COMPOSITIO MATHEMATICA

B. V. BULGAKOV

Sur le mouvement troublé par des forces de haute fréquence

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 390-427

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__390_0>

Sur le mouvement troublé par des forces de haute fréquence

par

B. V. Bulgakov

Moscou

§ 1. Les équations différentielles du problème.

Considérons le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \ldots, x_L, t, \vartheta, \mu), \quad j = 1, \ldots, L \tag{1}$$

avec

$$\begin{aligned} f_j(x_1, \ldots, x_L, t, \vartheta, \mu) &= F_j(x_1, \ldots, x_L, t, \mu) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} [f_{jm}(x_1, \ldots, x_L, t, \mu) \cos m\vartheta &+ \varphi_{jm}(x_1, \ldots, x_L, t, \mu) \sin m\vartheta)], \end{aligned} \tag{2}$$

$$\vartheta = \frac{t - t_0}{\mu} + \vartheta_0, \tag{3}$$

où $x_1, \ldots, x_L$ sont des fonctions inconnues du temps t et μ un petit paramètre. En indiquant les variables contenues dans les fonctions $f_j(x_1, \ldots, x_L, t, \vartheta, \mu)$, $F_j(x_1, \ldots, x_L, t, \mu), \ldots$, on entend par t le temps qui y figure explicitement et non par le moyen de ϑ, bien que cet angle soit lui-même une fonction linéaire de t. La forme de cette dépendance explicite n'est soumise à aucune restriction; par exemple toutes les quantités indiquées peuvent être des fonctions périodiques de t d'une période indépendante de $2\pi\mu$.

Au type considéré appartiennent les équations du mouvement d'un système soumis à des forces pulsatrices et quelques équations qui se rencontrent en mécanique céleste. Sous la même forme se présentent les équations qu'on obtient en appliquant la méthode de la variation des constantes à certains problèmes des vibrations non linéaires; M.M. E.V. Appleton et van der Pol [1]) les ont intégrées approximativement au moyen des „équations

[1]) Phil. Mag. (6) 43 (1922), 177—193 et 700—719.

réduites". On en doit à M. P. Fatou [2]) et à MM. L. Mandelstam et N. Papalexi [3]) une analyse approfondie. Dans ce qui suit j'essaie de continuer ces études et d'indiquer un procédé convergent qui donnerait des solutions approchées progressives de ces équations, ou bien d'en ramener la recherche aux „équations réduites" de divers ordres; ces dernières sont plus faciles à traiter et déterminent les parties séculaires des variations des x_j provenant des termes $F_j(x_1, \ldots, x_L, t, \mu)$ ainsi que de l'effet accumulé des impulsions de haute fréquence.

Nous supposerons que toutes les fonctions $F_j(x_1, \ldots, x_L, t, \mu)$, $f_{jm}(x_1, \ldots, x_L, t, \mu)$, $\varphi_{jm}(x_1, \ldots, x_L, t, \mu), \ldots$ soient continues et admettent des dérivées partielles par rapport à $x_1, \ldots, x_L$, t jusqu'à un certain ordre lorsque ces variables restent comprises dans un domaine fermé S de l'espace-temps et le paramètre μ vérifie l'inégalité

$$\mu < \mu^*. \tag{4}$$

Nous admettrons, de plus, que dans les mêmes conditions les séries

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left|f_{jm}(x_1, \ldots, x_L, t, \mu)\right|, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \left|\varphi_{jm}(x_1, \ldots, x_L, t, \mu)\right| \tag{5}$$

convergent uniformément ainsi que les séries analogues formées avec les dérivées partielles. Il s'ensuit que les séries de Fourier à coefficients non constants, aux seconds membres des équations données, convergent absolument et uniformément dans S et pour toutes les valeurs de ϑ. Les sommes $f_j(x_1, \ldots, x_L, t, \vartheta, \mu)$ sont elles-mêmes des fonctions continues admettant des dérivées partielles par rapport à $x_1, \ldots, x_L$ et à t qui figure explicitement; on obtient ces dérivées en différentiant les séries terme à terme.

Supposons enfin qu'on ait trouvé des nombres A_j si grands et des nombres a_j, a_0 si petits que dans les conditions indiquées les fonctions $f_j(x_1, \ldots, x_L, t, \vartheta, \mu)$ et les dérivées qu'elles admettent vérifient les inégalités suivantes:

$$\left|f_j(x_1, \ldots, x_L, t, \vartheta, \mu)\right| < A_j, \tag{6}$$

$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\cdots+\chi+\omega} f_j}{\partial x_1^{\alpha} \cdots \partial x_L^{\chi}\, \partial t^{\omega}}(x_1, \ldots, x_L, t, \vartheta, \mu)\right| < \\ < \alpha! \cdots \chi!\, \omega!\, \frac{A_j}{a_1^{\alpha} \cdots a_L^{\chi}\, a_0^{\omega}}. \tag{7}$$

---

[2]) Bull. Soc. Math. France **56** (1928), 98–139.

[3]) Technical Physics of the USSR. **1** (1935), 415–428.

Pour que le problème soit posé d'une manière plus claire, considérons encore pour un moment un système quelconque d'équations ordinaires du premier ordre supposées résolues par rapport aux dérivées. Les valeurs considérables des seconds membres ou leur variation rapide et compliquée sont des causes générales qui le plus souvent rendent peu effective l'application directe des algorithmes ordinaires d'intégration numérique. La méthode classique de la variation des constantes a pour but principal, comme il est énoncé, par exemple, dans la Mécanique Analytique de Lagrange, d'atténuer cette difficulté par une transformation aux „variables lentes" déterminées par des équations dont les seconds membres sont assez petits en valeur absolue.

Dans le cas du problème actuel les valeurs absolues des seconds membres et de leurs dérivées par rapport à $x_1, \ldots, x_L, t$ sont bornées au moyen des inégalités précédentes, de sorte que l'obstacle principal consiste dans la présence des termes de haute fréquence; grâce à ces derniers les dérivées totales des seconds membres par rapport à t qui y figure explicitement et au moyen de ϑ peuvent avoir des valeurs considérables. Dans ces conditions, le remplacement des équations données par les équations réduites, dont les seconds membres sont débarrassés de tous les termes de haute fréquence, se présente comme un moyen de surmonter les difficultés.

§ 2. Le procédé de la formation des solutions approchées progressives.

Donnons à μ une valeur vérifiant l'inégalité (4) et divisons tout le domaine de variation de t à partir de t_0 en intervalles partiels (t_{i-1}, t_i) où $i = 1, 2, \ldots$ Les grandeurs de ces derniers doivent être des entiers multiples de $2\pi\mu$ ne dépassant pas $t^* = 2K\pi\mu$, où K est un entier fixe. Cette condition relative à l'étendue des intervalles est liée à la forme spéciale des fonctions $f_j(x_1, \ldots, x_L, t, \vartheta, \mu)$ et ne sera pas utilisée essentiellement jusqu'au paragraphe 4.

Pour l'instant nous allons exposer le procédé général de construction des fonctions $\xi_j^{(Q)}$ qui donneraient des expressions approchées des inconnues x_j. Nous déterminerons ces fonctions dans le $i^{\text{ième}}$ intervalle (t_{i-1}, t_i) à l'aide d'une forme spéciale de la méthode d'approximations successives au moyen d'un nombre fini Q d'itérations. Pour $t = t_0$ les fonctions $\xi_j^{(Q)}$ doivent prendre les valeurs initiales $\xi_{j0} = x_{j0}$ identiques à celles des inconnues

x_j. Les valeurs $\xi_{1,\, i-1}, \ldots, \xi_{L,\, i-1}$ de ces fonctions à la fin du $(i-1)^{\text{ième}}$ intervalle $(i=2, 3, \ldots)$ servent en même temps de valeurs initiales pour le $i^{\text{ième}}$ intervalle qui suit. Nous supposons naturellement que le calcul indiqué des fonctions $\xi_j^{(Q)}$ pour les valeurs croissantes de t ne continue que tant que le point $(\xi_1, \ldots, \xi_L, t)$ reste compris dans le domaine S.

Nous écrirons les fonctions $\xi_j^{(Q)}$ dans le $i^{\text{ième}}$ intervalle sous la forme

$$\xi_j^{(Q)} = \xi_{j,\, i-1} + \sum_{p=1}^{Q} \psi_j^{(p)}, \tag{8}$$

où les $\psi_j^{(p)}$ sont des fonctions de t que nous considérerons comme des quantités d'ordre p; la manière de les déterminer sera exposée plus loin. Pour avoir un symbole visible de cet ordre, on peut remplacer les formules précédentes par

$$\xi_j^{(Q)} = \xi_{j,\, i-1} + \sum_{p=1}^{Q} \psi_j^{(p)} \lambda^p, \tag{9}$$

où λ désigne un paramètre auxiliaire que nous poserons égal à l'unité après avoir achevé tous les calculs.

Introduisons encore une variable auxiliaire t' qui doit se confondre avec t pour $t = t_{i-1}$. Nous introduirons aussi le paramètre λ dans le système d'équations données et nous les écrirons sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \lambda f_j(x_1, \ldots, x_L, t', \vartheta, \mu), \\ \frac{dt'}{dt} &= \lambda; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

pour $\lambda = 1$ on reviendra au système primitif.

Pour faire connaître le procédé de détermination des fonctions $\xi_j^{(Q)}$ dans l'intervalle (t_{i-1}, t_i), il suffit de suivre en détail les calculs par lesquels on déduit les solutions approchées $\xi_j^{(Q)}$ d'ordre Q des solutions

$$\xi_j^{(Q-1)} = \xi_{j,\, i-1} + \sum_{p=1}^{Q-1} \psi_j^{(p)} \lambda^p \tag{11}$$

d'ordre $Q - 1$.

Nous développerons d'abord les seconds membres des équations (10) dans le voisinage du point $(\xi_{1,\, i-1}, \ldots, \xi_{L,\, i-1}, t_{i-1})$ en séries finies de Taylor.

Nous remplacerons ensuite les (10) par des équations approchées

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \lambda f_j + \sum_{q=1}^{Q-1} \frac{\lambda}{q!}\left[(x_1-\xi_{1,\,i-1})\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\right. \\ &\qquad\left. + (x_L-\xi_{L,\,i-1})\frac{\partial}{\partial x_L} + (t'-t_{i-1})\frac{\partial}{\partial t}\right]^{(q)} f_j, \\ \frac{dt'}{dt} &= \lambda, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

étant entendu que l'élévation aux puissances q des expressions entre crochets est à interpréter comme une opération symbolique; $\frac{\partial}{\partial t}$ désigne la différentiation par rapport à t qui figure explicitement. Nous convenons enfin d'écrire ici et dans ce qui suit les symboles des fonctions f_j et de leurs dérivées sans indiquer les lettres qu'elles contiennent si ces dernières sont $\xi_{1,\,i-1}, \ldots, \xi_{L,\,i-1}$, t_{i-1}, ϑ, μ. Les $L+1$ premières de ces quantités sont les valeurs initiales pour le $i^{\text{ième}}$ intervalle; l'angle ϑ varie rapidement et c'est pourquoi il y figure lui-même et non par le moyen de sa valeur initiale.

Remplaçons maintenant les x_j aux seconds membres des équations précédentes par les solutions approchées (11) d'ordre $Q-1$; conformément au principe fondamental de la méthode des approximations successives nous déterminerons ensuite les solutions approchées $\xi_j^{(Q)}$ d'ordre Q par les équations

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_j^{(Q)}}{dt} &= \lambda f_j + \sum_{q=1}^{Q-1}{}' \frac{\lambda}{q!}\left[\sum_{p=1}^{Q-1}\psi_1^{(p)}\lambda^p\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\right. \\ &\qquad\left. + \sum_{p=1}^{Q-1}\psi_L^{(p)}\lambda^p\frac{\partial}{\partial x_L} + (t-t_{i-1})\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right]^{(q)} f_j. \end{aligned} \tag{12'}$$

La dernière des équations (12) que nous n'avons pas reproduite, nous a servi à obtenir, au moyen de la condition initiale pour t', l'expression

$$t' - t_{i-1} = \lambda(t-t_{i-1}); \tag{13}$$

à l'aide de cette dernière nous avons éliminé t'. L'accent attaché au symbole Σ indique qu'après le développement des puissances des expressions entre crochets on ne doit retenir que les termes d'un ordre $\leqq Q-1$ en λ.

La $Q^{\text{ième}}$ itération s'achève par les quadratures par lesquelles on détermine les $\xi_j^{(Q)}$ des équations précédentes. Au début de l'intervalle, pour $t=t_{i-1}$, les valeurs des solutions approchées de tous ordres sont identiques et égales à $\xi_{j,\,i-1}$.

En portant les expressions (9) dans les premiers membres des équations (12') et en égalant les coefficients des diverses puissances de λ aux deux membres de chaque équation, nous obtenons les formules de récurrence:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\psi_j^{(1)}}{dt} = f_j, \\
&\frac{d\psi_j^{(2)}}{dt} = \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \psi_k^{(1)} + \frac{\partial f_j}{\partial t}(t - t_{i-1}), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{d\psi_j^{(p)}}{dt} = \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \psi_k^{(p-1)} + U_j^{(p)}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Les $U_j^{(p)}$ $(p > 2)$ sont des polynomes à coefficients positifs par rapport aux fonctions f_j et leurs dérivées jusqu'au $(p-1)^{\text{ième}}$ ordre inclusivement calculées au point $(\xi_{1,\, i-1}, \dots, \xi_{L,\, i-1}, t_{i-1})$, par rapport aux fonctions $\psi_k^{(q)}$ jusqu'au $(p-2)^{\text{ième}}$ ordre inclusivement et par rapport à la différence $t - t_{i-1}$. Toutes les fonctions $\psi_j^{(p)}$ doivent s'annuler au début de l'intervalle pour $t = t_{i-1}$. On s'assure aisément que les formules de récurrence ne dépendent pas de l'ordre des approximations qui sont formées des fonctions $\psi_j^{(p)}$.

En posant $\lambda = 1$ nous obtenons pour $\xi_j^{(Q)}$ les expressions finales de la forme (8) qui déterminent les solutions approchées d'ordre Q pour le $i^{\text{ième}}$ intervalle. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que le nombre entier Q soit le même pour tous les intervalles; il pourrait fort bien être défini comme une fonction du numéro i de l'intervalle.

Au paragraphe suivant nous allons évaluer le degré d'approximation des solutions exactes par les fonctions $\xi_j^{(Q)}$. Mais pour cela il est nécessaire de trouver des limites supérieures pour les $\psi_j^{(p)}$. Dans ce but remarquons que des inégalités (7) il s'ensuit que, a fortiori,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial^{\alpha + \cdots + \chi + \omega} f_j}{\partial x_1^{\alpha} \cdots \partial x_L^{\chi}\, \partial t^{\omega}} (x_1, \dots, x_L, t, \vartheta, \mu) \right| < \\
&\qquad\qquad < (\alpha + \cdots + \chi + \omega)!\, \frac{A_j}{a_1^{\alpha} \cdots a_L^{\chi}\, a_0^{\omega}}.
\end{aligned} \tag{15}$$

On en déduit que les valeurs absolues des coefficients des séries finies aux seconds membres des équations (12) sont inférieures à celles qu'on obtient en traitant par la même méthode le système auxiliaire

$$\frac{dX_j}{dt} = \lambda A_j + \sum_{q=1}^{\infty} \lambda \left(\frac{X_1 - \xi_{1,\,i-1}}{a} + \cdots + \frac{X_L - \xi_{L,\,i-1}}{a} + \frac{t' - t_{i-1}}{a_0} \right)^q A_j.$$

$$\frac{dt'}{dt} = \lambda,$$

ou, d'autant plus, le système

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX_j}{dt} &= \lambda \left[A + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{X_1 - \xi_{1,\,i-1}}{a} + \cdots + \frac{X_L - \xi_{L,\,i-1}}{a} + \frac{t' - t_{i-1}}{a_0} \right)^q \left(A + \frac{1}{L} \frac{a}{a_0} \right) \right] \\ \frac{dt'}{dt} &= \lambda, \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

A et a étant certains nombres vérifiant les inégalités

$$A_j < A, \; a_j > a. \qquad (17)$$

Pour les valeurs non négatives des accroissements $X_j - \xi_{j,\,i-1}$, $t' - t_{i-1}$ les séries aux seconds membres convergent dans le domaine polyédrique

$$\frac{X_1 - \xi_{1,\,i-1}}{a} + \cdots + \frac{X_L - \xi_{L,\,i-1}}{a} + \frac{t' - t_{i-1}}{a_0} < 1.$$

Supposons que les conditions initiales correspondant à $t = t_{i-1}$ pour le système auxiliaire soient choisies de la même manière qu'auparavant. On peut démontrer sans peine que les fonctions $\Psi_j^{(p)}$ du système auxiliaire analogues aux $\psi_j^{(p)}$ sont des fonctions dominantes par rapport à ces dernières; en d'autres termes on a $|\psi_j^{(p)}| < \Psi_j^{(p)}$ pour toutes les valeurs de t comprises dans l'intervalle (t_{i-1}, t_i).

En effet les fonctions $\Psi_j^{(1)}$ par exemple vérifient les équations

$$\frac{d\Psi_j^{(1)}}{dt} = A$$

et s'annulent pour $t = t_{i-1}$.

En se reportant aux équations analogues pour les $\psi_j^{(1)}$ on s'assure que $\dfrac{d\Psi_j^{(1)}}{dt}$ et $\Psi_j^{(1)}$ sont des fonction dominantes par rapport à $\dfrac{d\psi_j^{(1)}}{dt}$ et $\psi_j^{(1)}$. Le raisonnement peut être continué de proche en proche de sorte qu'on est ramené à la conclusion que pour toutes valeurs de p les $\dfrac{d\Psi_j^{(p)}}{dt}$ et $\Psi_j^{(p)}$ sont des fonctions dominantes par rapport à $\dfrac{d\psi_j^{(p)}}{dt}$ et $\psi_j^{(p)}$. Il est évident que toutes les fonctions $\Psi_j^{(p)}$ ayant le même indice supérieur sont égales entre elles; par suite on peut écrire plus simplement $\Psi^{(p)}$ et

$$|\psi_j^{(p)}| < \Psi^{(p)}, \quad \left|\frac{d\psi_j^{(p)}}{dt}\right| < \frac{d\Psi^{(p)}}{dt}. \tag{18}$$

On voit aussi que les $\Psi^{(p)}$ sont des polynomes par rapport à $t - t_{i-1}$; on en peut obtenir les expressions explicites si l'on se sert de ce que le système auxiliaire a été choisi de telle manière qu'il s'intègre aisément à l'aide des fonctions élémentaires.

A cet effet nous posons

$$\sigma = \frac{X_1 - \xi_{1,\,i-1}}{a} + \cdots + \frac{X_L - \xi_{L,\,i-1}}{a} + \frac{t' - t_{i-1}}{a_0} \tag{19}$$

et nous écrivons (16) sous la forme

$$\frac{d(X_j - \xi_{j,\,i-1})}{dt} = \lambda\left[A + \left(A + \frac{1}{L}\frac{a}{a_0}\right)\frac{\sigma}{1-\sigma}\right],$$

$$\frac{d(t'-t)}{dt} = \lambda.$$

De ces équations on tire

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{L}{a}\lambda\left[A + \left(A + \frac{1}{L}\frac{a}{a_0}\right)\frac{\sigma}{1-\sigma}\right] + \frac{1}{a_0}\lambda$$

ou bien

$$\frac{d\sigma}{dt} = \lambda\frac{\dfrac{LA}{a} + \dfrac{1}{a_0}}{1-\sigma},$$

σ s'annulant pour $t = t_{i-1}$. Les variables peuvent être séparées, et nous obtenons

$$\frac{1}{2}[(1-\sigma)^2 - 1] = -\lambda\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right)(t - t_{i-1}),$$

$$\sigma = 1 - \sqrt{1 - 2\lambda\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right)(t - t_{i-1})},$$

où en vertu de la condition $\sigma = 0$ pour $t = t_{i-1}$ on a attribué au radical le signe —. Si λ vérifie l'inégalité

$$\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right)(t - t_{i-1})\,\lambda \leqq \frac{1}{2}, \tag{20}$$

on peut développer σ en série comme il suit

$$\sigma = \left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)(t-t_{i-1})\,\lambda + \frac{1}{2}\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)^2 (t-t_{i-1})^2\lambda^2 + \\ + \cdots + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdots(2p-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)^p (t-t_{i-1})^p\lambda^p + \cdots$$

D'autre part, il est évident que

$$X_1 - \xi_{1,\,i-1} = \cdots = X_L - \xi_{L,\,i-1},$$

et les relations (13), (19) donnent

$$\sigma = L\frac{X_j - \xi_{j,\,i-1}}{a} + \lambda\frac{t - t_{i-1}}{a_0},$$

$$X_j = \xi_{j,\,i-1} + \frac{a}{L}\left[\sigma - \frac{1}{a_0}(t-t_{i-1})\lambda\right] = \\ = \xi_{j,\,i-1} + A(t-t_{i-1})\lambda + \frac{a}{L}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)^2 (t-t_{i-1})^2\lambda^2 + \right. \\ \left. + \cdots + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdots(2p-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)^p (t-t_{i-1})^p\lambda^p + \cdots\right].$$

Ces séries représentent les solutions X_j si la condition (20) est remplie. Nous les écrivons sous la forme

$$X_j = \xi_{j,\,i-1} + \sum_{p=1}^{\infty} \Psi^{(p)}\lambda^p \tag{21}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} \Psi^{(1)} &= A(t-t_{i-1}), \\ \Psi^{(p)} &= \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdots(2p-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}\,\frac{a}{L}\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)^p (t-t_{i-1})^p, \qquad p \geqq 2. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Les $\Psi^{(p)}$ ne dépendant pas de λ, il s'ensuit que les inégalités (18) et les expressions (22) des $\Psi^{(p)}$ que nous venons d'obtenir ne dépendent pas de la convergence des séries (21). Nous avons donc l'évaluation cherchée des fonctions $\psi_j^{(p)}$.

Dans le cas où les $f_j(x_1, \ldots, x_L, t, \vartheta, \mu)$ admettent des dérivées partielles de tous les ordres vérifiant les conditions (7) en chaque point du domaine S, ces fonctions peuvent être développées en séries infinies de Taylor, qui convergent à l'intérieur de chaque „prismatoïde"

$$|\, x_j - \xi_{j,\,i-1} \,| < a_j, \ |\, t - t_{i-1} \,| < a_0$$

ou de sa partie contenue dans S. Par principe le procédé de la détermination des solutions approchées $\xi_j^{(Q)}$ dans chaque intervalle

(t_{i-1}, t_i) peut être continué à l'infini. En posant $\lambda = 1$ on voit que si l'on suppose de plus que

$$\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)(t_i-t_{i-1}) < \frac{1}{2}, \tag{23}$$

les séries

$$\xi_{j,\,i-1} + \sum_{p=1}^{\infty} \psi_j^{(p)}$$

et celles qu'on obtient en les dérivant terme à terme sont uniformément et absolument convergentes dans l'intervalle (t_{i-1}, t_i); elles ont en effet pour majorantes des séries convergentes à termes constants positifs qu'on peut former si l'on prend les $\Psi^{(p)}$ et leurs dérivées premières pour $t = t_i$. Il devrait s'ensuivre que pour les valeurs initiales $\xi_{j,\,i-1}$ données les solutions peuvent être représentées dans chaque intervalle partiel au moyen des séries convergentes des fonctions $\psi_j^{(p)}$.

Mais en réalité nous ne pouvons obtenir pour chaque intervalle partiel que des solutions approchées $\xi_j^{(Q)}$ d'un certain ordre fini. Les valeurs des inconnues à la fin de l'intervalle qui sont en même temps les valeurs initiales pour l'intervalle suivant contiendront certainement des erreurs. Ces erreurs iront en s'augmentant au cours du calcul relatif à l'intervalle suivant etc.

§ 3. L'évaluation de la précision et l'examen de la convergence des solutions approchées.

Il suit de ce qui a été dit plus haut que nous avons maintenant à nous rendre compte du caractère de l'accumulation des erreurs pendant le passage d'un intervalle à l'autre et à évaluer les différences entre les solutions approchées $\xi_j^{(Q)}$ et les solutions exactes x_j dans tout le domaine de variation de t.

En général nous ne considérons simultanément que des solutions approchées d'un ordre Q bien déterminé et c'est pourquoi nous nous permettrons d'omettre l'indice supérieur et d'écrire pour abréger ξ_j au lieu de $\xi_j^{(Q)}$.

Supposons que le prismatoïde

$$|\, x_j - x_{j0} \,| < C_j, \quad t_0 \leqq t < t_0 + D \tag{24}$$

appartienne au domaine S et que nous nous bornions à calculer les fonctions ξ_j dans le plus grand intervalle (t_0, t_0+E-0) où le point $(\xi_1, \ldots, \xi_L, t)$ reste compris dans un autre prismatoïde

$$|\xi_j - x_{j0}| < C_j - c_j,\ t_0 \leqq t < t_0 + D, \tag{25}$$

les nombres c_j vérifiant les inégalités

$$0 < c_j < \frac{1}{2} C_j. \tag{26}$$

Par le symbole (t_0, t_0+E-0), nous entendons l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles

$$t_0 \leqq t < t_0 + E.$$

Les fonctions ξ_j étant bien déterminées, on peut trouver un nombre E correspondant à chaque système de nombres c_j aussi petits qu'on veut.

En supprimant l'indice supérieur de ξ_j, on peut écrire les équations (12′) sous la forme

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \lambda f_j(\xi_1, \ldots, \xi_L, t', \vartheta, \mu) - \lambda\, \chi_j(t)$$

avec

$$\chi_j(t) = f_j(\xi_1, \ldots, \xi_L, t', \vartheta, \mu) - f_j - \sum_{q=1}^{Q-1}{}' \frac{1}{q!} \left[\sum_{p=1}^{Q-1} \psi_1^{(p)} \lambda^p \frac{\partial}{\partial x_1} + \right.$$
$$\left. + \cdots + \sum_{p=1}^{Q-1} \psi_L^{(p)} \lambda^p \frac{\partial}{\partial x_L} + (t - t_{i-1})\lambda \frac{\partial}{\partial t} \right]^{(q)} f_j.$$

Faisons usage de la formule finie de Taylor

$$f_j(\xi_1, \ldots, \xi_L, t', \vartheta, \mu) = f_j +$$
$$+ \sum_{q=1}^{Q-1} \frac{1}{q!} \left[(\xi_1 - \xi_{1,i-1}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (\xi_L - \xi_{L,i-1}) \frac{\partial}{\partial x_L} + (t' - t_{i-1}) \frac{\partial}{\partial t} \right]^{(q)} f_j +$$
$$+ \frac{1}{Q!} \left[(\xi_1 - \xi_{1,i-1}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (\xi_L - \xi_{L,i-1}) \frac{\partial}{\partial x_L} + (t' - t_{i-1}) \frac{\partial}{\partial t} \right]^{(Q)} f_j',$$

où

$$f_j' = f_j[\xi_{1,i-1} + \theta(\xi_1 - \xi_{1,i-1}), \ldots, \xi_{L,i-1} +$$
$$+ \theta(\xi_L - \xi_{L,i-1}),\ t_{i-1} + \theta(t' - t_{i-1}),\ \vartheta, \mu],$$
$$0 \leqq \theta \leqq 1.$$

Remplaçant les $\xi_j - \xi_{j,i-1}$ et $t' - t_{i-1}$ par leurs expressions tirées des formules (9) et (13), on obtient

$$\chi_j(t) =$$

$$= \sum_{q=1}^{Q-1}{}'' \frac{1}{q!}\left[\sum_{p=1}^{Q} \psi_1^{(p)}\lambda^p \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \sum_{p=1}^{Q} \psi_L^{(p)}\lambda^p \frac{\partial}{\partial x_L} + (t-t_{i-1})\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right]^{(q)} f_j +$$

$$+ \frac{1}{Q!}\left[\sum_{p=1}^{Q} \psi_1^{(p)}\lambda^p \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \sum_{p=1}^{Q} \psi_L^{(p)}\lambda^p \frac{\partial}{\partial x_L} + (t-t_{i-1})\lambda\frac{\partial}{\partial t}\right]^{(Q)} f'_j.$$

Le double accent attaché à Σ indique qu'après le développement des puissances des expressions entre les crochets il faut supprimer tous les termes de l'ordre $Q-1$ et des ordres inférieurs en λ. Utilisant les inégalités (15), (17), et (18) nous obtenons

$$|\chi_j(t)| < \sum_{q=1}^{Q}{}''\left[\sum_{p=1}^{Q} \Psi^{(p)}\lambda^p \frac{1}{a_1} + \cdots + \sum_{p=1}^{Q} \Psi^{(p)}\lambda^p \frac{1}{a_L} + (t-t_{i-1})\lambda\frac{1}{a_0}\right]^q A_j <$$

$$< A_j \sum_{q=1}^{Q}{}''\left[\frac{L}{a}\sum_{p=1}^{Q} \Psi^{(p)}\lambda^p + \frac{1}{a_0}(t-t_{i-1})\lambda\right]^q.$$

Si l'on pose

$$K_1 = \frac{A}{\dfrac{LA}{a}+\dfrac{1}{a_0}}\,\frac{1}{2}, \tag{27}$$

$$K_p = \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdots(2p-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}\left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{a}{L}, \qquad p = 2, 3, \ldots, \tag{28}$$

les expressions des $\Psi^{(p)}$ peuvent s'écrire

$$\Psi^{(p)} = K_p\, 2^p \left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)^p (t-t_{i-1})^p, \qquad p = 1, 2, \ldots. \tag{29}$$

En désignant de plus par $\varkappa$ un nombre vérifiant l'inégalité

$$2\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right) t^* \leqq \varkappa \tag{30}$$

où t^* est le plus grand des intervalles $t_i - t_{i-1}$ on a

$$|\chi_j(t)| < A_j \sum_{q=1}^{Q}{}''\left\{\frac{L}{a}\sum_{p=1}^{Q} K_p\left[\frac{2\left(\dfrac{LA}{a}+\dfrac{1}{a_0}\right)(t-t_{i-1})}{\varkappa}\right]^p \varkappa^p\lambda^p + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2a_0\left(\dfrac{LA}{a}+\dfrac{1}{a_0}\right)}\,\frac{2\left(\dfrac{LA}{a}+\dfrac{1}{a_0}\right)(t-t_{i-1})}{\varkappa}\varkappa\lambda\right\}^q;$$

l'expression entre crochets ne dépassant l'unité, il vient

$$|\chi_j(t)| < \delta_Q \left[\frac{2\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)t^*}{\varkappa}\right]^Q,$$

où

$$\delta_Q = A \sum_{q=1}^{Q}{}'' \left[\frac{L}{a}\sum_{p=1}^{Q} K_p \varkappa^p \lambda^p + \frac{\varkappa\lambda}{2a_0\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)}\right]^q.$$

En posant $\lambda = 1$ nous obtenons ensuite les équations

$$\frac{d\xi_j}{dt} = f_j(\xi_1, \ldots, \xi_L, t, \vartheta, \mu) - \chi_j(t) \tag{31}$$

avec les évaluations

$$|\chi_j(t)| < \varepsilon_Q \left[\frac{2\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)t^*}{\varkappa}\right]^Q \tag{32}$$

où

$$\varepsilon_Q = A \sum_{q=1}^{Q}{}'' \left[\frac{L}{a}\sum_{p=1}^{Q} K_p \varkappa^p + \frac{\varkappa}{2a_0\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)}\right]^q; \tag{33}$$

l'accent double dans cette formule peut être regardé comme indiquant la suppression des termes d'ordre $Q-1$ et d'ordres inférieurs en $\varkappa$.

Dans le cas où

$$\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)t^* \leqq \frac{1}{2} \tag{34}$$

il est permis de poser $\varkappa = 1$ de sorte que

$$|\chi_j(t)| < \varepsilon_Q \left[2\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)t^*\right]^Q. \tag{35}$$

Nous observons de plus que les séries $\xi_{j,\,i-1} + \sum_{p=1}^{\infty} K_p$, qu'on déduit de (21) sous la condition

$$2\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)(t-t_{i-1})\lambda = 1$$

convergent; leurs sommes sont égales à ce que deviennent les expressions

$$\xi_{j,\,i-1} + \frac{a}{L}\left[\sigma - \frac{1}{a_0}\,(t - t_{i-1})\lambda\right]$$

si l'on pose

$$t - t_{i-1} = \frac{1}{2\lambda\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right)}.$$

Autrement dit

$$\sum_{p=1}^{\infty} K_p = \frac{a}{L}\left[1 - \frac{1}{2a_0\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right)}\right],$$

et nous obtenons définitivement pour le cas actuel

$$\varepsilon_Q < A \sum_{q=1}^{Q}\left[\frac{L}{a}\sum_{p=1}^{Q} K_p + \frac{1}{2a_0\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right)}\right]^q$$

ou

$$\varepsilon_Q < AQ. \tag{36}$$

Nous avons pour les fonctions d'approximation ξ_j les équations différentielles (31) dont les seconds membres diffèrent de ceux des équations exactes par les termes $\chi_j(t)$. Les valeurs obtenues pour ces termes nous donnent le moyen de comparer les solutions des deux systèmes d'équations, c'est à dire les fonctions ξ_j et les solutions exactes x_j. Comme il a été dit plus haut, les fonctions correspondantes de ces deux groupes prennent pour $t = t_0$ les mêmes valeurs initiales. Pour effectuer la comparaison indiquée on peut se servir de la méthode d'approximations successives en adoptant pour les approximations d'ordre nul les fonctions ξ_j. Cette fois la méthode s'applique d'une manière plus simple dans tout le domaine de variation de t et à seule fin d'évaluer les différences $\xi_j - x_j$; ce n'est pas donc une méthode de calcul effectif, qu'on pourrait recommander pour les problèmes concrets.

Les équations (31) peuvent s'écrire

$$\xi_j = x_{j0} + \int_{t_0}^{t} f_j(\xi_1, \ldots, \xi_L, t, \vartheta, \mu)dt - \int_{t_0}^{t} \chi_j(t)\,dt.$$

D'autre part, nous obtenons les premières approximations de la nouvelle suite en remplaçant x_j par ξ_j dans les seconds membres des équations exactes:

$$x_j^{(1)} = x_{j0} + \int_{t_0}^{t} f_j(\xi_1, \ldots, \xi_L, t, \vartheta, \mu)\, dt.$$

Il vient

$$\xi_j - x_j^{(1)} = -\int_{t_0}^{t} \chi_j(t)\, dt$$

et en vertu de (32)

$$|\,\xi_j - x_j^{(1)}\,| < \varepsilon_Q \left[\frac{2\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right) t^*}{\varkappa}\right]^Q (t-t_0). \tag{37}$$

Nous avons ensuite

$$x_j^{(1)} - x_{j0} = x_j^{(1)} - \xi_j + \xi_j - x_{j0},$$

$$|\,x_j^{(1)} - x_{j0}\,| < \varepsilon_Q \left[\frac{2\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right) t^*}{\varkappa}\right]^Q (t-t_0) + C_j - c_j$$

et pour que le point $(x_1^{(1)}, \ldots, x_L^{(1)}, t)$ reste dans le prismatoïde (24) il suffit de satisfaire à la condition

$$\varepsilon_Q \left[\frac{2\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right) t^*}{\varkappa}\right]^Q (t-t_0) < c, \tag{38}$$

le nombre c vérifiant l'inégalité

$$c_j > c \tag{39}$$

pour toutes les valeurs de j.

Supposons que la condition (38) soit remplie et calculons les secondes approximations

$$x_j^{(2)} = x_{j0} + \int_{t_0}^{t} f_j(x_1^{(1)}, \ldots, x_L^{(1)}, t, \vartheta, \mu)\, dt$$

en déduisant de là les formules

$$\xi_j - x_j^{(2)} = -\int_{t_0}^{t} \chi_j(t)\, dt + \int_{t_0}^{t} [\, f_j(\xi_1, \ldots, \xi_L, t, \vartheta, \mu) -$$

$$- f_j(x_1^{(1)}, \ldots, x_L^{(1)}, t, \vartheta, \mu)]\, dt.$$

Des inégalités (7) prenons celles qui concernent les dérivées premières; on en déduit les conditions de Lipschitz

$$| f_j(\xi_1, \ldots, \xi_L, t, \vartheta, \mu) - f_j(x_1, \ldots, x_L, t, \vartheta, \mu) | < \sum_{k=1}^{L} \frac{A_j}{a_k} | \xi_k - x_k |, \quad (40)$$

où $(\xi_1, \ldots, \xi_L, t)$ et $(x_1, \ldots, x_L, t)$ sont deux points du domaine S ayant la même $(L+1)^{\text{ième}}$ coordonnée t. Il suit que dans le cas actuel

$$| f_j(\xi_1, \ldots, \xi_L, t, \vartheta, \mu) - f_j(x_1^{(1)}, \ldots, x_L^{(1)}, t, \vartheta, \mu) | <$$

$$< \sum_{k=1}^{L} \frac{A_j}{a_k} | \xi_k - x_k^{(1)} | < \sum_{k=1}^{L} \frac{A_j}{a_k} \varepsilon_Q \left[\frac{2\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right) t^*}{\varkappa} \right]^Q (t-t_0) <$$

$$< \varepsilon_Q \left[\frac{2\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right) t^*}{\varkappa} \right]^Q \frac{LA}{a} (t-t_0).$$

Par conséquent

$$| \xi_j - x_j^{(2)} | < \varepsilon_Q \left[\frac{2\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right) t^*}{\varkappa} \right]^Q \left[\frac{t-t_0}{1} + \frac{LA}{a} \frac{(t-t_0)^2}{1 \cdot 2} \right] \quad (41)$$

et pour que le point $(x_1^{(2)}, \ldots, x_L^{(2)}, t)$ reste compris dans le prismatoïde (24) il suffit de satisfaire à la condition

$$\varepsilon_Q \left[\frac{2\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right) t^*}{\varkappa} \right]^Q \left[\frac{t-t_0}{1} + \frac{LA}{a} \frac{(t-t_0)^2}{1 \cdot 2} \right] < c, \quad (42)$$

l'inégalité (38) étant alors remplie d'elle-même.

Un calcul analogue nous donnera les approximations suivantes jusqu'à l'ordre quelconque r. Si r tend vers ∞ les $x_j^{(r)}$ ont pour limites les solutions exactes x_j et nous obtenons l'évaluation cherchée:

$$| \xi_j - x_j | < \varepsilon_Q \left[\frac{2\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right) t^*}{\varkappa} \right]^Q \left[\frac{t-t_0}{1} + \frac{LA}{a} \frac{(t-t_0)^2}{1 \cdot 2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{LA}{a}\right)^2 \frac{(t-t_0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdot \;\cdot \right]$$

ou

$$| \xi_j - x_j | < \varepsilon_Q \left[\frac{2\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right) t^*}{\varkappa} \right]^Q \frac{a}{LA} \left[-1 + \exp \frac{LA}{a} (t-t_0) \right]. \tag{43}$$

Cette évaluation est applicable tant que

$$\varepsilon_Q \left[\frac{2\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right) t^*}{\varkappa} \right]^Q \frac{a}{LA} \left[-1 + \exp \frac{LA}{a} (t-t_0) \right] < c. \tag{44}$$

D'après l'hypothèse faite plus haut la variable t doit en même temps appartenir au plus grand intervalle (t_0, t_0+E-0) pour lequel le point $(\xi_1, \ldots, \xi_L, t)$ reste compris dans le prismatoïde (25).

Le nombre E au moyen duquel nous avons borné le domaine de variation de t dépend du système de fonctions d'approximation ξ_j d'ordre donné. On peut se débarasser de cette dépendance par le raisonnement suivant.

Soit F un nombre vérifiant l'inégalité

$$\varepsilon_Q \left[\frac{2\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right) t^*}{\varkappa} \right]^Q \frac{a}{LA} \left(-1 + \exp \frac{LA}{a} F \right) < c, \tag{45}$$

tel que dans l'intervalle (t_0, t_0+F-0) les solutions exactes x_j existent et que le point $(x_1, \ldots, x_L, t)$ reste compris dans le prismatoïde

$$| x_j - x_{j0} | < C_j - 2c_j, \ t_0 \leqq t < t_0 + D. \tag{46}$$

Dans l'intervalle (t_0, t_0+F-0) l'inégalité (44) est toujours satisfaite.

Si t appartient à l'intervalle (t_0, t_0+E-0) aussi bien qu'à l'intervalle (t_0, t_0+F-0), les inégalités (43) et (44) sont valables à la fois et il en résulte que

$$| \xi_j - x_j | < c. \tag{47}$$

Nous allons démontrer qu'en raison de la continuité la condition $t_0 \leqq t < t_0 + E$ est alors superflue et peut être négligée.

En effet, quand la variable t commence à croître à partir de sa valeur initiale t_0, elle reste nécessairement à la fois à l'intérieur des intervalles (t_0, t_0+E-0) et (t_0, t_0+F-0). Pendant ce temps le point $(\xi_1, \ldots, \xi_L, t)$ se meut à l'intérieur du prismatoïde (25) tandis que le point $(x_1, \ldots, x_L, t)$ reste compris dans le prismatoïde (46), les valeurs absolues des différences entre les coordonnées correspondantes ξ_j et x_j étant moindres que c.

D'ailleurs, il est impossible que l'instant $t_0 + E$ soit antérieur à l'instant $t_0 + F$. Car dans ce cas le point $(\xi_1, \ldots, \xi_L, t)$ au moment $t_0 + E$ atteindrait pour la première fois la surface de son prismatoïde, et comme nous aurions nécessairement $t_0 + E < t_0 + F \leqq t_0 + D$, une des conditions $| \xi_j - x_{j0} | < C_j - c_j$ au moins se trouverait violée. Quant au point $(x_1, \ldots, x_L, t)$, il se trouverait encore à ce même moment $t_0 + E$ à l'intérieur de son prismatoïde et nous aurions $| x_j - x_{j0} | < C_j - 2c_j$. Il s'ensuit que pour une valeur au moins de l'indice j serait vérifiée l'inégalité $| \xi_j - x_j | > c_j > c$; en raison de la continuité cette inégalité se trouverait aussi satisfaite à un certain moment précédent t très voisin pour lequel $t < t_0 + E < t_0 + F$. D'autre part et d'après ce qui a été dit plus haut, pour un tel moment on doit avoir $| \xi_j - x_j | < c$; c'est parce que ce moment appartient à la fois aux intervalles (t_0, t_0+E-0), (t_0, t_0+F-0). Nous sommes arrivés à une contradiction ce qui nous force d'adopter la relation $t_0 + E \geqq t_0 + F$.

La condition

$$t_0 \leqq t < t_0 + F$$

entraîne donc d'elle-même l'inégalité $t_0 \leqq t < t_0 + E$ et cette dernière peut être en effet négligée. Dans ces conditions les évaluations (43) et (47) peuvent être appliquées.

Après avoir obtenu ces résultats on est en état de démontrer que les solutions approchées ξ_j convergent uniformément vers les solutions exactes x_j et même en deux sens différents: les valeurs absolues des différences $\xi_j - x_j$ peuvent être rendues aussi petites que l'on veut, soit par diminution de t^*, soit en augmentant l'ordre Q de l'approximation.

Pour démontrer la première partie de cette proposition considérons un intervalle arbitraire (t_0, t_0+G-0) et choisissons t^* de manière que

$$\varepsilon_Q \left[\frac{2\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right) t^*}{\varkappa} \right]^Q \frac{a}{LA} \left(-1 + \exp \frac{LA}{a} G \right) < c, \tag{48}$$

$$\varepsilon_Q \left[\frac{2\left(\frac{LA}{a} + \frac{1}{a_0}\right) t^*}{\varkappa} \right]^Q \frac{a}{LA} \left(-1 + \exp \frac{LA}{a} G \right) < \eta, \tag{49}$$

où c garde son sens, η étant un nombre positif donné à l'avance et aussi petit qu'on veut. Il est toujours possible de choisir le nombre $t^* = 2K\pi\mu$ de la manière indiquée; à cet effet on peut commencer par diminuer le nombre entier K et prendre $K = 1$ si c'est nécessaire; il faut continuer en diminuant μ si l'opération précédente ne suffit pas.

Soit maintenant F un nombre ne dépassant G et tel que dans l'intervalle (t_0, t_0+F-0) les solutions exactes x_j correspondant à la valeur adoptée de μ existent et que le point $(x_1, \ldots, x_L, t)$ reste compris dans le prismatoïde (46). Sous ces hypothèses l'inégalité (45) se trouve vérifiée et le nombre F satisfait à toutes les conditions auxquelles nous l'avons soumis à la page [17] 406. Dans l'intervalle (t_0, t_0+F-0) nous avons l'évaluation (43). En tenant compte de l'inégalité $F \leqq G$ et de l'inégalité (49), nous obtenons

$$|\,\xi_j - x_j\,| < \eta, \tag{50}$$

ce qui démontre la première partie de notre proposition.

Pour démontrer la deuxième partie, supposons que t^* satisfasse à l'inégalité.

$$\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right) t^* < \frac{1}{2}. \tag{51}$$

Cette condition suffit pour atteindre chaque degré de précision désiré au moyen d'une augmentation convenable de l'ordre d'approximation Q sans aucune variation ultérieure de t^*. En effet, dans ce cas il est permis de poser $\varkappa = 1$ et, d'après (36), de remplacer dans toutes les inégalités ε_Q par AQ. La démonstration se développe de la même manière que plus haut avec la seule différence que cette fois il faut vérifier les inégalités

$$AQ\left[2\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right) t^*\right]^Q \frac{a}{LA}\left(-1+\exp\frac{LA}{a}G\right) < c, \tag{52}$$

$$AQ\left[2\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right) t^*\right]^Q \frac{a}{LA}\left(-1+\exp\frac{LA}{a}G\right) < \eta, \tag{53}$$

en augmentant convenablement le nombre Q. C'est toujours possible car la suite

$$2\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)t^*,\ 2\left[2\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)t^*\right]^2, \ldots,\ Q\left[2\left(\frac{LA}{a}+\frac{1}{a_0}\right)t^*\right]^Q, \ldots$$

a sa limite nulle quand Q croît indéfiniment.

Nous voyons donc qu'en effet *on peut choisir les nombres K, μ*

si petits ou bien (sous la condition (51)) *l'ordre d'approximation* Q *si grand que les fonctions* ξ_j *représentent les solutions exactes* x_j *avec un degré de précision arbitraire dans un intervalle* (t_0, t_0+G-0) *donné ou au moins dans la partie de cet intervalle où le point* $(x_1, \ldots, x_L, t)$ *reste compris dans le prismatoïde* (46).

L'épaisseur $2c_j$ de chaque paroi du prismatoïde peut être prise aussi petite qu'on veut pourvu que son contour extérieur $| x_j - x_{j0} | = C_j$ appartienne au domaine S.

La condition de la convergence (51) est indépendante de la grandeur de l'intervalle, ce qui fait une importante différence entre la méthode actuelle et le développement direct suivant les puissances d'un paramètre, auquel correspond le théorème de Poincaré.

§ 4. Calcul effectif des solutions approchées du premier et du second ordre.

Utilisons les expressions (2) et (3) des $f_j(x_1, \ldots, x_L, t, \vartheta, \mu)$ et de ϑ, la première formule (14) et la condition d'après laquelle toutes les fonctions $\psi_j^{(p)}$ doivent s'annuler pour $t = t_0$; tenons aussi compte de l'hypothèse de la page [3], 392 concernant les grandeurs des intervalles (t_{i-1}, t_i); les séries qui représentent les f_j étant absolument et uniformément convergentes pour toutes les valeurs de ϑ, on peut les intégrer terme à terme et nous obtenons pour le $i^{\text{ième}}$ intervalle (t_{i-1}, t_i) les développements suivants des $\psi_j^{(1)}$:

$$\begin{aligned}\psi_j^{(1)} = F_j(t-t_{i-1}) + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\varphi_{jm} \cos m\vartheta_0 - f_{jm} \sin m\vartheta_0) + \\ + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (-\varphi_{jm} \cos m\vartheta + f_{jm} \sin m\vartheta).\end{aligned} \tag{54}$$

Les quatre séries au second membre de chaque expression sont elles-mêmes absolument et uniformément convergentes parce qu'elles ont pour majorantes les séries convergentes

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left| f_{jm}(\xi_{1,\, i-1}, \ldots, \xi_{L,\, i-1}, t_{i-1}, \mu) \right|, \\ &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left| \varphi_{jm}(\xi_{1,\, i-1}, \ldots, \xi_{L,\, i-1}, t_{i-1}, \mu) \right|.\end{aligned} \tag{55}$$

Entendant par $\xi_j(t)$ les solutions approchées du premier ordre et indiquant d'une manière détaillée les variables contenues dans les fonctions, nous avons pour le même intervalle:

$$\begin{aligned}\xi_j(t) &= \xi_{j,\,i-1} + F_j(\xi_{1,\,i-1}, \ldots, \xi_{L,\,i-1}, t_{i-1}, \mu)(t-t_{i-1}) + \\ &+ \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [\varphi_{jm}(\xi_{1,\,i-1}, \ldots, \xi_{L,\,i-1}, t_{i-1}, \mu) \cos m\vartheta_0 - \\ &\qquad - f_{jm}(\xi_{1,\,i-1}, \ldots, \xi_{L,\,i-1}, t_{i-1}, \mu) \sin m\vartheta_0] + \\ &+ \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [- \varphi_{jm}(\xi_{1,\,i-1}, \ldots, \xi_{L,\,i-1}, t_{i-1}, \mu) \cos m\vartheta + \\ &\qquad + f_{jm}(\xi_{1,\,i-1}, \ldots, \xi_{L,\,i-1}, t_{i-1}, \mu) \sin m\vartheta] ;\end{aligned} \tag{56}$$

à la fin de l'intervalle pour $t = t_i$ les séries aux seconds membres se détruisent et les valeurs prises par les fonctions $\xi_j(t)$ sont

$$\xi_{ji} = \xi_{j,\,i-1} + F_j(\xi_{1,\,i-1}, \ldots, \xi_{L,\,i-1}, t_{i-1}, \mu)(t_i-t_{i-1}). \tag{57}$$

Au moyen de ces formules on peut déterminer de proche en proche tous les ξ_{ji}, ce qui permet d'écrire les expressions des solutions approchées du premier ordre pour chaque intervalle d'après la formule (56). Cet algorithme s'applique immédiatement aux calculs numériques.

On peut obtenir quelques nouveaux résultats en remarquant que les calculs nécessaires à déterminer les ξ_{ji} ne diffèrent pas de ceux que nous avons à exécuter s'il s'agit du „système réduit"

$$\boxed{\frac{dX_j}{dt} = F_j(X_1, \ldots, X_L, t, \mu),} \quad j = 1, \ldots, L, \tag{58}$$

avec les inconnues $X_1, \ldots, X_L$ [4]) qui pour $t = t_0$ doivent prendre les mêmes valeurs initiales $X_{j0} = x_{j0}$ que x_j. En effet, si l'on utilise le même système d'intervalles (t_{i-1}, t_i) pour former les solutions approchées

$$\Xi_j(t) = \Xi_{j,\,i-1} + F_j(\Xi_{1,\,i-1}, \ldots, \Xi_{L,\,i-1}, t_{i-1}, \mu)(t-t_{i-1}), \tag{59}$$

on a

$$\Xi_{ji} = \Xi_{j,\,i-1} + F_j(\Xi_{1,\,i-1}, \ldots, \Xi_{L,\,i-1}, t_{i-1}, \mu)(t_i-t_{i-1}). \tag{60}$$

En comparant avec (57) et tenant compte des conditions initiales $\Xi_{j0} = X_{j0} = \xi_{j0} = x_{j0}$, on voit que

---

[4]) Il est bien entendu que ces X_j n'ont aucun rapport avec les quantités désignées au paragraphe 2 par les mêmes lettres.

$$\Xi_{ji} = \xi_{ji}$$

pour toutes les valeurs de i et j — ce qu'il fallait démontrer.

Il est alors permis d'écrire

$$\begin{aligned}\xi_j(t) = \Xi_j(t) + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}[\varphi_{jm}(\Xi_{1,\,i-1}, \ldots, \Xi_{L,\,i-1}, t_{i-1}, \mu) \cos m\vartheta_0 - \\ - f_{jm}(\Xi_{1,\,i-1}, \ldots, \Xi_{L,\,i-1}, t_{i-1}, \mu) \sin m\vartheta_0] + \\ + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [- \varphi_{jm}(\Xi_{1,\,i-1}, \ldots, \Xi_{L,\,i-1}, t_{i-1}, \mu) \cos m\vartheta + \\ + f_{jm}(\Xi_{1,\,i-1}, \ldots, \Xi_{L,\,i-1}, t_{i-1}, \mu) \sin m\vartheta].\end{aligned} \tag{61}$$

Le système réduit ne contenant pas de termes de haute fréquence, il est en général plus facile de l'intégrer d'une manière convenable que le système donné. Si les solutions $X_j(t)$ ont été trouvées, les formules précédentes suggèrent l'idée d'adopter comme solutions approchées des équations données les fonctions

$$\boxed{\begin{aligned}y_j^{(1)}(t) = Y_j(t) + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [- \varphi_{jm}(X_1, \ldots, X_L, t, \mu) \cos m\vartheta + \\ + f_{jm}(X_1, \ldots, X_L, t, \mu) \sin m\vartheta]\end{aligned}} \tag{62}$$

avec

$$\boxed{\begin{aligned}Y_j(t) = X_j(t) + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [\varphi_{jm}(X_1, \ldots, X_L, t, \mu) \cos m\vartheta_0 - \\ - f_{jm}(X_1, \ldots, X_L, t, \mu) \sin m\vartheta_0],\end{aligned}} \tag{63}$$

les $Y_j(t)$ représentant les parties séculaires des $y_j^{(1)}(t)$. Ces expressions doivent s'appliquer dans tout le domaine de variation de t et non dans un seul intervalle partiel.

Au paragraphe suivant nous donnerons une déduction directe et plus rigoureuse aussi bien qu'une évaluation de la précision de cette forme des solutions approchées.

Les relations définitives (56) et (57) ou bien (58), (62) et (63) donnent tout ce qui résulte pour les applications de l'analyse précédente si nous voulons nous borner aux solutions approchées du premier ordre.

Nous reportant maintenant aux solutions approchées du second ordre, utilisons les expressions des $f_j(x_1, \ldots, x_L, t, \vartheta, \mu)$ et de ϑ, la seconde formule de récurrence (14) et les expressions (54) de $\psi_j^{(1)}$ que nous venons d'obtenir. Il vient

$$\frac{d\psi_j^{(2)}}{dt} = \sum_{k=1}^{L} \left[\frac{\partial F_j}{\partial x_k} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} \cos m\vartheta + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} \sin m\vartheta\right]\left[F_k(t-t_{i-1}) + \right.$$

$$+ \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\varphi_{kn} \cos n\vartheta_0 - f_{kn} \sin n\vartheta_0) - \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varphi_{kn} \cos n\vartheta +$$

$$\left. + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_{kn} \sin n\vartheta\right] + \left[\frac{\partial F_j}{\partial t} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial f_{jm}}{\partial t} \cos m\vartheta + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial t} \sin m\vartheta\right] (t-t_{i-1}),$$

où toutes les séries entre crochets convergent absolument et uniformément dans l'intervalle partiel (t_{i-1}, t_i). En les multipliant terme à terme nous obtenons des séries à double entrée qui d'après le théorème classique de Cauchy sont elles-mêmes absolument convergentes.

Par suite on peut écrire:

$$\frac{d\psi_j^{(2)}}{dt} = F_j' \frac{t - t_{i-1}}{1} +$$

$$+ \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} (\varphi_{km} \cos m\vartheta_0 - f_{km} \sin m\vartheta_0) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(f_{jm}' \frac{t - t_{i-1}}{1} \cos m\vartheta + \varphi_{jm}' \frac{t - t_{i-1}}{1} \sin m\vartheta\right) +$$

$$+ \mu \sum_{m=1}^{\infty} \left\{\left[- \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \varphi_{km} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} (\varphi_{kn} \cos n\vartheta_0 - \right.\right.$$

$$\left. - f_{kn} \sin n\vartheta_0)\right] \cos m\vartheta + \left[\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} f_{km} + \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} (\varphi_{kn} \cos n\vartheta_0 - f_{kn} \sin n\vartheta_0)\right] \sin m\vartheta\right\} +$$

$$+ \frac{\mu}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [G(m, n, m+n) + H(m, n, m-n)],$$

avec

$$F_j' = \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} F_k + \frac{\partial F_j}{\partial t}, \tag{64}$$

$$\left.\begin{aligned} f'_{jm} &= \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} F_k + \frac{\partial f_{jm}}{\partial t}, \\ \varphi'_{jm} &= \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} F_k + \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} G(m, n, m+n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{L} \Bigg[&-\left(\frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} \varphi_{kn} + \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} f_{kn}\right) \cos (m+n)\vartheta + \\ &+ \left(\frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} f_{kn} - \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} \varphi_{kn}\right) \sin (m+n)\vartheta \Bigg], \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} H(m, n, m-n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{L} \Bigg[&-\left(\frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} \varphi_{kn} - \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} f_{kn}\right) \cos (m-n)\vartheta - \\ &- \left(\frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} f_{kn} + \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} \varphi_{kn}\right) \sin (m-n)\vartheta \Bigg], \end{aligned} \tag{67}$$

les fonctions $G(m, n, m+n)$, $H(m, n, m-n)$ n'étant définies que pour les valeurs entières de m, n. Les séries à double entrée formées avec ces fonctions se transforment de la manière suivante.

En posant dans les séries de $G(m, n, m+n)$

$$m + n = m_1, \quad m = n_1$$

et par conséquent

$$n = m_1 - n_1,$$

on obtient

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G(m, n, m+n) = \sum_{m_1=2}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{m_1-1} G(n_1, m_1-n_1, m_1) \quad (68).$$

Dans les séries des $H(m, n, m-n)$ on peut faire la transformation

$$m - n = m_2, \quad n = n_2,$$

$$m = m_2 + n_2$$

pour $m - n = m_2 > 0$ et la transformation

$$m - n = - m_3, \; m = n_3,$$

$$n = m_3 + n_3$$

pour $m - n = - m_3 < 0$. Il vient

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} H(m, n, m-n) = \sum_{m=1}^{\infty} H(m, m, 0) + \\ + \sum_{m_2=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} H(m_2+n_2, n_2, m_2) + \\ + \sum_{m_3=1}^{\infty}\sum_{n_3=1}^{\infty} H(n_3, m_3+n_3, -m_3). \tag{69}$$

On peut supprimer les indices attachés à m, n dans les formules (68), (69) et appliquer ces dernières à la transformation des expressions des dérivées $\frac{d\psi_j^{(2)}}{dt}$. Toutes les séries simples arrangées suivant les cosinus et sinus de $m\vartheta$ qui figurent dans les expressions transformées sont absolument et uniformément convergentes. Car elles ont pour majorantes les séries analogues à termes constants positifs qui s'obtiennent si l'on prend les valeurs absolues de toutes les F, f, φ et de leurs dérivées et si l'on remplace $t - t_{i-1}$ par $t_i - t_{i-1}$, supprimant tous les facteurs trigonométriques. Ces majorantes convergent en vertu du théorème de Cauchy.

Il s'ensuit qu'on peut intégrer terme à terme en tenant compte des conditions initiales. Les expressions des $\psi_j^{(2)}$ qu'on obtient se composent de deux groupes de termes, à savoir: (1) les parties non périodiques contenant le binôme $t - t_{i-1}$ et son carré en facteurs, (2) les parties périodiques contenant seulement des constantes et des fonctions trigonométriques de ϑ.

Les parties non périodiques peuvent s'écrire sous les formes

$$F_j^{(1)}\mu\frac{t-t_{i-1}}{1} + F_j'\frac{(t-t_{i-1})^2}{1\cdot 2} + \\ + \mu\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\varphi_{jm}'\frac{t-t_{i-1}}{1}\cos m\vartheta_0 - f_{jm}'\frac{t-t_{i-1}}{1}\sin m\vartheta_0\right) + \\ + \mu\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(-\varphi_{jm}'\frac{t-t_{i-1}}{1}\cos m\vartheta + f_{jm}'\frac{t-t_{i-1}}{1}\sin m\vartheta\right),$$

avec

$$F_j^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[-\left(\varphi_{jm}' - \sum_{k=1}^{L}\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\varphi_{km}\right)\cos m\vartheta_0 + \right. \\ + \left(f_{jm}' - \sum_{k=1}^{L}\frac{\partial F_j}{\partial x_k}f_{km}\right)\sin m\vartheta_0 - \\ \left. - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\left(\frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k}\varphi_{km} - \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k}f_{km}\right)\right], \tag{70}$$

les f'_{jm}, φ'_{jm} étant définies par les formules (65). Les parties périodiques sont

$$
\begin{aligned}
&\mu^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\Biggl\{\Biggl[\frac{1}{m}\left(f'_{jm} - \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} f_{km}\right) - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} (\varphi_{kn} \cos n\vartheta_0 - f_{kn} \sin n\vartheta_0)\Biggr] (\cos m\vartheta - \cos m\vartheta_0) + \\
&\quad + \Biggl[\frac{1}{m}\left(\varphi'_{jm} - \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \varphi_{km}\right) + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} (\varphi_{kn} \cos n\vartheta_0 - f_{kn} \sin n\vartheta_0)\Biggr] (\sin m\vartheta - \sin m\vartheta_0)\Biggr\} + \\
&+ \frac{\mu^2}{2} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{m(m-n)} \Biggl[\sum_{k=1}^{L}\left(-\frac{\partial f_{jn}}{\partial x_k} f_{k,\, m-n} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \varphi_{jn}}{\partial x_k} \varphi_{k,\, m-n}\right) (\cos m\vartheta - \cos m\vartheta_0) - \sum_{k=1}^{L}\left(\frac{\partial f_{jn}}{\partial x_k} \varphi_{k,\, m-n} + \right. \qquad (71) \\
&\quad \left. + \frac{\partial \varphi_{jn}}{\partial x_k} f_{k,\, m-n}\right) (\sin m\vartheta - \sin m\vartheta_0)\Biggr] + \\
&+ \frac{\mu^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \Biggl\{\Biggl[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{L}\left(\frac{\partial f_{j,\, m+n}}{\partial x_k} f_{kn} + \frac{\partial \varphi_{j,\, m+n}}{\partial x_k} \varphi_{kn}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{m+n} \sum_{k=1}^{L}\left(\frac{\partial f_{jn}}{\partial x_k} f_{k,\, m+n} + \frac{\partial \varphi_{jn}}{\partial x_k} \varphi_{k,\, m+n}\right)\Biggr] (\cos m\vartheta - \cos m\vartheta_0) + \\
&\quad + \Biggl[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{L}\left(-\frac{\partial f_{j,\, m+n}}{\partial x_k} \varphi_{kn} + \frac{\partial \varphi_{j,\, m+n}}{\partial x_k} f_{kn}\right) + \frac{1}{m+n} \sum_{k=1}^{L}\left(-\frac{\partial f_{jn}}{\partial x_k} \varphi_{k,\, m+n} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \varphi_{jn}}{\partial x_k} f_{k,\, m+n}\right)\Biggr] (\sin m\vartheta - \sin m\vartheta_0)\Biggr\};
\end{aligned}
$$

après les réductions elles se présentent sous les formes

$$
\begin{aligned}
&\mu^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\varphi^{(1)}_{jm} \cos m\vartheta_0 - f^{(1)}_{jm} \sin m\vartheta_0) + \\
&\qquad + \mu^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (-\varphi^{(1)}_{jm} \cos m\vartheta + f^{(1)}_{jm} \sin m\vartheta)
\end{aligned}
\qquad (72)
$$

avec des significations évidentes pour $f^{(1)}_{jm}$ et $\varphi^{(1)}_{jm}$. On a donc

$$
\begin{aligned}
\psi^{(2)}_j = F^{(1)}_j \mu \frac{t - t_{i-1}}{1} + F'_j \frac{(t-t_{i-1})^2}{1 \cdot 2} + \\
+ \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\Biggl[\left(\varphi^{(1)}_{jm} \mu + \varphi'_{jm} \frac{t - t_{i-1}}{1}\right) \cos m\vartheta_0 -
\end{aligned}
$$

$$- \left(f_{jm}^{(1)}\mu + f'_{jm}\frac{t-t_{i-1}}{1}\right)\sin m\vartheta_0\Bigg] + \mu\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\Bigg[-\Bigg(\varphi_{jm}^{(1)}\mu + $$

$$+ \varphi'_{jm}\frac{t-t_{i-1}}{1}\Bigg)\cos m\vartheta + \left(f_{jm}^{(1)}\mu + f'_{jm}\frac{t-t_{i-1}}{1}\right)\sin m\vartheta\Bigg]. \quad (73)$$

Utilisant les expressions (54) des $\psi_j^{(1)}$ trouvées plus haut et entendant maintenant par ξ_j les solutions approchées du second ordre, nous obtenons

$$\begin{aligned}\xi_j &= \xi_{j,\,i-1} + (F_j + F_j^{(1)}\mu)\frac{t-t_{i-1}}{1} + F'_j\frac{(t-t_{i-1})^2}{1\cdot 2} + \\ &+ \mu\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\Bigg[\left(\varphi_{jm} + \varphi_{jm}^{(1)}\mu + \varphi'_{jm}\frac{t-t_{i-1}}{1}\right)\cos m\vartheta_0 - \Bigg(f_{jm} + \\ &+ f_{jm}^{(1)}\mu + f'_{jm}\frac{t-t_{i-1}}{1}\Bigg)\sin m\vartheta_0\Bigg] + \mu\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\Bigg[-\Bigg(\varphi_{jm} + \varphi_{jm}^{(1)}\mu + \\ &+ \varphi'_{jm}\frac{t-t_{i-1}}{1}\Bigg)\cos m\vartheta + \left(f_{jm} + f_{jm}^{(1)}\mu + f'_{jm}\frac{t-t_{i-1}}{1}\right)\sin m\vartheta\Bigg].\end{aligned} \quad (74)$$

Les séries aux seconds membres se détruisent à la fin de l'intervalle pour $t = t_i$ de sorte que

$$\xi_{ji} = \xi_{j,\,i-1} + (F_j + F_j^{(1)}\mu)\frac{t_i - t_{i-1}}{1} + F'_j\frac{(t_i - t_{i-1})^2}{1\cdot 2}; \quad (75)$$

ces formules de récurrence peuvent servir à calculer de proche en proche tous les ξ_{ji} et à déterminer ensuite les valeurs numériques des coefficients dans les expressions (74) qui représentent les solutions approchées du second ordre dans chaque intervalle.

A l'exemple des solutions du premier ordre, nous observons que les calculs nécessaires pour déterminer les ξ_{ji} sont les mêmes que s'il s'agissait de trouver les solutions approchées pour les équations

$$\boxed{\frac{dX_j}{dt} = F_j(X_1, \ldots, X_L, t, \mu) + \mu\, F_j^{(1)}(X_1, \ldots, X_L, t, \mu)} \quad (76)$$

en se bornant aux termes du second ordre en μ (les accroissements $t - t_{i-1} \leqq t^* = 2K\pi\mu$ doivent être regardées comme des quantités du premier ordre).

Nous appellerons (76) les équations réduites du second ordre. Si l'on a réussi à les intégrer d'une manière ou d'une autre, il est naturel d'essayer à titre de solutions approchées dans tout le domaine de variation de t les fonctions

$$\boxed{\begin{aligned} y_j^{(2)}(t) = Y_j(t) + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\{-[\varphi_{jm}(X_1, \ldots, X_L, t, \mu) + \\ +\mu\varphi_{jm}^{(1)}(X_1, \ldots, X_L, t, \mu)]\cos m\vartheta + [f_{jm}(X_1, \ldots, X_L, t, \mu) + \\ + \mu f_{jm}^{(1)}(X_1, \ldots, X_L, t, \mu)] \sin m\vartheta\} \end{aligned}} \tag{77}$$

avec

$$\boxed{\begin{aligned} Y_j(t) = X_j(t) + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\{[\varphi_{jm}(X_1, \ldots, X_L, t, \mu) + \\ +\mu\varphi_{jm}^{(1)}(X_1, \ldots, X_L, t, \mu)]\cos m\vartheta_0 - [f_{jm}(X_1, \ldots, X_L, t, \mu) + \\ + \mu f_{jm}^{(1)}(X_1, \ldots, X_L, t, \mu)] \sin m\vartheta_0\}, \end{aligned}} \tag{78}$$

les $Y_j(t)$ représentant les parties séculaires de $y_j^{(2)}$.

On trouvera aussi au paragraphe suivant une déduction directe de ces solutions approchées.

Les relations définitives (74) et (75) ou bien (76), (77) et (78) en combinaison avec les expressions des $F_j^{(1)}$, $f_{jm}^{(1)}$, $\varphi_{jm}^{(1)}$ forment l'algorithme qu'il faut appliquer pour obtenir les solutions approchées du second ordre d'un problème concret.

Pour conclure ce paragraphe nous allons indiquer une circonstance importante. Supposons que les coefficients non constants $f_{jm}(x_1, \ldots, x_L, t, \mu)$, $\varphi_{jm}(x_1, \ldots, x_L, t, \mu)$ des séries de Fourier contiennent un même facteur constant ε. En se reportant aux formules (70), (71) on constate aisément que $F_j^{(1)}$, $f_{jm}^{(1)}$, $\varphi_{jm}^{(1)}$ sont elles-mêmes divisibles par ce facteur. Les termes des types $\mu \frac{1}{m} \varphi_{jm} \cos m\vartheta_0$, $\mu F_j^{(1)}$ sont alors d'ordre de $\mu\varepsilon$, tandis que les termes du type $\mu \frac{1}{m} \mu\varphi_{jm}^{(1)} \cos m\vartheta_0$ sont divisibles par $\mu^2\varepsilon$.

Un cas encore plus particulier est celui où les quantités F_j contiennent aussi le facteur ε et où toutes les dérivées partielles de F_j, f_{jm}, φ_{jm} par rapport à t s'annulent ou bien sont de l'ordre de ε^2. Les quantités $F_j^{(1)}$, $f_{jm}^{(1)}$, $\varphi_{jm}^{(1)}$ sont alors divisibles par ε^2. Les termes du type $\mu \frac{1}{m} \varphi_{jm} \cos m\vartheta_0$ contiennent $\mu\varepsilon$ comme dans le cas précédent. Mais les termes $\mu F_j^{(1)}$ sont maintenant de l'ordre de $\mu\varepsilon^2$, tandis que l'ordre de termes du type $\mu \frac{1}{m} \mu\varphi_{jm}^{(1)} \cos m\vartheta_0$ est $\mu^2\varepsilon^2$.

La dernière remarque trouve son application à quelques problèmes du mouvement du corps solide.

§ 5. Les solutions approchées calculées au moyen des équations réduites.

S'il s'agit seulement du calcul et de l'évaluation de quelques solutions approchées et non de leur convergence pour les valeurs croissantes de l'ordre d'approximation Q, on peut se passer de la décomposition en intervalles partiels et appliquer une méthode semblable à celle qu'emploient M.P. Fatou et MM. L. Mandelstam et N. Papalexi.

Outre les hypothèses faites au début de cette communication nous admettrons que dans le domaine S et pour $\mu < \mu^*$ on a

$$| F_j(x_1, \ldots, x_L, t, \mu) | < B, \tag{79}$$

$$\left| \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_L, t, \mu) \right| < \frac{B}{b}, \quad \left| \frac{\partial F_j}{\partial t}(x_1, \ldots, x_L, t, \mu) \right| < \frac{B}{b_0} \tag{80}$$

et que les sommes des séries (5) sont inférieures à H; B, b, b_0, H ainsi que les lettres h, h_0 introduites ci-dessous désignent certains nombres constants et positifs. Nous supposerons de plus que, sous les conditions indiquées, les sommes des séries analogues à (5) et formées avec les dérivées premières par rapport à $x_1, \ldots, x_L$, t sont inférieures à $\frac{H}{h}$, $\frac{H}{h_0}$ et nous posons

$$A = B + 2H, \quad \frac{A}{a} = \frac{B}{b} + 2\frac{H}{h}, \quad \frac{A}{a_0} = \frac{B}{b_0} + 2\frac{H}{h_0}. \tag{81}$$

Le prismatoïde

$$| x_j - x_{j0} | < C_j, \; t_0 \leqq t < t_0 + D$$

doit appartenir comme plus haut au domaine S.

Soient maintenant $X_1, \ldots, X_L$ certaines fonctions de t qui admettent des dérivées premières continues et prennent pour $t = t_0$ les valeurs $X_{j0} = x_{j0}$. Nous les adoptons comme les fonctions initiales d'une suite d'approximations successives; le choix précis des X_j ne doit être fait qu'au cours du calcul suivant. Supposons que $\mu < \mu^*$ et que t appartienne au plus grand intervalle

$$t_0 \leqq t < t_0 + E,$$

où le point $(X_1, \ldots, X_L, t)$ reste compris dans le deuxième prismatoïde

$$| X_j - x_{j0} | < C_j - c_j,\ t_0 \leqq t < t_0 + D,$$

les nombres c_j positifs et arbitrairement petits vérifiant les inégalités

$$c_j < \frac{1}{2} C_j.$$

Les deux prismatoïdes forment une „boîte", chacun des nombres c_j désignant l'épaisseur d'un de ses „parois".

Les premières approximations de la suite sont déterminées par les formules

$$x_j^{(1)} = x_{j0} + \int_{t_0}^{t} f_j(X_1, \ldots, X_L, t, \vartheta, \mu) dt.$$

Convenons d'écrire dans ce qui suit les symboles des fonctions f_j, F_j, f_{jm}, φ_{jm} sans indiquer les variables qu'elles renferment si ces dernières sont $X_1, \ldots, X_L, t, \vartheta, \mu$.

En utilisant les expressions (2), (3) et intégrant par parties, nous obtenons

$$x_j^{(1)} = x_{j0} + \int_{t_0}^{t} F_j dt + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [- \varphi_{jm} (\cos m\vartheta - \cos m\vartheta_0) +$$

$$+ f_{jm} (\sin m\vartheta - \sin m\vartheta_0)] -$$

$$- \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} \Big[- \left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} \frac{dX_k}{dt} + \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial t} \right) (\cos m\vartheta - \cos m\vartheta_0) +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} \frac{dX_k}{dt} + \frac{\partial f_{jm}}{\partial t} \right) (\sin m\vartheta - \sin m\vartheta_0) dt.$$

Toutes les transformations faites sont légitimes. En effet, si $\mu < \mu^*$, les séries (2) convergent absolument et uniformément dans S et pour toutes les valeurs de ϑ; par conséquent les développements des $f_j(X_1, \ldots, X_L, t, \vartheta, \mu)$ peuvent être intégrés terme à terme. Les séries $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (-\varphi_{jm} \cos m\vartheta)$ aussi bien que les autres séries de ce type dans les expressions des $x_j^{(1)}$ sont elles-mêmes absolument et uniformément convergentes. Il résulte que la convergence des séries qui forment les parties non intégrées des $x_j^{(1)}$ est aussi assurée. Pour abréger les formules il convient maintenant de poser

$$x_{j0} + \int_{t_0}^{t} F_j dt = X_j,$$

ce qui donne pour X_j les équations réduites (58). Utilisant ces équations nous obtenons

$$x_j^{(1)} = y_j^{(1)} - R_j^{(1)}\,\mu, \tag{82}$$

où les $y_j^{(1)}$ sont précisément les solutions approchées du premier ordre prises sous la forme (62) et

$$\begin{aligned} R_j^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} \Big[-\Big(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} F_k + \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial t} \Big) (\cos m\vartheta - \cos m\vartheta_0) + \\ + \Big(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} F_k + \frac{\partial f_{jm}}{\partial t} \Big) (\sin m\vartheta - \sin m\vartheta_0) \Big]\, dt; \end{aligned} \tag{83}$$

on a

$$\begin{aligned} | R_j^{(1)} | < 2 \int_{t_0}^{t} \Big[\sum_{k=1}^{L} | F_k | \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \Big| \frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} \Big| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \Big| \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} \Big| \Big) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \Big| \frac{\partial f_{jm}}{\partial t} \Big| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \Big| \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial t} \Big| \Big]\, dt, \end{aligned}$$

ce qu'il est permis d'écrire car toutes les séries sous le signe d'intégration convergent uniformément, leurs sommes étant inférieures aux nombres $\frac{H}{h}$ et $\frac{H}{h_0}$. Par conséquent

$$| R_j^{(1)} | < 4HQ(t - t_0), \tag{84}$$

$$| y_j^{(1)} - x_j^{(1)} | < 4\mu HQ \frac{t - t_0}{1}, \tag{85}$$

avec

$$Q = \frac{LB}{h} + \frac{1}{h_0}. \tag{86}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} x_j^{(1)} - X_j = \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\varphi_{jm} \cos m\vartheta_0 - f_{jm} \sin m\vartheta_0) + \\ + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (-\varphi_{jm} \cos m\vartheta + f_{jm} \sin m\vartheta) - R_j^{(1)}\mu, \end{aligned}$$

$$| x_j^{(1)} - X_j | < 2\mu \Big(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} | \varphi_{jm} | + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} | f_{jm} | \Big) + | R_j^{(1)} |\, \mu,$$

ou

$$| x_j^{(1)} - X_j | < 4\mu H \Big\{ 1 + Q \frac{t - t_0}{1} \Big\}. \tag{87}$$

Pour ce qui suit, il importe que non seulement le point $(X_1, \ldots, X_L, t)$ mais aussi le point $(x_1^{(1)}, \ldots, x_L^{(1)}, t)$ reste compris dans le domaine S. Comme

$$x_j^{(1)} - x_{j0} = x_j^{(1)} - X_j + X_j - x_{j0},$$

$$| x_j^{(1)} - x_{j0} | < 4\mu H \left\{ 1 + Q \frac{t - t_0}{1} \right\} + C_j - c_j, \tag{88}$$

la condition indiquée sera remplie si

$$4\mu H \left\{ 1 + Q \frac{t - t_0}{1} \right\} + C_j - c_j < C_j,$$

$$4\mu H \left\{ 1 + Q \frac{t - t_0}{1} \right\} < c, \tag{89}$$

les c_j vérifiant l'inégalité

$$c_j > c$$

pour toutes les valeurs de l'indice j.

Pour les secondes approximations $x_j^{(2)}$ nous avons les relations

$$x_j^{(2)} - x_j^{(1)} = \int_{t_0}^{t} [f_j(x_1^{(1)}, \ldots, x_L^{(1)}, t, \vartheta, \mu) - \\ - f_j(X_1, \ldots, X_L, t, \vartheta, \mu)] dt,$$

ou, en vertu de (81) et des conditions de Lipschitz

$$| x_j^{(2)} - x_j^{(1)} | < \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{L} \frac{A}{a} | x_k^{(1)} - X_k | \, dt < \\ < \frac{LA}{a} 4\mu H \int_{t_0}^{t} \left\{ 1 + Q \frac{t - t_0}{1} \right\} dt$$

ou bien

$$| x_j^{(2)} - x_j^{(1)} | < 4\mu H \left\{ \frac{LA}{a} \frac{t - t_0}{1} + Q \frac{LA}{a} \frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} \right\}. \tag{90}$$

Des identités

$$y_j^{(1)} - x_j^{(2)} = y_j^{(1)} - x_j^{(1)} - [x_j^{(2)} - x_j^{(1)}],$$

$$x_j^{(2)} - x_{j0} = x_j^{(2)} - x_j^{(1)} + x_j^{(1)} - x_{j0},$$

on déduit que

$$| y_j^{(1)} - x_j^{(2)} | < 4\mu H \left\{ \frac{LA}{a} \frac{t - t_0}{1} + Q \left[\frac{t - t_0}{1} + \frac{LA}{a} \frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} \right] \right\} \tag{91}$$

et que le point $(x_1^{(2)}, \ldots, x_L^{(2)}, t)$ reste compris dans le domaine S si

$$4\mu H\left\{1+\frac{LA}{a}\,\frac{t-t_0}{1}+Q\left[\frac{t-t_0}{1}+\frac{LA}{a}\,\frac{(t-t_0)^2}{1\cdot 2}\right]\right\}<c. \tag{92}$$

Cette condition étant remplie l'inégalité précédente (89) se trouve aussi vérifiée.

En continuant le raisonnement nous obtiendrons les approximations $x_j^{(r)}$ d'ordre arbitraire r et les inégalités correspondantes. Pour $r \to \infty$ les fonctions $x_j^{(r)}$ tendent vers les solutions exactes x_j et nous obtenons les évaluations suivantes des solutions approchées $y_j^{(1)}$:

$$\begin{aligned}|y_j^{(1)}-x_j|<4\mu H\Bigg\{&\frac{LA}{a}\,\frac{t-t_0}{1}+\left(\frac{LA}{a}\right)^2\frac{(t-t_0)^2}{1\cdot 2}+\cdots+\\&+Q\left[\frac{t-t_0}{1}+\frac{LA}{a}\,\frac{(t-t_0)^2}{1\cdot 2}+\cdots\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{93}$$

Elles sont applicables tant que

$$\begin{aligned}4\mu H\Bigg\{1+&\frac{LA}{a}\,\frac{t-t_0}{1}+\left(\frac{LA}{a}\right)^2\frac{(t-t_0)^2}{1\cdot 2}+\cdots+\\&+Q\left[\frac{t-t_0}{1}+\frac{LA}{a}\,\frac{(t-t_0)^2}{1\cdot 2}+\cdots\right]\Bigg\}<c;\end{aligned} \tag{94}$$

d'après l'hypothèse qu'on a faite d'abord la variable t doit, en outre, rester comprise dans l'intervalle (t_0, t_0+E-0).

Des deux inégalités précédentes il résulte que

$$|y_j^{(1)}-x_j|<c-4\mu H<c. \tag{95}$$

L'évaluation (93) et la condition (94) peuvent s'écrire aussi sous la forme

$$|y_j^{(1)}-x_j|<4\mu H\left(1+\frac{Qa}{LA}\right)\left[-1+\exp\frac{LA}{a}(t-t_0)\right], \tag{96}$$

$$4\mu H\left\{\exp\frac{LA}{a}(t-t_0)+\frac{Qa}{LA}\left[-1+\exp\frac{LA}{a}(t-t_0)\right]\right\}<c. \tag{97}$$

Observons maintenant que, les séries (5) et les séries analogues formées avec les dérivées partielles étant uniformément convergentes dans un domaine fermé S, il s'ensuit qu'en les multipliant deux à deux dans un ordre quelconque on obtient des séries qui elles-mêmes convergent uniformément. C'est ce qui résulte de la démonstration du théorème de Mertens [5]) sur la multiplication des séries et du fait que la convergence uniforme d'une série simple ou multiple à termes positifs subsiste si l'on modifie arbitrairement l'ordre de la sommation. Nous tiendrons compte de cette remarque en nous reportant maintenant aux solutions approchées du second ordre. Pour abréger nous nous bornerons cette fois en outre au calcul formel.

Adoptons les fonctions

$$\begin{aligned} z_j^{(1)} = X_j + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}(\varphi_{jm} \cos m\vartheta_0 - f_{jm} \sin m\vartheta_0) + \\ + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}(-\varphi_{jm} \cos m\vartheta + f_{jm} \sin m\vartheta) \end{aligned} \tag{98}$$

comme fonctions initiales pour une nouvelle suite d'approximations successives. Les fonctions X_j figurant dans ces formules ne sont pas supposées identiques aux quantités désignées ci-dessus par les mêmes lettres. Elles doivent prendre pour $t = t_0$ les valeurs initiales $X_{j0} = x_{j0}$ et admettre des dérivées premières continues par rapport à t; par ailleurs elles restent provisoirement indéterminées. Le choix précis de ces fonctions doit être fait de nouveau au cours du calcul suivant. Les lettres non écrites contenues dans f_{jm}, φ_{jm} sont $X_1, \ldots, X_L, t, \mu$.

D'après la formule finie de Taylor, on a

$$\begin{aligned} f_j(z_1^{(1)}, \ldots, z_L^{(1)}, t, \vartheta, \mu) = f_j + \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\Big[\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\varphi_{kn} \cos n\vartheta_0 - \\ - f_{kn} \sin n\vartheta_0) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-\varphi_{kn} \cos n\vartheta + f_{kn} \sin n\vartheta)\Big] + (\cdots) = \\ = f_j + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big[-\Big(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \varphi_{kn}\Big)(\cos n\vartheta - \cos n\vartheta_0) + \\ + \Big(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} f_{kn}\Big)(\sin n\vartheta - \sin n\vartheta_0)\Big] + (\cdots). \end{aligned}$$

Pour avoir un principe qui nous permette de bien ranger les termes dans nos calculs, nous convenons de considérer les fonctions F_j, f_{jm}, φ_{jm} et leurs dérivées par rapport à $x_1, \ldots, x_L$ comme des quantités de l'ordre de ε et leurs dérivées premières par rapport à t comme celles de l'ordre de ε^2. Les termes non

---

[5]) Journ. für reine u. angew. Math. **79** (1874), 182–184 ou bien E. Picard, Traité d'Analyse, **1** (1922), p. 252.

écrits et désignés par $(\ldots)$ dans les formules précédentes aussi bien que dans tous ce qui suit sont alors de l'ordre de $\mu^2\varepsilon^3$. La convention formulée n'entraîne aucune diminution de la généralité du raisonnement.

En intégrant nous obtenons des fonctions précisées que nous appelons les secondes approximations de la nouvelle suite:

$$x_j^{(2)} = x_{j0} + \int_{t_0}^{t} f_j(z_1^{(1)}, \ldots, z_L^{(1)}, t, \vartheta, \mu)dt = x_{j0} + \int_{t_0}^{t} f_j dt +$$

$$+ \mu \int_{t_0}^{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[- \left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \varphi_{kn} \right) (\cos n\vartheta - \cos n\vartheta_0) + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} f_{kn} \right) (\sin n\vartheta - \sin n\vartheta_0) \right] dt + \int_{t_0}^{t} (\ldots) dt;$$

ou après avoir remplacé les f_j par leurs expressions:

$$x_j^{(2)} = x_{j0} + \int_{t_0}^{t} F_j dt + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} (f_{jm} \cos m\vartheta + \varphi_{jm} \sin m\vartheta) dt +$$

$$+ \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} \left[- \left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \varphi_{km} \right) (\cos m\vartheta - \cos m\vartheta_0) + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} f_{km} \right) (\sin m\vartheta - \sin m\vartheta_0) \right] dt +$$

$$+ \mu \int_{t_0}^{t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \left[- \left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} \varphi_{kn} \right) (\cos n\vartheta - \cos n\vartheta_0) + \right. \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} f_{kn} \right) (\sin n\vartheta - \sin n\vartheta_0) \right] \cos m\vartheta +$$

$$+ \left[- \left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} \varphi_{kn} \right) (\cos n\vartheta - \cos n\vartheta_0) + \right.$$

$$\left. \left. + \left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} f_{kn} \right) (\sin n\vartheta - \sin n\vartheta_0) \right] \sin m\vartheta \right\} dt + \int_{t_0}^{t} (\cdots) dt.$$

Mettons à part les intégrales contenant $\cos m\vartheta_0$, $\sin m\vartheta_0$ et intégrons par parties. Supposant que les dérivées $\frac{dX_j}{dt}$ soient des quantités de l'ordre de ε nous obtenons

$$x_j^{(2)} = x_{j0} + \int_{t_0}^{t} \left\{ F_j + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \varphi_{km} \right) \cos m\vartheta_0 - \right. \right.$$

$$- \left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} f_{km}\right) \sin m\vartheta_0 \Big]\Big\} dt + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} [-\varphi_{jm} (\cos m\vartheta -$$

$$- \cos m\vartheta_0) + f_{jm}(\sin m\vartheta - \sin m\vartheta_0)] +$$

$$+ \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} \left[\left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} \frac{dX_k}{dt} + \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial t}\right) (\cos m\vartheta - \cos m\vartheta_0) -\right.$$

$$\left. - \left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} \frac{dX_k}{dt} + \frac{\partial f_{jm}}{\partial t}\right) (\sin m\vartheta - \sin m\vartheta_0)\right] dt -$$

$$- \mu^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left[\left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} f_{km}\right) (\cos m\vartheta - \cos m\vartheta_0) +\right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \varphi_{km}\right) (\sin m\vartheta - \sin m\vartheta_0)\right] +$$

$$+ \mu^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[- \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} (\varphi_{kn} \cos n\vartheta_0 - f_{kn} \sin n\vartheta_0)(\cos m\vartheta -\right.$$

$$\left. - \cos m\vartheta_0) + \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} (\varphi_{kn} \cos n\vartheta_0 - f_{kn} \sin n\vartheta_0)(\sin m\vartheta - \sin m\vartheta_0)\right] +$$

$$+ \frac{\mu}{2} \int_{t_0}^{t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [G(m, n, m+n) + H(m, n, m-n)] dt + \int_{t_0}^{t} (\cdot\cdot\cdot) dt,$$

où les fonctions $G(m, n, m+n)$, $H(m, n, m-n)$ se déterminent au moyen des formules (66), (67), étant entendu que les lettres non écrites et contenues dans ces fonctions sont $X_1, \ldots, X_L, t, \mu$. Par $(\cdot\cdot\cdot)$ nous entendons comme ci-dessus l'ensemble des termes de l'ordre de $\mu^2 \varepsilon^3$.

Mettant à part les intégrales avec $H(m, n, m-n)$ pour $m = n$ et appliquant de nouveau une intégration par parties, on a

$$x_j^{(2)} = x_{j0} + \int_{t_0}^{t} \left\{ F_j + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[-\left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} \frac{dX_k}{dt} + \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial t} -\right.\right.\right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \varphi_{km}\right) \cos m\vartheta_0 + \left(\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} \frac{dX_k}{dt} + \frac{\partial f_{jm}}{\partial t} - \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} f_{km}\right) \sin m\vartheta_0 -$$

$$\left.\left.\left. - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L} \left(\frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} \varphi_{km} - \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} f_{km}\right)\right]\right\} dt +$$

$$+ \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\varphi_{jm} \cos m\vartheta_0 - f_{jm} \sin m\vartheta_0) + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (-\varphi_{jm} \cos m\vartheta + f_{jm} \sin m\vartheta) +$$

$$+ \mu^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left\{ \left[\frac{1}{m} \left(\sum_{k=}^{L} \frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k} \frac{dX_k}{dt} + \frac{\partial f_{jm}}{\partial t} - \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} f_{km}\right) -\right.\right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial \varphi_{jm}}{\partial x_k} (\varphi_{kn} \cos n\vartheta_0 - f_{kn} \sin n\vartheta_0)\right] (\cos m\vartheta - \cos m\vartheta_0) +$$

$$+\left[\frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{L}\frac{\partial\varphi_{jm}}{\partial x_k}\frac{dX_k}{dt}+\frac{\partial\varphi_{jm}}{\partial t}-\sum_{k=1}^{L}\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\varphi_{km}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{L}\frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k}(\varphi_{kn}\cos n\vartheta_0-f_{kn}\sin n\vartheta_0)\right](\sin m\vartheta-\sin m\vartheta_0)\right\}+$$

$$+\frac{\mu}{2}\int_{t_0}^{t}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}G(m,n,m+n)dt+$$

$$+\frac{\mu}{2}\int_{t_0}^{t}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}{}^{(m\neq n)}H(m,n,m-n)dt+\int_{t_0}^{t}(\cdots)dt,$$

où $(\cdots)$ contiendra exclusivement des termes de l'ordre de $\mu^2\varepsilon^3$ si l'on pose pour abréger

$$X_j=x_{j0}+\int_{t_0}^{t}\left\{F_j+\mu\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[-\left(\varphi'_{jm}-\sum_{k=1}^{L}\frac{\partial F_j}{\partial x_k}\varphi_{km}\right)\cos m\vartheta_0+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(f'_{jm}-\sum_{k=1}^{L}\frac{\partial F_j}{\partial x_k}f_{km}\right)\sin m\vartheta_0-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\left(\frac{\partial f_{jm}}{\partial x_k}\varphi_{km}-\frac{\partial\varphi_{jm}}{\partial x_k}f_{km}\right)\right]\right\}dt=$$

$$=x_{j0}+\int_{t_0}^{t}(F_j+F_j^{(1)}\mu)dt,$$

les f'_{jm}, φ'_{jm}, $F_j^{(1)}$ gardant leur signification d'après les formules (65), (70).

Les X_j doivent alors vérifier les équations réduites du second ordre (76). On s'assure aussi aisément qu'on est ramené précisément aux solutions $y_j^{(2)}(t)$ déterminées par les formules (77), de sorte qu'on peut écrire

$$x_j^{(2)}=y_j^{(2)}+\int_{t_0}^{t}(\cdots)dt.$$

Les équations réduites du premier ordre peuvent donc être remplacées par les équations plus précises. Les solutions de ces dernières s'appliquent immédiatement à préciser les coefficients non constants des séries de Fourier qui représentent les solutions approchées des équations données.

Ce procédé n'est qu'une modification spéciale de la méthode des approximations successives; en principe il peut être continué, mais on ne peut éviter que les calculs deviennent de plus en plus compliqués.

Par cette remarque je conclue la communication présente. Elle paraît trop étendue pour que je me hasarde à l'augmenter par les exemples qu'on pourrait emprunter à la théorie du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, ou à la théorie des vibrations non linéaires.

Moscou. Institut de Mécanique de l'Université.

(Reçu le 15 mars 1939.)