Compositio Mathematica

Rudolf J. Hoesli

Spezielle Flächen mit Flachpunkten und ihre lokale Verbiegbarkeit

Compositio Mathematica, tome 8 (1951), p. 113-141

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1951__8__113_0>

Spezielle Flächen mit Flachpunkten und ihre lokale Verbiegbarkeit

von

Rudolf J. Hoesli

Zürich

Einleitung

Problemstellung und Resultate

1. Wir betrachten in einer (u, v)-Ebene eine beliebige, 2-dimensionale Riemannsche Metrik M:

$$(1) \qquad (ds)^2 = E(u,v)(du)^2 + 2F(u,v)du dv + G(u,v)(dv)^2$$

M sei in einem Gebiet Γ regulär; O sei ein beliebiger Punkt $\epsilon\ \Gamma$, den wir als Nullpunkt ($u = 0$, $v = 0$) wählen wollen. Ferner bezeichne Φ eine mindestens 2-mal stetig differenzierbare Abbildung einer in Γ enthaltenen Umgebung U von O in den Euklidischen Raum R^3 hinein:

$$(2) \qquad \Phi\colon\ \mathfrak{x}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

Genügt Φ in U der Identität

$$(ds)^2 \equiv (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \text{ d.h.}$$

den drei Identitäten

$$(3) \quad E \equiv x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,\ \ F \equiv x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,\ \ G \equiv x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

so nennen wir das Bild $\mathfrak{f} = \Phi(U)$ von U im R^3 eine *Realisation* [1]) *der Metrik M in der Umgebung U des Punktes O.* $\mathfrak{f}$ stellt im R^3 eine *Fläche* (ein Flächenstück) dar. Je zwei solche Realisationen $\mathfrak{f}_1 = \Phi_1(U_1)$ und $\mathfrak{f}_2 = \Phi_2(U_2)$ sind isometrisch. Die Isometrie ist definiert im Durchschnitt $U = U_1 \cap U_2$ der Umgebungen U_1 und U_2. Die bei der Isometrie sich entsprechenden Punkte besitzen dieselben Parameterwerte (u, v). Alle Realisationen $\mathfrak{f} = \Phi(U(O))$ von M bilden eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ isometrischer Flächen.

2. Was läßt sich über eine solche Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ im allgemeinen aussagen? Auf diese Frage gibt es *nicht* einmal unter der

[1]) *Realisation im Kleinen:* Alle unsere Betrachtungen beziehen sich auf eine beliebig kleine Umgebung eines regulären Punktes O.

Voraussetzung einer analytischen Metrik und unter gleichzeitiger Beschränkung auf analytische Realisationen [2]) in allen Fällen *eine voll befriedigende Antwort.* Alle uns bekannten Arbeiten zu diesem Thema sind bloß Beiträge zum allgemeinen Problem. Einen solchen Beitrag stellt auch unsere Arbeit dar. Wir geben *Beispiele von Flächen,* die wir für besonders *interessante Spezialfälle* halten.

Wir beschränken uns im Folgenden überall auf analytische Metriken und Realisationen, d.h. wir setzen in (1) E, F, G, sowie in (2) x, y, z als in Γ analytische Funktionen der Variablen (u, v) voraus.

3. An die Spitze unserer Betrachtungen stellen wir die folgende, fundamentale Tatsache:

Jede Metrik M besitzt in einer Umgebung U eines Punktes O ihres Regularitätsbereiches $\cdot\,\Gamma$ stets Realisationen.[3])

Der übliche Existenzbeweis ergibt sogar, dass *stets unendlich-viele inkongruente Realisationen* existieren.[4])

4. Es liege nun irgendeine Realisation $\mathfrak{f} = \Phi(U(O)) \in \mathfrak{M}$ von M vor. Wählen wir den Punkt $P = \Phi(O)$ als Nullpunkt eines orthogonalen Cartesischen Koordinatensystems $\Sigma(x, y, z)$, die Tangentialebene $\tau(P; \mathfrak{f})$ von $\mathfrak{f}$ in P als (x, y)-Ebene, dann lautet die Parameterdarstellung von $\mathfrak{f} \in \mathfrak{M}$.

$$(4)\begin{cases} a \\ b \quad \mathfrak{x}(u, v) = \\ c \end{cases} \begin{cases} x = a^{(1)}(u, v) + a^{(2)}(u. v) + \dots \\ y = b^{(1)}(u, v) + b^{(2)}(u, v) + \dots \\ z = f^{(n)}(u, v) + f^{(n+1)}(u, v) + \dots; \; n \geqq 2 \end{cases} \quad \left.\frac{\partial(a^{(1)}, b^{(1)})}{\partial(u, v)}\right|_{u=v=0} \neq 0$$

$a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $f^{(i)}$ sind dabei homogene Formen i-ten Grades. Berechnen wir die zu (4a) und (4b) inversen Funktionen $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ [5]) und setzen wir diese in (4c) ein, so ergibt sich:

---

[2]) Vgl. G. Lütkemeyer: Über den analytischen Charakter der Integrale von partiellen Differentialgleichungen, Diss., Göttingen 1902. Lütkemeyer beweist: Alle Flächen konst. pos. Gaussischer Krümmung sind notwendig analytisch. Andererseits gibt er eine Methode zur Aufstellung von nichtanalytischen pseudosphärischen Flächen und damit ein allerdings sehr spezielles Beispiel einer analytischen Metrik mit nichtanalytischen Realisationen. Triviale Beispiele: Nichtanalytische Torsen.

[3]) Ein entsprechender Satz gilt bekanntlich für eine n-dimensionale Metrik $M^n (n \geqq 3)$ *nicht.* Eine M^n lässt sich in der Umgebung eines regulären Punktes im Euklidischen R^{n+1} im allg. nicht realisieren als Hyperfläche. Vgl. dazu: L. Schläfli, Annali di Matem. 2e série, t. 5 1871—1873, p. 178—193.

[4]) Vgl. G. Darboux, Théorie générale des surfaces, t. III; ferner: H. Schilt, Über die isolierten Nullstellen der Flächenkrümmung und einige Verbiegbarkeitssätze, Comp. Math. 5 (1937), S. 239—283. Zitiert wird diese Arbeit als *Schilt.*

[5]) Dies ist dank der Regularität von M in $u = v = 0$ möglich.

(5) $\quad z = \varphi^{(n)}(x, y) + \varphi^{(n+1)}(x, y) + \ldots; \ \varphi^{(n)}(x, y) \not\equiv 0$

$\varphi^{(i)}(x, y)$ sind dabei Formen i-ten Grades. Die Gleichung (5) nennen wir (eine) *kanonische Gleichung der Fläche* $\mathfrak{f}$ *im Punkte* P, $\Sigma(x, y, z)$ ein *kanonisches Koordinatensystem für* $\mathfrak{f}$ *in* P.

Der um 1 verminderte Anfangsgrad $p = n - 1$ in (5) heißt *Berührungsordnung von* $\mathfrak{f}$ *im Punkte* P. Es gilt: p ist dann und nur dann $= 1$, falls nicht alle drei 2-ten Fundamentalgrössen L, M, N von $\mathfrak{f}$ in P verschwinden. Wenn $p = 1$, nennen wir $\mathfrak{f}$ eine *Nichtflachpunktrealisation*, wenn $p > 1$, eine *Flachpunktrealisation.*

Es wird sich zeigen, dass die Flachpunktrealisationen $\mathfrak{f} \in \mathfrak{M}$ eine Sonderstellung einnehmen.[6])

5. Die in **1** definierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ zerfällt nach **4** in die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1$ der Nichtflachpunktrealisationen und in diejenige $\mathfrak{M}_2$ der Flachpunktrealisationen. Der in **3** genannte Existenzbeweis besagt genau, dass $\mathfrak{M}_1$ *nie leer* ist. Gilt das gleiche auch für $\mathfrak{M}_2$? Diese Frage ist zu verneinen. $\mathfrak{M}_2$ ist *im allgemeinen leer*, denn eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Flachpunktrealisation stellt das Verschwinden der Gaussischen Krümmung der Metrik M im Punkte O dar. Was lässt sich über $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ weiteres aussagen? Unterscheiden sich ihre Elemente bloß durch die Berührungsordnung? Die letztere Frage wird mit Hilfe des Begriffes der *stetigen Verbiegung* beantwortet.

6. Es liege eine von einem Parameter t abhängige Schar isometrischer Realisationen $\{\mathfrak{f}_t\} \in \mathfrak{M}$ vor, die nicht alle durch (eigentliche oder uneigentliche) Bewegung auseinander hervorgehen. Ist $\mathfrak{x}(u, v; t)$ von $\mathfrak{f}_t$, sowie $\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial u^\alpha \, \partial v^\beta} \mathfrak{x}(u, v; t)$, $\alpha + \beta \leqq N$ (nat. Zahl $\geqq 2$), für eine Umgebung U von O (oder bloß für O)[7]) in einem t-Intervall stetig in t, so heißt $\{\mathfrak{f}_t\}$ eine *stetige Schar isometrischer Flächen* (*stetige Verbiegung*).

Def.: Zwei eigentlich inkongruente Realisationen $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ isometrischer Flächen nennen wir *ineinander verbiegbar*, wenn sie einer stetigen Schar $\{\mathfrak{f}_t\} \subset \mathfrak{M}$ angehören.

---

[6]) Die Theorie der Nichtflachpunktrealisationen ist von H. Schilt in einem gewissen Sinne zu einem Abschluß gebracht worden. Vgl. Satz von Levi-Schilt, Einl. 6.

[7]) Vgl. H. Hopf und H. Schilt: Über Isometrie und stetige Verbiegung von Flächen, Math. Ann. 116 (1938), S. 58—75. Zitiert wird diese Arbeit als Hopf-Schilt. Vgl. S. 71, 19.

Def.: Ein $\mathfrak{f} \in \mathfrak{M}$ nennen wir *verbiegbar*, wenn $\mathfrak{f}$ einer stetigen Schar $\{\mathfrak{f}_t\} \subset \mathfrak{M}$ angehört.

Def.: Ein $\mathfrak{f} \in \mathfrak{M}$ nennen wir *unverbiegbar*, wenn $\mathfrak{f}$ keiner stetigen Schar $\{\mathfrak{f}_t\} \subset \mathfrak{M}$ angehört.

Diese Definitionen bekommen erst dann einen bestimmten Sinn, wenn wir N festlegen. Der Wert einer Aussage über Verbiegbarkeit, bzw. Unverbiegbarkeit hängt offenbar von der Wahl von N ab.

Es liegt nahe, die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ auf die folgende Weise in Klassen einzuteilen:

Def.: Zwei Flächen von $\mathfrak{M}$ gehören zur selben Verbiegungsklasse, falls sie sich *entweder*: durch (eigentl. oder uneigentl.) Bewegung, *oder*: durch stetige Verbiegung und eventuelle nachfolgende Spiegelung ineinander überführen lassen.

Je nach der Wahl von N erhält man gröbere oder feinere Klassifikationen. Allgemein ist dieses Klassifikationsproblem noch nicht gelöst. Man besitzt allerdings gewichtige Anhaltspunkte.

Aufschlußreich ist insbesonders der *von H. Schilt verallgemeinerte Satz von E. E. Levi*: [8])

Sind $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ zwei inkongruente Nichtflachpunktrealisationen einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, so läßt sich $\mathfrak{f}_1$ entweder in $\mathfrak{f}_2$ oder in das Spiegelbild von $\mathfrak{f}_2$ verbiegen (Spiegelbild bezüglich $\tau(O; \mathfrak{f}_2)$) $(N = \infty)$.

$\mathfrak{M}_1$ *liegt also ganz in einer Verbiegungsklasse* $\mathfrak{V}_1$: $\mathfrak{M}_1 \subseteqq \mathfrak{V}_1$.

Falls $\mathfrak{M}_2$ leer, d.h. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$ (dies ist der Fall, wenn in O die Gaussische Krümmung $\neq 0$), besteht $\mathfrak{M}$ genau aus einer Verbiegungsklasse: $\mathfrak{M} = \mathfrak{V}_1$. Weiter ist bekannt, daß $\mathfrak{M}_1$ stets unendlichviele paarweise inkongruente Flächen enthält, demnach *jede Nichtflachpunktrealisation im Kleinen verbiegbar* $(N = \infty)$ ist.[9])

Hier drängen sich sogleich die Fragen auf: Lassen sich auch zwei inkongruente Flachpunktrealisationen stets ineinander verbiegen? Kann auch eine Flachpunktrealisation stets in eine Nichtflachpunktrealisation verbogen werden? Ist auch eine Flachpunktrealisation stets im Kleinen verbiegbar?

Die erste Frage ist ungeklärt, die beiden letzteren müssen verneint werden. *H. Schilt* zeigte erstmals, dass es Flachpunktrealisationen gibt, die nicht in eine Nichtflachpunktrealisation verbogen $(N = 2)$ werden können.[10]) Er rechtfertigte damit auch für den R^3 die

---

[8]) Vgl. Schilt, S. 272, Satz XVI; ferner E. E. Levi: Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili, Atti Accad. Torino 43 (1907—1908), S. 292.

[9]) Vgl. Schilt, S. 273, Satz XVIa.

[10]) Vgl. Schilt, S. 270, Satz XIV.

begriffliche *Unterscheidung von Isometrie und Verbiegung*, die A. Voss in der Enzyklopädie geprägt hat.[11])

Weiter stellten *H. Hopf und H. Schilt* fest, auf Grund eines noch zu nennenden Kriteriums, dass eine Flachpunktrealisation nur *ausnahmsweise* der Verbiegungsklasse $\mathfrak{B}_1$ der Nichtflachpunktrealisationen angehört $\left(N = \frac{\varkappa + 4}{2}\right)$.[12]) Andererseits gaben sie Beispiele spezieller Regelflächen (die keine Torsen sind) mit Flachpunkten, die durch stetige Verbiegung in Nichtflachpunkte abgeändert werden können ($N = \infty$). *Diese Beispiele werden wir im § 6 verallgemeinern.*

Das vorhin erwähnte Kriterium von H. Hopf und H. Schilt wurde von *N. Efimoff* sukzessiv verschärft, worauf es ihm schließlich gelang, für die Flächen der Berührungsordnung $p = 8$ eine Eigenschaft nachzuweisen, wie sie im allgemeinen den Hyperflächen in höherdimensionalen Räumen zukommt, nämlich die Eigenschaft der Unverbiegbarkeit.[13]) Der diesbezügliche Satz von N. Efimoff lautet:

Fast alle Flächen der Berührungsordnung $p = 8$ sind im Kleinen unverbiegbar ($N = 9$).[14])

7. Dem existenziellen Gehalt dieses Satzes kommt prinzipielle Bedeutung zu, denn man hatte vordem nur in höherdimensionalen Räumen $R^d (d \geqq 4)$ unverbiegbare Flächen gekannt.[15])

Im Zentrum der vorliegenden Arbeit steht eine Kategorie $\mathfrak{F}$ *spezieller, unverbiegbarer Flächen.* Bei der Aufstellung dieser Kategorie $\mathfrak{F}$ beschreiten wir einen analogen Weg wie N. Efimoff, gelangen aber ohne höhere Hilfsmittel [16]) erheblich rascher zum Ziel. Zudem ist unser Blickpunkt ein anderer: Uns interessiert hier vor allem die *Stellung der Flächen* $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$ *innerhalb der zugehörigen Mannigfaltigkeit* $\mathfrak{M}(\mathfrak{f})$. Die Eigenschaft der Unverbiegbarkeit ist nur ein zusätzliches Merkmal der Flächen $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$.

Entscheidendes Gewicht besitzt folgende interessante Tatsache:

---

[11]) Vgl. Enzykl. Math. Wiss. III D 6a, S. 362—363.

[12]) Vgl. Hopf-Schilt, S. 68 und 73—74.

[13]) Vgl. N. Efimoff, Recherches sur les déformations d'une surface ayant un point d'aplatissement, Recueil Math. Tome 19 (61) Nr. 3, S. 461—488 Moskau 1946. Zitiert wird diese Arbeit als *Efimoff*.

[14]) Vgl. Einl. 4, Gl. (5) für $p = n - 1 = 8$.

[15]) Vgl. Satz von Beez: Die Hyperflächen im R^n, $n \geqq 4$, sind im allg. im Kleinen unverbiegbar. — Beez glaubte mit dem Beweis dieses Satzes die n-dimensionale Geometrie ad absurdum geführt zu haben.

[16]) Vgl. Anhang § 8, Hilfssatz A von N. Efimoff.

Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_2(\mathfrak{f})$ *zu jeder Fläche* $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$ *besteht bloß aus den zu* $\mathfrak{f}$ *kongruenten Flächen* (*Satz* 2). Der *Zusatz*, daß $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$ im Kleinen unverbiegbar ist, besagt: $\mathfrak{M}_2(\mathfrak{f})$ *stellt gleichzeitig eine Verbiegungsklasse* $\mathfrak{V}$ *dar. Der Satz* 2, *vereinigt mit diesem Zusatz*, darf in gewissen Sinne als eine *Verschärfung des* obigen *Efimoffschen Satzes* betrachtet werden (*Satz* 3).

8. Der näheren Analyse unserer eigenen Beiträge zum skizzierten Problemkreis schicken wir einige Definitionen und Hilfssätze voraus.

Def.: Zwei Flächen $\mathfrak{f}_1 = \Phi_1(U(O))$, $\mathfrak{f}_2 = \Phi_2(U(O))$ einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ befinden sich in Bezug auf O zueinander *in kanonischer Lage*, wenn folgende Bedingungen *a*, *b*, *c* gleichzeitig erfüllt sind:

a. $\Phi_1(O) = \Phi_2(O) = P$

b. $\tau(P; \mathfrak{f}_1) = \tau(P; \mathfrak{f}_2) = \tau$ (Vgl. 4)

c. Die bei der Isometrie sich entsprechenden Linienelemente durch P in τ fallen zusammen.

Wir gehen wieder aus von einer Fläche $\mathfrak{f} = \Phi(U(O))$ einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$. Durch eigentliche Euklidische Bewegung bringen wir *jede weitere* Realisation $\mathfrak{f}^* = \Phi^*(U(O)) \neq \mathfrak{f}$ in Bezug auf O zu $\mathfrak{f}$ in kanonische Lage und erhalten so eine Teilmenge $\mathfrak{K}(\mathfrak{f}) \subset \mathfrak{M}$ von Realisationen, die wir die zu $\mathfrak{f}$ gehörige *kanonische Mannigfaltigkeit* nennen. Weil $\mathfrak{K}(\mathfrak{f}^*)$ offenbar durch Bewegung aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{f})$ hervorgeht, wollen wir uns bei den folgenden Betrachtungen immer auf eine bestimmte kanonische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ beschränken.

Die Fläche $\mathfrak{f} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{f})$ besitze die kanonische Gleichung (5). Dann lautet die Formel für die Gaussische Krümmung von $\mathfrak{f}$ im kanonischen Koordinatensystem bekanntlich:

$$K(x, y) = (1 + z_x^2 + z_y^2)^{-2} \,.\, \mathrm{H}\, z \quad \text{[17]}, \tag{6}$$

ihre Taylorschen Entwicklung für $x = y = 0$:

$$K(x, y) = K^{(\varkappa)}(x, y) + K^{(\varkappa+1)}(x, y) + \ldots; \quad 0 \leqq \varkappa < \infty \text{ [18]} \tag{7}$$

$$K^{(i)}(x, y) \text{ homogene Form } i\text{-ten Grades}$$

Den Grad $\varkappa$ der Anfangsform $K^{(\varkappa)}$ nennen wir *Krümmungsgrad des Punktes* $P(x = 0,\ y = 0,\ z = 0)$.

Wir wählen jetzt für *alle* $\mathfrak{f} \in \mathfrak{K}$ *dasselbe* kanonische Koordinatensystem $\Sigma\,(x, y, z)$. Für Σ sind die Formen $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ in der Parameterdarstellung (4) jeder Fläche $\mathfrak{f} \in \mathfrak{K}$ *dieselben* dank der Bed. *c*

---

[17]) H bedeutet immer den Hesseschen Operator $\mathrm{H} f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$.

[18]) TORSEN, d.h. Flächen mit Euklidischer Metrik werden ausgeschlossen.

obiger Definition. Es gelten die leicht zu beweisenden Hilfssätze:

Hilfssatz 1: *Alle Flächen $\mathfrak{f} \in \mathfrak{K}$ haben für ein gemeinsames kanonisches Koordinatensystem Σ diesselbe Anfangsform $K^{(\varkappa)}(x, y)$ in der Taylorschen Entwicklung ihrer Gaussischen Krümmungen.*[19])

Der Hilfssatz 1 ergibt sich sofort aus dem Theorema egregium dank der kanonischen Lage der Flächen $\mathfrak{f} \in \mathfrak{K}$.

Wir ziehen daraus die beiden Korollare:

Korollar 1: *Der Krümmungsgrad $\varkappa$ ist eine isometrische Invariante.*

Wir nennen deshalb $\varkappa$ auch Krümmungsgrad des Punktes $O(u = 0,\ v = 0)$.

Korollar 2: *Für die Berührungsordnung aller $\mathfrak{f} = \Phi(U(O))$ in O gilt:*

$$1 \leqq p \leqq 1 + \frac{\varkappa}{2}$$

Für die Existenz von Flachpunktrealisationen in $\mathfrak{K}$ ist offenbar in O ein Krümmungsgrad $\varkappa > 1$ notwendig. Im Folgenden wird $\varkappa$ immer als gerade Zahl $\geqq 2$ vorausgesetzt.

Hilfssatz 2: *Ist in* (7) *die Anfangsform $K^{(\varkappa)}(x, y)$ definit, so existieren in $\mathfrak{K}$ höchstens Flachpunktrealisationen, für welche*

$$p = n - 1 = 1 + \frac{\varkappa}{2}.$$

Die Anfangsform $\varphi^{(n)}(x, y)$ in der Gleichung (5) *jeder dieser Flachpunktrealisationen $\mathfrak{f} \in \mathfrak{K}$ genügt der Gleichung*

$$(H) \qquad \mathrm{H}\varphi^{(n)}(x, y) = K^{(\varkappa)}(x, y), \quad \varkappa = 2n - 4$$ [20])

Diese Gleichung (H) spielt im Folgenden eine entscheidende Rolle.

Wir untersuchten die Lösbarkeit von (H) und machten dabei folgende Feststellungen:

9. Es gibt Formen $K^{(\varkappa)}$, für welche (H) *keine* (reellen) Lösungen $\varphi^{(n)}$ besitzt. Wir werden in § 1.C erkennen, dass es sogar *definite* $K^{(\varkappa)}$ mit dieser Eigenschaft gibt. Diese Tatsache führt auf Grund von Hilfssatz 2 zu unserem Satz 1:

Satz 1: *Es gibt Metriken, welche in der Umgebung eines Punktes selbst dann keine Flachpunktrealisation gestatten, wenn dessen Krümmungsgrad beliebig groß ist.*

Was uns zur Formulierung von Satz 1 bewog, ist die bekannte Tatsache, dass für $\varkappa = \infty$ Flachpunktrealisationen beliebiger

---

[19]) Vgl. Hopf-Schilt, S. 70. Für den Beweis von Hilfssatz 1 nimmt man für $\mathfrak{f} \in \mathfrak{K}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit zweckmäßig an: $a^{(1)} = u$, $b^{(1)} = v$.

[20]) Vgl. Schilt, S. 281, Satz XVIII.

Berührungsordnung existieren (d.h. für $K \equiv 0$: Euklidische Metrik; Realisationen = Torsen).

10. Weiter gibt es Formen $K^{(\varkappa)}$, für welche (H) *genau ein* (reelles) Lösungspaar $\pm\, \varphi^{(n)}$ besitzt. Diese Tatsache ist für das folgende entscheidend:

Ist die Anfangsform $\varphi^{(n)}$ in der Gleichung (5) einer Fläche $\mathfrak{f}$ Lösung einer Gleichung (H), die nur das eine Lösungspaar $\pm\, \varphi^{(n)}(x, y)$ besitzt, so haben nach Hilfssatz 2 alle isometrischen Flachpunktrealisationen $\epsilon\, \mathfrak{K}(\mathfrak{f})$ der gleichen Berührungsordnung $p = n - 1$ „dieselbe" Anfangsform $\pm\, \varphi^{(n)}(x, y)$. Stellt $\varphi^{(n)}(x, y)$ überdies eine sog. E-Form (Vgl. § 3 Def. D) dar, dann ergibt sich nach einem Satz von N. Efimoff (Vgl. **11**, sowie § 4), dass in $\mathfrak{K}(\mathfrak{f})$ nur zwei (spiegelbildliche) Flachpunktrealisationen $\{\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{f}}\}$ der Berührungsordnung $p = n = 1$ vorhanden sind [21]).

Wir haben hierzu folgende Beispiele aufgestellt:

$$\mathfrak{f}:\quad z = c\,.\,x^{n-i}y^{i} + \text{höhere Glieder};\ c\,.\,x^{n-i}y^{i} = E\text{-Form},\quad i \neq \frac{n}{2}$$

Für diese Beispiele gelingt leider mit den uns bekannten Mitteln wegen der Indefinitheit des jeweiligen $K^{(\varkappa)}$ kein Entscheid über die Frage, *ob noch weitere Flachpunktrealisationen kleinerer Berührungsordnung existieren oder nicht.*

Es ist uns aber geglückt, eine Kategorie $\mathfrak{F}$ von Flachpunktrealisationen aufzustellen, für welche *erstens* die zugehörige Gleichung (H) *genau ein Lösungspaar von E-Formen* besitzt, und für welche *zweitens* $K^{(\varkappa)}(x, y)$ *definit* ist (Vgl. § 1. C, § 3. D). Auf die Existenz der Kategorie $\mathfrak{F}$ gründet sich unser Satz 2:

Satz 2: *Es gibt Metriken, welche in der Umgebung eines Punktes genau eine (bis auf Bewegungen eindeutig bestimmte) Flachpunktrealisation gestatten.*

Dem allgemeinen Repräsentanten $\mathfrak{f} \epsilon \mathfrak{F}$ kommt folgende kanonische Gleichung (5) zu

$$\mathfrak{f} \epsilon \mathfrak{F}:\ z = [q(x, y)]^{5} + \varphi^{(11)}(x, y) + \varphi^{(12)}(x, y) + \ldots$$
$$q(x, y) = \text{quadratische definite Form}$$

Das einfachste Beispiel $\epsilon\, \mathfrak{F}$ ist: $z = (x^2 + y^2)^5$.

Eine einfache Überlegung im § 5 ergibt, dass *die Flächen* $\mathfrak{f} \epsilon \mathfrak{F}$ in der Umgebung von $P(x = 0,\ y = 0)$ *im Kleinen unverbiegbar* sind.[22])

---

[21]) Der in Einl. **10** von uns entwickelte Sachverhalt kommt in der zitierten Arbeit von Efimoff nicht zur Sprache.

[22]) Wir fordern für $\mathfrak{f}_t$ bloß: $\mathfrak{x}(0, 0; t)$, sowie $\mathfrak{x}_{u^\alpha v^\beta}(0, 0; t)$, $\alpha + \beta \leqq 10$ stetig in t.

Die Berücksichtigung dieses Zusatzes führt von Satz 2 zum *Hauptsatz unserer Arbeit* (*Satz* 3):

Satz 3: *Es gibt Metriken, welche in der Umgebung eines Punktes genau eine* (*bis auf Bewegungen eindeutig bestimmte*) *und zwar eine unverbiegbare Flachpunktrealisation gestatten.*

Dieses Resultat geht insofern über den in **6** zitierten Satz von N. Efimoff hinaus, als daraus hervorgeht, dass eine Flachpunktrealisation $\mathfrak{f}$ *nicht nur* eine ganze Verbiegungsklasse $\mathfrak{V}$ ausmachen kann, *sondern darüber hinaus* zusammen mit ihren Spiegelbild die ganze Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}_2(\mathfrak{f}) = \mathfrak{K}(\mathfrak{f}) \cap \mathfrak{M}_2(\mathfrak{f})$ der zu $\mathfrak{f}$ isometrischen Flachpunktrealisationen.

Wir halten es durchaus für möglich (dies ist allerdings nur *eine Vermutung*), dass die Teilmannigfaltigkeit $\mathfrak{K}_2$ einer kanonischen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ überhaupt „*im allgemeinen*" *entweder leer* ist, *oder* aus einem *spiegelbildlichen Paar unverbiegbarer Flächen* besteht.[23])

11. Bei der Ableitung unseres Satzes 2 werden wir einen Satz von N. Efimoff benutzen, den wir wie folgt aussprechen können:

Haben die kanonischen Gleichungen (5) und (5*) zweier Flächen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}^*$ derselben kanonischen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ in einem gemeinsamen kanonischen Koordinatensystems $\Sigma(x, y, z)$ dieselbe Anfangsform $\varphi^{(n)}(x, y)$, so gilt $\mathfrak{f} \equiv \mathfrak{f}^*$, falls $\varphi^{(n)}(x, y)$ eine E-Form ist.[24])

Unser Beweis dieses Satzes in § 4 ist nicht prinzipiell neu, aber formal viel einfacher, als der Beweis von N. Efimoff.

Daß unsere Flächen $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$ im Kleinen unverbiegbar sind, zeigen wir unter Benutzung des Korollars 3 aus dem Hilfssatz 3:

Hilfssatz 3: *Ist die Berührungsordnung* $p = n - 1$ *einer Fläche* $\mathfrak{f}$ *mit der Gleichung* (5) *kleiner als* $1 + \frac{\varkappa}{2}$, *d.h. ist in* (5) $\varphi^{(n)} = \pm (\alpha x + \beta y)^n$, *dann teilt* $\varphi^{(n)}$ *alle* $\varphi^{(m)}$ *in* (5) *für* $n \leqq m < \varkappa + 4 - n$.[25])

Korollar 3: *Wenn* $p < 1 + \frac{\varkappa}{2}$, *ist* $\varphi^{(m)}$ *für* $n \leqq m < \varkappa + 4 - n$ *indefinit.*

---

[23]) D.h. daß *für* $\mathfrak{K}_2$ *allein* sozusagen der „Satz von Beez" Gültigkeit besäße! Gilt vielleicht: Eine Fläche $z = \varphi^{(p+1)}(x_1, x_2, \ldots, x_d) + \cdots$ im R^d ist im allg. in der Umg. von $x_1 = x_2 = \ldots = x_d = 0$ unverbiegbar, falls $(p \neq 1,\ d \neq 3)$? Vgl. in diesem Zusammenhang auch Satz H im § 8.

[24]) Vgl. Efimoff, S. 479, § 7, Theorem 3 für den Fall, dass $f^{(n)} = E$-Form.

[25]) Vgl. Hopf—Schilt, S. 68, **14**.

Damit gewinnen wir auf kurzen Weg den existenziellen Gehalt des in **6** zitierten Satzes von Efimoff:

Es gibt im Euklidischen R^3 im Kleinen unverbiegbare Flächen.

Die Unverbiegbarkeit der Flächen $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$ hätte auch aus dem schon erwähnten *Stabilitätskriterium von H. Hopf und H. Schilt* gefolgert werden können:

Die Berührungsordnung $p = n - 1$ einer Fläche $\mathfrak{f}$ mit der Gleichung (5) kann durch stetige Verbiegung $\mathfrak{f}_t$ nicht abgeändert werden, wenn $\mathrm{H}\varphi^{(n)}$ keine mehrfachen reellen Nullgeraden besitzt.[26])

Für die Flächen $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$ ist nämlich $\mathrm{H}\varphi^{(n)}$ definit.

12. Unsere bereits in **6** erwähnten Beispiele stellen *ausgesprochene Gegenstücke zu den unverbiegbaren Flächen* dar. Es handelt sich dabei um spezielle Regelflächen mit sogenannten *vollkommen labilen Punkten,* d.h. mit Punkten, in denen die Berührungsordnung $p = n - 1$ durch stetige Verbiegung in jede, nach Korollar 2, **8**, überhaupt mögliche Berührungsordnung abgeändert werden kann (Vgl. Satz 4, § 6).

13. Im Anhang entwickeln wir einige Zusätze zu der zitierten Arbeit von N. Efimoff. Wir beweisen in § 7 einen *neuen Satz H,* den wir für das eigentliche Kernstück der Efimoffschen Verschärfung des Hopf-Schiltschen Stabilitätskriteriums halten:

Satz H: *Die Gleichung (H) besitzt bei vorgegebenem $K^{(\varkappa)}(x, y)$ „fast immer" nur endlich viele Lösungen $\varphi^{(n)}(x, y)$.*

Beim Beweise dieses Satzes werden wir allerdings gerade das nichtelementare Lemma benutzen, welches Efimoff die genannte Verschärfung vor allem ermöglicht.

§ 8 handelt vom Begriff der E-Form. Wir geben ein Beispiel einer E-Form 15-ten Grades.

§ 1. Die Lösungen der Gleichung (H) in einem Spezialfall.

A. Die zu der Form (1)

$$f^{(n)}(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x^{n-i} y^i \tag{1}$$

gehörende *Hessesche Form* (2) laute:

$$\mathrm{H}f^{(n)} = f^{(n)}_{xx} f^{(n)}_{yy} - (f^{(n)}_{xy})^2 = [n(n-1)]^2 \cdot \sum_{k=0}^{2n-4} A_k x^{2n-4-k} y^k. \tag{2}$$

---

[26]) Vgl. Hopf-Schilt, S. 63, 6., Satz I. Wegen den Stetigkeitsvoraussetzungen vgl. Fußnote 22); man setze dort: $\alpha + \beta \leq \frac{\varkappa + 4}{2}$.

Durch Koeffizientenvergleich erhält man nach geeigneter Umformung:

$$(3_k) \qquad A_k = \sum_{\substack{\varrho+\sigma=k+1\\ \varrho<\sigma}} C_{\varrho\sigma} p_{\varrho\sigma};\ 0 \leqq k \leqq 2n-4,$$

$$p_{\varrho\sigma} = \text{Determinante} \begin{vmatrix} a_\varrho & a_\sigma \\ a_{\varrho+1} & a_{\sigma+1} \end{vmatrix},\ C_{\varrho\sigma} = \binom{n-2}{\varrho}\binom{n-2}{\sigma-1} - \binom{n-2}{\varrho-1}\binom{n-2}{\sigma} \neq 0$$

B. Setzen wir speziell voraus:

$$(4) \qquad A_k = 0 \text{ für } k \neq n-2;\ A_{n-2} \text{ beliebig } \neq 0$$

In diesem Fall hat die Gleichung (2) die folgende einfache Gestalt (2*):

$$(2^*) \qquad \mathrm{H} f^{(n)} = [n(n-1)]^2 \cdot A_{n-2} x^{n-2} y^{n-2}$$

Wir zeigen, daß (2*) genau die nachstehenden und keine anderen Lösungen $f^{(n)}$ besitzt:

für beliebiges n: $f^{(n)}(x, y) = a_0 x^n + a_n y^n$; $a_0 \cdot a_n = A_{n-2}$
für gerades $n = 2\nu$ *zusätzlich* das isolierte Lösungspaar:

$$f^{(n)}(x, y) = \pm \binom{n}{\nu} a_\nu x^\nu y^\nu;\ a_\nu = \sqrt{-C_{\nu-1,\nu}^{-1} \cdot A_{n-2}}$$

a. Nehmen wir zunächst an, es liege eine Lösung (1) mit $a_0 \neq 0$ vor:

Dann ergeben die Gleichungen (3_k), $0 \leqq k \leqq n-2$, der Reihe nach:

$$(5) \qquad p_{\varrho\sigma} = 0 \text{ [27] für } \varrho + \sigma \leqq n-1,\ \sigma \neq n-1, \text{ und}$$

$$(6) \qquad A_{n-2} = C_{0,\,n-1} \cdot p_{0,\,n-1} \neq 0$$

Es muß auch $a_n \neq 0$ sein, denn für $a_0 = 0$ folgt aus $\{(3_{2n-4})$ $p_{n-2\ n-1} = 0\}$: $a_{n-1} = 0$, sodaß nach (6): $A_{n-2} = 0$ wäre, entgegen (4).

Aus Symmetriegründen ist auch die Kombination ($a_n \neq 0$, $a_0 = 0$) unmöglich. Wenn aber $a_n \neq 0$ ist, ergibt sich symmetrisch zu (5):

$$(7) \qquad p_{\varrho\sigma} = 0 \text{ für } \varrho + \sigma \geqq n-1,\ \varrho \neq 0$$

Es muß weiter $a_1 = 0$ sein, denn für $a_1 \neq 0$ folgt aus $\{(5)\ p_{01} = 0\}$ und $\{(7)\ p_{1,\,n-1} = 0\}$: $p_{0,\,n-1} = 0$, sodaß nach (6): $A_{n-2} = 0$ wäre, entgegen (4).

---

[27]) Gl. (3_0), bzw. $p_{01} = 0$ und Gl. (3_1), bzw. $p_{02} = 0$ ergeben zusammen: $p_{12} = 0$. Dann ergibt sich weiter aus Gl. (3_2): $p_{03} = 0$, u.s.w. *Aus* $p_{0\alpha} = 0$ *und* $p_{0\beta} = 0$ *folgt jeweils:* $p_{\alpha\beta} = 0$, *weil* $a_0 \neq 0$. Man fertige sich ein Schema der Gleichungen (3_k) an!!

Ist aber $a_1 = 0$, so ergibt $\{(5)\ p_{0\sigma} = 0,\ 1 \leqq \sigma \leqq n-2\}$ der Reihe nach:

$$(8) \qquad a_i = 0 \text{ für } 2 \leqq i \leqq n-1$$

Wir fassen (8) und (6) zusammen zu (I):

$$(\mathrm{I}) \qquad A_{n-2} = C_{0,\,n-1} \cdot a_0 a_n,\ a_i = 0 \text{ für } 1 \leqq i \leqq n-1$$

(I) besagt, daß für beliebiges n eine einparametrige Schar von Lösungen vom Typus $f = a_0 x^n + a_n y^n$, aber keine weitere Lösung mit $a_0 \neq 0$ oder $a_n \neq 0$ existiert.

b. Es sei nun sowohl $a_0 = 0$, als auch $a_n = 0$.

ba. n sei eine gerade Zahl $= 2\nu$

$\{(3_0)\ p_{01} = 0\}$ ergibt $a_1 = 0$. Dann folgt aus (3_2): $p_{12} = 0$. Daraus ergibt sich weiter: $a_2 = 0$, u.s.w.; schließlich folgt aus (3_{n-4}): $p_{\nu-1,\,\nu-2} = 0$, woraus sich $a_{\nu-1} = 0$ ergibt. Symmetrisch dazu folgt: $a_{n-1} = 0$, a_{n-2}, u.s.w., $a_{\nu+1} = 0$. Wir erhalten also:

$$(\mathrm{II}) \qquad A_{n-2} = -\, C_{\nu-1,\,\nu} \cdot a_\nu^2,\ a_i = 0 \text{ für } i \neq \nu$$

(II) besagt, daß für gerades n zusätzlich ein Paar isolierter Lösungen existiert, nämlich:

$$f^{(n)} = \pm \binom{n}{\nu} a_\nu x^\nu y^\nu, \quad a_\nu = \sqrt{-\, C_{\nu-1,\,\nu}^{-1} \cdot A_{n-2}}.$$

bb. n sei eine ungerade Zahl $= 2\mu + 1$.

Analog wie unter **ba** folgt zuerst: $a_i = 0$ für $1 \leqq i \leqq \mu$.
Weiter ergibt sich wie unter **ba**: $a_i = 0$ für $n-1 \geqq i \geqq \mu + 1$
Es wäre somit: $a_i = 0$ für $0 \leqq i \leqq n$, was (4) widerspricht.
Für ungerades n gibt es also lediglich die Lösungen (I).

C. *Die reellen Lösungen der Gleichung*

$$\mathrm{H}\varphi^{(n)} = 4[n(n-1)]^2 A (x^2 + y^2)^{n-2},\ A > 0.$$

Durch die lineare Transformation: $\xi = x + iy$, $\eta = x - iy$ [28]), deren Determinante $\Delta = -2i \neq 0$ ist, wird die Auflösung von **C** auf den soeben behandelten Fall **B** zurückgeführt, denn es gilt:

---

[28]) Ist $A < 0$, so folgt auf dieselbe Weise ein Satz von H. Schilt (Vgl. Schilt, S. 276, Nr. 35): $\mathrm{H}\varphi^{(n)}$ ist *d.* und nur *d.* $\equiv 4[n(n-1)]^2 \cdot A \cdot (x^2 + y^2)^{n-2}$ mit $A < 0$, wenn $\varphi^{(n)}$ harmonisch ist.

N.B. Die Anfangsform der kanonischen Gl. einer Minimalfl. ist in jedem (Flach) Punkt harmonisch (Vgl. G. Darboux, l.c. tome I).

$$\Delta^2 . \overline{\mathrm{H}} f^{(n)}(\xi, \eta) = 4[n(n-1)]^2 A(\xi\eta)^{n-2}, \text{ worin}$$

$$\overline{\mathrm{H}} f = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2, \quad f^{(n)}(\xi, \eta) = \varphi^{(n)}(x, y);$$

oder: $$\overline{\mathrm{H}} f^{(n)}(\xi, \eta) = [n(n-1)]^2(-A)(\xi\eta)^{n-2}$$

Diese letztere Gleichung haben wir aber unter **B** schon gelöst. Nach (I) erhalten wir für beliebiges n die Lösungen: $f^{(n)}(\xi, \eta) = \tilde{a}_0 \xi^n + \tilde{a}_n \eta^n$, $\tilde{a}_0 \tilde{a}_n = -A$.[29]) Macht man die Transformation rückgängig, so erkennt man, daß diese Lösungen sämtlich komplex sind:

$$\varphi^{(n)}(x, y) = f^{(n)}(\xi, \eta) = (\tilde{a}_0 + \tilde{a}_n) x^n + n(\tilde{a}_0 - \tilde{a}_n) i x^{n-1} y + \ldots$$

Damit $\varphi^{(n)}(x, y)$ reell ausfiele, müßten $\alpha = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_n$ und $\beta = (\tilde{a}_0 - \tilde{a}_n) i$ reell sein. Da aber $\alpha^2 + \beta^2 = -4A < 0$ ist, können α und β nur komplex sein.

Für gerades n dagegen sind die beiden Lösungen (II) reell:

$$\varphi^{(n)}(x, y) = f^{(n)}(\xi, \eta) = \binom{n}{\nu} \tilde{a}_\nu \xi^\nu \eta^\nu = \binom{n}{\nu} \tilde{a}^\nu (x^2 + y^2)^\nu$$

Zusammenfassend können wir also feststellen:

Die Gleichung $\mathrm{H}\varphi^{(n)}(x, y) = 4[n(n-1)]^2 A(x^2 + y^2)^{n-2}$, *wobei* $A > 0$, *hat für ungerades n keine reelle Lösung, für gerades n genau ein und nur ein reelles Lösungspaar, nämlich* $\varphi^{(n)}(x, y) = \pm c(x^2 + y^2)^\nu$, $c = 2\sqrt{(n-1)A}$.

§ 2. Metriken ohne Flachpunktrealisationen.

Die Gleichung (6), Einl. **8**, stellt für die Funktion $z(x, y)$ in (5), Einl. **4**, eine partielle Differentialgleichung 2-ter Ordnung dar, die wir folgendermaßen schreiben können:

$$r = \frac{s^2 + (1 + p^2 + q^2)^2 . K(x, y)}{t} \tag{1}$$

Die rechte Seite von (1) ist analytisch in der Umgebung jedes Sextupels ($x = 0$, $y = 0$, p bel., q bel., s bel., $t \neq 0$). Nach dem allgemeinen Existenzsatz über partielle Differentialgleichungen 2-ter Ordnung [30]) besitzt (1) bei vorgegebenem $K(x, y)$ Lösungen

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} z = z(x, y), \text{ für welche in } x = y = 0: \\ z = z_x = z_y = 0 \text{ und eine zweite Ableitung, hier } z_{yy} \neq 0 \end{cases}$$

[29]) $C_{0, n-1} = 1$.

[30]) Vgl. E. Goursat: Cours d'analyse mathématique, tome III, S. 47, Cinquième édition, Paris 1942.

Eine solche Lösung (2) können wir als kanonische Gleichung einer Nichtflachpunktrealisation $\mathfrak{f}$ auffassen, deren Gaussische Krümmung im kanonischen Koordinatensystem $\Sigma(x, y, z)$ duch $K(x, y)$ gegeben ist. Wenn die Anfangsform $K^{(\varkappa)}(x, y)$ von $K(x, y)$ definit ist, dann genügen nach Hilfssatz 2, Einl. **8**, die Anfangsformen $\varphi^{(n)}(x, y)$ aller Flachpunktrealisationen der zu $\mathfrak{f}$ gehörigen kanonischen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}(\mathfrak{f})$ der Gleichung (H):

$$(3) \qquad \mathrm{H}\varphi^{(n)} = K^{(\varkappa)} = K^{(2n-4)}$$

Falls (3) keine reelle Lösung $\varphi^{(n)}$ hat, besteht $\mathfrak{K}(\mathfrak{f})$ aus lauter Nichtflachpunktrealisationen. Wählen wir für die Anfangsform $\mathbf{K}^{(\varkappa)}$ von $K(x, y)$ die folgende Form (4):

$$(4) \qquad \begin{aligned} K^{(2n-4)} &= [q(x, y)]^{n-2};\ n = 2\mu + 1 \geqq 3, \\ q(x, y) &= \text{positiv definite quadratische Form} \end{aligned}$$

so liegt nach § 1.C ein solcher Fall vor.[31]) n kann dabei beliebig groß sein. Wir fassen dieses Beispiel in einen Satz:

Satz 1: *Es gibt Metriken, welche in der Umgebung eines Punktes selbst dann keine Flachpunktrealisation gestatten, wenn dessen Krümmungsgrad beliebig groß ist.*[32])

Dem Satz I steht, wie schon in der Einl. **9** bemerkt, die Tatsache gegenüber, daß für $\varkappa = \infty$ (d.h. für $K(x, y) \equiv 0$; Euklidische Metrik, Realisationen=Torsen) Flachpunktrealisationen beliebiger (beliebig großer) Berührungsordnung existieren.

Explizite Beispiele zu Satz 1 kann man auf folgende Weise bilden: Man nehme eine Fläche mit der Gleichung

$$z = \tfrac{1}{2} \cdot x^2 + F(x, y); \quad F(x, y) = f^{(4)}(x, y) + \text{höhere Glieder}$$

und wähle $F(x, y)$ so, dass $K^{(\varkappa)}$ definit ausfällt und ferner die Gleichung (H) keine reelle Lösung $\varphi^{(n)}(x, y)$ besitzt:

$$(H) \qquad \mathrm{H}\varphi^{(n)} = K^{(\varkappa)} = \text{Anfangsglied von } F_{yy}$$

---

[31]) Weitere definite Formen $K^{(\varkappa)}$, für welche die Gl. (H) keine reelle Lösung besitzt:

a $K^{(2n-4)} = (q_1)^{n-3} \cdot q_2$; $n > 4$, q_i quadr. def. Formen, $q_1 \neq q_2$

b $K^{(2n-4)}$ pos. def., n ungerade (!) (Bsp. von Hrn. Prof. Hopf).

Bemerkung von Hrn. Prof. Hopf: Daß solche Formen existieren, sieht man allgemein ein, wenn man die Zuordnung: $\varphi^{(n)} \to \mathrm{H}\,\varphi^{(n)}$ als Abbildung der Koeffizienten-$(n + 1)$-Tupel a_i von $\varphi^{(n)}$ auf die Koeffizienten-$(2n - 3)$-Tupel A_k von $K^{(2n-4)}$ interpretiert ($n \geqq 5$).

[32]) Vgl. dazu Einl. 5.

§ 3. Definition und Beispiel einer E-Form.

A. Beim Beweise des Satzes von Efimoff im § 4 erscheint folgender Typus einer Beziehung zwischen zwei homogenen Formen $f^{(n)}$ und $g^{(m)}$:

$$(1) \qquad H(f^{(n)}, g^{(m)}) \equiv f_{xx}^{(n)} g_{yy}^{(m)} - 2 f_{xy}^{(n)} g_{xy}^{(m)} + f_{yy}^{(n)} g_{xx}^{(m)} = 0$$ [33])

$f^{(n)}$ sei dabei eine Form n-ten Grades:

$$(2) \qquad f^{(n)}(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x^{n-1} y^i.$$

$g^{(m)}$ eine solche m-ten Grades:

$$(3) \qquad g^{(m)}(x, y) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} b_k x^{m-k} y^k$$

Def. D: Eine vorgegebene Form $f^{(n)}(x, y)$ nennen wir eine E-(fimoffsche) Form, wenn die Gleichung (1) für jedes $m > n$ nur die triviale Lösung $g^{(m)} \equiv 0$ besitzt. [34])

Die Eigenschaft einer Form $f^{(n)}$, eine E-Form zu sein, ist invariant gegenüber regulären linearen Transformationen der Variablen (x, y).

Setzen wir die rechten Seiten von (2) und (3) in (1) ein, so erhalten wir bei vorgegebenen Koeffizienten a_i von $f^{(n)}$ für die Koeffizienten b_k von $g^{(m)}$ das folgende lineare, homogene Gleichungssystem:

$$(4_m) \qquad \sum_{\substack{i+k=l \\ 0 \leq i \leq n,\ 0 \leq k \leq m}} Z_{i,k}^{(n,m)} \cdot a_i b_k = 0; \quad 2 \leqq l \leqq n + m - 2,$$

$$Z_{i,k}^{(n,m)} = \binom{n}{i}\binom{m}{k} [(n-i)(n-i-1)k(k-1) - 2i(n-i)k(m-k) + i(i-1)(m-k)(m-k-1)]$$

Hat (1) bei vorgegebenem $f^{(n)}$ nur die triviale Lösung $g^{(m)} \equiv 0$, so besitzt auch das zugehörige Gleichungssystem (4_m) nur die triviale Lösung und umgekehrt. Nach Def. D gilt somit folgendes *Kriterium K:*

$f^{(n)}$ ist dann und nur dann eine E-Form, wenn für jedes $m > n$ das zugehörige Gleichungssystem (4_m) einzig die triviale Lösung besitzt.

---

[33]) Die linke Seite von (1) wollen wir eine Hessesche Polarform nennen.

[34]) Vgl. Efimoff S. 478 § 6, $f^{(n)}$ Form mit der Invarianten $N = \infty$: E-Form.

B. Es sei speziell:

(5) $f^{(n)}(x, y) = C \,.\, x^{n-i} y^i; \; C \neq 0, \; 2 \leqq i \leqq n - 2$

Dann lautet das zugehörige Gleichungssystem (4_m):

(6) $Z_{i,k}^{(n,m)} \,.\, C \,.\, b_k = 0 \qquad 0 \leqq k \leqq m$

Aus dem Kriterium K ergibt sich in diesem Fall das folgende *Kriterium* K^*:

$C \,.\, x^{n-i} y^i$ $(2 \leqq i \leqq n - 2)$ *ist dann und nur dann eine E-Form, wenn für alle* $m > n$: $Z_{i,k}^{(n,m)} \neq 0$, $0 \leqq k \leqq m$, *gilt.*

C. *Behauptung*: $f^{(10)}(x, y) = C \,.\, x^5 y^5$ *ist eine E-Form.*[35])

Beweis: Nach Kriterium K^* haben wir zu beweisen, dass $Z_{5,k}^{(10,m)} \neq 0$ für $m > 10$. Dazu bestimmen wir sämtliche Zahlenpaare $(k, m) [m \geqq 0, \; 0 \leqq k \leqq m]$, für welche $Z_{5,k}^{(10,m)} = 0$:

(7) $$Z_{5,k}^{(10,m)} = \binom{10}{5} \binom{m}{k} [5 \,.\, 4 \,.\, k(k-1) - 2 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, k(m-k) + \\ + 5 \,.\, 4 \,.\, (m-k)(m-k-1)] = 0$$

Substituieren wir in (7): $k = X - 2$, $m - k = Y - 2$, so folgt nach Umformung:

(8) $$(2X - Y) \,.\, (2Y - X) = 2^2$$

Setzen wir weiter in (8): $2X - Y = t_1$, $2Y - X = t_2$, wobei t_1 bzw. t_2 alle ganzzahligen Teiler von 2^2 durchlaufen soll. Die $t_1 < 0$ müßen wir ausschließen, weil sonst wegen $t_1 \,.\, t_2 = 2^2$: $t_2 < 0$ und damit $X < 0$ folgen würde, was wegen $X = k + 2 > 0$ nicht angeht. Es gibt also nur die drei Möglichkeiten: $t_1 = 1, 2, 4$. Berechnen wir dazu die entsprechenden Werte für t_2, X, Y, k, $m - k$, m, so erhalten wir folgende Werte, die wir in einer Tabelle zusammenstellen:

t_1	t_2	X	Y	k	$m-k$	m
1	4	2	3	0	1	1
2	2	2	2	0	0	0
4	1	3	2	1	0	1

Laut dieser Tabelle verschwindet $Z_{5,k}^{(10,m)}$ nur für $m = 0$ und

[35]) $x^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}}$ $(n \geqq 4)$ ist im allgemeinen keine E-Form. Weitere E-Formen dieses Typus neben $x^5 y^5$: $x^{13} y^{13}$, $x^{25} y^{25}$!

$m = 1$, also für kein $m > 10$, womit unsere Behauptung nach Kriterium K^* bewiesen ist.[36])

D. Dank der Tatsache, daß eine E-Form durch lineare Transformation der Variablen wieder in eine E-Form übergeht, ergibt sich aus **C** unmittelbar, dass auch $[q(x, y)]^5$ eine E-Form ist, wenn $q(x, y)$ eine nicht ausgeartete quadratische Form darstellt. Dieses Beispiel bildet einen wesentlichen Bestandteil unserer Ableitungen im § 5, weil die zugehörige Gleichung (H): $\mathrm{H}\varphi^{(10)} = \mathrm{H}[q(x, y)]^5$ nach § 1.C nur das reelle Lösungspaar $\varphi^{(10)}(x, y) = \pm[q(x, y)]^5$ besitzt, falls $q(x, y)$ definit ist. (Vgl. Einl. **10**)

§ 4. Ein Satz von N. Efimoff.

$\mathfrak{f} = \Phi(U(O))$ und $\mathfrak{f}^* = \Phi^*(U(O))$ seien zwei isometrische Flächen derselben kanonischen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ des Punktes O $(u = 0, v = 0)$ einer Parameterebene (u, v) (Vgl. Einl. **1, 4, 8**). $\mathfrak{f}$ komme die Parameterdarstellung (4), Einl. **4**, zu, $\mathfrak{f}^*$ eine entsprechende (4*) mit Sternindizierung. Die bei der Isometrie sich entsprechenden Punkte haben dieselben Parameterwerte (u, v).

Wir setzen *erstens* voraus, die Anfangsform *jeder* der drei Komponenten von (4) stimme mit der entsprechenden von (4*) überein:[37])

$$\begin{cases} x = a^{(1)}(u, v) + a^{(2)}(u, v) & + \dots \\ y = b^{(1)}(u, v) + b^{(2)}(u, v) & + \dots \\ z = f^{(n)}(u, v) + f^{(n+1)}(u, v) + \dots \end{cases} \quad \begin{cases} x = a^{(1)}(u, v) + a^{*(2)}(u, v) & + \dots \\ y = b^{(1)}(u, v) + b^{*(2)}(u, v) & + \dots \\ z = f^{(n)}(u, v) + f^{*(n+1)}(u, v) + \dots \end{cases}$$

Zweitens sei die gemeinsame Anfangsform $f^{(n)}(u, v)$ *der* z-*Komponenten eine E-Form.* $(n \geqq 4)$

Unter den genannten beiden Voraussetzungen gilt der *Satz von Efimoff*:

Behauptung: $a^{(k)} \equiv a^{*(k)}$, $b^{(k)} \equiv b^{*(k)}$; $f^{(k)} \equiv f^{*(k)}$ für alle k, d.h. die Flächen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}^*$ fallen zusammen: $\mathfrak{f} \equiv \mathfrak{f}^*$.

Beweis: Zum Beweis des vorstehenden Satzes bedürfen wir der Taylorschen Entwicklungen der *gemeinsamen* ersten Fundamentalgrössen $E = g_{11}(u, v)$, $F = g_{12}(u, v)$, $G = g_{22}(u, v)$:

$$g_{ij}(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{ij}^{(k)}(u, v), \quad g_{ij}^{(k)} = \text{Form } k\text{-ten Grades}$$

---

36) Vgl. EFIMOFF § 8: Dort wird analog bewiesen, dass x^3y^6 eine E-Form darstellt. Wir stellten fest, daß für $n < 9$ keine Form $C \cdot x^{n-i}y^i$ existiert, die eine E-Form wäre $(2 \leqq i \leqq n-2)$. Wenn eine solche Form eine E-Form darstellen soll, so muß notwendig $(n-i)i(n-1)$ eine Quadratzahl sein. Diese Bedingung ist nachprüfbar für $n < 9$ *nie* erfüllt.

37) Vgl. Einl. **4, 8**.

$$g_{ij}^{(k)} = \sum_{\substack{\varrho=1\\ \sigma+\varrho=k+2}}^{k+1} [a_{u_i}^{(\varrho)} \cdot a_{u_j}^{(\sigma)} + b_{u_i}^{(\varrho)} \cdot b_{u_j}^{(\sigma)} + f_{u_i}^{(\varrho)} \cdot f_{u_j}^{(\sigma)}]; \quad u_1 = u,\ u_2 = v.$$

Eine analoge Gleichung besteht für $g_{ij}^{(k)}$ in den Sterngrößen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, für die Flächen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}^*$ sei:

$$a^{(1)} \equiv a^{*(1)} = u, \quad b^{(1)} \equiv b^{*(1)} = v \text{ [38]}$$

Wir führen den Beweis mittels folgender Induktion in Bezug auf L:

Vor. $f^{(n+k)} \equiv f^{*(n+k)}$ für $0 \leqq k \leqq L$; Verankerung: $f^{(n)} \equiv f^{*(n)}$

Beh. A. $a^{(p)} \equiv a^{*(p)}$, $b^{(p)} \equiv b^{*(p)}$ für $1 \leqq p \leqq 2n+L-1$ $(> n+L+1)$

Beh. B. $f^{(n+L+1)} \equiv f^{*(n+L+1)}$

Beweis der Beh. A.: Wir führen eine sekundäre Induktion durch: Induktionsvor.: $a^{(p)} \equiv a^{*(p)}$, $b^{(p)} \equiv b^{*(p)}$ für $p \leqq k < 2n+L-1$

Verankerung: Da $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}^*$ demselben $\mathfrak{K}$ angehören, gilt:

$$a^{(1)} = a^{*(1)}, \ b^{(1)} = b^{*(1)} \quad \text{(Vgl. Einl. 8)}$$

Behauptung: $a^{(k+1)} \equiv a^{*(k+1)}$, $b^{(k+1)} \equiv b^{*(k+1)}$

Beweis: Auf Grund der Induktionsvoraussetzung folgt

aus $E^{(k)} \equiv E^{*(k)}$: (1) $a_u^{(k+1)} \equiv a_u^{*(k+1)}$;

aus $G^{(k)} \equiv G^{*(k)}$: (2) $b_v^{(k+1)} \equiv b_v^{*(k+1)}$;

aus $F^{(k)} \equiv F^{*(k)}$: (3) $a_v^{(k+1)} + b_u^{(k+1)} \equiv a_v^{*(k+1)} + b_u^{*(k+1)}$

Die Integration von (1) und (2) ergibt:

$$(\breve{1}) \quad a^{(k+1)} + c \cdot v^{k+1} \equiv a^{*(k+1)}$$

$$(\breve{2}) \quad b^{(k+1)} + d \cdot u^{k+1} \equiv b^{*(k+1)}$$

Setzen wir $(\breve{1})$ und $(\breve{2})$ in (3) ein, so bekommen wir $c \cdot v^k + d \cdot u^k \equiv 0$, d.h. $c = d = 0$, womit die Beh. A. durch $(\breve{1})$ und $(\breve{2})$ bewiesen ist.[39]

Beweis der Beh. B: Auf Grund der bewiesenen Beh. A folgt

aus $E^{(2n+L-1)} \equiv E^{*(2n+L-1)}$:

$$(4) \qquad a_u^{(2n+L)} + f_u^{(n)} \cdot f_u^{(n+L+1)} \equiv a_u^{*(2n+L)} + f_u^{(n)} \cdot f_u^{*(n+L+1)};$$

aus $G^{(2n+L-1)} \equiv G^{*(2n+L-1)}$:

$$(5) \qquad b_v^{(2n+L)} + f_v^{(n)} \cdot f_v^{(n+L+1)} \equiv b_v^{*(2n+L)} + f_v^{(n)} \cdot f_v^{*(n+L+1)};$$

---

[38]) Vgl. Einl. 8.

[39]) Bis zu dieser Stelle entspricht unser Beweis im wesentlichen dem Beweis von N. Efimoff. *Einfacher und anders ist bei uns der Beweis der Beh. B.* Vgl. Efimoff, S. 479—481, Theorem 3.

aus $F^{(2n+L-1)} \equiv F^{*(2n+L-1)}$:

$$(6) \qquad a_v^{(2n+L)} + b_u^{(2n+L)} + f_u^{(n)} \cdot f_v^{(n+L+1)} + f_u^{(n+L+1)} \cdot f_v^{(n)} \equiv$$
$$a_v^{*(2n+L)} + b_u^{*(2n+L)} + f_u^{(n)} \cdot f_v^{*(n+L+1)} + f_u^{*(n+L+1)} \cdot f_v^{(n)}$$

Aus (4), (5) und (6) eliminieren wir nun die Formen $a^{(2n+L)}$, $b^{(2n+L)}$, $a^{*(2n+L)}$, $b^{*(2n+L)}$, indem wir folgenden Ausdruck bilden:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}(6) - \frac{\partial^2}{\partial v^2}(4) - \frac{\partial^2}{\partial u^2}(5)$$

Es ergibt sich nach bloßer Ausrechnung:

$$\mathrm{H}(f^{(n)}, f^{(n+L+1)}) \equiv H(f^{(n)}, f^{*(n+L+1)}) \text{ oder}$$
$$\mathrm{H}(f^{(n)}, f^{(n+L+1)} - f^{*(n+L+1)}) \equiv 0 \text{ [40]}$$

Weil aber $f^{(n)}$ nach Voraussetzung eine E-Form ist, hat die vorstehende Identität nach § 3. Definition D

$$f^{(n+L+1)} - f^{*(n+L+1)} \equiv 0$$

zur Folge, womit der Induktionsschluß beendet ist.

§ 5. Metriken mit genau einer Flachpunktrealisation.

A. Wir betrachten ein spiegelbildliches Flächenpaar mit folgenden kanonischen Gleichungen (1):

$$(1) \quad z = \pm \{[q(x, y)]^{\frac{n}{2}} + \varphi^{(n+1)}(x, y) + \varphi^{(n+2)}(x, y) + \ldots\}; \; n = 2\nu,$$

$q(x, y)$ sei eine definite quadratische Form, $\varphi^{(i)}(x, y)$, $i \geqq n+1$, beliebige Form i-ten Grades. Fassen wir nun die zu (1) gehörende kanonische Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ isometrischer Flächen ins Auge[41]). Nach Hilfssatz 1, Einl. 8, haben alle Flächen von $\mathfrak{K}$ für das gemeinsame kanonische Koordinatensystem $\Sigma(x, y, z)$ in der Taylorschen Entwicklung ihrer Gaussischen Krümmung $K(x, y)$ dieselbe Anfangsform $K^{(\varkappa)}(x, y)$. Für die Flächen (1) ist:

$$(2) \qquad K^{(\varkappa)} = p.\ [q(x, y)]^{n-2}; \quad p > 0$$

Da $K^{(\varkappa)}$ offensichtlich definit ist, genügen die Anfangsformen $\varphi^{(n)}$ der kanonischen Gleichungen aller Flachpunktrealisationen von $\mathfrak{K}$ nach Hilfssatz 2, Einl. 8, der Gleichung (H):

$$(3) \qquad \mathrm{H}\varphi^{(n)} = K^{(\varkappa)}$$

Nach § 1. C hat die Gleichung (3) für die Form (2) $K^{(\varkappa)}$ nur das

[40]) Vgl. die Def. der Hesseschen Polarform § 3, Gl. (1).

[41]) Vgl. Einl. 8.

folgende reelle Lösungspaar (4):

$$(4) \qquad \varphi^{(n)} = \pm\, [q(x, y)]^{\frac{n}{2}}$$

Somit lautet die kanonische Gleichung jeder Flachpunktrealisation von $\mathfrak{K}$ wie folgt:

$$(5) \qquad z = \pm \left\{[q(x, y)]^{\frac{n}{2}} + \varphi^{*(n+1)} + \varphi^{*(n+2)} + \ldots\right\}$$

Falls die Anfangsform (4) eine E-Form darstellt, besagt der Satz von Efimoff im § 4, auf die Flächenpaare (1) und (5) angewendet [42]);

$$(6) \qquad \varphi^{(k)} \equiv \varphi^{*(k)} \text{ für alle } k \geqq n + 1, \text{ d.h.}$$

jede Flachpunktrealisation von $\mathfrak{K}$ fällt mit einer der Flächen (1) zusammen oder mit Ausnahme der Flächen (1) sind alle Flächen von $\mathfrak{K}$ Nichtflachpunktrealisationen. Die Tatsache, dass die Form (4) nach § 3. D für $n = 10$ eine E-Form darstellt [43]), führt auf Grund der vorangehenden Betrachtung zu der in unserem Satz 2 formulierten, existenziellen Aussage:

Satz 2: *Es gibt analytische Metriken, die in der Umgebung eines Punktes nur genau eine (bis auf Euklidische Bewegungen eindeutig bestimmte) Flachpunktrealisation gestatten.*

B. Wir beweisen jetzt den *Zusatz*, dass die Beispiele (7) zu Satz 2:

$$(7) \qquad \mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{f}}\colon\ z = \pm \left\{[q(x, y)]^5 + \varphi^{(11)}(x, y) + \ldots\right\}$$

in der Umgebung von $x = y = 0$ im Kleinen unverbiegbar sind. Wir nehmen an, die Fläche $\mathfrak{f}$ (7) sei verbiegbar. Sie gehöre somit einer stetigen Schar $\{\mathfrak{f}_t,\ 0 \leqq t \leqq 1\}$ von Flächen der zugehörigen kanonischen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}(\mathfrak{f})$ an:

$$(8_t) \qquad \mathfrak{f}_t : z_t = \varphi^{(n_t)}(x, y; t) + \ldots + \varphi^{(10)}(x, y; t) + \ldots;$$

$t =$ Scharparameter, $\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{f}$, $2 \leqq n_t \leqq 10$. Wir dürfen voraussetzen, dass es beliebig kleine $t = \varepsilon > 0$ gibt, für welche die entsprechende Fläche $\mathfrak{f}_\varepsilon$ inkongruent ist zu $\mathfrak{f}_0$. [44]) Diese Flächen $\mathfrak{f}_\varepsilon$ sind zwangsläufig Nichtflachpunktrealisationen. Nach Einl. **11**,

---

[42]) Hier gelangt die in Einl. **11** genannte und *äquivalente Fassung* des Satzes in § 4 zur Anwendung. Man beachte aber, daß die Koordinaten (x, y) für die Flächen (1) und (5) zunächst nicht etwa ein gemeinsames, die Isometrie vermittelndes Parametersystem darstellen!

[43]) Das gleiche trifft auch für $n = 26$ und $n = 50$ zu!

[44]) Wir können natürlich annehmen, dass: $\bar{\mathfrak{f}} \notin \{\mathfrak{f}_t;\ 0 \leqq t \leqq 1\}$.

Korollar 3, besitzt die Form $\varphi^{(10)}(x, y; \varepsilon)$ in (8_ε) dieser Flächen $\mathfrak{f}_\varepsilon$ eine Nullgerade. Dies ist aber nicht möglich. Die Definitheit von $\varphi^{(10)}(x, y; 0) = [q(x, y)]^5$ bedingt, dass $\varphi^{(10)}(x, y; t)$ in einem ganzen Intervall $0 \leqq t < \tau$ $(\tau > 0)$ definit ist. Somit muss unsere obige Annahme falsch sein. $\mathfrak{f}$ ist unverbiegbar; ebenso $\bar{\mathfrak{f}}$.

Erstens haben wir damit den existenziellen Gehalt des Satzes von Efimoff gewonnen:

Es gibt im Euklidischen R^3 im Kleinen unverbiegbare Flächen.

Zweitens läßt sich damit der Satz 2 zum folgenden Satz 3 verschärfen.

Satz 3 (Hauptsatz): *Es gibt analytische Metriken, die in der Umgebung eines Punktes genau eine (bis auf Bewegungen eindeutig bestimmte) und zwar eine unverbiegbare Flachpunktrealisation gestatten.*

Das einfachste Beispiel (1) zu unserem Satz 3 ist:

$$z = (x^2 + y^2)^5 \text{ unverbiegbar in } x = y = 0.$$

§ 6. Verbiegung spezieller Regelflächen.[45])

A. Wir untersuchen eine spezielle Regelflächenschar. Ihre Parameterdarstellung laute, vektoriell geschrieben:

$$(1) \quad \mathfrak{x}(u, v; t) = \int_0^u \mathfrak{v}_1(w; t)dw + v \,.\, \mathfrak{v}_3(u; t); \quad t = \text{Scharparameter}.$$

Die Vektoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_3$ sollen mit einem Vektor $\mathfrak{v}_2$ dem Differentialgleichungstripel (2) genügen:

$$(2) \quad \begin{cases} a & \mathfrak{v}'_1 = \qquad\qquad f(u; t)\mathfrak{v}_2 \\ b & \mathfrak{v}'_2 = -f(u; t)\mathfrak{v}_1 \qquad\qquad + g(u)\mathfrak{v}_3; \\ c & \mathfrak{v}'_3 = \qquad\qquad -g(u)\mathfrak{v}_2 \end{cases} \qquad \mathfrak{v}'_i = \frac{d\mathfrak{v}_i}{du}$$

mit den Anfangsbedingungen (3) für $u = 0$

$$(3) \qquad \mathfrak{v}_1 = (1, 0, 0), \ \mathfrak{v}_2 = (0, 0, 1), \ \mathfrak{v}_3 = (0, 1, 0)$$

Die Funktionen $f(u; t)$ und $g(u)$ in (2) seien mindestens zweimal stetig differenzierbar in u.[46])

Dank der schiefen Symmetrie von (2) und den Anfangsbedingungen (3) bilden die Vektoren $\mathfrak{v}_i$ für jedes u ein (negativ orientiertes) normiertes Dreibein. Durch einfache Rechnung gewinnen wir die ersten Fundamentalgrößen der Flächen (1):

$$(4) \qquad E = 1 + g^2(u) \,.\, v^2, \ F = 0, \ G = 1$$

---

[45]) Dieser § 6 ist unabhängig von den anderen §§.

[46]) Vgl. Hopf-Schilt, S. 62: Dortiges Bsp. $f(u; t) = t$, $g(u) = u$.

Aus (4) erhellt: *Alle Flächen* (1) *sind isometrisch für ein festgewähltes* $g(u)$ *bei beliebigen* $f(u; t)$.

Wir wählen jetzt spezielle Funktionen $f(u; t)$ und $g(u)$, greifen gewisse t-Werte heraus und berechnen hierzu *explizit* die entsprechenden Parameterdarstellungen (1):

$$(5) \qquad \begin{cases} f(u; t) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} f_\nu(t) \cdot u^\nu, \text{ wobei } f_\nu(t) = \prod\limits_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq \nu}}^{n} \dfrac{t - t_\mu}{t_\nu - t_\mu} \\ g(u) = c \cdot u^n + \text{höhere Glieder, } c \neq 0. \end{cases}$$

Unter den t_μ sind $(n + 1)$ verschiedene t-Werte zu verstehen. Wir greifen aus der Schar (1/2) unter der Zugrundelegung von (5) die Flächen $\mathfrak{f}_\nu$ heraus:

$$\mathfrak{f}_\nu : \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v; t_\nu) \quad \nu = 0, 1, \ldots, n$$

Die zu $\mathfrak{f}_\nu$ gehörigen Funktionen f und g sind:

$$(6) \qquad f(u; t_\nu) = u^\nu; \; g(u) = c \cdot u^n + \text{höhere Glieder, } c \neq 0$$

Bestimmen wir nun die Parameterdarstellungen der Flächen $\mathfrak{f}_\nu$. Auf Grund bekannter Betrachtungen aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen folgt, daß die Lösungsvektoren $\mathfrak{v}_i$ von (2/3) für die Wahl (5) in allen drei Variablen $u, v; t$ analytisch sind. Das gleiche trifft für den Vektor $\mathfrak{x}(u, v; t)$ zu. Der Gleichung (2a) entnehmen wir für $u = 0$ die Ableitungen von $\mathfrak{v}_1$ nach u:

$$(7) \qquad \mathfrak{v}_1' = (0, 0, 0), \ldots, \mathfrak{v}_1^{(\nu)} = (0, 0, 0), \; \mathfrak{v}_1^{(\nu+1)} = (0, 0, \nu!), \ldots$$

der Gleichung (2c) entnehmen wir die Ableitungen von $\mathfrak{v}_3$ nach u:

$$(8) \qquad \mathfrak{v}_3' = (0, 0, 0), \ldots, \mathfrak{v}_3^{(n)} = (0, 0, 0), \; \mathfrak{v}_3^{(n+1)} = (0, 0, -n!c), \ldots$$

Mit Hilfe von (3), (7) und (8) gewinnen wir die Taylorschen Reihen von $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_3$ mit dem Mittelpunkt $u = 0$. Setzen wir diese Reihen in (1) ein, so resultiert für $\mathfrak{f}_\nu$ die folgende Entwicklung:

$$(9) \quad \mathfrak{x}(u, v; t_\nu) = \left[(u, 0, 0) + \left(0, 0, \frac{u^{\nu+2}}{(\nu+1)(\nu+2)}\right) + \text{höhere Glieder}\right] + \\ + \left[(0, v, 0) + \left(0, 0, -\frac{c \cdot u^{n+1} v}{n + 1}\right) + \text{höhere Glieder}\right]$$

Die Komponenten von (9) lauten somit:

$$(10) \begin{cases} a \quad x = u + \ldots \\ b \quad y = v + \ldots \\ c \quad z = \left[\dfrac{u^{\nu+2}}{(\nu+1)(\nu+2)} + \text{höh. Gl.}\right] + \left[-\dfrac{c \cdot u^{n+1} v}{n + 1} + \text{höh. Gl.}\right] \end{cases}$$

Aus (10*a*) und (10*b*) ergibt sich leicht:

$$u = x \quad + \ldots$$
$$v = \quad y + \ldots$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (10*c*) ein, so folgt die kanonische Gleichung von $\mathfrak{f}_\nu$ in $u = v = 0$:

$$0 \leqq \nu \leqq n - 1 : z = \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} \cdot x^{\nu+2} + \text{höhere Glieder}$$

$$\nu = n \qquad : z = \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot x^{n+2} - \frac{c}{n+1} \cdot x^{n+1} y\right) + $$
$$+ \text{höhere Glieder.}$$

Es treten also folgende Berührungsordnungen auf:

$$p = 1, 2, \ldots, n;\ n+1$$

Stellen wir noch die Gaussische Krümmung unserer Flächenschar (1/2/5) auf:

$$K(u, v) = \frac{-g^2(u)}{[1 + g^2(u) \cdot v^2]^2} = \frac{-c^2 u^{2n} + \ldots}{[1 + (c^2 u^{2n} + \ldots) v^2]^2} = -c^2 u^{2n} +$$
$$+ \text{höhere Glieder.}$$

Nach Korollar 2, Einl. 8, erkennen wir, daß der Punkt $x = y = z = 0$ der Flächenschar (1) für die Wahl (5) ein vollkommen labiler Punkt ist, d.h. es treten alle überhaupt möglichen p auf.[47])

Dieses Ergebnis können wir in einen geometrischen Satz kleiden:

Satz 4. *Ist der Kehlstreifen einer Regelfläche asymptotisch, so ist jeder Kehlpunkt, wo die geodätische Torsion des Kehlstreifens verschwindet, ein vollkommen labiler Punkt.*[48])

B. Wir geben im Anschluss an Satz 4 noch ein *besonders einfaches Beispiel* einer Regelfläche mit einem vollkommen labilen Punkt:

$$(11) \qquad z = x^r y \text{ mit Punkt } x = y = 0$$

---

[47]) *Gegenbeispiel* $\{\mathfrak{f}_t;\ t \neq 0\}$: $\left|\begin{array}{l} x = \int_0^u \sqrt{1 - n^2 t^2 u^{2n-2}}\, du \\ y = \int_0^v \sqrt{1 - n^2 t^{-2} v^{2n-2}}\, dv \\ z = \quad t \cdot u^n + t^{-1} \cdot v^n. \end{array}\right.$

$\{\mathfrak{f}_t\}$ ist eine stetige Schar isometrischer Flächen mit einem stabilen Punkt 0 ($u = 0$, $v = 0$), was man auf Grund von § 1.A unter Anwendung von Hilfssatz 3, Einl. 11, leicht direkt bestätigt.

[48]) Die Gl. (2) und die Gl. (3) bestimmen die Kehllinie k der Fläche (1). Kehlstreifen = Flächenstreifen längs k; $g(u)$ = geodätische Torsion des Kehlstreifens: Vgl. W. Blaschke: Diff. geom. I, 3. Aufl. 1945, 4. Kap. Flächenstreifen.

Bedeutet $\varphi = \varphi(x)$ den Neigungswinkel der Erzeugenden ($x =$ konstant) zur (x, y)-Ebene, so bestehen folgende Gleichungen:

$$\sin\varphi = \frac{x^r}{\sqrt{1 + x^{2r}}} \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + x^{2r}}}$$

Die x-Achse ist die Kehllinie der vorliegenden Regelfläche.

Längs der Kehllinie verfolgen wir das nachstehende Dreibein:

(12) $\mathfrak{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathfrak{v}_3 = (0, \cos\varphi, \sin\varphi)$, $\mathfrak{v}_2 = (0, -\sin\varphi, \cos\varphi)$.

Differenzieren wir diese Vektoren $\mathfrak{v}_i$ nach x, so resultiert:

$$(12') \qquad \mathfrak{v}'_1 = 0, \ \mathfrak{v}'_2 = -\frac{r \,.\, x^{r-1}}{1 + x^{2r}} \,.\, \mathfrak{v}_3, \ \mathfrak{v}_3{}' = \frac{r \,.\, x^{r-1}}{1 + x^{2r}} \,.\, \mathfrak{v}_2$$

Setzen wir noch $x = u$ $(y\sqrt{1 + x^{2r}} = v)$ und $g(u) = -\dfrac{r \,.\, u^{r-1}}{1 + u^{2r}} =$ $= -r \,.\, u^{r-1} + \ldots$, dann bekommt (12′) die Gestalt (13):

$$(13) \qquad \begin{cases} \mathfrak{v}_1{}' = & 0 \,.\, \mathfrak{v}_2 \\ \mathfrak{v}_2{}' = 0 \,.\, \mathfrak{v}_1 & + g(u) \,.\, \mathfrak{v}_3 \\ \mathfrak{v}_3{}' = & - g(u) \,.\, \mathfrak{v}_2 \end{cases}$$

Betten wir die Fläche (11) mit der Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x}(u, v) = \int_0^u \mathfrak{v}_1(u)du + v \,.\, \mathfrak{v}_3 = (x, 0, 0) + (0, y, x^r y)$$

ausgehend vom Tripel (13) (Vgl. (2)) in eine stetige Schar (1) $\mathfrak{f}_t$ ein, so erkennen wir wie vorhin unter A die vollkommene Labilität des Punktes $x = y = 0$.

ANHANG

§ 7. Die Anzahl der Lösungen der Gleichung (H).

Wir betrachten wieder die Gleichungen (1), (2) und (3_k) aus § 1.

$$(1) \qquad \varphi^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x^{n-i} y^i;$$

$$(2) \qquad H\varphi^{(n)} = K^{(2n-4)} = [n\,(n-1)]^2 \sum_{k=0}^{2n-4} A_k x^{2n-4-k} y^k$$

$$(3_k) \quad A_k = \sum_{\substack{\varrho+\sigma=k+1 \\ \varrho<\sigma}} C_{\varrho\sigma} p_{\varrho\sigma}, \ p_{\varrho\sigma} = \text{Determinante} \begin{vmatrix} a_\varrho & a_\sigma \\ a_{\varrho+1} & a_{\sigma+1} \end{vmatrix}$$

Efimoff hat in der zitierten Arbeit [49]) folgenden Hilfssatz bewiesen:

---

[49]) Vgl. Efimoff, S. 468, § 2, Lemma 2.

Hilfssatz A: *Bei vorgegebenen A_k in (3_k) existieren höchstens endlichviele $(p_{\varrho\sigma})$-Systeme, welche die Gleichungen (3_k) erfüllen.*

Hauptsächlich auf Grund dieses Hilfssatzes A (sowie mehrerer anderer Hilfssätze) gelang Efimoff eine Verschärfung[50]) des in der Einl. 11 stehenden Stabilitätskriteriums von Hopf-Schilt.

Wir beweisen nun ebenfalls auf Grund des Hilfssatzes A und zwei weiterer Hilfssätze B und C von Efimoff, sowie eines eigenen Hilfssatzes D einen neuen Satz (H). Dieser Satz H führt zusammen mit den Hilfssatz 3 (Einl. 11) auf evidente Weise zur Efimoffschen Verschärfung (Vgl. Fußnote 50).

Satz H: *Falls $K^{(2n-4)}$ in (2) weder eine Potenz einer quadratischen, noch einer linearen Form darstellt, hat die Gleichung (H) $H\varphi^{(n)} = K^{(2n-4)}$ höchstens endlichviele Lösungen $\varphi^{(n)}$.*[51])

Beweis unseres Satzes H: Wir skizzieren zunächst den Efimoffschen Beweis des Hilfssatzes A und führen dann die Hilfssätze B, C und D an.

a. *Beweis des Hilfssatzes A*: Efimoff interpretiert die $(p_{\varrho\sigma})$-Systeme als Punkte in einem N-dimensionalen Raum R^N, $N = \binom{n}{2}$. In diesem R^N betrachtet er die durch alle Gleichungen (3_k) bestimmte lineare, alg. Mannigfaltigkeit $\mathfrak{l}$, sowie den durch alle die bestehenden Plückerschen Identitäten $p_{\varrho\sigma}p_{\tau v} - p_{\varrho\tau}p_{\sigma v} + p_{\varrho v}p_{\sigma\tau} = 0$ bestimmten, alg. Kegel $\mathfrak{k}$. Er zeigt, daß jede irreduzible Komponente von $\mathfrak{m} = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}$ 0-dimensional sein muß, weil die gegenteilige Annahme im Widerspruch steht zu der Tatsache, daß *d.* und nur *d.* alle $A_k = 0$, wenn alle $p_{\varrho\sigma} = 0$. Damit ist aber bewiesen, daß $\mathfrak{m}$ nur aus endlichvielen Punkten bestehen kann, q.e.d.[52])

b. Efimoff ordnet einer Form (1) die beiden Koeffizienten-n-Tupel $[(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}); (a_1, a_2, \ldots, a_n)]$ zu und interpretiert diese n-Tupel als Punkte in einem projektiven Raum P^{n-1}. Damit wird der Form (1) eine Gerade mit den Plückerschen Koordinaten $p_{\varrho\sigma}$ zugeordnet. Wir wollen aus diesem Grunde die $p_{\varrho\sigma}$ auch die „Plückerschen Koordinaten" von (1) nennen.

[50]) Vgl. Einl. **11**: Stabilitätskrit. von H. Hopf und H. Schilt. Ersetzen wir im dortigen Wortlaut: „$H\varphi^{(n)}$" durch „$\varphi^{(n)}$", so haben wir die Efimoffsche Verschärfung (vgl. Efimoff, l.c. Theorem 2).

[51]) Die durch die Voraussetzung des Satzes H ausgeschloßenen Fälle lassen sich alle leicht explizit erledigen nach dem von uns im § 1 eingeschlagenen Verfahren.

[52]) Vgl. B. L. van der Waerden, Moderne Algebra II, §§ 90—91 und § 96, Berlin 1931, 1. Aufl.

Hilfssatz B: *Besitzt* $\psi^{(n)}(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i x^{n-i} y^i$ *dieselben „Plückerschen Koordinaten" wie* (1) $\varphi^{(n)}(x, y)$ *und ist der Rang*

$$\textit{der Matrix } \mathfrak{A}\{\varphi^{(n)}\} = \begin{pmatrix} a_0\, a_1 \ldots a_{n-2} \\ a_1\, a_2 \ldots a_{n-1} \\ a_2\, a_3 \ldots a_n \end{pmatrix} \textit{gleich } 3,$$

so folgt: $\psi^{(n)}(x, y) \equiv \pm\, \varphi^{(n)}(x, y)$.

Die geometrische Einkleidung macht den Beweis leicht.[53])

c. **Hilfssatz C**: *Falls der Rang von* $\mathfrak{A}\{\varphi^{(n)}\} < 3$, *so gilt die Identität*: $r \,.\, \varphi^{(n)}_{xx} + 2s \,.\, \varphi^{(n)}_{xy} + t \,.\, \varphi^{(n)}_{yy} \equiv 0$, *worin nicht gleichzeitig* $r = 0$, $s = 0$ *und* $t = 0$.[54])

Der Hilfssatz C ergibt sich sofort mit Hilfe der folg. Formel:

$$\varphi^{(n)}_{x^{2-\alpha}y^{\alpha}} = \sum_{k=0}^{n-2} \zeta^{(n)}_k \,.\, a_{k+\alpha}\, x^{n-2-k} y^k;\ \alpha = 0, 1, 2;$$

$$\zeta^{(n)}_k = \binom{n}{k} (n-k)(n-k-1)$$

d. Wir bedürfen noch eines weiteren, *eigenen* Hilfssatzes D:

Hilfssatz D: *Ist* $K^{(2n-4)}$ *weder eine Potenz einer quadratischen, noch einer linearen Form, so ist der Rang von* $\mathfrak{A}\{\varphi^{(n)}\} = 3$ *für jede Lösung* $\varphi^{(n)}$ *der Gleichung* $\mathrm{H}\varphi^{(n)} = K^{(2n-4)}$.

Beweis der Kontraposition des Hilfssatzes D:

Ist für mindestens eine Lösung $\varphi^{(n)}$ der Rang von $\mathfrak{A}\{\varphi^{(n)}\} < 3$, so stellt $K^{(2n-4)}$ eine Potenz einer quadratischen oder linearen Form dar.

Existiert eine Lösung $\varphi^{(n)}$, für welche der Rang von $\mathfrak{A}\{\varphi^{(n)}\} < 3$, so genügt $\varphi^{(n)}$ nach dem Hilfssatz C einer genannten Identität $r \,.\, \varphi^{(n)}_{xx} + 2s \,.\, \varphi^{(n)}_{xy} + t \,.\, \varphi^{(n)}_{yy} \equiv 0$. Wir setzen zunächst $s^2 - rt \neq 0$ und etwa $r \neq 0$ voraus (der Fall $t \neq 0$ wird analog behandelt). Dann kann die besagte Identität durch lineare Transformation: $\xi = \omega_1 x + y$, $\eta = \omega_2 x + y$ auf die Gestalt $\tilde{\varphi}^{(n)}_{\xi\eta}(\xi, \eta) \equiv 0$ gebracht werden, wobei die ω_i die Wurzeln der quadratischen Gleichung $r \,.\, \Omega^2 + 2s \,.\, \Omega + t = 0$ bedeuten. Durch Integration erhalten wir dann:

$$\tilde{\varphi}^{(n)}(\xi, \eta) = \alpha \xi^n + \beta \eta^n$$

Berechnen wir dazu die Form $K^{(2n-4)}$, welche zum entsprechenden $\varphi^{(n)}$ gehört, so ergibt sich auf Grund der Kovarianz:

---

[53]) Vgl. Efimoff S. 471, § 3, Lemma 3 (erster Teil der Beh.)

[54]) Vgl. Efimoff S. 478, § 6, Beweis zum Lemma 6.

$$\mathrm{H}\varphi^{(n)} = \Delta^2 \,.\, \widetilde{\mathrm{H}\varphi}^{(n)} \text{ mit } \Delta = \begin{vmatrix} \omega_1 & 1 \\ \omega_2 & 1 \end{vmatrix} \text{ und}$$

$$\widetilde{\mathrm{H}\varphi} = \frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\xi^2} \,.\, \frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\eta^2} - \left(\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2 :$$

$$K^{(2n-4)} = \gamma \,.\, (\xi \,.\, \eta)^{n-2} = c \,.\, (t \,.\, x^2 - 2s \,.\, xy + r \,.\, y^2)^{n-2}$$

Damit ist der eine Teil des Satzes bewiesen.

Ist $r = t = 0$, $s \neq 0$, dann hat man $\varphi_{xy}^{(n)} \equiv 0$.

Ist $s^2 - rt = 0$, so sind die beiden Fälle $s = 0$ und $s \neq 0$ zu unterscheiden. Ist $s = 0$, so haben wir entweder $\varphi_{yy}^{(n)} \equiv 0$ oder $\varphi_{xx}^{(n)} \equiv 0$. Ist $s \neq 0$, so führt die Transformation $\xi = s \,.\, x - r \,.\, y$, $\eta = y$ auf die Form $\tilde{\varphi}_{\xi\eta}^{(n)} \equiv 0$. In den letztgenannten drei Fällen stellt $K^{(2n-4)}$, wie man leicht nachrechnet, jedesmal sogar eine Potenz einer Linearform dar. Damit ist Hilfssatz D ganz bewiesen.

Der *Satz H* ist eine einfache Folgerung aus den Hilfssätzen A, B und D. Wie ersichtlich ist die Voraussetzung von Satz H mit derjenigen von Hilfssatz D identisch. Somit ist für alle Lösungen $\varphi^{(n)}$ der Rang von $\mathfrak{A}\{\varphi^{(n)}\} = 3$. Da nach Hilfssatz A, nur endlichviele $(p_{\varrho\sigma})$-Systeme existieren und der Rang der Matrizen $\mathfrak{A}$ der zugehörigen Lösungen $\varphi^{(n)} = 3$ ist, hat die Gleichung $\mathrm{H}\varphi^{(n)} = K^{(2n-4)}$ nach Hilfssatz B, gerade soviel Lösungspaare als es $(p_{\varrho\sigma})$-Systeme gibt für das vorgegebene $K^{(2n-4)}$. Damit ist der Satz H bewiesen.

§ 8. Beispiele von E-Formen.

Gilt für die Anfangsform $\varphi^{(n)}(x, y)$ einer Fläche $\mathfrak{f}$:

a. $\mathrm{H}\varphi^{(n)}(x, y) \not\equiv$ Potenz einer linearen oder quadratischen Form

b. $\varphi^{(n)}(x, y) = E$-Form

c. $\varphi^{(n)}(x, y)$ höchstens einfache reelle Nullgeraden

so folgt: $\mathfrak{f}$ ist in $(x = 0,\ y = 0)$ im Kleinen unverbiegbar.

Im wesentlichen ist dies *der Gehalt* (*nicht der Wortlaut*) des Hauptsatzes von N. Efimoff in der zitierten Arbeit. Für $p = 8$ ist er mit dem in der Einl. 6 genannten Satz von N. Efimoff äquivalent:

„Fast alle" Flächen der Berührungsordnung $p = 8$ sind im Kleinen unverbiegbar. Die Ausdrucksweise „Fast alle" findet in der folgenden Betrachtung ihre Begründung:

Die Gramsche Determinante der Matrix des Gleichungssystems (4_m) in § 3 ist ein Polynom $P_m(a_i)$ in den Koeffizienten a_i über dem Ring der ganzen Zahlen. Existiert für einen Grad n irgendeine E-Form, so gilt offenbar nach Kriterium K, § 3: $P_m(a_i) \not\equiv 0$

für alle $m > n$, d.h. „fast alle" Formen $\varphi^{(n)}(x, y)$ dieses Grades n sind E-Formen.

In diesem Sinne ist also mit unserem Beispiel in § 3.C bewiesen, dass „fast alle" Flächen der Berührungsordnung 9 im Kleinen unverbiegbar sind.

Will man das analoge Resultat für eine andere Berührungsordnung aussprechen, so hat man lediglich *eine* E-Form des entsprechenden Grades anzugeben.

Sowohl für $n = 9$ und $n = 10$ (26, 50) existiert eine E-Form der speziellen Gestalt:

$$x^{n-r}y^r$$

Für $n = 15$ ist dies nicht der Fall. Wir *behaupten* jedoch:

$$A \,.\, x^7y^8 + B \,.\, x^2y^{13} = E\text{-Form für } A \neq 0 \text{ und } B \neq 0$$

Ersichtlich besitzt die Matrix des zugehörigen Gleichungssystems (4_m), § 3, die zwei $(m + 1)$-reihigen Unterdeterminanten $D_8^{(m)}$ und $D_{13}^{(m)}$:

$$D_8^{(m)} = A^{m+1} \,.\, \prod_{k=0}^{m} Z_{8,\,k}^{(15,\,m)}; \quad D_{13}^{(m)} = B^{m+1} \,.\, \prod_{k=0}^{m} Z_{13,\,k}^{(15,\,m)}$$

Nachprüfbar ist:

$$Z_{8,\,k}^{(15,\,m)} \neq 0 \text{ für } m > 15, \ m \neq 22; \quad Z_{13,\,k}^{(15,\,22)} \neq 0 \text{ für } 0 \leqq k \leqq 22$$

Somit hat die erwähnte Matrix für jedes $m > 15$ eine nicht verschwindende $(m + 1)$-reihige Unterdeterminante. Nach Kriterium K, § 3, ist damit die Behauptung bewiesen.

Es lassen sich für viele höhere Grade Beispiele von E-Formen konstruieren. Es ist aber noch nicht gelungen, für jedes n E-Formen ($n \geqq 4$) anzugeben, insbesonders nicht für $4 \leqq n < 9$

Betrachten wir zu einer Form $f^{(n)}$ (1), § 3, die Matrix des zugehörigen Gleichungssystems (4_m). Diese Matrix besitzt $(n - 3)$ $(m + 1)$-reihige Unterdeterminanten $D_i^{(m)}$, $2 \leqq i \leqq n - 2$, mit den Diagonalelementen

$$Z_{i,\,k}^{(n,\,m)} \,.\, a_i \ ; \ i \text{ fest}, \ 0 \leqq k \leqq m$$

Entwickeln wir $D_i^{(m)}$, so resultiert ein Polynom in $a_0, a_1, \ldots, a_n$ über dem Ring der ganzen Zahlen. Ordnen wir dessen Glieder nach Potenzen von a_i, so ergibt sich:

$$D_i^{(m)} = \prod_{k=0}^{m} Z_{i,\,k}^{(n,\,m)} \,.\, a_i^{m+1} + R(a_i), \text{ wobei}$$

$R(a_i)$ in a_i höchstens vom Grade m ist. Wählen wir für die Koeffizienten a_i von $f^{(n)}$ $(n + 1)$ *reelle unabhängige Tranzendente*, dann ist gewiss $D_i^{(m)} \neq 0$, wenn $Z_{i,\,k}^{(n,\,m)} \neq 0$ für $0 \leqq k \leqq m$.

Existiert nun für jedes $m > n$ ein $i^*(m)$, für welches $Z_{i^*, k}^{(n, m)} \neq 0$ für $0 \leqq k \leqq m$, dann ist jeweils:

$$D_{i^*(m)}^{(m)} \neq 0, \text{ d.h.}$$

die Matrix von (4_m) hat den Rang $(m + 1)$, das Gleichungssystem (4_m) infolgedessen nur die triviale Nullösung, was nach Kriterium K, § 3, bedeutet, daß $f^{(n)}$ eine E-Form darstellt.

Falls $(n - i_0) \cdot i_0 \cdot (n - 1)$ $[2 \leqq i_0 \leqq n - 2]$ eine Quadratzahl ist, gilt

$$Z_{i_0, k}^{(n, m)} = 0 \text{ höchstens } \textit{für endlichviele } m_\zeta > n.$$

Dann lassen sich vermutlich stets Zahlen i_ζ finden, für welche:

$$Z_{i_\zeta, k}^{(n, m_\zeta)} \neq 0 \text{ für } 0 \leqq k \leqq m_\zeta$$

Ist dies der Fall, so hat man damit ein $i^*(m)$ gewonnen:

$$i^*(m) = \begin{cases} i^* = i_0 & \text{für } m \neq m_\zeta \\ i^* = i_\zeta & \text{für } m = m_\zeta \end{cases}$$

Zahlenbeispiele:

$$\begin{array}{ll} n = 9: & i^*(m) = 6 \text{ für alle } m \\ n = 10: & i^*(m) = 5 \text{ für alle } m \\ n = 15: & i^*(m) = \begin{cases} 8 \text{ für } m \neq 22 \\ 13 \text{ für } m = 22 \end{cases} \\ n = 16: & i^*(m) = 10 \text{ für alle } m \\ n = 21: & i^*(m) = \begin{cases} 16 \text{ für } m \neq 46 \\ 10 \text{ für } m = 46 \end{cases} \end{array}$$

Weitere Beispiele für $n = 25, 26, 28, 33, 35, 36, 40, 45, 49, 50, 51, 55$ und höhere Grade.

(Eingegangen den 10. Mai 1950.)