

COMPOSITIO MATHEMATICA

C. S. MEIJER

Neue Integraldarstellungen für Besselsche Funktionen

Compositio Mathematica, tome 8 (1951), p. 49-60

http://www.numdam.org/item?id=CM_1951__8__49_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Neue Integraldarstellungen für Besselsche Funktionen

von

C. S. Meijer

Groningen

§ 1.

Hauptformeln.

In der vorliegenden Arbeit werde ich für die Funktionen $K_\nu(z)$, $J_\nu(z)$ und $Y_\nu(z)$ einige ziemlich allgemeine Integralformeln ableiten, in denen viele nicht uninteressante Sonderfälle enthalten sind. Während in der Literatur schon sehr viele Integraldarstellungen der Funktionen $K_\nu(z)$ und $J_\nu(z)$ vorkommen, sind bisher verhältnismäßig nur wenig Integraldarstellungen für $Y_\nu(z)$ gefunden worden. Die in der vorliegenden Note benutzte Methode aber liefert zu jeder Formel für $J_\nu(z)$ eine entsprechende für $Y_\nu(z)$.

Die hier erhaltenen Ergebnisse sind sehr nahe verwandt mit denjenigen meiner neuerdings in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit ¹⁾ über Struvesche und Besselsche Funktionen ²⁾; einige jetzt gefundene Beziehungen können als Erweiterungen damals gegebener Relationen aufgefaßt werden ³⁾.

Ehe ich zur Ableitung der Hauptergebnisse übergehe, gebe ich eine Definition.

DEFINITION. Die Funktion

$$T_m(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta) \quad (m = 1, 2, 3, 4)$$

wird definiert durch ⁴⁾

¹⁾ MEIJER, [5].

²⁾ Man vergl. z.B. (35), (36), (37) und (54) der vorliegenden Note mit (75), (76), (77) und (82) der Arbeit [5].

Einige Spezialfälle der Sätze 9 und 10 von [5] sind neuerdings von Herrn КОСН-
ЛИАКОВ, [2], gefunden worden.

³⁾ Man vergl. z.B. (40) der vorliegenden Arbeit mit (83) von [5].

⁴⁾ ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$ bezeichnet die verallgemeinerte hypergeo-
metrische Funktion. Ein leeres Produkt wird gleich 1 gesetzt.

$$(1) \quad T_m(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta) = \sum_{h=1}^m \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^m \Gamma(b_j - b_h)}{\prod_{j=m+1}^4 \Gamma(1 + b_h - b_j)} \zeta^{4b_h} \times \\ \times {}_0F_3(1 + b_h - b_1, \dots, 1 + b_h - b_4; (-1)^m \zeta^4).$$

Hierin wird $\zeta \neq 0$ und

$$(2) \quad b_j - b_h \text{ nicht ganz } (j=1, \dots, m; h=1, \dots, m; j \neq h)$$

vorausgesetzt; der Stern bedeutet, daß die Zahl $1 + b_h - b_h$ im System $1 + b_h - b_1, \dots, 1 + b_h - b_4$ gestrichen werden muß.

In § 2 werde ich einige Spezialfälle von $T_m(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta)$ näher betrachten. Jetzt aber werde ich zeigen, daß die Funktion $K_\nu(z^2)$ die folgende Integraldarstellung besitzt

$$(3) \quad K_\nu(z^2) = \frac{z^{2\alpha+\beta-2} e^{\beta\pi i}}{\pi i} \int_L J_{\alpha-\beta}(u^2) T_4(\alpha, \beta, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2} z u e^{-\frac{1}{4}\pi i}) u^{3-2\alpha-2\beta} du$$

Hierin wird $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und ν nicht ganz vorausgesetzt; α und β sind beliebige Zahlen mit ⁵⁾

$$(4) \quad \alpha - \beta \text{ nicht ganz, } \alpha \pm \frac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz und } \beta \pm \frac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz.}$$

Der Integrationsweg L besteht aus der imaginären Achse von $\infty e^{\frac{1}{2}\pi i}$ bis $\delta e^{\frac{1}{2}\pi i}$ ($\delta > 0$), dem im ersten Quadranten liegenden Viertelkreis mit Mittelpunkt $u = 0$ und Radius δ (von $\delta e^{\frac{1}{2}\pi i}$ bis δ durchlaufen) und der positiven reellen Achse von δ bis ∞ ⁶⁾.

Relation (3) bekommt eine für gewisse Anwendungen bequemere Gestalt, wenn man u durch $ue^{\frac{1}{4}\pi i}$ ersetzt; wegen $J_\lambda(v e^{\frac{1}{2}\pi i}) = e^{\frac{1}{2}\lambda\pi i} I_\lambda(v)$ findet man dann

$$(5) \quad K_\nu(z^2) = \frac{z^{2\alpha+\beta-2} i}{\pi} \int_M I_{\alpha-\beta}(u^2) T_4(\alpha, \beta, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2} z u) u^{3-2\alpha-2\beta} du.$$

Hierin läuft der Integrationsweg M von $\infty e^{\frac{1}{4}\pi i}$ bis $\infty e^{-\frac{1}{4}\pi i}$.

⁵⁾ Die in (3) vorkommende Funktion T_4 hat einen Sinn (man vergl. (2) und (4)).

⁶⁾ Setzt man $u^4 = v$, so durchläuft v die bekannte Schleife $(\infty, 0, \infty)$. Formel (3) würde aber eine für die Anwendungen weniger geeignete Gestalt bekommen, wenn man u durch $v^{\frac{1}{4}}$ ersetzte.

Die entsprechenden Integraldarstellungen für $J_\nu(z^2)$ lauten

$$(6) \quad J_\nu(z^2) = \frac{2^{\alpha+\beta-1} e^{\beta\pi i}}{\pi i} \int_L J_{\alpha-\beta}(u^2) T_3(\alpha, \beta, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}zue^{-\frac{1}{4}\pi i}) u^{3-2\alpha-2\beta} du$$

und

$$(7) \quad J_\nu(z^2) = \frac{2^{\alpha+\beta-1} i}{\pi} \int_M I_{\alpha-\beta}(u^2) T_3(\alpha, \beta, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}zu) u^{3-2\alpha-2\beta} du.$$

In diesen beiden Beziehungen ist $z > 0$; α und β sind beliebig mit

$$\Re(\alpha + \beta) > -\frac{1}{2}, \quad \alpha - \beta \text{ nicht ganz,}$$

$$\alpha - \frac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz und } \beta - \frac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz.}$$

Im Folgenden bezeichnen L und M stets die oben geschilderten Integrationswege.

Beim Beweis von (3) bzw. (6) gehe ich aus von ⁷⁾

$$(8) \quad K_\nu(z^2) = 2^{\alpha+\beta-1} \int_0^\infty J_{\alpha-\beta}(u^2) T_3(\alpha, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu, \beta; \frac{1}{2}zu) u^{3-2\alpha-2\beta} du$$

bzw.

$$(9) \quad J_\nu(z^2) = 2^{\alpha+\beta} \int_0^\infty J_{\alpha-\beta}(u^2) T_2(\alpha, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu, \beta; \frac{1}{2}zu) u^{3-2\alpha-2\beta} du.$$

In (8) ist $z \neq 0$, $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und ν nicht ganz; α und β sind beliebige Zahlen mit

$$\alpha \pm \frac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz,}$$

$$(10) \quad \Re(\beta - \alpha) < 1 \quad \text{und} \quad \Re(\beta \pm \frac{1}{2}\nu) < 1.$$

In (9) ist $z > 0$; α und β sind beliebig mit ⁸⁾

$$(11) \quad \Re(\beta - \alpha) < 1, \quad \Re(\beta - \frac{1}{2}\nu) < 1,$$

$$\Re(\alpha + \beta) > -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \alpha - \frac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz.}$$

Nun folgt aus (1)

$$(12) \quad T_3(\alpha, \lambda, \mu, \beta; \zeta) = \\ = \frac{i}{2\pi} \{ e^{-\beta\pi i} T_4(\alpha, \beta, \lambda, \mu; \zeta e^{\frac{1}{4}\pi i}) - e^{\beta\pi i} T_4(\alpha, \beta, \lambda, \mu; \zeta e^{-\frac{1}{4}\pi i}) \}.$$

⁷⁾ Man vergl. MEIJER, [5], 353, Formeln (22) und (25). In [5] verwende ich eine etwas andere Bezeichnung; die durch (1) definierte Funktion $T_m(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta)$ wird dort mit $S_m(b_1 - \frac{1}{2}, b_2 - \frac{1}{2}, b_3 - \frac{1}{2}, b_4 - \frac{1}{2}; \zeta^2)$ bezeichnet.

⁸⁾ Die Voraussetzungen (10) bzw. (11) sind notwendig für die Konvergenz der Integrale (8) bzw. (9) an der unteren Integrationsgrenze.

Aus (8) ergibt sich somit ⁹⁾

$$\begin{aligned}
 K_\nu(z^2) &= \frac{2^{\alpha+\beta-2}i}{\pi} \int_0^\infty J_{\alpha-\beta}(u^2) \{e^{-\beta\pi i} T_4(\tfrac{1}{2}zue^{\frac{1}{2}\pi i}) - e^{\beta\pi i} T_4(\tfrac{1}{2}zue^{-\frac{1}{2}\pi i})\} u^{3-2\alpha-2\beta} du \\
 &= \frac{2^{\alpha+\beta-2}ie^{\beta\pi i}}{\pi} \int_0^\infty \{iJ_{\alpha-\beta}(u^2e^{\pi i}) \cdot T_4(\tfrac{1}{2}zue^{\frac{1}{2}\pi i}) (ue^{\frac{1}{2}\pi i})^{3-2\alpha-2\beta} \\
 &\quad - J_{\alpha-\beta}(u^2) T_4(\tfrac{1}{2}zue^{-\frac{1}{2}\pi i}) u^{3-2\alpha-2\beta}\} du = \\
 &= \frac{2^{\alpha+\beta-2}e^{\beta\pi i}}{\pi i} \left\{ \int_{\infty e^{\frac{1}{2}\pi i}}^0 + \int_0^\infty \right\} J_{\alpha-\beta}(u^2) T_4(\tfrac{1}{2}zue^{-\frac{1}{2}\pi i}) u^{3-2\alpha-2\beta} du = \\
 &= \frac{2^{\alpha+\beta-2}e^{\beta\pi i}}{\pi i} \int_L J_{\alpha-\beta}(u^2) T_4(\tfrac{1}{2}zue^{-\frac{1}{2}\pi i}) u^{3-2\alpha-2\beta} du.
 \end{aligned}$$

Hiermit ist (3) bewiesen ¹⁰⁾.

Formel (6) folgt auf analoge Weise aus (9) und

$$T_2(\alpha, \lambda, \mu, \beta; \zeta) =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \{e^{-\beta\pi i} T_3(\alpha, \beta, \lambda, \mu; \zeta e^{\frac{1}{2}\pi i}) - e^{\beta\pi i} T_3(\alpha, \beta, \lambda, \mu; \zeta e^{-\frac{1}{2}\pi i})\}.$$

Die Hauptformeln für $Y_\nu(z^2)$ sind etwas komplizierter als diejenige für $K_\nu(z^2)$ und $J_\nu(z^2)$; sie lauten in der für die Anwendungen geeignetsten Gestalt

$$\begin{aligned}
 (13) \quad Y_\nu(z^2) &= -\frac{2^{\alpha+\beta-2}e^{\beta\pi i}}{\pi^2 i} \int_L J_{\alpha-\beta}(u^2) \{e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} T_4(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2}zu) + \\
 &\quad + e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} T_4(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2}zue^{-\frac{1}{2}\pi i})\} u^{3-2\alpha-2\beta} du
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (14) \quad Y_\nu(z^2) &= \frac{2^{\alpha+\beta-2}}{\pi^2 i} \int_M I_{\alpha-\beta}(u^2) \{e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} T_4(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2}zue^{\frac{1}{2}\pi i}) + \\
 &\quad + e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} T_4(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}\nu, -\tfrac{1}{2}\nu; \tfrac{1}{2}zue^{-\frac{1}{2}\pi i})\} u^{3-2\alpha-2\beta} du.
 \end{aligned}$$

In diesen beiden Beziehungen ist $z > 0$ und ν nicht ganzzahlig; α und β sind beliebig mit

⁹⁾ Zur Abkürzung setze ich $T_4(\alpha, \beta, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; \zeta) = T_4(\zeta)$; ferner benutze ich die Beziehung $J_\lambda(we^{\pi i}) = e^{\lambda\pi i} J_\lambda(w)$.

¹⁰⁾ Voraussetzung (10) darf bei (3) fortgelassen werden, da der Punkt $u = 0$ nicht mehr auf dem Integrationswege liegt.

$$\Re(\alpha + \beta) > -\frac{1}{2}, \quad \alpha - \beta \text{ nicht ganz,}$$

$$\alpha \pm \frac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz und } \beta \pm \frac{1}{2}\nu \text{ nicht ganz.}$$

Obige Integraldarstellungen (13) bzw. (14) ergeben sich mit Hilfe von

$$Y_\nu(z^2) = \frac{J_\nu(z^2) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z^2)}{\sin \nu\pi}$$

aus (6) bzw. (7), wobei noch die aus (1) folgende Formel

$$\frac{T_3(\alpha, \beta, \lambda, \mu; \zeta) \cos(\lambda - \mu)\pi - T_3(\alpha, \beta, \mu, \lambda; \zeta)}{\sin(\lambda - \mu)\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \{e^{-\mu\pi i} T_4(\alpha, \beta, \lambda, \mu; \zeta e^{\frac{1}{2}\pi i}) + e^{\mu\pi i} T_4(\alpha, \beta, \lambda, \mu; \zeta e^{-\frac{1}{2}\pi i})\}$$

angewendet werden muß¹¹⁾.

§ 2.

Hilfsformeln.

Die durch (1) definierte Funktion $T_m(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta)$ ist ein Spezialfall der Funktion

$$G_{p, a}^{m, n} \left(\zeta \mid \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_a \end{matrix} \right),$$

die ich in einer vorigen Arbeit¹²⁾ eingeführt habe; es gilt nämlich

$$T_m(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta) = G_{0, 4}^{m, 0}(\zeta^4 \mid b_1, b_2, b_3, b_4).$$

Folglich hat man¹³⁾

$$(15) \quad T_4\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}w\right) = 4\pi K_{2\nu}(2w),$$

$$(16) \quad T_4\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}}w\right) = 8\sqrt{\pi} K_\nu(w e^{\frac{1}{2}\pi i}) K_\nu(w e^{-\frac{1}{2}\pi i})$$

und

$$(17) \quad T_3\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}}w\right) = 4\sqrt{\pi} K_\nu(w) J_\nu(w).$$

¹¹⁾ Die Relationen (13) bzw. (14) können auch aus (3) bzw. (5) abgeleitet werden. (3) und (5) gelten nämlich nicht nur für $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$, sondern auch für $|\arg z| = \frac{1}{2}\pi$, falls α und β nicht nur den Bedingungen (4), sondern überdies noch der Bedingung $\Re(\alpha + \beta) > -\frac{1}{2}$ genügen. Man sieht nun leicht ein, daß (13) mit Hilfe von

$$Y_\nu(z^2) = -\frac{1}{\pi} \{e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} K_\nu(z^2 e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}) + e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} K_\nu(z^2 e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i})\}$$

aus (3) abgeleitet werden kann; ebenso folgt (14) aus (5).

¹²⁾ MEIJER, [4], 11, Formel (6).

¹³⁾ Man vergl. [4], Formeln (41), (42) und (43).

Nun ist ¹⁴⁾

$$(18) \quad K_\nu(we^{-\frac{1}{2}\pi i}) = \frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(w);$$

infolge (16) gilt daher

$$(19) \quad T_4(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}}we^{-\frac{1}{2}\pi i}) = 4\pi i \sqrt{\pi} e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} K_\nu(w) H_\nu^{(1)}(w).$$

Die Funktion $T_4(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta)$ ist wegen (1) eine symmetrische Funktion von b_1, b_2, b_3 und b_4 , die Funktion $T_3(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta)$ eine symmetrische Funktion von b_1, b_2 und b_3 . Überdies folgt aus der Definition von $T_m(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta)$

$$(20) \quad T_m(b_1, b_2, b_3, b_4; \zeta) = \zeta^{-4\lambda} T_m(b_1+\lambda, b_2+\lambda, b_3+\lambda, b_4+\lambda; \zeta).$$

Mit Rücksicht auf (15) hat man also

$$(21) \quad T_4(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}w) = \\ = \frac{2}{w} T_4(\frac{1}{2}\nu + \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4}; \frac{1}{2}w) = \frac{8\pi}{w} K_{2\nu+1}(2w);$$

in ähnlicher Weise erhält man

$$(22) \quad T_4(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}w) = \frac{8\pi}{w} K_{2\nu-1}(2w)$$

und

$$(23) \quad T_4(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}w) = \frac{16\pi}{w^2} K_{2\nu}(2w).$$

Aus (20) und (19) geht hervor

$$(24) \quad T_4(\frac{3}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}}we^{-\frac{1}{2}\pi i}) = \\ = (2^{-\frac{3}{2}}we^{-\frac{1}{2}\pi i})^{2\nu} T_4(\nu, \frac{1}{2}, 0, -\nu; 2^{-\frac{3}{2}}we^{-\frac{1}{2}\pi i}) = \\ = 2^{-3\nu+2} w^{2\nu} e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} \pi i \sqrt{\pi} K_{2\nu}(w) H_{2\nu}^{(1)}(w);$$

ebenso beweist man

$$(25) \quad T_4(\frac{3}{2}\nu - 1, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}}we^{-\frac{1}{2}\pi i}) = \\ = 2^{-3\nu+5} w^{2\nu-2} e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} \pi i \sqrt{\pi} K_{2\nu-1}(w) H_{2\nu-1}^{(1)}(w).$$

Mit Hilfe von (20) und (17) findet man ganz analog

¹⁴⁾ WATSON, [6], 78, Formel (8). $H_\nu^{(1)}(w)$ ist die erste Hankelsche Funktion.

$$(26) \quad T_3\left(\frac{3}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}}w\right) = 2^{-3\nu+2}w^{2\nu}\sqrt{\pi}K_{2\nu}(w)J_{2\nu}(w)$$

und

$$(27) \quad T_3\left(\frac{3}{2}\nu - 1, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}}w\right) = 2^{-3\nu+5}w^{2\nu-2}\sqrt{\pi}K_{2\nu-1}(w)J_{2\nu-1}(w).$$

Aus der Definition der Funktion T_m folgt ¹⁵⁾

$$(28) \quad T_3\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}we^{-\frac{1}{2}\pi i}\right) = \\ = \frac{i}{2\pi} \left\{ e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} T_4\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}w\right) \right. \\ \left. - e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} T_4\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}we^{-\frac{1}{2}\pi i}\right) \right\};$$

wegen (15) und (18) hat man also

$$(29) \quad T_3\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}we^{-\frac{1}{2}\pi i}\right) = \\ = e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} i \left\{ 2K_{2\nu}(2w) - \pi i H_{2\nu}^{(1)}(2w) \right\}.$$

Infolge (15) und (18) gilt auch

$$(30) \quad e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} T_4\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}w\right) + \\ + e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} T_4\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; \frac{1}{2}we^{-\frac{1}{2}\pi i}\right) = \\ = 2\pi e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} \left\{ 2K_{2\nu}(2w) + \pi i H_{2\nu}^{(1)}(2w) \right\}.$$

Aus (16), (18) und ¹⁶⁾

$$(31) \quad K_\nu(we^{\frac{1}{2}\pi i}) = -\frac{1}{2}\pi i e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(w)$$

ergibt sich noch

$$(32) \quad e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} T_4\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}}we^{\frac{1}{2}\pi i}\right) + e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} T_4\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}}we^{-\frac{1}{2}\pi i}\right) : \\ = 8\sqrt{\pi}K_\nu(w) \left\{ e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} K_\nu(we^{\frac{1}{2}\pi i}) + e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} K_\nu(we^{-\frac{1}{2}\pi i}) \right\} = \\ = -4\pi i \sqrt{\pi}K_\nu(w) \left\{ H_\nu^{(2)}(w) - H_\nu^{(1)}(w) \right\} = -8\pi\sqrt{\pi}K_\nu(w)Y_\nu(w).$$

Auf analoge Weise findet man

$$(33) \quad e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} T_4\left(\frac{3}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}}we^{\frac{1}{2}\pi i}\right) + \\ + e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} T_4\left(\frac{3}{2}\nu, \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}}we^{-\frac{1}{2}\pi i}\right) = \\ = -2^{-3\nu+3}w^{2\nu}\sqrt{\pi}K_{2\nu}(w)Y_{2\nu}(w)$$

und

¹⁵⁾ Relation (28) ist ein Spezialfall von (12).

¹⁶⁾ Für (31) vergl. man MEIJER, [3], 242, Formel (6).

$$\begin{aligned}
 (34) \quad & e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} T_4\left(\frac{3}{2}\nu - 1, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}}we^{\frac{1}{2}\pi i}\right) + \\
 & + e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} T_4\left(\frac{3}{2}\nu - 1, \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\nu, -\frac{1}{2}\nu; 2^{-\frac{3}{2}}we^{-\frac{1}{2}\pi i}\right) = \\
 & = -2^{-3\nu+6} w^{2\nu-2} \pi \sqrt{\pi} K_{2\nu-1}(w) Y_{2\nu-1}(w).
 \end{aligned}$$

§ 3.

Spezialfälle der Hauptformeln.

Ich werde jetzt die wichtigsten Sonderfälle der Relationen (3), (5), (6), (7), (13) und (14) mitteilen.

1. Integraldarstellungen für $K_\nu(z^2)$.

Ich betrachte zunächst die vier Spezialfälle mit $\alpha = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$; mit $\alpha = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$; mit $\alpha = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und mit $\alpha = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ von (5). Diese Spezialfälle ergeben, wenn ich (15), (21), (22) und (23) successive benutze,

$$(35) \quad K_\nu(z^2) = 2i \int_M I_\nu(u^2) K_{2\nu}(2zu) u \, du,$$

$$(36) \quad K_\nu(z^2) = \frac{2i}{z} \int_M I_{\nu+1}(u^2) K_{2\nu+1}(2zu) u^2 \, du,$$

$$(37) \quad K_\nu(z^2) = \frac{2i}{z} \int_M I_{\nu-1}(u^2) K_{2\nu-1}(2zu) u^2 \, du$$

und

$$(38) \quad K_\nu(z^2) = \frac{2i}{z^2} \int_M I_\nu(u^2) K_{2\nu}(2zu) u^3 \, du.$$

Die zwei Sonderfälle mit $\alpha = 0$ und $\beta = \frac{1}{2}$ bzw. $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = 0$ von (3) liefern infolge (19)¹⁷⁾ (ich setze $u = 2^{-\frac{1}{2}}v$)

$$(39) \quad K_\nu(z^2) = e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} \int_L \cos\left(\frac{1}{2}v^2\right) K_\nu(zv) H_\nu^{(1)}(zv) v \, dv$$

bzw.

$$(40) \quad K_\nu(z^2) = e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} \int_L \sin\left(\frac{1}{2}v^2\right) K_\nu(zv) H_\nu^{(1)}(zv) v \, dv.$$

¹⁷⁾ $J_{-\frac{1}{2}}(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \zeta$, $J_{\frac{1}{2}}(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \zeta$.

Durch Addition der beiden letzten Relationen erhält man

$$(41) \quad K_\nu(z^2) = \frac{1}{2} e^{(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2})\pi i} \int_L e^{-\frac{1}{2}i\nu^2} K_\nu(zv) H_\nu^{(1)}(zv) v \, dv;$$

die Umkehrformel von (41) für die Laplacesche Transformation kommt bei Hardy¹⁸⁾ vor.

Setzt man $u = 2^{-\frac{1}{2}}v$ mit $\alpha = \frac{3}{2}\nu$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ bzw. $\alpha = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{3}{2}\nu$ in (3), so findet man wegen (24)

$$(42) \quad K_\nu(z^2) = 2^{\nu-1} z^{2\nu} e^{(\nu + \frac{1}{2})\pi i} \sqrt{\pi} \int_L J_{\nu-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}v^2) K_{2\nu}(zv) H_{2\nu}^{(1)}(zv) v^{2-2\nu} dv$$

bzw.

$$(43) \quad K_\nu(z^2) = 2^{\nu-1} z^{2\nu} e^{2\nu\pi i} \sqrt{\pi} \int_L J_{\frac{1}{2}-\nu}(\frac{1}{2}v^2) K_{2\nu}(zv) H_{2\nu}^{(1)}(zv) v^{2-2\nu} dv.$$

Aus (3), mit $u = 2^{-\frac{1}{2}}v$, $\alpha = \frac{3}{2}\nu - 1$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ bzw. $\alpha = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{3}{2}\nu - 1$ angewendet, folgt schließlich mit Rücksicht auf (25)

$$(44) \quad K_\nu(z^2) = 2^{\nu-2} z^{2\nu-2} e^{(\nu-\frac{1}{2})\pi i} \sqrt{\pi} \int_L J_{\nu-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}v^2) K_{2\nu-1}(zv) H_{2\nu-1}^{(1)}(zv) v^{4-2\nu} dv$$

bzw.

$$(45) \quad K_\nu(z^2) = -2^{\nu-2} z^{2\nu-2} e^{2\nu\pi i} \sqrt{\pi} \int_L J_{\frac{1}{2}-\nu}(\frac{1}{2}v^2) K_{2\nu-1}(zv) H_{2\nu-1}^{(1)}(zv) v^{4-2\nu} dv$$

Die Formeln (35), . . . , (45) gelten alle für $|\arg z| < \frac{1}{4}\pi$ und beliebige Werte von ν ¹⁹⁾.

Mit Hilfe von $K_\nu(z^2) = K_{-\nu}(z^2)$ kann man aus den obigen Relationen noch andere Integraldarstellungen für $K_\nu(z^2)$ ableiten.

2. Integraldarstellungen für $J_\nu(z^2)$ und $Y_\nu(z^2)$.

Nimmt man $\alpha = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ in (6) bzw. (13), so erhält man mit Rücksicht auf (29) bzw. (30)

$$(46) \quad J_\nu(z^2) = -\frac{1}{\pi i} \int_L J_\nu(u^2) \{2K_{2\nu}(2zu) - \pi i H_{2\nu}^{(1)}(2zu)\} u \, du$$

¹⁸⁾ HARDY, [1], 188, Formel (2.5).

¹⁹⁾ Die bei (3) und (5) vorkommenden Bedingungen: ν nicht ganz, $\alpha - \beta$ nicht ganz, u.s.w. können in allen obigen Spezialfällen durch Grenzübergang beseitigt werden.

bzw.

$$(47) \quad Y_\nu(z^2) = -\frac{1}{\pi} \int_L J_\nu(u^2) \{2K_{2\nu}(2zu) + \pi i H_{2\nu}^{(1)}(2zu)\} u \, du.$$

Setzt man $\alpha = -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ in (6) und in (13), so findet man wegen (29) und (30)

$$(48) \quad J_\nu(z^2) = -\frac{e^{\nu\pi i}}{\pi i} \int_L J_{-\nu}(u^2) \{2K_{2\nu}(2zu) - \pi i H_{2\nu}^{(1)}(2zu)\} u \, du$$

und

$$(49) \quad Y_\nu(z^2) = -\frac{e^{\nu\pi i}}{\pi} \int_L J_{-\nu}(u^2) \{2K_{2\nu}(2zu) + \pi i H_{2\nu}^{(1)}(2zu)\} u \, du.$$

Die Spezialfälle von (6) und (13) mit $\alpha = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$, mit $\alpha = -\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$, mit $\alpha = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und mit $\alpha = -\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ liefern mit (46), (47), (48) und (49) verwandte Beziehungen, nämlich

$$J_\nu(z^2) = \frac{1}{\pi iz} \int_L J_{\nu+1}(u^2) \{2K_{2\nu+1}(2zu) + \pi i H_{2\nu+1}^{(1)}(2zu)\} u^2 \, du.$$

$$J_\nu(z^2) = -\frac{e^{\nu\pi i}}{\pi iz} \int_L J_{-\nu-1}(u^2) \{2K_{2\nu+1}(2zu) + \pi i H_{2\nu+1}^{(1)}(2zu)\} u^2 \, du,$$

$$J_\nu(z^2) = -\frac{1}{\pi iz} \int_L J_{\nu-1}(u^2) \{2K_{2\nu-1}(2zu) - \pi i H_{2\nu-1}^{(1)}(2zu)\} u^2 \, du,$$

$$J_\nu(z^2) = \frac{e^{\nu\pi i}}{\pi iz} \int_L J_{-\nu+1}(u^2) \{2K_{2\nu-1}(2zu) - \pi i H_{2\nu-1}^{(1)}(2zu)\} u^2 \, du$$

und

$$Y_\nu(z^2) = \frac{1}{\pi z} \int_L J_{\nu+1}(u^2) \{2K_{2\nu+1}(2zu) - \pi i H_{2\nu+1}^{(1)}(2zu)\} u^2 \, du,$$

$$Y_\nu(z^2) = -\frac{e^{\nu\pi i}}{\pi z} \int_L J_{-\nu-1}(u^2) \{2K_{2\nu+1}(2zu) - \pi i H_{2\nu+1}^{(1)}(2zu)\} u^2 \, du,$$

$$Y_\nu(z^2) = -\frac{1}{\pi z} \int_L J_{\nu-1}(u^2) \{2K_{2\nu-1}(2zu) + \pi i H_{2\nu-1}^{(1)}(2zu)\} u^2 \, du,$$

$$Y_\nu(z^2) = \frac{e^{\nu\pi i}}{\pi z} \int_L J_{-\nu+1}(u^2) \{2K_{2\nu-1}(2zu) + \pi i H_{2\nu-1}^{(1)}(2zu)\} u^2 \, du.$$

Obige Integraldarstellungen der Funktionen $J_\nu(z^2)$ und $Y_\nu(z^2)$ gelten alle für $z > 0$ und beliebige Werte von ν .

Setzt man $u = 2^{-\frac{1}{2}}v$ mit $\alpha = 0$ und $\beta = \frac{1}{2}$ bzw. $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = 0$ in (7), so bekommt man mit Rücksicht auf (17) ²⁰⁾

$$(50) \quad J_\nu(z^2) = \frac{2i}{\pi} \int_M^i \cosh\left(\frac{1}{2}v^2\right) K_\nu(zv) J_\nu(zv) v dv$$

bzw.

$$(51) \quad J_\nu(z^2) = \frac{2i}{\pi} \int_M^i \sinh\left(\frac{1}{2}v^2\right) K_\nu(zv) J_\nu(zv) v dv.$$

Die Addition von (50) und (51) ergibt

$$(52) \quad J_\nu(z^2) = \frac{i}{\pi} \int_M^i e^{\frac{1}{2}v^2} K_\nu(zv) J_\nu(zv) v dv;$$

die Umkehrformel von (52) für die Laplacesche Transformation ist schon von Hardy ²¹⁾ gegeben worden.

Die vier Spezialfälle mit $\alpha = \frac{3}{2}\nu$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$, mit $\alpha = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{3}{2}\nu$, mit $\alpha = \frac{3}{2}\nu - 1$ und $\beta = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ und mit $\alpha = \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{3}{2}\nu - 1$ von (7) liefern wegen (26) und (27) (ich setze wieder $u = 2^{-\frac{1}{2}}v$)

$$(53) \quad J_\nu(z^2) = \frac{2^\nu z^{2\nu} i}{\sqrt{\pi}} \int_M^i I_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}v^2\right) K_{2\nu}(zv) J_{2\nu}(zv) v^{2-2\nu} dv,$$

$$(54) \quad J_\nu(z^2) = \frac{2^\nu z^{2\nu} i}{\sqrt{\pi}} \int_M^i I_{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{1}{2}v^2\right) K_{2\nu}(zv) J_{2\nu}(zv) v^{2-2\nu} dv,$$

$$(55) \quad J_\nu(z^2) = \frac{2^{\nu-1} z^{2\nu-2} i}{\sqrt{\pi}} \int_M^i I_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}v^2\right) K_{2\nu-1}(zv) J_{2\nu-1}(zv) v^{4-2\nu} dv$$

und

$$(56) \quad J_\nu(z^2) = \frac{2^{\nu-1} z^{2\nu-2} i}{\sqrt{\pi}} \int_M^i I_{\frac{1}{2}-\nu}\left(\frac{1}{2}v^2\right) K_{2\nu-1}(zv) J_{2\nu-1}(zv) v^{4-2\nu} dv.$$

Die Beziehungen (50), (51) und (52) gelten für $z > 0$ und beliebige Werte von ν . In (53) und (54) ist $z > 0$ und $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$; in (55) und (56) ist $z > 0$ und $\Re(\nu) > \frac{1}{2}$.

²⁰⁾ $I_{-\frac{1}{2}}(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \cosh \zeta$, $I_{\frac{1}{2}}(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \sinh \zeta$.

²¹⁾ HARDY, [1], 188, Formel (2.6).

Man bekommt die (50), (51), (52), (53), (54), (55) und (56) entsprechenden Integraldarstellungen für $Y_\nu(z^2)$, wenn man auf den linken Seiten der Beziehungen (50), . . . , (56) immer $J_\nu(z^2)$ durch $Y_\nu(z^2)$, auf den rechten Seiten aber $J_\nu(zv)$ bzw. $J_{2\nu}(zv)$ oder $J_{2\nu-1}(zv)$ durch $Y_\nu(zv)$ bzw. $Y_{2\nu}(zv)$ oder $Y_{2\nu-1}(zv)$ ersetzt; die (53) entsprechende Relation lautet z.B.

$$(57) \quad Y_\nu(z^2) = \frac{2^\nu z^{2\nu} i}{\sqrt{\pi}} \int_M I_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}v^2\right) K_{2\nu}(zv) Y_{2\nu}(zv) v^{2-2\nu} dv.$$

Die hier betrachteten Integraldarstellungen der Funktion $Y_\nu(z^2)$ können leicht mit Hilfe von (32), (33) und (34) aus (14) abgeleitet werden; Formel (57) folgt z.B. aus (14) und (33).

LITERATURVERZEICHNIS.

G. H. HARDY.

[1] Some further applications of Mellin's inversion formula [Messenger of Math. 56 (1927), 186—192].

N. S. KOSHLIAKOV.

[2] Note on certain integrals involving Bessel functions [Bull. Acad. sciences U. R. S. S. (série Math.) 4 (1938), 417—425].

C. S. MEIJER.

[3] Einige Integraldarstellungen für Produkte von Whittakerschen Funktionen [Quarterly Journ. of Math. (Oxford) 6 (1935), 241—248].

[4] Über Whittakersche bzw. Besselsche Funktionen und deren Produkte [Nieuw Archief Wiskunde (2) 18 (4e stuk, 1936), 10—39].

[5] Integraldarstellungen für Struvesche und Besselsche Funktionen [Compositio Mathematica 6 (1939), 348—367].

G. N. WATSON.

[6] A treatise on the theory of Bessel functions (1922).

(Eingegangen den 28. Oktober 1939).