Composito Mathematica

S. Stoïlow

Sur les surfaces de Riemann normalement exhaustibles et sur le théorème des disques pour ces surfaces

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 428-435
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__428_0>

Sur les surfaces de Riemann normalement exhaustibles et sur le théorème des disques pour ces surfaces

par

S. Stoïlow

Bucarest

---

1. Dans la théorie générale du recouvrement de M. Ahlfors. les propriétés des fonctions méromorphes dans $|z| < R \leqq \infty$ et, en particulier celles qui concernent la répartition des valeurs, apparaissent comme des conséquences de l'étude métrico-topologique des surfaces de Riemann correspondantes. Le fait capital, dans cet ordre d'idées (fait dont découle toute la théorie des fonctions méromorphes dans le plan) est, comme on sait, la possibilité d'une exhaustion régulière (reguläre Ausschöpfung) pour les surfaces de Riemann des inverses de ces fonctions; les extensions analogues à des classes plus générales de fonctions semblent, dès lors, liées à cette même possibilité.

En prenant ici pour point de départ la définition générale des surfaces de recouvrement riemannien que j'ai exposée et utilisée ailleurs [1]), je me propose de montrer comment les propriétés topologiques seules de ces surfaces conduisent à considérer une exhaustion que j'ai appelée *normale* [2]), caractérisant une classe qui comprend plusieurs types connus de fonctions, et qui permet de retrouver et de compléter par des méthodes purement topologiques, pour cette classe, des propositions importantes de la théorie de la répartition des valeurs.

On remarquera que la classe des surfaces normalement exhaustibles définie plus loin ne comprend ni n'est comprise dans celle des surfaces régulièrement exhaustibles de M. Ahlfors. Sans atteindre donc toutes les fonctions auxquelles s'applique la théorie de M. Ahlfors, les résultats obtenus ici seront valables,

---

[1]) Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques [Paris, Gauthier-Villars, 1938]. Cet ouvrage sera cité dans la suite sous le nom abrégé de Principes.

[2]) Comptes Rendus **207** (1938), 517—519. Le présent travail est un développement des résultats énoncés dans cette Note.

au contraire, pour certaines fonctions engendrant des surfaces non régulièrement exhaustibles. Cela tient, en premier lieu, au caractère topologique de la notion d'exhaustion normale, tandis que l'exhaustion régulière est une propriété métrique.

2. Considérons une variété topologique V à deux dimensions et une transformation continue univoque f de V en une région ouverte $f(V)$ de la sphère euclidienne à deux dimensions. Si f est une *transformation intérieure* de V en $f(V)$, les couples $[x, f(x)]$, où x est un point de V, forment une *surface de* ***Riemann*** (R) recouvrant, partiellement ou totalement, la sphère et ces couples sont les *points* de la surface de Riemann [3]).

Rappelons que la transformation continue f est dite *intérieure* si elle a pour invariants l'ensemble ouvert et le continu compact. On démontre alors que f est localement biunivoque sauf en des points isolés où elle se comporte comme $Z = z^n$ (n = entier positif $\geqq 2$) autour de $z = 0$. Il résulte encore de là que V est triangulable et orientable [4]) et ces propriétés justifient entièrement la définition adoptée pour (R).

Une surface de Riemann ainsi définie reste la même si on déforme V topologiquement. Les propriétés topologiques de (R) sont celles de V et le rôle de f est de transporter sur V la métrique naturelle de la sphère euclidienne.

Lorsque V est close, les transformations intérieures f se confondent avec les involutions topologiques introduites par M. Brouwer, dès 1919; c'est-à-dire que la transformation multivoque inverse f^{-1} de f est *complètement* continue [5]) (et non pas semi continue seulement comme dans le cas de f continue quelconque).

Il en est encore ainsi si V, au lieu d'être une variété, est, par exemple, un domaine fermé et compact d'une variété. Mais si V est une variété ouverte, la transformation multivoque f^{-1} n'est plus, en général, complètement continue.

Nous dirons qu'une surface de Riemann (R) ouverte, définie par V et f, est *normalement exhaustible* s'il existe sur V une suite de domaines polyédriques [6]) D_i tels que: 1°. $D_i \subset D_{i+1}$ au sens strict, 2°. $\sum_i D_i = V$ et que: 3°. sur chaque D_i la transformation f,

---

[3]) Principes, chap. II, p. 31, et chap. V, p. 119 et 120.

[4]) Principes, chap. V, p. 116 et p. 119.

[5]) C'est-à-dire que si y_n (points de la sphère) tend vers y_0, $f^{-1}(y_n)$ tend vers $f^{-1}(y_0)$ *chaque point de ce dernier ensemble étant limite de points de* $f^{-1}(y_n)$.

[6]) C'est-à-dire domaines fermés limités par un nombre fini de courbes de Jordan disjointes.

considérée comme transformation de D_i en $f(D_i)$ seulement, a pour f^{-1} une transformation complètement continue.

La condition 3^0 est équivalente à celle-ci: la transformation *de D_i en $f(D_i)$ est intérieure*; c'est-à-dire que tout ensemble ouvert *dans* D_i a pour image un ensemble ouvert *dans* $f(D_i)$. La propriété fondamentale concernant l'inversion de f sur V rappelée plus haut, montre alors immédiatement que D_i est un domaine *normal* [7]) de V pour f, c'est-à-dire que les intérieurs et les frontières de D_i et $f(D_i)$ se correspondent respectivement par f. Réciproquement: tout domaine polyédrique normal en ce sens pour f, soit D, est tel que, entre D et $f(D)$, f est transformation intérieure.

Il résulte de là facilement que *l'ensemble lacunaire* de (R) [c'est-à-dire l'ensemble des points de la sphère qui ne sont couverts par aucun feuillet de (R)] contient *au moins un point et qu'il est toujours fermé.* En effet, (R) étant ouverte, les D_i sont en nombre infini et, puisque l'inclusion $f(D_i) \subset f(D_{i+1})$ est stricte (tout comme celle des D_i dans la condition 1^0), aucun des ensembles fermés $f(D_i)$ ne couvre entièrement la sphère.

3. Un premier exemple de surfaces de Riemann normalement exhaustibles est fourni par les fonctions entières d'ordre $< \frac{1}{2}$.

En effet, d'après un théorème de M. Wiman [8]), $g(z)$ étant une telle fonction, on peut toujours trouver une suite croissante de nombres positifs r_i, tels que $r_i \to \infty$ et que, sur $|z| = r_i$, on ait

$$|g(z)| > [M(r_i)]^\alpha,$$

où $M(r_i)$ est le maximum de $|g(z)|$ sur le cercle r_i et α un nombre positif donné convenable.

Il suffit, pour nos besoins ici, de retenir de ce remarquable théorème que $|g(z)|$ augmente indéfiniment avec i sur les circonférences de r_i. Considérons alors, sur le plan complexe Z sur lequel est étalée la surface de Riemann de l'inverse de $Z = g(z)$, le cercle Γ_i défini par

$$|Z - g(0)| \leqq \tfrac{1}{2}[M(r_i)]^\alpha.$$

Soit D_i la fermeture de la région ouverte du plan (z) constituée par tous les points que l'on peut atteindre par des chemins continus

---

7) Principes, Chap. V, p. 108.

8) A. Wiman [Arkiv för math., Astr. och Fys. **2** (1905), Nr. 14, et Mathem. Annalen **76** (1915), 197—211]. Voir aussi: E. Lindelöf [Rend. circolo matem. di Palermo **25** (1908), 228—234].

dans (z) partant de $z = 0$ et tels que les images de ces chemins restent à l'intérieur de Γ_i. Cette fermeture est un domaine fermé qu'on appelle le *domaine maximum* de Γ_i à partir de $z = 0$ pour la transformation intérieure $Z = g(z)$. Comme D_i est compris à l'intérieur du cercle r_i il est compact dans (z) et, par conséquent (comme il est facile de le voir), normal au sens rappelé plus haut. D'après ce qui a été dit à la fin du paragraphe précédent, D_i satisfait donc à la condition 3⁰. D'autre part il est évident que pour i croissant les D_i sont de plus en plus étendus et qu'ils couvrent entièrement (z). Les conditions 1⁰ et 2⁰ sont donc également satisfaites et les D_i, déterminés comme on vient de le voir, donnent une exhaustion normale de la surface de Riemann engendrée par $[(z, g(z)]$.

4. Les surfaces (R) normalement exhaustibles obtenues au paragraphe précédent sont du type parabolique. Il existe aussi de telles surfaces du type hyperbolique.

Comme exemple considérons la fonction de M. M. Lusin et Priwaloff définie par

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{n!\, a^{2n}}$$

où a est un entier positif $\geqq 5$.

Cette fonction est holomorphe dans $|z| < 1$ et $|z| = 1$ est pour elle une ligne singulière. M. M. Lusin et Priwaloff ont montré [9]) que, dans les couronnes circulaires

$$1 - \frac{1}{n!\, a^{2n}} < |z| < 1 - \frac{1}{2n!\, a^{2n}}$$

le module $|\varphi(z)|$ tend *uniformément* vers ∞ avec n.

Cette propriété suffit pour l'application du raisonnement précédent: la surface de Riemann définie par $[z, \varphi(z)]$ est donc normalement exhaustible.

Remarquons encore que toute fonction $g(\varphi(z))$, par exemple, où g désigne comme plus haut une fonction entière d'ordre $< \frac{1}{2}$, engendre également une surface normalement exhaustible.

5. *Le cas des surfaces de Riemann simplement connexes.* Les exemples des paragraphes précedents fournissent des surfaces simplement connexes. Il serait aisé de construire des surfaces

---

[9]) LUSIN et PRIWALOFF [Annales Ecole Norm. (3) 42 (1925), 143–191], 150.

normalement exhaustibles d'un ordre de connexion quelconque; mais nous allons nous borner ici aux (R) simplement connexes, ce qui revient à dire que V sera dorénavant supposée satisfaire à cette hypothèse.

Dans ces conditions il est toujours loisible de supposer que les D_i d'exhaustion normale ont été choisis eux-mêmes simplement connexes: il suffit, en effet, de remplacer chaque domaine d'une suite quelconque d'exhaustion normale par le domaine obtenu en y ajoutant celles des régions complémentaires sur V qui sont compactes dans V. Cela étant, les $f(D_i)$ seront encore simplement connexes.

Il résulte de là que l'ensemble lacunaire est un continu ou se réduit à un point unique.

Les surfaces de Riemann normalement exhaustibles simplement connexes seront appelées de *première* ou de *seconde espèce*, suivant que l'ensemble lacunaire est formé par un seul point ou par un continu.

Si l'on effectue la représentation conforme d'une telle (R) sur le plan ou sur un cercle (suivant le type) la fonction caractéristique $T(r)$ de la fonction correspondante *sera non bornée ou bornée suivant que* (R) *sera de première ou de seconde espèce.* En effet il résulte immédiatement d'un théorème de M. Rolf Nevant linna [10]) que si $T(r)$ est non bornée l'ensemble lacunaire ne peucontenir un continu. D'autre part le théorème des frères Riesz étendu par M. Nevanlinna [11]) aux fonctions dont le $T(r)$ est borné, montre que ces fonctions ne peuvent avoir une valeur asymptotique unique. Or les fonctions correspondant aux surfaces ayant un seul point lacunaire ne peuvent, comme il résulte des conditions de l'exhaustion normale, avoir que ce point pour valeur asymptotique.

6. *Exhaustion régulière et exhaustion normale.* Il est clair d'abord que les surfaces de seconde espèce ne sont pas régulièrement exhaustibles: on sait en effet que l'exhaustion régulière implique la présence de deux points lacunaires au plus.

D'autre part, nous allons faire voir que les surfaces de première espèce sont, au contraire, toutes régulièrement exhaustibles. Envisageons pour cela sur la sphère une suite de cercles C_i ayant tous pour centre le point lacunaire unique de (R) et dont

[10]) R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen [Berlin, J. Springer, 1936], 202.

[11]) Ouvrage cité, p. 198.

les rayons tendent vers zéro. Soit Γ_i le cercle complémentaire de C_i sur la sphère. On peut prendre pour domaines D_i d'exhaustion normale les domaines maxima (au sens précisé plus haut) des Γ_i pour la transformation f qui définit (R) et à partir d'un point fixe choisi sur V. Tout point de $\Gamma_i = f(D_i)$ sera l'image de n_i points de D_i exactement (distincts ou confondus) le nombre n_i ne dépendant que de f et de D_i. Si l'on prend pour rayon de la sphère l'unité et que l'on désigne les aires des C_i par ces mêmes symboles, on aura, pour aire du morceau R_i de (R) qui correspond à D_i la valeur $n_i(4\pi - C_i)$. De même, la longueur de la circonférence de C_i étant L_i, la longueur totale du bord de R_i sera $n_i L_i$. Si S_i désigne le nombre moyen des feuillets pour R_i, on aura donc

$$\frac{n_i L_i}{S_i} = \frac{L_i}{1 - \frac{C_i}{4\pi}},$$

quantité qui tend évidemment vers zéro pour $i \to \infty$, ce qui démontre que (R) est régulièrement exhaustible.

7. *Théorème des disques.* M. Ahlfors a démontré que si l'on considère, dans le plan sur lequel est étalée la surface de Riemann de l'inverse d'une fonction entière, trois domaines de Jordan finis quelconques disjoints (disques), l'un au moins de ces domaines est couvert par un feuillet simple de cette surface.

M. Ahlfors a déduit cette proposition d'un théorème plus général (Scheibensatz) [12]) qui résulte lui même de la possibilité d'une exhaustion régulière pour la surface de Riemann considérée. Des exemples simples montrent d'autre part que l'on ne peut, en général, abaisser le nombre des disques envisagés dans cette proposition.

Nous verrons cependant que, dans le cas de l'exhaustion normale, la proposition peut être précisée en ce sens que le nombre *trois* des disques peut être remplacé par *deux*. De plus, ce fait résultant, comme nous allons le voir, des caractères purement topologiques de l'exhaustion normale, il sera valable indifféremment pour les surfaces de première comme de seconde espèce lesquelles, de ce point de vue, ne peuvent être considérées comme distinctes.

Soient Δ_1 et Δ_2 deux domaines de Jordan disjoints situés sur la sphère et ne contenant aucun point de l'ensemble lacunaire

[12]) Voir par exemple l'ouvrage de M. R. Nevanlinna cité plus haut.

de (R). Il existe un domaine D_i d'exhaustion normale de (R), soit D, tel que Δ_1 et Δ_2 sont entièrement intérieurs à $f(D)$. Dans D le nombre n des points (distincts ou confondus) qui ont pour image un point donné quelconque de $f(D)$ est toujours le même quel que soit ce dernier. Ce nombre n est le *degré* de f dans D.

Les ensembles $D \cdot f^{-1}(\Delta_1)$ et $D \cdot f^{-1}(\Delta_2)$ sont formés, chacun, d'un nombre fini de domaines δ_h et ces δ_h sont tous simplement connexes. Ceci résulte facilement de ce que D, ainsi que Δ_1 et Δ_2, sont simplement connexes. Soit alors m_h le degré de f dans δ_h. Comme chacun des δ_h est domaine normal pour f, la formule de Hurwitz montre de suite que δ_h comprend exactement $m_h - 1$ points de ramification [13]). Soit ν le nombre des δ_h. Dans l'ensemble de ces δ_h il y a alors exactement $\sum_h m_h - \nu = 2n - \nu$ points de ramification. Or, il y a, dans D, d'après la même formule $n - 1$ tels points. Donc

$$2n - \nu \leqq n - 1,$$

c'est-à-dire que

$$\nu \geqq n + 1.$$

Au moins deux δ_h ne contiennent donc aucun point de ramification. Comme les δ_h sont tous simplement connexes, dans ces deux δ_h la transformation f est topologique et les feuillets correspondants de (R) sont simples.

Notre proposition se trouve ainsi démontrée. Il en résulte immédiatement que toute surface de Riemann simplement connexe et normalement exhaustible ne peut avoir qu'un seul point de ramification *complète*, au plus. Un tel point peut effectivement exister comme le montre la surface engendrée par $[g(z)]^2$, où $g(z)$ est une fonction entière d'ordre $< \frac{1}{2}$ et où les zéros de g sont tous points de ramification.

8. Si de la surface de Riemann de l'inverse d'un polynôme on exclut le point ∞, on obtient une surface normalement exhaustible *ouverte* n'ayant qu'un nombre fini de feuillets. Mais si l'on suppose *a priori* que (R) possède un nombre infini de feuillets, il est aisé de compléter la proposition du paragraphe précedent en montrant que l'un au moins des disques est couvert par *un nombre infini* de feuillets simples.

Si (R) ne possède pas seulement un nombre fini de feuillets, tout point A de la sphère, non lacunaire pour (R), donne lieu à un ensemble $f^{-1}(A)$ infini sur V.

---

[13]) Principes, chap. VI, p. 132.

Autrement, en effet, il y aurait un N tel que pour $i > N$, l'ensemble $B_i = D_{i+1} - D_i$ serait vide de points de $f^{-1}(A)$. Or quand $i \to \infty$, la frontière de $f(B_i)$ tend vers l'ensemble lacunaire de (R). Si $A\,f(B_i) = 0$ pour $i > N$, *tout* l'ensemble $f(B_i)$ tend donc vers l'ensemble lacunaire et, dans ce cas, un raisonnement assez simple que j'ai utilisé ailleurs [14]) montre que (R) ne peut avoir qu'un nombre fini de feuillets, contrairement à l'hypothèse admise ici.

Considérons alors un domaine de Jordan J sur la sphère, domaine comprenant Δ_1 et Δ_2 à son intérieur et ne contenant aucun point lacunaire de (R). Soit A un point intérieur de J. Pour i aussi grand que l'on voudra, on aura, d'après ce qu'on vient de voir, un point de $f^{-1}(A)$ dans B_i. Il y aura donc, à l'intérieur [15]) de B_i, un domaine maximum B de J et qui sera simplement connexe puisque V et J le sont. Ce domaine est normal et $f(B)$ se confond avec J. On pourra donc appliquer à B le raisonnement fait au paragraphe précédent pour D et on trouvera dans $B \subset B_i$ un domaine couvrant simplement Δ_1 ou Δ_2. On peut donc énoncer la proposition suivante:

Etant donnée une surface de Riemann simplement connexe et normalement exhaustible, considérons, sur la sphère sur laquelle elle est étalée, deux domaines de Jordan disjoints sans point commun avec l'ensemble lacunaire de (R): *l'un au moins de ces domaines est alors couvert par un feuillet simple de* (R) *et même par une infinité de tels feuillets si* (R) *n'a pas seulement un nombre fini de feuillets.*

Ce dernier cas se présente, en particulier, quand (R) est la surface de Riemann engendrée par une fonction entière d'ordre $< \frac{1}{2}$, ou bien par la fonction $\varphi(z)$ de M. M. Lusin et Priwaloff mentionnée plus haut.

(Reçu le 24 juillet 1939.)

---

[14]) Principes, chap. VI, p. 126.

[15]) Ce domaine ne pourra pas, en effet, sortir de B_i, car l'image de la frontière de B_i tend vers l'ensemble lacunaire; elle est donc hors de J pour i assez grand.