f] > 0 \\ U[f] < 0 \end{array} \right\}$ so sagen wir, f sei eine Abbildung mit Erhaltung $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$ des Umlaufsinneres.
Umkehrung

5. Homotopieklassen.

Mit t bezeichnen wir im folgenden stets das abgeschlossene Intervall $0 \leq t \leq 1$. Wir sagen, zwei Abbildungen $f_0 \in \mathfrak{F}$, $f_1 \in \mathfrak{F}$ seien homotop (in Zeichen: $f_0 \sim f_1$), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Es gibt eine stetige Abbildung $w = f(z, t)$ des topologischen Produktes $\mathfrak{R}_1 \times t$ in das Ringgebiet \mathfrak{R}_2 derart, daß

$$f(z, 0) = f_0(z), \quad f(z, 1) = f_1(z)$$

b) Für jedes feste $t \in t$ ist $f(z, t) \in \mathfrak{F}[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2]$.

Diese Homotopierelation ist offenbar eine Äquivalenzrelation in der Menge \mathfrak{F} und bewirkt daher eine Klasseneinteilung von \mathfrak{F} . Diese Klassen nennen wir Homotopieklassen.

6. Wir werden in dieser Arbeit folgenden Satz beweisen:

SATZ I: Es seien \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 zwei Ringgebiete mit den Moduln M_1 und M_2 . $\mathfrak{F}[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2]$ sei die Menge aller analytischen Abbildungen von \mathfrak{R}_1 in \mathfrak{R}_2 , \mathfrak{S}_j die Menge aller Abbildungen $f \in \mathfrak{F}$, welche die Umlaufszahl $U[f] = j$ haben. Dann gilt:

a) $\mathfrak{F}[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2]$ zerfällt in $2 \left[\frac{M_2}{M_1} \right] + 1$ Homotopieklassen. Es

sind dies die Mengen

$$\mathfrak{S}_j, \quad - \left[\frac{M_2}{M_1} \right] \leq j \leq \left[\frac{M_2}{M_1} \right].$$

b) Ist $m = \frac{M_2}{M_1}$ eine ganze Zahl, so gilt zusätzlich:

Die Homotopieklasse $\left. \begin{matrix} \mathfrak{S}_m \\ \mathfrak{S}_{-m} \end{matrix} \right\}$ ist identisch mit der einparametrischen Schar aller konformen Abbildungen von \mathfrak{R}_1 auf die unverzweigte, m -blättrige Überlagerungsfläche von \mathfrak{R}_2 mit $\left. \begin{matrix} \text{Erhaltung} \\ \text{Umkehrung} \end{matrix} \right\}$ des Umlaufsinnens.

7. Betrachten wir nun den Spezialfall $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}$. Dann ist $M_2/M_1 = 1$. Nach Satz I a) treten daher nur die drei Homotopieklassen $\mathfrak{S}_{-1}, \mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1$ auf. Die Klasse \mathfrak{S}_0 besteht offenbar aus genau denjenigen Abbildungen, welche homotop sind zu einer beliebigen konstanten Abbildung $k(z) \equiv c, c \in \mathfrak{R}_2$. Aus Satz I b) folgt ferner, daß die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}_{-1} \cup \mathfrak{S}_1$ identisch ist mit der Gesamtheit aller konformen Automorphismen von \mathfrak{R} . Wir haben also

SATZ II: Jede analytische Abbildung eines Ringgebietes \mathfrak{R} in sich ist entweder ein (konformer) Automorphismus von \mathfrak{R} oder homotop zu einer beliebigen konstanten Abbildung.

8. Um Satz I zu beweisen, beachten wir zunächst folgendes: Da $\mathfrak{R}_l (l = 1, 2)$ den Modul M_l hat, gibt es eine in \mathfrak{R}_l eindeutige und reguläre Funktion $g_l(z)$, welche \mathfrak{R}_l eineindeutig auf den Kreisring

$$r_l: e^{-M_l/2} < |z| < e^{M_l/2}$$

derart abbildet, daß dem inneren Rande von \mathfrak{R}_l der innere Rand von r_l entspricht. Man überlegt sich nun leicht, daß Satz I bewiesen sein wird, wenn es gelingt, folgenden Satz zu beweisen:

SATZ I': $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}[r_1, r_2]$ sei die Menge aller analytischen Abbildungen des Kreisringes

$$r_1: e^{-M_1/2} < |z| < e^{M_1/2}$$

in den Kreisring

$$r_2: e^{-M_2/2} < |z| < e^{M_2/2}.$$

Dann gilt:

- a) Ist $f_0 \in \mathfrak{F}, f_1 \in \mathfrak{F}$ und $f_0 \sim f_1$, so ist $U[f_0] = U[f_1]$.
- b) Ist $f_0 \in \mathfrak{F}, f_1 \in \mathfrak{F}$ und $U[f_0] = U[f_1]$, so ist $f_0 \sim f_1$.

c) Ist j eine ganze Zahl, $-\left[\frac{M_2}{M_1}\right] \leq j \leq \left[\frac{M_2}{M_1}\right]$, α reell und $f_{j,\alpha}(z) = e^{i\alpha z^j}$, so ist $f_{j,\alpha} \in \mathfrak{F}$ und $U[f_{j,\alpha}] = j$.

d) Für jede Abbildung $f \in \mathfrak{F}$ ist

$$-\left[\frac{M_2}{M_1}\right] \leq U[f] \leq \left[\frac{M_2}{M_1}\right].$$

Ist $m = M_2/M_1$ eine ganze Zahl, so gilt zusätzlich:

e) Aus $f \in \mathfrak{F}$, $U[f] = m$ folgt $f(z) = e^{i\alpha z^m}$, α reell.

f) Aus $f \in \mathfrak{F}$, $U[f] = -m$ folgt $f(z) = e^{i\alpha z^{-m}}$, α reell.

9. Für den Beweis von Satz I' benötigen wir zwei Hilfssätze.

HILFSSATZ 1: Die Funktion $\varphi(s)$, $s = \sigma + i\tau$, sei regulär im Parallelstreifen

$$\mathfrak{S}: -\pi/2 < \tau < \pi/2$$

und bilde \mathfrak{S} in sich ab. Dann gilt:

a) $|\varphi(\sigma)| \leq 1$ für alle reellen σ .

b) Ist für ein reelles σ $|\varphi(\sigma)| = 1$, so ist der zugehörige Funktionswert $\varphi(\sigma)$ reell.

BEWEIS: Es sei σ eine feste reelle Zahl, $-\infty < \sigma < \infty$ und $\varphi(\sigma) = \Sigma + iT$, (Σ , T reell, $-\pi/2 < T < \pi/2$).

Wir setzen

$$(1) \quad \begin{aligned} S_1(s) &= \frac{1+s}{1-s} \\ S_2(s) &= \log s + \sigma \quad (\Re(s) > 0, S_2(1) = \sigma). \\ S_3(s) &= e^{s-\Sigma} \\ S_4(s) &= \frac{s + e^{iT}}{s - e^{-iT}}. \end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Funktion

$$(2) \quad \omega(s) = S_4 S_3 \varphi S_2 S_1(s)$$

bildet offenbar den Einheitskreis $|s| < 1$ in sich ab und läßt den Nullpunkt fest. Daraus folgt bekanntlich

$$(3) \quad |\omega'(0)| \leq 1.$$

Nun schließt man aber aus (1) und (2)

$$(4) \quad \omega'(0) = S'_1(0) \cdot S'_2(1) \cdot \varphi'(\sigma) \cdot S'_3(\Sigma + iT) \cdot S'_4(e^{iT}) = \frac{e^{iT}}{\cos T} \varphi'(\sigma)$$

Aus (3) und (4) ergibt sich jetzt

$$(5) \quad |\varphi'(\sigma)| \leq \cos T \leq 1. \quad \text{q.e.d.}$$

Ist für ein reelles σ $|\varphi'(\sigma)| = 1$, so muß wegen (5) $\cos T = 1$, d.h. $T = 0$ sein. $\varphi(\sigma) = \Sigma + iT$ ist dann reell. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

HILFSSATZ 2: Die Funktion $\varphi(s)$, $s = \sigma + i\tau$, sei regulär im Parallelstreifen

$$\mathfrak{S}: -\pi/2 < \tau < \pi/2$$

und bilde \mathfrak{S} in sich ab. Dann gilt:

a) $|\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)| \leq |\sigma_2 - \sigma_1|$ für alle reellen σ_1, σ_2 .

b) Gibt es ein reelles Wertepaar $\sigma_1 \neq \sigma_2$ derart, daß $|\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)| = |\sigma_2 - \sigma_1|$, so ist entweder $\varphi(s) = s + \gamma$ oder $\varphi(s) = -s + \gamma$, γ reell.

BEWEIS: Es sei

$$(6) \quad -\infty < \sigma_1 < \sigma_2 < \infty$$

Nach Hilfssatz 1 a) ist

$$(7) \quad |\varphi'(\sigma)| \leq 1 \text{ für alle } \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$$

Daraus folgt

$$(8) \quad |\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)| = \left| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \varphi'(\sigma) d\sigma \right| \leq \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |\varphi'(\sigma)| d\sigma \leq \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma = |\sigma_2 - \sigma_1| \quad \text{q.e.d.}$$

Ist für das Wertepaar (6) $|\varphi(\sigma_2) - \varphi(\sigma_1)| = |\sigma_2 - \sigma_1|$, so muß wegen (8)

$$(9) \quad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |\varphi'(\sigma)| d\sigma = |\sigma_2 - \sigma_1|$$

sein. Weil $|\varphi'(\sigma)|$ im abgeschlossenen Intervalle $[\sigma_1, \sigma_2]$ stetig ist, folgt aus (7) und (9)

$$(10) \quad |\varphi'(\sigma)| = 1 \text{ für alle } \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2].$$

Dann ist aber nach Hilfssatz 1 b) $\varphi(\sigma)$ reell im ganzen Intervall $[\sigma_1, \sigma_2]$. Daher ist auch $\varphi'(\sigma)$ reell im Intervall $[\sigma_1, \sigma_2]$. Daraus und aus (10) folgt nun wegen der Stetigkeit von $\varphi'(\sigma)$:

es ist entweder $\varphi'(\sigma) = 1$ für alle $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$

oder $\varphi'(\sigma) = -1$ für alle $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$

Weil aber $\varphi(s)$ eine analytische Funktion ist, schließen wir hieraus sofort, daß entweder $\varphi(s) = s + \gamma$

oder $\varphi(s) = -s + \gamma$, $s \in \mathfrak{S}$.

Da $\varphi(s)$ eine Abbildung von \mathfrak{S} in sich vermittelt, folgt endlich

noch, daß die Konstante γ reell sein muß. Damit ist Hilfssatz 2 vollständig bewiesen.

10. BEWEIS VON SATZ I'.

a): Es sei

$$f_0 \in \mathfrak{F}, \quad f_1 \in \mathfrak{F}, \quad f_0 \sim f_1$$

Dann gibt es eine stetige Abbildung $w = f(z, t)$ von $r_1 \times t$ in r_2 derart, daß $f(z, 0) = f_0(z)$, $f(z, 1) = f_1(z)$ und $f(z, t) \in \mathfrak{F}$ für jedes $t \in t$.

Wir betrachten nun die Funktion

$$u(t) = U[f(z, t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f'_z(z, t)}{f(z, t)} dz.$$

Man überlegt sich leicht, daß $u(t)$ eine im abgeschlossenen Intervall t stetige Funktion ist. $u(t)$ nimmt aber nur ganzzahlige Werte an. Daher muß $u(t)$ konstant sein. Es ist also insbesondere $u(0) = u(1)$ d.h. $U[f_0] = U[f_1]$. q.e.d.

b): Es sei

$$f_0 \in \mathfrak{F}, \quad f_1 \in \mathfrak{F}, \quad U[f_0] = U[f_1] = j$$

Daraus folgt leicht: es existieren zwei in r_1 reguläre und eindeutige Funktionen $\xi_0(z)$ und $\xi_1(z)$ derart, daß

$$(11) \quad \begin{aligned} f_0(z) &= z^j e^{\xi_0(z)} \\ f_1(z) &= z^j e^{\xi_1(z)} \end{aligned}$$

Mit diesen beiden Funktionen bilden wir jetzt die Funktion

$$(12) \quad f(z, t) = z^j e^{t[\xi_1(z) - \xi_0(z)] + \xi_0(z)}, \quad (z, t) \in r_1 \times t$$

Dann gilt offenbar:

α) Für jedes feste $t \in t$ ist $f(z, t)$ eine in r_1 reguläre und eindeutige Funktion von z .

$$\beta) \quad f(z, 0) = f_0(z), \quad f(z, 1) = f_1(z).$$

Wir zeigen noch:

γ) $f(z, t)$ ist eine stetige Abbildung von $r_1 \times t$ in r_2 .

In der Tat: Wir betrachten einen beliebigen Punkt $(z, t) \in r_1 \times t$ und die reelle Funktion

$$(13) \quad \varrho(\tau) = |f(z, \tau)| = |z^j e^{\xi_0(z)}| \cdot e^{\tau \Re[\xi_1(z) - \xi_0(z)]}, \quad \tau \in t$$

Dann ist $\varrho(0) = |f_0(z)|$, $\varrho(1) = |f_1(z)|$ und daher

$$(14) \quad e^{-M_2/2} < \varrho(0) < e^{M_2/2}, \quad e^{-M_2/2} < \varrho(1) < e^{M_2/2}$$

Aus (13) schließt man sofort, daß $\varrho(\tau)$ eine im Intervalle t mono-

tone Funktion ist. Daher liegt $\varrho(t)$ zwischen $\varrho(0)$ und $\varrho(1)$. Daraus und aus (14) folgt aber

$$e^{-M_2/2} < \varrho(t) < e^{M_2/2}, \text{ d.h. } f(z, t) \in r_2.$$

Damit ist gezeigt, daß $f(z, t)$ eine Abbildung von $r_1 \times t$ in r_2 vermittelt; daß diese Abbildung stetig ist, folgt unmittelbar aus (12).

Aus $\alpha), \beta), \gamma)$ schließen wir nun, daß f_0 und f_1 homotop sind. q.e.d.

c): Klar.

d): Es sei

$$(15) \quad f \in \mathfrak{F}, \quad U[f] = j$$

Dann gilt offenbar:

$\alpha)$ die Funktion

$$(16) \quad \varphi(s) = -i \frac{\pi}{M_2} \log f(e^{i \frac{M_1}{\pi} s}), \quad s = \sigma + i\tau$$

ist im Parallelstreifen

$$\mathfrak{S}: \quad -\pi/2 < \tau < \pi/2$$

überall regulär und daher auf Grund des Monodromieprinzipes daselbst auch eindeutig, wenn man noch den „Anfangswert“ $\varphi(0)$, der ja durch (16) nur mod. $2\pi^2/M_2$ bestimmt ist, durch die Forderung $0 \leq \Re[\varphi(0)] < 2\pi^2/M_2$ festlegt.

$\beta)$ $\varphi(s)$ vermittelt eine Abbildung von \mathfrak{S} in sich.

Ferner schließt man leicht aus (15), daß $\varphi(s)$ die Funktionalgleichung

$$(17) \quad \varphi\left(s + \frac{2\pi^2}{M_1}\right) = \varphi(s) + j \frac{2\pi^2}{M_2}$$

erfüllt.

Nach Hilfssatz 2 a) folgt jetzt aus $\alpha)$ und $\beta)$:

$$\left| \varphi\left(\frac{2\pi^2}{M_1}\right) - \varphi(0) \right| \leq \frac{2\pi^2}{M_1}.$$

Hieraus und aus (17) ergibt sich endlich: $|j| \leq M_2/M_1$. q.e.d.

e): Es sei

$$(18) \quad m = M_2/M_1 \text{ ganz, } f \in \mathfrak{F}, \quad U[f] = m$$

Dann gilt wieder

$\alpha)$ Die im Parallelstreifen \mathfrak{S} eindeutig definierte Funktion

$$\varphi(s) = -i \frac{\pi}{M_2} \log f(e^{i \frac{M_1}{\pi} s})$$

$$0 \leq \Re[\varphi(0)] < 2\pi^2/M_2$$

ist regulär in \mathfrak{S} .

β) $\varphi(s)$ bildet \mathfrak{S} in sich ab.

Aus (18) schließt man leicht, daß $\varphi(s)$ die Funktionalgleichung

$$(19) \quad \varphi\left(s + \frac{2\pi^2}{M_1}\right) = \varphi(s) + m \frac{2\pi^2}{M_2} = \varphi(s) + \frac{2\pi^2}{M_1}$$

erfüllt. Es ist also insbesondere

$$\left| \varphi\left(\frac{2\pi^2}{M_1}\right) - \varphi(0) \right| = \frac{2\pi^2}{M_1}.$$

Hieraus und aus α), β) folgt aber nach Hilfssatz 2 b), daß entweder

$$\varphi(s) = s + \gamma$$

oder

$$\varphi(s) = -s + \gamma, \quad \gamma \text{ reell}$$

sein muß. Daraus und aus (19) ergibt sich sofort: $\varphi(s) = s + \gamma$,

$$\text{d.h.} \quad -i \frac{\pi}{M_2} \log f\left(e^{i \frac{M_1 s}{\pi}}\right) = s + \gamma.$$

Berücksichtigen wir noch (18), so kommt

$$f\left(e^{i \frac{M_1 s}{\pi}}\right) = e^{i \frac{M_2}{\pi}(s+\gamma)} = e^{i \frac{m M_1}{\pi}(s+\gamma)} = \left[e^{i \frac{M_1 s}{\pi}} \right]^m \cdot e^{i m M_1 \gamma / \pi}.$$

Kehren wir wieder zur Variablen $z = e^{i \frac{M_1 s}{\pi}} \in \mathfrak{r}_1$ zurück, so haben wir endlich:

$$f(z) = e^{i a z^m}, \quad a = m M_1 \gamma / \pi \text{ reell.} \quad \text{q.e.d.}$$

f) wird ganz analog dem Beweise von e) geführt.

Damit ist alles bewiesen.

(Oblatum 20-6-50).