

# COMPOSITIO MATHEMATICA

PAUL LÉVY

## Sur certains processus stochastiques homogènes

*Compositio Mathematica*, tome 7 (1940), p. 283-339

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1940\\_\\_7\\_\\_283\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__283_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Sur certains processus stochastiques homogènes

par

Paul Lévy

Paris

---

## Introduction.

Le présent travail est consacré à l'étude des processus stochastiques linéaires, c'est-à-dire aboutissant à la définition d'une fonction du temps à accroissements aléatoires indépendants, et de plus homogènes dans le temps. Le cas particulier connu depuis longtemps et lié à l'étude du mouvement brownien, où l'accroissement de la fonction étudiée  $X(t)$  dépend de la loi de Laplace-Gauss, sera spécialement considéré.

Nous désignerons par  $Y(t)$  le maximum de  $X(t')$  dans l'intervalle  $(0, t)$ ; l'étude de cette fonction  $Y(t)$  nous conduira à une relation importante entre la loi de Laplace-Gauss et une loi stable dissymétrique d'exposant caractéristique  $\frac{1}{2}$  (théorème 1). Cette loi, pour laquelle la densité de probabilité n'avait jusqu'ici été définie que comme transformée de Fourier de la fonction caractéristique  $e^{(-1+i)\sqrt{z}}$  ( $z > 0$ ), se trouve maintenant définie directement par une formule simple (théorème 2).

Après l'étude de quelques propriétés de cette loi, et quelques remarques sur le rôle des discontinuités dans les processus stochastiques, les résultats obtenus nous permettront d'approfondir l'étude du cas gaussien. Nous étudierons la répartition des racines de  $X(t)$ , et la répartition des valeurs de  $t$  pour lesquelles  $X(t)$  a un signe donné ou une valeur donnée. Nous établirons certaines propriétés presque sûres: ainsi, en appelant intervalle  $e(x)$  un intervalle séparé par deux racines consécutives de  $X(t) - x$ , la longueur totale des intervalles  $e(x)$  intérieurs à un intervalle donné  $(0, u)$  et de longueurs inférieures à  $l$  est un infiniment petit ayant presque sûrement, quand  $l$  tend vers zéro, une valeur principale de la forme  $s(x)\sqrt{l}$ ; la fonction  $s(x)$  définie par cette propriété est presque sûrement, au facteur  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  près, la dérivée

de la mesure de l'ensemble des valeurs de  $t$  de l'intervalle  $(0, u)$ , pour lesquelles  $X(t) < x$ .

Nous définissons d'autre part les lois de probabilité dont dépendent un certain nombre de quantités dont la définition dépend de  $X(t)$ , par exemple  $s(0)$  [on peut facilement en déduire la loi dont dépend  $s(x)$ , car on connaît la loi dont dépend la première racine de  $X(t) - x$  quand  $X(0)$  est connu];  $Y(t)$ ;  $Y(t)$ , pour une valeur de  $t$  dont on sait que  $X(t) = Y(t)$ ; les deux racines de  $X(t)$  qui encadrent une valeur donnée  $t$ . Nous définissons aussi la loi dont dépend la mesure de l'ensemble des valeurs de  $t$  de l'intervalle  $(0, u)$  pour lesquelles  $X(t) > 0$ , quand on connaît  $X(0)$  et  $X(u)$ , ou un seul de ces nombres. Un fait assez remarquable est que  $|X(t)|$  et  $Y(t) - X(t)$  dépendent exactement du même processus, de sorte que tout théorème relatif aux propriétés probables ou presque sûres de l'une de ces fonctions s'applique à l'autre. Ainsi l'étude des racines de  $X(t)$  et de l'allure de  $X(t)$  au voisinage de ces racines renseigne sur celle de  $Y(t) - X(t)$ , et par suite sur celle de  $X(t)$  au voisinage des points où  $X(t)$  atteint ou dépasse son maximum antérieur.

Quelques uns des résultats de ce travail ont été indiqués dans deux Notes présentées à l'Académie des Sciences le 27 décembre 1938 et le 30 janvier 1939<sup>1)</sup>; un grand nombre d'autres résultats sont actuellement inédits.

<sup>1)</sup> Sur les propriétés de quelques lois indéfiniment divisibles [207, 1368]; Sur un problème de M. Marcinkiewicz [208, 318], et erratum à cette Note [776]. Deux autres notes relatives à des sujets très voisins de celui qui est l'objet du présent travail ont été présentées le 12 décembre 1938 et le 16 janvier 1939; leur développement fera l'objet de travaux séparés.

Depuis la rédaction du présent travail, notre attention a été attirée sur un résultat de G. Doetsch [Math. Zeitschrift 40 (1935), 613—628; v. Note de la p. 622], d'après lequel la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2x}} x^{-\frac{3}{2}}$$

a pour transformée de Laplace  $e^{-\sqrt{2s}}$ ; comme on peut donner à  $s$  des valeurs purement imaginaires, ce résultat équivaut formellement à notre théorème 2. Doetsch en donne une vérification directe très simple. Il indique en outre, en l'attribuant à Cesàro, la propriété de  $f(x)$  qui, au point de vue du calcul des probabilités, signifie que cette fonction est la densité de probabilité d'une loi stable.

Doetsch ne parle pas de l'interprétation probabiliste de cette propriété. En tout cas il n'est pas question dans son mémoire de la relation entre la loi de Laplace-Gauss et la loi définie par  $f(x)$  qui résulte de nos théorèmes 1 et 2 et constitue le point de départ de notre travail. Cette relation, et la démonstration simple du théorème 2 qui en résultent, restent donc nouvelles.

NOTATIONS. — Les grandeurs aléatoires seront en principe désignées par des majuscules latines; une même relation aléatoire pourra être représentée par  $y = Y(t)$  ou  $t = T(y)$ , suivant celle des variables  $t$  et  $y$  que l'on considère comme fonction aléatoire de l'autre.

$\Pr\{A\}$  désignera la probabilité de l'évènement  $A$ ;  $\Pr\{A/B\}$  désignera sa probabilité conditionnelle si  $B$  est réalisé;  $\mathcal{M}\{X\}$  désignera la valeur probable de  $X$ .

### § 1. Rappel de notions connues sur les lois indéfiniment divisibles. <sup>2)</sup>

Nous désignerons dans ce travail par  $X(t)$  une variable aléatoire réelle, fonction d'un paramètre  $t$ . Pour chaque valeur de  $t$ , la loi  $\mathcal{L}(t)$ , ou plus simplement  $\mathcal{L}$ , dont dépend  $X(t)$  peut être définie, soit par sa fonction caractéristique  $\varphi(z)$ , soit par  $\psi(z) = \log \varphi(z)$ , soit par sa fonction de répartition  $F(x)$ , soit enfin, si elle est absolument continue, par la dérivée  $f(x)$  de  $F(x)$ . Comme  $\varphi(z)$  et  $\varphi(-z)$  sont imaginaires conjugués, il suffit de définir  $\varphi(z)$  pour  $z$  réel positif pour que la loi  $\mathcal{L}$  soit définie; de même pour  $\psi(z)$ ; il nous arrivera dans la suite de donner des expressions de ces fonctions valables seulement pour  $z$  positif. Quand le paramètre  $t$  interviendra, nous écrirons  $\varphi(t, z)$ ,  $\psi(t, z)$ ,  $F(t, x)$  et  $f(t, x)$ .

Une loi  $\mathcal{L}$  est dite indéfiniment divisible si elle fait partie d'une famille de lois  $\mathcal{L}(t)$  définies pour tout  $t$  positif par une fonction  $\psi(t, z)$  de la forme  $t\psi(z)$ ; cela revient à dire que,  $\varphi(z)$  étant sa fonction caractéristique,  $\varphi^t(z)$  est aussi, pour tout  $t$  positif, une fonction caractéristique.

A toute loi indéfiniment divisible correspond ce qu'on peut appeler un *processus stochastique linéaire et homogène*, c'est-à-dire un procédé de formation d'une fonction aléatoire  $X(t)$ , bien défini à partir d'une certaine valeur  $t_0$  de  $t$ , et vérifiant les conditions suivantes: 1<sup>o</sup> l'accroissement  $\Delta X$  correspondant à un accroissement  $\Delta t = \tau$  de la variable  $t$  dépend de la loi  $\mathcal{L}(\tau)$ , dont la fonction caractéristique est  $\varphi^\tau(z)$ ; 2<sup>o</sup> cet accroissement  $X(t+\tau) - X(t)$  est indépendant du passé, c'est-à-dire des valeurs de  $X(t')$  pour  $t' \leq t$ .

Sauf mention contraire, nous supposerons  $t_0 = 0$ ,  $X(t_0) = 0$ ; alors, pour chaque valeur de  $t$ , la fonction  $X(t)$  elle-même dépend de la loi  $\mathcal{L}(t)$ .

<sup>2)</sup> Pour les démonstrations des résultats qui vont être énoncés, on peut se reporter à notre Théorie de l'addition des variables aléatoires, p. 158 à 208.

La définition qui précède évoque l'idée d'interventions successives du hasard pour déterminer les accroissements successifs de  $X(t)$ . Mais pour obtenir un procédé de définition précise de  $X(t)$ , il faut d'abord considérer des accroissements finis. On choisira donc une suite de valeurs croissantes de  $t$ , soit  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ , et on déterminera chacun des accroissements successifs  $X(t_n) - X(t_{n-1})$  par une expérience réalisant la loi de probabilité voulue. Il s'agit ensuite d'interpoler <sup>3)</sup>. Choissant à cet effet un nombre  $t'$  entre  $t_{n-1}$  et  $t_n$ , on déterminera  $X(t')$  d'après la loi de probabilité conditionnelle dont dépend cette variable lorsque  $X(t_{n-1})$  et  $X(t_n)$  sont connus <sup>4)</sup>. En répétant indéfiniment cette opération, on peut considérer la fonction  $X(t)$  comme étant bien définie pour tout  $t > t_0$ , en ce sens qu'il est presque sûr que, pour chacune de ces valeurs de  $t$ ,  $X(t-0)$  et  $X(t+0)$  sont bien définis.

On peut aussi définir des processus stochastiques non homogènes dans le temps. Il n'en sera pas question dans la suite de ce travail. Rappelons seulement que cette extension ne conduit, contrairement à ce qu'on pourrait penser, à aucune extension de la notion de loi indéfiniment divisible; mais elle conduit à de nouvelles familles de lois indéfiniment divisibles dépendant d'un paramètre  $t$ , et par suite à des fonctions  $X(t)$  différentes de celles qu'on obtient par les processus homogènes.

Rappelons maintenant les cas particuliers les plus importants. D'abord celui du mouvement brownien théorique, pour lequel la

<sup>3)</sup> Il est évident que la nature ne procède pas ainsi;  $t$  est le temps, qui varie toujours dans le même sens. Cela ne veut pas dire que la nature ait résolu la difficulté qui arrête ici le mathématicien. Mais dans un cas concret, dans celui du mouvement brownien, par exemple, la nature réalise seulement à l'échelle microscopique des phénomènes que le mathématicien, pour la commodité de ses recherches, prolonge jusqu'à l'infiniment petit. Nous pensons d'ailleurs, quoique depuis les travaux d'Heisenberg d'éminents savants ne soient pas de cet avis, que la notion de hasard est une notion que le savant introduit parce qu'elle est commode et féconde mais que la nature ignore.

<sup>4)</sup> Il peut être utile de rappeler que, si une valeur  $u$  de  $X(t_n) - X(t_{n-1})$  dont la probabilité était nulle s'est trouvée réalisée, la loi conditionnelle dont il s'agit n'est pas bien définie par la phrase du texte. Mais on peut dans ce cas considérer  $u$  comme limite d'un intervalle très petit  $du$ , et définir la loi conditionnelle par ce passage à la limite. On a ainsi un procédé de définition valable sauf peut-être dans des cas dont la probabilité totale nulle; cette restriction est sans inconvénient: après avoir déterminé  $X(t_{n-1})$  ce procédé permet de déterminer  $X(t_n)$ , puis  $X(t')$ , et la loi à deux variables dont dépend l'ensemble de ces deux nombres est la même que si l'on avait procédé dans l'ordre naturel.

loi  $\mathcal{L}$  est la loi de Laplace-Gauss, c'est-à-dire que, avec un choix convenable des unités,

$$(1) \quad \psi(t, z) = -t \frac{z^2}{2}, \quad f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

Dans ce cas la fonction  $X(t)$  est presque sûrement continue. Réciproquement, si la fonction  $X(t)$  obtenue par un processus homogène est presque sûrement continue, on peut définir une constante  $a$  telle que  $X(t) - at$  dépende du processus défini par les formules (1).

L'exemple le plus simple de processus introduisant des discontinuités est le suivant: pendant chaque intervalle de temps très petit existe une probabilité  $adt + O(dt^2)$  qu'un certain évènement  $E$  soit réalisé. L'indépendance des différents intervalles  $dt$  implique alors que  $E$  puisse être réalisé plusieurs fois.  $X(t)$  sera le nombre de réalisations de  $E$  pendant l'intervalle fini  $(0, t)$ ; il dépend de la loi de Poisson définie par

$$(2) \quad \psi(t, z) = at(e^{iz} - 1), \quad \Pr\{X(t) = p\} = e^{-at} \frac{a^p t^p}{p!}$$

(pour  $p=0, 1, \dots$ ). On remarque le caractère discontinu de  $X(t)$ , qui ne prend que des valeurs entières, et ne varie que par sauts; mais l'instant où se produit chacun de ces sauts est imprévisible: à l'instant  $t - 0$ , on ignore si  $X(t+0)$  sera égal ou non à  $X(t-0)$ ; la première circonstance a pour probabilité un, pour chaque valeur de  $t$ ; mais il y a une probabilité positive que la seconde soit réalisée au moins une fois dans l'intervalle  $(0, T)$ . On remarque aussi qu'on peut choisir par un tirage au sort unique, donnant aux différentes valeurs de  $p$  les probabilités (2) (pour  $t=T$ ), la valeur de  $X(T) = p$ , puis choisir par  $p$  nouveaux tirages au sort les  $p$  points de discontinuité qui devront alors exister dans l'intervalle  $(0, T)$ . Si chacun de ces tirages respecte l'homogénéité dans le temps, le résultat est le même, au point de vue des probabilités des différentes circonstances possibles, que si l'on appliquait avec les mêmes formules (2) la définition générale du processus stochastique homogène.

Dans le cas de la loi de Laplace-Gauss, un changement d'unité équivaut à un changement de la valeur de  $t$ : on ne change pas  $\mathcal{L}(t)$  en changeant à la fois  $X$  en  $\lambda X$  (c'est-à-dire  $z$  en  $\frac{z}{\lambda}$ ), et  $t$  en  $\lambda^2 t$ ; il en résulte qu'une combinaison linéaire de variables gaussiennes indépendantes est encore une variable gaussienne.

Il n'en est pas de même dans le cas de la loi de Poisson. Les combinaisons linéaires de variables indépendantes qui dépendent individuellement de la loi de Poisson conduisent à des lois dépendant d'un nombre illimité de paramètres; en ajoutant à une telle combinaison une variable gaussienne et un terme non aléatoire, et considérant enfin les lois limites de celles ainsi définies, on obtient l'expression générale des lois indéfiniment divisibles (cf. Variables aléatoires, p. 180—186).

Nous n'avons pas besoin pour le présent travail, de rappeler cette expression. Nous allons seulement rappeler les formules relatives aux *lois stables*, pour lesquelles

$$(3) \quad \psi(t, z) = (-c_0 + ic_1)tz^\alpha \left( c_0 > 0, 0 < \alpha \leq 2, \left| c_1 \cos \frac{\pi}{2} \alpha \right| \leq c_0 \sin \frac{\pi}{2} \alpha, z > 0 \right),$$

$\alpha$  étant l'exposant caractéristique; son inverse  $\beta = \frac{1}{\alpha}$  peut être appelé *exposant de croissance*;  $X(t)$  est en effet de la forme  $\xi t^\beta$ ,  $\xi$  dépendant d'une loi indépendante de  $t$ . Dans le cas de la loi de Laplace-Gauss,  $\alpha = 2$ . Dans tous les autres cas,  $\alpha$  est compris entre 0 et 2.

Si  $\alpha$  est compris entre 0 et 1, le lien entre la loi étudiée et la loi de Poisson résulte de la formule

$$(4) \quad \left( -1 + i \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha \right) z^\alpha = c \int_0^\infty (e^{izu} - 1) \frac{du}{u^{\alpha+1}}$$

$$\left[ z > 0, c = \frac{-1}{\Gamma(-\alpha) \cos \frac{\pi}{2} \alpha} = \frac{2}{\pi} \Gamma(1 + \alpha) \sin \frac{\pi}{2} \alpha \right]$$

et l'expression

$$(5) \quad \psi(t, z) = ct \int_0^\infty (e^{izu} - 1) \frac{du}{u^{\alpha+1}}$$

qui en résulte pour  $\psi(t, z)$  dans le cas où  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha$ , conduit à la définition suivante de  $X(t)$ : dans le plan des  $tu$ , à chaque élément d'aire  $dt du$  du demi-plan  $u > 0$ , on fait correspondre une variable aléatoire  $\delta X$  égale, soit à zéro, soit à  $u$ , la probabilité de cette dernière valeur étant  $\frac{c}{u^{\alpha+1}} dt du$ ;  $X(T)$  est la somme des variables ainsi définies, pour  $0 < t < T$ ,  $u > 0$ .

Si l'on ne considère d'abord que les valeurs de  $u$  supérieures à un nombre  $h > 0$ , le nombre des termes non nuls dont  $X(T)$  est la somme dépend de la loi de Poisson, sa valeur probable

étant  $\frac{cT}{\alpha u^\alpha}$ . Elle augmente indéfiniment quand  $h$  tend vers zéro. La somme  $X(T)$  comprend alors presque sûrement une infinité de termes positifs, et est presque sûrement finie <sup>5)</sup>. Si l'on étudie d'autre part la manière dont  $X(t)$  varie avec  $t$ , ce qui vient d'être dit pour  $X(T)$  s'appliquant à la variation de cette fonction dans n'importe quel intervalle, quoiqu'elle n'augmente que par sauts, tous positifs, ces sauts sont en nombre infini dans n'importe quel intervalle, de sorte que  $X(t)$  est une fonction constamment croissante, quand  $t$  varie de zéro à l'infini <sup>6)</sup>.

Si  $1 < \alpha < 2$ , les formules (4) et (5) cessent d'avoir un sens, et sont remplacées par la formule

$$(6) \quad \psi(t, z) = \left(-1 + i \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha\right) t z^\alpha = ct \int_0^\infty (e^{izu} - 1 - izu) \frac{du}{u^{\alpha+1}},$$

dont l'interprétation est la suivante: la somme des sauts est ici presque sûrement infinie; mais si, de chaque variable  $\delta X$  (nulle ou non) on retranche sa valeur probable  $\frac{c}{u^\alpha} dt du$ , la somme des variables ainsi obtenues est presque sûrement convergente, et, si on l'étend à la région  $0 < t < T$ ,  $u > 0$ , représente  $X(T)$ . La fonction  $X(t)$  conserve le caractère d'avoir dans tout intervalle une infinité de sauts positifs, mais n'est ici monotone dans aucun intervalle. On peut avoir une idée approchée de l'allure de  $X(t)$  en négligeant les valeurs de  $u$  inférieures à un nombre donné  $\varepsilon$ ; on obtient alors une fonction qui est la différence d'une fonction croissant par sauts et qui n'a qu'un nombre fini de sauts dans n'importe quel intervalle fini, et d'une fonction linéaire.

Pour chacune des valeurs de  $\alpha$  que nous venons de considérer, la loi stable la plus générale relative à cet exposant s'obtient en posant

$$(7) \quad X(t) = a_1 X_1(t) - a_2 X_2(t) \quad (a_1 \geq 0, a_2 \geq 0),$$

$X_1(t)$  et  $X_2(t)$  étant formés séparément par le procédé que nous

<sup>5)</sup> La convergence presque sûre résulte évidemment de ce théorème connu: pour qu'une série à termes aléatoires indépendants soit presque sûrement convergente, il faut et il suffit que la loi dont dépend la somme  $S_n$  des  $n$  premiers termes tende, pour  $n$  infini, vers une loi limite. Dans le cas qui nous occupe, la convergence presque sûre est donc liée au fait que l'intégrale (5) ait un sens.

<sup>6)</sup> Il s'agit bien entendu de propriétés presque sûres, c'est-à-dire pouvant parfois être en défaut dans des cas dont la probabilité est nulle. Il nous arrivera souvent, lorsque le caractère aléatoire de la propriété énoncée ne laisse craindre aucune ambiguïté, de ne pas mentionner cette restriction.

venons de définir. Si alors  $0 < \alpha < 1$ ,  $a_1 a_2 > 0$ ,  $X(t)$  est une somme de sauts des deux signes. Si  $1 < \alpha < 2$ ,  $a_1 a_2 > 0$ , on peut aussi considérer  $X(t)$  comme une somme de sauts, sans tenir compte des constantes additives, mais à condition de les ranger dans un ordre convenable: ajouter les sauts pour lesquels  $u > h_1 > 0$ , et ceux pour lesquels  $-u > h_2 > 0$ , et faire tendre  $h_1$  et  $h_2$  vers zéro en établissant entre eux la relation  $a_1 h_1^{\alpha-1} = a_2 h_2^{\alpha-1}$ . On peut au contraire ne pas se préoccuper de l'ordre des différentes valeurs de  $u$ , à condition d'introduire une constante additive, comme nous l'avons expliqué à propos de la formule (6).

Le cas où  $\alpha = 1$  conduit à une loi bien connue, la loi de Cauchy. On a dans ce cas

$$(8) \quad \psi(t, z) = -t |z| = \frac{2t}{\pi} \int_0^\infty (\cos zu - 1) \frac{du}{u^2},$$

formule dans laquelle on ne peut pas séparer les sauts des deux signes (on obtiendrait, en le faisant, une loi *quasi-stable*, mais non stable). On peut, dans ce cas ajouter à  $\psi(t, z)$  un terme *aitz*, ce qui signifie qu'à  $X(t)$  on peut ajouter un terme non aléatoire *at*.

Nous avons ainsi énuméré toutes les lois stables. Précisons bien que celles définies par la formule (4), (où  $0 < \alpha < 1$ ), et celles qui s'en déduisent par un changement d'unité, sont les seules pour lesquelles la variable est toujours positive.

## § 2. L'inversion de l'écart maximum dans le cas gaussien.

Plaçons-nous dans le cas du processus défini par la formule (1). Désignons par  $Y(t)$  le maximum de  $X(t')$  dans l'intervalle  $(0, t)$ ; c'est une fonction presque sûrement continue, jamais décroissante et devenant infinie avec  $t$ . Elle est constante dans certains intervalles; nous désignerons un quelconque de ces intervalles par  $(\tau_i, \tau'_i)$ , et par  $\eta_i$  la valeur constante qui lui correspond, qui est celle de  $X(\tau_i)$ .

Désignons par  $T(y)$  la fonction inverse de  $Y(t)$ , c'est-à-dire que  $y = Y(t)$  se résout par  $t = T(y)$ ; bien entendu, si  $y$  est un des nombres  $\eta_i$ ,  $T(y)$  est indéterminé dans l'intervalle  $(\tau_i, \tau'_i)$ ; nous conviendrons de prendre pour  $T(y)$ , en un tel point, la valeur  $T(\eta_i - 0) = \tau_i$ . Pour n'importe quelle autre valeur positive de  $y$ ,  $T(y)$  est bien défini par  $y = Y(t)$ .

La fonction  $T(y)$  peut aussi évidemment être définie comme étant la plus petite racine de  $X(t) = y$ .

Les inégalités  $T(y) \leq t$  et  $Y(t) \geq y$  n'étant que deux expressions différentes d'un même fait, on a

$$(9) \quad \Pr \{T(y) \leq t\} = \Pr \{Y(t) \geq y\}.$$

THÉORÈME 1. — *La fonction  $T(y)$  est une fonction à accroissement aléatoires indépendante, correspondant au processus défini par*

$$(10) \quad \psi(y, z) = y(-1+i)\sqrt{z} = \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (e^{izu} - 1)u^{-\frac{3}{2}} du \quad (z > 0)$$

[c'est-à-dire par la formule (5), pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ ; la variable est ici  $y$ , et non  $t$ ].

La démonstration résulte du rapprochement de deux remarques très simples. Posons  $T(h_1) = t_1$ , ce qui implique  $X(t_1) = h_1$ . L'accroissement de  $X(t)$  à partir de l'instant  $t_1$  dépend de la même loi qu'à partir de l'instant initial. Le temps  $T(h_1+h_2) - T(h_1)$  au bout duquel  $X(t)$  a pour la première fois réalisé un nouvel accroissement  $h_2$  et atteint ainsi la valeur  $h_1 + h_2$  dépend donc de la même loi que  $T(h_2)$ , et cela quel que soit  $T(h_2)$ . On peut donc écrire

$$(11) \quad T(h_1+h_2) = T(h_1) + T'(h_2),$$

l'accroissement  $T'(h_2)$  étant une variable aléatoire indépendante de  $T(h_1)$  et dépendant de la même loi que  $T(h_2)$ , loi évidemment indépendante aussi bien de  $h_1$  que de  $T(h_1)$ . En d'autres termes,  $T(h)$  est une fonction à accroissements aléatoires indépendants, formée par un processus linéaire et homogène.

D'autre part le processus lié à la loi de Laplace-Gauss n'est pas modifié si l'on change à la fois  $t$  en  $\lambda^2 t$  et  $X$  en  $\lambda X$ , donc aussi  $Y$  en  $\lambda Y$  ( $\lambda > 0$ ); la probabilité (9) n'est donc pas modifiée par ce changement, c'est-à-dire que la loi  $\mathcal{L}'$  dont dépend  $\frac{T(y)}{y^2}$  est indépendante de  $y$ . La formule (11) s'écrit alors

$$(12) \quad h_1^2 U_1 + h_2^2 U_2 = (h_1 + h_2)^2 U,$$

$U_1$  et  $U_2$  étant deux variables aléatoires, indépendantes l'une de l'autre, et dépendant de la loi  $\mathcal{L}'$ ; quels que soient  $h_1$  et  $h_2$  positifs, le nombre  $U$ , défini par cette formule, dépend encore de la même loi. C'est donc que cette loi est une loi stable d'exposant caractéristique  $\frac{1}{2}$ .

Il s'agit essentiellement d'une variable aléatoire positive, qui croît avec  $y$ . Le processus qui définit l'accroissement de  $T(y)$  est donc, peut-être à un changement d'unité près, celui défini par la formule (10). La formule (18) ci-dessous résoudra cette question d'unité et terminera la démonstration du théorème 1.

REMARQUE. — On peut être tenté de croire que le raisonnement précédent peut s'étendre au cas où l'on remplace la loi de Laplace-Gauss par une loi stable d'exposant  $\alpha < 2$ , et donner une relation générale entre deux lois d'exposants  $\alpha$  et  $\frac{1}{\alpha}$ . Il est certain, si l'on définit dans ce cas  $T(y)$  comme la plus petite racine de  $X(t+0) \geq y$ , que  $y^{-\alpha}T(y)$  dépend encore d'une loi indépendante de  $y$ . Mais, contrairement à ce qu'on pourrait croire,  $T(y)$  n'est pas en général une fonction à accroissements aléatoires indépendants. Cela tient à ce que, sauf dans un cas particulier que nous mentionnerons dans un instant, une valeur  $h_1$  de  $y$  étant donnée, il y a une probabilité unité pour que cette valeur soit atteinte par  $X(t)$  par un saut qui non seulement l'atteindra, mais la dépassera d'une certaine quantité positive  $H$ , le rapport  $\frac{H}{h_1}$  dépendant d'une loi qui, par raison d'homogénéité, est indépendante de  $h_1$ ; donc la loi dont dépend  $H$  varie avec  $h_1$ ; il peut notamment arriver que  $H > h_2$ , de sorte qu'il y a une probabilité positive (qui croît avec  $h_1$ ) pour que l'expression désignée plus haut par  $T'(h_2)$  soit nulle. On voit donc que les accroissements successifs de  $T(y)$ , pour des accroissements égaux  $\Delta y = h_2$ , dépendent de lois qui varient avec  $y$ .

Le seul cas, en dehors du cas gaussien, où l'on échappe à cette difficulté est celui défini par la formule (7), si l'on y fait  $a_1 = 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $1 < \alpha < 2$ . La condition  $a_1 = 0$  implique qu'il n'y ait que des sauts négatifs: la fonction  $X(t)$  ne risque donc pas d'atteindre et dépasser du coup une valeur positive  $y$ . Mais, si  $\alpha < 1$   $X(t)$  est alors une fonction négative; elle n'atteint jamais une telle valeur. Si au contraire  $\alpha > 1$ ,  $X(t)$  a sa valeur probable nulle, et prend des valeurs des deux signes;  $Y(t)$  est une fonction continue non décroissante, et qui, presque sûrement, augmente indéfiniment avec  $t$ . Le raisonnement qui nous a conduit au théorème 1 s'applique encore, et montre que la fonction  $T(y)$  définie par l'inversion de  $Y(t)$  dépend d'une loi du type (5), mais pour laquelle  $\beta = \frac{1}{\alpha}$  devient l'exposant caractéristique.

Il y a ainsi, entre les processus définis par les fonctions

$$(13) \quad \psi_1(t, z) = \left( -1 - i \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha \right) t z^\alpha = c t \int_0^\infty (e^{-izu} - 1 + izu) u^{-(\alpha+1)} du,$$

$$(14) \quad \psi_2(t, z) = \left( -1 + i \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \beta \right) t z^\beta = c' t \int_0^\infty (e^{izu} - 1) u^{-(\beta+1)} du$$

( $z > 0, 1 < \alpha < 2, \alpha\beta = 1$ ), la même relation qui existe, d'après le théorème 1, entre les processus définis par les formules (1) et (10).

### § 3. Détermination de la probabilité (9).

Revenons au cas qui a fait l'objet du théorème 1. Les propriétés connues de  $X(t)$  et de  $Y(t)$ , dans le cas gaussien, vont nous permettre de calculer la probabilité (9), et de déterminer ainsi directement la loi dont dépend  $T(y)$ , qui n'est connue jusqu'ici que par l'intermédiaire de sa fonction caractéristique.

Nous utiliserons à cet effet un mode de raisonnement que Désiré André avait appliqué à l'étude du jeu de pile ou face. Plaçons-nous dans l'hypothèse  $T = T(y) \leq t$ . Quelle que soit la valeur supposée connue de  $T$  (sauf dans l'hypothèse  $T = t$ , dont la probabilité est nulle), l'accroissement  $X(t) - X(T)$  a une chance sur deux d'être positif, et une chance sur deux d'être négatif, la probabilité de la valeur zéro étant nulle. Les différents cas considérés (chacun étant défini par une valeur de  $T$ , définie à  $dT$  près) étant exclusifs les uns des autres, on voit que, tout compte fait, l'hypothèse  $T(y) \leq t$  a une chance sur deux d'entraîner la conséquence  $X(t) > y$ . Or cette conséquence ne peut être réalisée d'aucune autre manière. On a donc

$$\frac{1}{2} \operatorname{Pr} \{T(y) \leq t\} = \operatorname{Pr} \{X(t) > y\}$$

c'est-à-dire

$$(15) \quad \operatorname{Pr} \{T(y) \leq t\} = \operatorname{Pr} \{Y(t) \geq y\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_y^\infty e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

On peut exprimer ce résultat en disant que  $Y(t)$  et  $|X(t)|$  dépendent de la même loi de probabilité.

Si nous faisons, dans l'intégrale précédente, le changement de variable

$$\frac{x^2}{t} = \frac{y^2}{u}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} y u^{-\frac{3}{2}} du,$$

il vient

$$(16) \quad \Pr \{T(y) \leq t\} = \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{y^2}{2u}} u^{-\frac{3}{2}} du.$$

On voit donc que:

THÉORÈME 2. — *La loi  $\mathcal{L}'$  dont dépend  $T(1)$  [et par suite aussi  $y^{-2}T(y)$ ], est la loi absolument continue dont la densité de probabilité est*

$$(17) \quad f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2u}}.$$

Cette fonction étant nulle pour  $u$  négatif, et équivalente pour  $u$  infini positif, à  $\frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}}$ , il résulte des relations connues entre l'allure d'une fonction à l'infini et celle de sa transformée de Fourier à l'origine <sup>7)</sup>, que l'on a pour  $z$  infiniment petit positif

$$(18) \quad \varphi(z) - 1 \sim \psi(z) \sim (-1+i)\sqrt{z}.$$

Cette formule est celle que nous avons annoncée, qui termine la démonstration du théorème 1. Nous avons montré que  $\varphi(1, z) = \psi(z)$  est, pour  $z$  positif, de la forme  $(-1+i)c\sqrt{z}$ ,  $c$  étant constant; on voit qu'on a nécessairement  $c = 1$ .

En faisant jouer un rôle en quelque sorte symétrique à  $t$  et  $y$ , on peut dire que les formules (15) et (16) définissent la probabilité qu'un point donné  $(t, y)$  soit au-dessous de la courbe  $y = Y(t)$  ou sur cette courbe; elle ne dépend que de  $\frac{t}{y^2}$ , comme on pouvait le prévoir, par raison d'homogénéité.

Nous aurons besoin, dans la suite, de connaître aussi la probabilité conditionnelle de la même circonstance, dans l'hypothèse  $X(t) = Y(t)$ , c'est-à-dire si l'on sait que  $X(t)$  atteint, pour la valeur considérée de  $t$ , une valeur non encore dépassée; nous désignerons par

$$G(t, y) = G\left(\frac{t}{y^2}\right) = \Pr\{X(t) \geq y/X(t) = Y(t)\}$$

la probabilité qu'il s'agit de calculer.

Il s'agit, d'abord, de la définir avec précision. L'hypothèse  $X(t) = Y(t)$  étant a priori infiniment peu probable, la probabilité dont il s'agit n'est pas par elle-même bien définie. La

<sup>7)</sup> Cf., par exemple, notre Calcul des probabilités, p. 259.

définition dont nous aurons besoin dans la suite est la suivante:  $G(t, y)$  est la limite, quand  $\tau$  tend vers zéro, de la probabilité de  $X(t) \geq y$  dans l'hypothèse où il existe, entre  $t$  et  $t + \tau$ , un nombre  $t'$  pour lequel  $X(t') = Y(t')$ , ce qui revient au même que de dire qu'il en existe un pour lequel  $X(t') = Y(t)$  (car le plus petit des nombres au moins égaux à  $t$  vérifiant une quelconque de ces conditions vérifie aussi l'autre).

Commençons par un raisonnement heuristique très simple. D'après la formule (16), pour chaque valeur de  $y$ , la probabilité que  $Y(t)$  atteigne cette valeur pendant le temps  $dt$  est

$$\frac{y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2t}} t^{-\frac{3}{2}} dt.$$

La probabilité conditionnelle cherchée étant, pour  $t$  fixe et  $y$  variable, proportionnelle à la probabilité a priori, est de la forme

$$\frac{y dy}{t} e^{-\frac{y^2}{2t}},$$

ce qui conduit à la formule

$$(19) \quad \Pr \{X(t) \geq y / X(t) = Y(t)\} = e^{-\frac{y^2}{2t}}.$$

Pour la démontrer d'une manière rigoureuse, nous allons considérer la probabilité simultanée des conditions

$$(A) \quad x \leq X(t) < x + dx \quad (x \geq 0),$$

$$(B) \quad y \leq Y(t) < y + dy \quad (y \geq 0),$$

$$(C) \quad t' - t < \tau \quad (\tau > 0),$$

où  $t'$  désigne le plus petit nombre au moins égal à  $t$  et racine de  $X(t') = Y(t)$ . La variation de  $X(t)$  à droite de la valeur particulière de  $t$  que nous considérons étant indépendante du passé, et en particulier des valeurs  $x$  et  $y$ , la probabilité de C, si A et B sont réalisés, ne dépend que de  $h = y - x$  et  $\tau$ . Elle est donnée exactement par les formules (15) et (16); il nous suffit d'observer qu'elle est de la forme  $\Phi\left(\frac{\tau}{h^2}\right)$ , et s'annule avec  $\frac{\tau}{h^2}$ .

D'après le principe de Désiré André, on a

$$\Pr \{A, Y(t) > x + h\} = \frac{dx}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x+2h)^2}{2t}},$$

et par suite

$$(19') \quad \Pr \{A, B\} = \frac{2(x+2h)dx dy}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x+2h)^2}{2t}},$$

$$(19'') \quad \Pr \{A, B, C\} = \frac{2(x+2h)dx dy}{t\sqrt{2\pi t}} \Phi\left(\frac{\tau}{h^2}\right) e^{-\frac{(x+2h)^2}{2t}}$$

$h$  désignant toujours  $y - x$ . En laissant  $x$  fixe, et intégrant par rapport à  $y$  (ou à  $h=y-x$ ), il vient

$$\Pr \{A, C\} = \frac{2dx}{t\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty (x+2h) \Phi\left(\frac{\tau}{h^2}\right) e^{-\frac{(x+2h)^2}{2t}} dh.$$

La probabilité conditionnelle de A dans l'hypothèse C est proportionnelle à cette expression, le facteur de proportionnalité ne dépendant pas de  $x$ . Nous voulons chercher sa limite quand  $\tau$  tend vers zéro; comme  $\Phi\left(\frac{\tau}{h^2}\right)$  s'annule avec  $\frac{\tau}{h^2}$ , il suffit d'intégrer par rapport à  $h$  jusqu'à une valeur telle que  $h$  et  $\tau$  tendent vers zéro, par exemple  $\tau^{\frac{1}{2}}$ . A la limite, on obtient bien une probabilité proportionnelle (pour  $t$  fixe et  $x$  variable) à

$$\frac{x dx}{t} e^{-\frac{x^2}{2t}},$$

donc égale à cette expression, puisqu'en intégrant de zéro à l'infini on trouve bien l'unité. En intégrant de  $y$  à l'infini pour obtenir  $G(t, y)$ , on trouve bien l'expression (19), c.q.f.d.

Le résultat précédent ne serait pas modifié si l'on remplaçait  $\Phi\left(\frac{\tau}{h^2}\right)$  par une fonction de  $h$  égale à un si  $h < l$  et nulle si  $h > l$ ,  $l$  tendant ensuite vers zéro. Cette fonction représentant la probabilité de  $Y(t) - X(t) < l$ , condition qui remplacerait ainsi la condition C, on voit que l'expression

$$\lim_{l \rightarrow 0} \Pr \{X(t) > y / Y(t) - X(t) < l\},$$

que l'on pourrait être tenté de prendre aussi comme définition de  $G(t, y)$ , est bien égale à celle obtenue en partant de notre première définition.

Il est évident que l'on obtiendrait d'autres résultats en considérant la condition  $X(t) = Y(t)$  comme limite d'une condition de la forme

$$Y(t) - X(t) < lX^\alpha(t)$$

par exemple. Mais, sauf pour  $\alpha = 0$ , on ne respecterait pas

l'homogénéité de l'axe des  $x$ . Au contraire les deux définitions que nous venons de comparer conservent cette homogénéité; cela permettrait de prévoir qu'elles donneraient le même résultat.

Il était aussi évident a priori que les probabilités des grandes valeurs de  $X(t)$  seraient augmentées par l'hypothèse que  $X(t)$  atteigne, pour la valeur considérée de  $t$ , un maximum non encore dépassé.

On peut d'ailleurs préciser cette remarque de la manière suivante:  $t$  étant donné,  $Y(t)$  est la valeur de  $X(t)$  pour une certaine valeur aléatoire  $U$  inférieure à  $t$ , et l'on a évidemment

$$\Pr \{Y(t) > y\} = \mathcal{N}\{\Pr[X(U) > y]\} = \mathcal{N}\left\{e^{-\frac{y^2}{2U}}\right\},$$

de sorte qu'on peut retrouver la formule (15) en utilisant la formule (19) et la loi de probabilité dont dépend  $U$ ; nous ferons ce calcul plus loin (§ 7, 8<sup>o</sup>). Il nous suffit de remarquer ici que  $U < t$  pour être assuré qu'on diminue le poids des grandes valeurs de  $y$  en revenant de la formule (19) à la formule (15).

#### § 4. Remarques diverses.

1<sup>o</sup>. Il est facile, sans utiliser la transformation de Fourier, de vérifier que la loi définie par la formule (17) est une loi stable d'exposant caractéristique  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Contentons-nous de vérifier la formule (12), qui traduit la définition de la stabilité, dans le cas où  $h_1 = h_2$ . D'après la formule connue qui définit la composition de deux lois définies par leurs fonctions  $f(x)$ , il s'agit de vérifier que

$$\int_0^x f(y)f(x-y)dy \equiv 2 \int_0^{\frac{x}{2}} f(y)f(x-y)dy = \frac{1}{4} f\left(\frac{x}{4}\right),$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\frac{x}{2}} y^{-\frac{3}{2}}(x-y)^{-\frac{3}{2}} e^{-\left[\frac{x}{2y(x-y)} - \frac{2}{x}\right]} dy = \sqrt{2\pi} x^{-\frac{3}{2}}.$$

Cette formule se vérifie immédiatement par le changement de variable

$$\frac{x}{2y(x-y)} = \frac{2}{x} + u^8)$$

---

<sup>8)</sup> On peut faciliter le calcul en posant successivement  $y = xv$ ,  $v(1-v) = w$ ,  
et  $w = \frac{1}{2(2+ux)}$ .

qui transforme le premier membre en

$$\sqrt{2} x^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} du = \sqrt{2} x^{-\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi} x^{-\frac{3}{2}}.$$

Il est facile aussi, en partant de la formule (17) et en utilisant l'expression (7) de la variable aléatoire dépendant d'une loi stable qui comporte des sauts des deux signes, d'obtenir sous la forme d'une intégrale la densité de probabilité de n'importe quelle loi stable d'exposant caractéristique  $\frac{1}{2}$ . En particulier, pour la loi symétrique stable d'exposant  $\frac{1}{2}$ , on obtient ainsi l'expression

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [y(|x| + y)]^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2y} - \frac{1}{2(|x|+y)}} dy,$$

à laquelle il est facile de donner différentes formes par des changements de variables, tels que  $|x| + y = uy$ ,  $u - \frac{1}{u} = v$ . Cette intégrale, étant une somme d'éléments positifs, est à certains points de vue (par exemple pour l'étude asymptotique) plus commode que l'expression

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2\sqrt{z}} \cos xz dz$$

déduite de la formule de Fourier. L'une ou l'autre de ces expressions donne aisément  $\frac{1}{2}\pi$  comme valeur de la densité à l'origine.

2<sup>o</sup>. La loi trouvée pour  $T(a)$  est naturellement aussi celle dont dépend  $T_1$ , première racine de  $X(t)$ , dans l'hypothèse  $X(0) = \pm a$ ; le signe de  $a$  est en effet indifférent dans la définition de la loi dont dépend  $T_1$ , et, si  $a > 0$ , on passe de  $T_1$  à  $T(a)$  en remplaçant  $X(t)$  par  $a - X(t)$ .

On peut, de la même manière, déterminer la probabilité de  $T_1 \leq t$  dans l'hypothèse  $X(0) = a$ ,  $X(t) = b$ . Cette probabilité est évidemment égale à un si  $ab \leq 0$ . Pour traiter le cas où  $ab > 0$ , appliquons le principe de symétrie de Désiré André: si  $T_1 \leq t$ , la valeur finale de  $X(t)$  a autant de chances d'être égale à  $b$  qu'à  $-b$  (à  $db$  près). On a donc, dans l'hypothèse  $X(0) = a$ ,

$$\begin{aligned} \alpha &= \Pr\{T_1 \leq t, b \leq X(t) < b + db\} = \\ &= \Pr\{b \leq -X(t) < b + db\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(a+b)^2}{2t}} db, \end{aligned}$$

et d'autre part, toujours si  $X(0) = a$ ,

$$\beta = \Pr \{b \leq X(t) < b + db\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(a-b)^2}{2t}} db.$$

La probabilité conditionnelle  $\gamma$ , qu'on ne peut définir que comme limite, pour  $db$  infiniment petit, de la probabilité de  $T_1 \leq t$  dans l'hypothèse  $X(0) = a$ ,  $b \leq X(t) < b + db$ , a donc la valeur

$$(20) \quad \gamma = \frac{\alpha}{\beta} = e^{-\frac{2ab}{t}}.$$

Cette formule nous servira dans la suite

**3°.** On peut reprocher au raisonnement, très élégant, de Désiré André, son caractère un peu artificiel. Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que les résultats obtenus peuvent se rattacher à une méthode plus générale.

La fonction  $f(t, x)$  correspondant à un processus gaussien homogène est solution de l'équation de la chaleur

$$(21) \quad 2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Le problème des processus arrêtés lorsque  $X(t)$ , initialement positif, s'annule, est lié à la recherche de la solution définie pour  $x$  positif et vérifiant les conditions

$$f(0, x) = f_0(x), \quad f(t, 0) = 0;$$

alors, pour chaque valeur de  $t$ ,  $f(t, x)dx$  représente la probabilité que le processus continue jusqu'à l'instant  $t$ , et que de plus  $X(t)$  soit égal à  $x$  (à  $dx$  près).

Pour résoudre ce problème, il n'y a qu'à représenter la fonction  $f(t, x)$  par l'intégrale de Fourier

$$(22) \quad f(t, x) = \int_0^\infty \sin \lambda x e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} \varphi(\lambda) d\lambda,$$

qui représente une solution de (21), impaire en  $x$ , donc s'annulant pour  $x = 0$ ; on détermine  $\varphi(\lambda)$  en représentant la fonction initiale  $f_0(x)$  par une intégrale de Fourier impaire. On remarque qu'on a ainsi une méthode permettant de définir  $f(t, r)$  non seulement pour  $t$  positif, mais même pour les valeurs de  $t$  négatives et assez petites en valeur absolue, si pour ces valeurs la formule (22) conserve un sens.

On remarque qu'on ne change rien en supprimant la condition  $f(t, 0) = 0$ , mais supposant que  $f_0(x)$  soit une fonction définie de  $-\infty$  à  $+\infty$ , et impaire, c'est-à-dire en associant à chaque source chaude placée initialement au point  $x$  une source froide placée au point  $-x$ . Le problème qui vient de nous occuper correspond au cas où il y a ainsi une source chaude unique au point  $a$ , et par suite une source froide au point  $-a$ , et il vient

$$(23) \quad \Pr \{T_1 > t, b \leq X(t) < b + db\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[ e^{-\frac{(a-b)^2}{2t}} - e^{-\frac{(a+b)^2}{2t}} \right] db,$$

ce qui coïncide bien avec les formules du 2<sup>o</sup> ci-dessus. L'intégration par rapport à  $b$  permet de retrouver la loi dont dépend  $T_1$ . On peut ainsi retrouver la probabilité que  $X(t')$  reste positif de 0 à  $t$ , soit dans l'hypothèse  $X(0) = a$ , soit dans l'hypothèse  $X(0) = a, X(t) = b$ .

4<sup>o</sup>. Une méthode analogue s'applique à l'étude de la probabilité que  $X(t)$  reste compris entre deux nombres fixes 0 et  $h$ . Il s'agit ici de chercher une solution de l'équation (21) qui s'annule pour  $x = 0$  et  $x = h$ . Elle doit alors être de la forme

$$(24) \quad f(t, x) = \sum_1^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{h} e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{2h^2}},$$

et le développement de  $f_0(x)$  en série de sinus dans l'intervalle  $(0, \pi)$  donne la solution du problème. Le premier coefficient  $a_n$  non nul détermine l'allure asymptotique de la solution, pour  $t$  très grand.

Pour ce problème, à une source chaude donnée en un point  $a$  correspondent une infinité de sources chaudes aux points  $a + 2ph$  et une infinité de sources froides aux points  $2ph - a$  ( $p$  étant un entier quelconque). Ces sources sont les images de la source initiale, les droites  $x = 0$  et  $x = h$  étant considérées comme des miroirs, et chaque image correspondant à une source chaude ou froide suivant que le nombre de réflexions est pair ou impair.

On arrive ainsi à la conclusion que, si  $X(0) = a$  ( $0 < a < h$ ), la probabilité que  $X(t')$  reste compris entre 0 et  $h$  pour  $0 < t' < t$ , et que de plus  $X(t)$  soit compris entre  $b$  et  $b + db$ , est ici

$$(24) \quad \frac{db}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[ e^{-\frac{(a-b+ph)^2}{2t}} - e^{-\frac{(a+b+ph)^2}{2t}} \right].$$

5<sup>o</sup>. Des résultats analogues à ceux qui précèdent peuvent être obtenus pour le jeu de pile ou face, soit à l'aide du principe de symétrie et de la méthode des images, soit par des développements en séries d'harmoniques analogues aux développements (22) et (24). Nous avons déjà étudié cette question autrefois<sup>9)</sup>. Rappelons seulement les résultats essentiels, en désignant par  $S_n$  le gain après  $n$  coups (si l'enjeu à chaque coup est égal à un).

La probabilité que, jusqu'au  $(2p+1)$  ième coup, il n'y ait pas de somme  $S_p$  qui soit nulle, est égale à la probabilité que l'on ait  $S_{2p+1} = S_1$  (ou encore à la probabilité de  $S_{2p} = 0$ ); elle est donc égale à

$$(25) \quad 2^{-2p} C_{2p}^p = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi p}} \quad (p \rightarrow \infty).$$

On en déduit, si  $N_1, N_2, \dots$ , sont les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $S_n$  est nul,

$$(26) \quad \Pr \{N_1 > u\} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \quad (u \rightarrow \infty),$$

ce qui suffit pour que  $N_p$ , somme de  $p$  termes indépendants les uns des autres et dépendant de la même loi, soit asymptotiquement de la forme  $p^2 T$ ,  $T$  dépendant de la loi définie par les formules (10) et (17). En d'autres termes on a

$$(27) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \Pr \{N_p > p^2 x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2u}} du \quad (x > 0).$$

### § 5. Conséquences de la formule (17).

Posons

$$T(1) = T_1, \quad T(2) = T_1 + T_1' = T, \quad T_1 = T \sin^2 \Phi \quad \left(0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Nous allons démontrer que

THÉORÈME 3. On a

$$(28) \quad \Pr \{\Phi < \varphi\} = \frac{2\varphi}{\pi} \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

C'est une conséquence de ce que  $T_1$  et  $T_1'$  sont deux variables aléatoires positives, indépendantes l'une de l'autre, dépendant de la loi (17), de sorte que, dans le plan des  $uv$ , la probabilité que

<sup>9)</sup> Giornale Istituto Italiano Attuari 2 (1931); voir aussi un résumé en français du mémoire précédent: Journal de l'Ecole Polytechnique (2) 29 (1931).

le point  $T_1, T'_1$ , appartienne à une aire  $S$  du quart de plan  $u > 0, v > 0$ , est

$$(29) \quad \frac{1}{2\pi} \iint_S u^{-\frac{3}{2}} v^{-\frac{3}{2}} e^{-\left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{2v}\right)} du dv.$$

Or l'inégalité  $\Phi < \varphi$  équivaut à

$$\frac{T_1}{T'_1} = \operatorname{tg}^2 \Phi < \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Sa probabilité est donc l'intégrale (29), étendue à la région  $u < v \operatorname{tg}^2 \varphi$ . Il vient ainsi, en posant  $u = vx$  (d'où  $du = vdx$ ), puis  $x = \operatorname{tg}^2 \theta$

$$\begin{aligned} \operatorname{Pr} \{ \Phi < \varphi \} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\operatorname{tg}^2 \varphi} x^{-\frac{3}{2}} dx \int_0^\infty v^{-2} e^{-\frac{1}{2v}\left(1+\frac{1}{x}\right)} dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\operatorname{tg}^2 \varphi} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\varphi d\theta = \frac{2\varphi}{\pi}, \quad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

On en déduit, pour la variable aléatoire  $U = \frac{T_1}{T} = \sin^2 \Phi$ , que sa fonction de répartition est  $\frac{2}{\pi} \operatorname{Arc} \sin \sqrt{u}$ , de sorte que la densité de répartition est  $\frac{1}{\pi\sqrt{u(1-u)}}$ .

On peut, géométriquement, représenter le résultat obtenu par la construction suivante: un segment donné  $AB$  représente, à une échelle inconnue, la somme inconnue  $T = T_1 + T_2$ ; on demande de le partager par un point  $H$  en deux segments  $AH$  et  $HB$  qui représenteront respectivement  $T_1$  et  $T_2$ . On n'a qu'à considérer  $H$  comme la projection d'un point choisi au hasard, avec répartition uniforme de la probabilité, sur une circonférence de diamètre  $AB$  (ou sur une demi-circonférence limitée à ce diamètre). On réalise bien ainsi la loi voulue. Bien entendu, la loi conditionnelle dont dépend  $\Phi$  lorsque  $T$  est connu est différente de celle que nous venons de définir, et varie avec la valeur donnée pour  $T$ ; elle sera indiquée plus loin [formule (34)].

**COROLLAIRE 1.** Soit  $U(y)$  la fonction aléatoire de  $y$  obtenue par le processus lié à la symétrique stable d'exposant caractéristique  $\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire le processus pour lequel

$$\psi(y, z) = -cy\sqrt{|z|}.$$

Soit  $V(y)$  la variation totale de  $U(\eta)$  entre 0 et  $y$ . Si l'on pose

$$U(y) = V(y) \cos 2\Phi$$

la formule (28) s'applique, pour chaque valeur de  $y$ , à la variable aléatoire  $\Phi$ .

En effet  $V(y)$  et  $U(y)$  sont respectivement de la forme  $U_1(y) + U_2(y)$  et  $U_2(y) - U_1(y)$ , en désignant respectivement par  $U_1(y)$  la somme des sauts négatifs et par  $U_2(y)$  la somme des sauts positifs. Ce sont deux fonctions aléatoires, indépendantes l'une de l'autre, et dépendant l'une et l'autre, au facteur  $c^2$  près, du processus défini par la formule (10). Pour chaque valeur de  $y$ ,  $U_1(y)$  et  $U_2(y)$  sont donc de la forme  $c^2 y^2 T_1$  et  $c^2 y^2 T'_1$ ,  $T_1$  et  $T'_1$  étant les deux variables aléatoires introduites dans le théorème 3, qui dépendent de la loi (17). La formule  $T_1 = (T_1 + T'_1) \sin^2 \Phi$  équivalant dans ces conditions à

$$U = V(\cos^2 \Phi - \sin^2 \Phi) = V \cos 2\Phi,$$

la variable désignée par  $\Phi$  est bien la même dans l'énoncé du théorème 3 et dans celui du corollaire 1; le résultat obtenu pour l'une s'applique donc à l'autre, c.q.f.d.

**COROLLAIRE 2.** *Soit une partie de pile ou face, arrêtée après  $n = N_p$  coups, c'est-à-dire au moment où  $S_n$  s'annule pour la  $p$ ème fois. Désignons par  $A_p = N_p \sin^2 \Phi_p$  le nombre des termes positifs dans la suite  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . La loi dont dépend  $\Phi_p$  tend, pour  $p$  infini, vers la répartition uniforme définie par la formule (28).*

Dans la démonstration de ce corollaire, nous négligerons les mots „sauf dans des cas très peu probables”; il doit être entendu, une fois pour toutes, qu'on ne change pas une loi limite en négligeant un nombre fini de fois des circonstances très peu probables. Nous pouvons alors dire que  $n$  et  $p^2$  sont du même ordre de grandeur, de sorte qu'on commet une erreur négligeable sur le rapport  $\sin^2 \Phi_p$  qu'il s'agit d'évaluer en attribuant un signe (celui de  $S_{p-1}$ ) à chacune des  $p$  valeurs nulles de  $S_p$ . Les  $n$  nombres se décomposent en  $p$  suites partielles, comprenant respectivement  $N_1, N'_2 = N_2 - N_1, \dots, N'_p = N_p - N_{p-1}$  nombres, les nombres de la  $h$ ème suite partielle ayant un même signe  $\varepsilon_h$ . On peut considérer les  $p$  signes  $\varepsilon_p$  comme tirés au sort, à pile ou face, et chacun des  $N'_h$  comme choisi suivant la loi définie par les formules (25) ou (26); ces  $2p$  tirages au sort sont indépendants, et leur résultat détermine  $\Phi_h$ .

Soit  $q$  le nombre des  $\varepsilon_h$  positifs. D'après le théorème de Bernoulli,  $q = \frac{p}{2} - o(p)$ ; il en est de même de  $q' = p - q$ , nombre des  $\varepsilon_h$  négatifs. Un fois  $q$  et  $q'$  choisis, on peut tirer au sort séparément les nombres  $N_h$  correspondant aux valeurs positives de

$\varepsilon_h$  et les autres;  $A_p$  est la somme de  $q$  nombres ainsi choisis, de sorte que  $\frac{A_p}{q^2}$  dépend de la loi limite définie par la formule (27); de même  $\frac{B_p}{q'^2}$ ,  $B_p = N_p - A_p$  étant le nombre des termes négatifs; ces deux variables aléatoires sont d'ailleurs, une fois  $q$  et  $q'$  choisis, indépendantes l'une de l'autre. Mais, d'après la condition  $q = \frac{p}{2} + o(p) = p - q'$ , ce choix n'a qu'une influence négligeable, et on peut remplacer  $q$  et  $q'$  par  $\frac{p}{2}$ . On peut donc, à un facteur commun près, considérer asymptotiquement  $A_p$  et  $B_p$  comme choisis indépendamment l'un de l'autre, d'après la loi (17). Le théorème 3 s'applique alors et nous montre que le rapport

$$\frac{A_p}{A_p + B_p} = \sin^2 \Phi_p$$

dépend, à la limite, de la loi définie par ce théorème, c'est-à-dire que pour  $\Phi_p$ , la répartition tend à devenir uniforme, c.q.f.d.

## § 6. L'interpolation dans les processus stochastiques.

Nous avons rappelé plus haut le rôle des discontinuités dans les processus stochastiques liés à d'autres lois que celle de Laplace-Gauss. Nous l'avons mis en évidence par une méthode de synthèse: nous avons montré qu'on reconstruit ces processus par l'addition de discontinuités convenablement déterminées. Il peut être intéressant de retrouver ce résultat par l'analyse précise du procédé d'interpolation décrit au § 1. Nous ne nous occuperons que des processus liés aux lois stables, qui sont toutes absolument continues. Si, pour la fonction  $X(t)$  dépendant d'un pareil processus, on connaît les valeurs de

$$(30) \quad X(t_0) = a, \quad X(t_1) = b \quad (t_1 > t_0),$$

il résulte du principe de la probabilité des causes que, pour une valeur de  $t$  comprise entre  $t_0$  et  $t_1$ , la densité de probabilité relative à la variable aléatoire  $X(t)$  est

$$(31) \quad c f(t-t_0, x-a) f(t_1-t, b-x)$$

$c$  étant une constante déterminée par la condition que la probabilité de l'ensemble des valeurs possibles de  $X$  soit l'unité.

1°. Commençons par appliquer la formule (30) au cas gaussien. Elle donne la valeur

$$c' e^{-\frac{(x-a)^2}{2(t-t_0)} - \frac{(b-x)^2}{2(t_1-t)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\left[ m = \frac{(t_1-t)a + (t-t_0)b}{t_1-t_0}, \quad \sigma^2 = \frac{(t-t_0)(t_1-t)}{t_1-t_0} \right],$$

c'est-à-dire que la valeur probable  $m$  de  $X(t)$  est fournie par une interpolation linéaire entre  $X(t_0)$  et  $X(t_1)$  et que l'écart  $X(t) - m$  dépend de la loi de Laplace-Gauss d'écart type  $\sigma$ , loi qui est indépendante de  $a$  et  $b$ . Dans le cas où  $t - t_0 = t_1 - t = \tau$ , on a  $\sigma^2 = \frac{\tau}{2}$ , valeur deux fois plus petite que si l'on connaissait seulement un des nombres  $a$  et  $b$ .

Supposons alors qu'on détermine  $X(t)$  dans un intervalle  $(t_0, t_1)$  de longueur  $l$ , par des opérations successives dont la  $p^{\text{ième}}$  détermine  $X(t)$  aux milieux des  $2^p$  intervalles égaux dont la réunion constitue l'intervalle  $(t_0, t_1)$ ; une interpolation linéaire entre les valeurs ainsi connues donne une fonction continue  $X_p(t)$  qui est la  $p^{\text{ième}}$  approximation de  $X(t)$ . La fonction

$$(32) \quad X(t) = X_0(t) + \sum_1^{\infty} [X_p(t) - X_{p-1}(t)]$$

apparaît ainsi comme la somme d'une série à termes aléatoires indépendants, ces termes étant fonctions continues de  $t$ .

Désignons par  $M_p$  le module maximum de  $X_p(t) - X_{p-1}(t)$ . C'est le plus grand en valeur absolue de  $2^p$  nombres choisis au hasard d'après la loi de Laplace-Gauss formée avec le paramètre  $\sigma_p = \sqrt{\frac{l}{2^{p+2}}}$ . On trouve alors, par un calcul facile,

$$\text{Pr} \{M_p > c\sigma_p \sqrt{2p \log 2}\} \sim \frac{1}{c\sqrt{p\pi \log 2}} 2^{(1-c^2)p} \quad (c > 1, p \rightarrow \infty).$$

Cette expression étant le terme général d'une série convergente, il résulte d'un lemme connu de M. Emile Borel qu'il existe presque sûrement un nombre  $P$  tel que, pour toutes les valeurs de  $p$  supérieures à  $P$ , on ait

$$M_p \leq c\sigma_p \sqrt{2p \log 2} = c \sqrt{\frac{pl \log 2}{2^{p+1}}} = u_p,$$

de sorte que la série (32) est majorée par la série numérique et convergente  $\sum u_p$ . La continuité presque sûre de  $X(t)$  en résulte. Il est facile aussi de retrouver, en partant du même point de vue, des résultats sur les conditions de Hölder presque sûrement vérifiées par  $X(t)$  pour les accroissements assez petits, que nous avons exposés ailleurs<sup>10)</sup>.

<sup>10)</sup> Théorie de l'addition des variables aléatoires, p. 172.

2°. Occupons-nous maintenant du processus défini par la formule (4), où  $\alpha$  est compris entre zéro et un. La fonction  $f(t, x) = f(t^{-\beta}x)$  ( $\beta = \frac{1}{\alpha} > 1$ ) est alors nulle pour  $x$  négatif;  $f(x)$  a un maximum  $m$  pour une valeur déterminée  $\xi$ ; et  $f(x)$  et  $f(x-\xi)$  ont, pour  $x$  infini positif, une valeur principale de la forme  $\frac{c}{x^{\alpha+1}}$ , de sorte que l'on a

$$(33) \quad f(kx)f[(1-k)x] = o[mf(x-\xi)].$$

Les valeurs  $a$  et  $b > a$  de  $X(t_0)$  et  $X(t_1)$  étant connues, les valeurs possibles de  $X(t)$  dans l'intervalle  $(t_0, t_1)$  ne varient qu'entre  $a$  et  $b$ , et, dans cet intervalle, les probabilités de ces différentes valeurs sont toujours définies par la formule (31).

Supposons  $t = \frac{t_0+t_1}{2}$ , et  $\frac{b-a}{(t_1-t_0)^\beta}$  grand. Il résulte alors de la formule

(33) que la densité de probabilité (31) est bien plus petite au milieu de l'intervalle  $(a, b)$  qu'aux points  $a + \xi(t_1-t_0)^\beta$  et  $b - \xi(t_1-t_0)^\beta$ ; elle est de même négligeable pour tous les points de l'intervalle  $(a, b)$  pour lesquels le produit  $(x-a)(b-x)$  n'est pas petit par rapport à  $(b-a)^2$ . La probabilité se concentre donc près des extrémités de l'intervalle  $(a, b)$ . Cela signifie que si, dans un intervalle  $(t_0, t_1)$  la variation de  $X(t)$  est grande par rapport à  $(t_1-t_0)^\beta$  qui indique l'ordre de grandeur auquel on peut s'attendre, il est très probable que pour  $t = \frac{t_0+t_1}{2}$ , un des deux termes  $X(t_1) - X(t)$  et  $X(t) - X(t_0)$  est de l'ordre de grandeur de la variation totale, l'autre ne dépassant pas l'ordre de grandeur normal. Cette circonstance se reproduira lorsque l'on subdivisera à nouveau celui des intervalles partiels auquel correspond la plus grande variation de  $X(t)$ , et ainsi de suite indéfiniment. On s'explique ainsi qu'à la limite on obtienne un point de discontinuité, dont la place résultera d'une infinité de tirages au sort successifs.

Or le fonctionnement de ce processus dépend, pour chaque intervalle  $t$ , non de la pente  $\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , mais du rapport  $\frac{\Delta x}{(\Delta t)^\beta}$ ; à partir du moment où l'on a mis en évidence des intervalles ayant une longueur très petite  $\lambda$ , il suffit que la pente dépasse  $k\lambda^{\beta-1}$  ( $k$  étant constant), pour que ce processus se produise. A chaque instant, la variation totale de  $X$  pour les intervalles échappant à ce processus ne dépassera pas  $k\lambda^{\beta-1}(t_1-t_0)$ , valeur qui tend vers zéro avec  $\lambda$  (puisque  $\beta > 1$ ). Toutes les parties de l'accroissement

$b - a$  entreront finalement dans ce processus, de sorte que cet accroissement ne comprend rien d'autre que la somme des sauts.

Nous ne chercherons pas à rendre ces raisonnements plus rigoureux. Nous pensons que l'analyse succincte qui précède peut présenter de l'intérêt. Mais la démonstration rigoureuse est plus simple par la méthode synthétique: l'addition de  $n$  termes dépendant de la loi considérée donne une somme  $\bar{S}_n$  dépendant de la même loi, mais à une échelle  $n^\beta$  fois plus grande. Or, d'après le théorème de Bernoulli, la plupart des termes ne dépassent pas un nombre fini, et leur somme ne peut être qu'une partie négligeable de la somme totale qui est ainsi déterminée par un petit nombre de termes. La donnée de  $S_n$ , sauf peut-être si la valeur donnée appartient à un ensemble de valeurs dont la probabilité totale est très faible, ne peut pas rendre probable une circonstance dont la probabilité a priori était négligeable. Il est donc certain que, pour  $n = 2^\nu$  et  $p$  très grand, l'étude des interpolations conduisant à retrouver les termes dont  $S_n$  est la somme ne peut que confirmer ce fait que, sauf dans des cas très peu probables,  $S_n$  est à peu près la somme de quelques grands termes à côté desquels l'ensemble des autres est négligeable.

Ces considérations s'appliquent en particulier au cas où  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Dans ce cas, l'expression simple de la fonction  $f(x)$  donnée par la formule (17), permet de former effectivement la densité de probabilité (31). Pour la valeur  $\frac{t_0 + t_1}{2}$  de  $t$ , en posant  $t_1 - t_0 = \tau$ , elle s'écrit

$$(34) \quad \frac{c \tau^6}{2^7 \pi} (x-a)^{-\frac{3}{2}} (b-x)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\tau^2}{8} \left( \frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x} \right)} = c' f \left[ \frac{4(x-a)(b-x)}{(b-a)\tau^2} \right],$$

et la probabilité totale, obtenue en intégrant par rapport à  $x$  de  $a$  à  $b$ , devant être égale à l'unité, un calcul que l'on effectue facilement en posant

$$\frac{(b-a)^2}{4(x-a)(b-x)} = 1 + \xi,$$

donne

$$(34') \quad c' = \frac{2}{\tau^2} e^{\frac{\tau^2}{2(b-a)}}.$$

Or  $f(x)$  croît quand  $x$  varie de zéro à  $\frac{1}{3}$  et décroît ensuite. Il y a alors deux cas à distinguer suivant que  $\frac{b-a}{4\tau^2}$ , maximum de  $y = \frac{(x-a)(b-x)}{(b-a)\tau^2}$ , est supérieur ou non à  $\frac{1}{3}$ . Si  $b - a \leq \frac{4}{3}\tau^2$ , l'ex-

pression étudiée est maxima en même temps que  $y$  pour  $x = \frac{a+b}{2}$ . Si au contraire  $b - a > \frac{4}{3}\tau^2$ ,  $y$  prend la valeur  $\frac{1}{3}$  et l'expression étudiée est maxima pour deux valeurs de  $x$  symétriques par rapport au milieu de l'intervalle  $(a, b)$ , et qui sont d'autant plus voisines (relativement) des extrémités de cet intervalle que  $\frac{b-a}{\tau^2}$  est plus grand; cela vérifie et précise ce que nous avons dit de la concentration de la probabilité vers les extrémités de cet intervalle.

3°. Restant encore dans le cas où  $\alpha < 1$ , occupons-nous des processus comportant la possibilité de valeurs de  $X(t)$  des deux signes, et par suite des discontinuités des deux signes. Il n'y a aucun changement essentiel dans le mode de raisonnement, mais, dans ce cas, l'expression (31) est positive de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Si  $b - a$  est grand, le premier facteur varie relativement peu quand  $x$  varie dans le voisinage de  $b$ , de sorte que les variations relatives du produit sont celles du second facteur; les grandes valeurs du produit correspondent donc au cas où  $x$  est voisin de  $b$ , ou au contraire de  $a$ , mais aussi bien à l'extérieur qu'à l'intérieur de l'intervalle  $(a, b)$ . Des deux termes  $x - a$  et  $b - x$ , l'un d'eux sera alors en général peu différent de  $b - a$ , c'est-à-dire grand par rapport à  $\tau^2$ ; l'autre sera de l'ordre de grandeur de  $\tau^2$  et aussi bien d'un signe que de l'autre. C'est la seule différence avec le cas précédent; la réalisation fortuite d'un grand accroissement  $b - a$ , positif pour fixer les idées, est toujours l'origine d'un processus aboutissant à mettre en évidence un saut de  $X(t)$  positif et grand, mais ne diminue pas les chances de trouver dans son voisinage aussi bien des sauts positifs que des sauts négatifs.

4°. Supposons maintenant  $\alpha$  compris entre 1 et 2<sup>11)</sup>; la valeur probable de  $X(t)$  est alors toujours nulle, et les valeurs des deux signes sont toujours possibles, aussi bien pour  $X(t)$  que pour  $\Delta X$ .

Si nous considérons, dans ce cas, des accroissements  $\Delta X = \mu \Delta t$ ,  $\mu$  étant fini, ils seront, si  $\Delta t$  est petit, petits par rapport à  $(\Delta t)^\beta$  puisque  $\beta = \frac{1}{\alpha} < 1$ . Contrairement à ce qui se passait dans le cas précédent, l'interpolation linéaire ou à peu près linéaire entre les valeurs extrêmes données initialement ferait apparaître des

<sup>11)</sup> Pour ne pas trop allonger cet exposé, nous laisserons de côté le cas où  $\alpha = 1$ .

accroissements  $\Delta X$  petits par rapport à  $(\Delta t)^\beta$ . Si alors, connaissant  $X(t)$  et  $X(t+\Delta t)$  on veut déterminer  $X\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)$  suivant la loi définie par la formule (31) ( $t_0$  et  $t_1$  étant remplacés par  $t$  et  $t+\Delta t$ ), on trouve que les grandes valeurs de chacun des facteurs de ce produit (31), et par suite celles de ce produit lui-même, correspondent à un intervalle très grand par rapport à  $\Delta X$ ; il sera de l'ordre de grandeur de  $(\Delta t)^\beta$ . Ainsi la valeur initialement petite de  $\Delta X$  ne jouera presque aucun rôle, et les nouveaux accroissements  $X\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right) - X(t)$  et  $X(t+\Delta t) - X\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)$  seront probablement de l'ordre de grandeur de  $(\Delta t)^\beta$  (comme si on ne les avait pas déterminés par interpolation), et parfois plus grands.

La répétition de l'opération, quelque soit l'intervalle considéré initialement, doit alors faire apparaître presque sûrement certains intervalles partiels pour lesquels  $\Delta X$  sera grand par rapport à  $(\Delta t)^\beta$ . Or, sauf dans un cas que nous mentionnerons dans un instant, la condition (33) reste vérifiée;  $f(x)$  est en effet, pour  $x$  infini, de l'ordre de grandeur de  $\frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$ . Un grand accroissement fortuitement réalisé, a donc toujours plus de chances d'être la somme d'un grand terme et d'un petit que de deux termes du même ordre de grandeur (c'est là la différence essentielle avec le cas gaussien); il sera ainsi l'origine d'un processus arrivant à mettre en évidence un point de discontinuité de  $X(t)$ , et ces points existeront dans tout intervalle.

Le cas d'exception mentionné tout à l'heure est celui où les sauts d'un seul signe se produisent. Considérons pour fixer les idées le cas défini par la formule (6), pour lequel les sauts sont nécessairement positifs; d'après l'interprétation de la formule (6) que nous avons indiquée, l'accroissement de  $X(t)$  dépend principalement de la somme des sauts qui ne sont pas très petits par rapport à  $(\Delta t)^\beta$ .

Le fait que  $f(x)$  soit à l'infini de l'ordre de grandeur de  $\frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$  subsiste pour les valeurs positives de  $x$ ; pour les valeurs négatives de  $x$ , l'allure de  $f(x)$  est moins bien connue. Les considérations qui précèdent peuvent précisément nous renseigner à son sujet. Si en effet on avait

$$f(kx)f[(1-k)x] = o[f(x)] \quad (x \rightarrow -\infty),$$

l'existence presque sûre de sauts négatifs en résulterait; cette hypothèse est donc exclue. Comme d'ailleurs il s'agit de fonctions

d'allure assez régulière, on peut conclure que  $f(x)$  tend vers zéro, pour  $x$  infini négatif, soit comme une exponentielle, soit plus rapidement. Il serait intéressant de préciser ce résultat.

### § 7. L'ensemble des racines de $X(t)$ dans le cas gaussien.

Plaçons-nous dans le cas du processus défini par la formule (1). Si dans ce cas on divise un intervalle  $(t_0, t_1)$  de longueur  $l$  en intervalles très nombreux et très petits  $\Delta t$ , chacun des  $\Delta X$  est de la forme  $\xi\sqrt{\Delta t}$ ,  $\xi$  étant une variable gaussienne réduite, et  $\sum(\Delta X)^2$  diffère très probablement très peu de sa valeur probable  $l$ , tandis que  $\sum|\Delta X|$  est du même ordre de grandeur que sa valeur probable  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum\sqrt{\Delta t}$ , qui est très grande. Nous pensons préciser ailleurs ces remarques; contentons-nous ici d'en indiquer cette conséquence: *il est presque sûr que  $X(t)$  n'est à variation bornée dans aucun intervalle, et a, dans tout intervalle, une infinité dénombrable de maxima et minima.*

Désignons par  $E$  l'ensemble des racines de  $X(t)$ , et par  $E(a)$  celui des racines de  $X(t) - a$ . Les propriétés probables de  $E$  et celles de  $E(a)$  sont les mêmes <sup>12)</sup>. Toutefois il peut arriver qu'une propriété de  $E(a)$  soit presque sûre pour chaque valeur donnée de  $a$ , mais qu'il existe presque sûrement des valeurs de  $a$  pour lesquelles elle soit en défaut. Ainsi il existe presque sûrement une infinité dénombrable et partout dense de valeurs de  $a$ , celles des maxima ou minima dont nous venons de mentionner l'existence, pour laquelle  $E(a)$  admet un point isolé. Or c'est une propriété qui apparaîtra tout à l'heure comme infiniment peu probable pour une valeur de  $a$  donnée d'avance ou choisie au hasard.

<sup>10)</sup> Montrons d'abord que: *en supposant  $X(t_0) = 0$ , la probabilité que  $t_0$  soit l'origine d'un intervalle  $e$  de longueur positive  $l$  ne contenant à son intérieur aucun point de  $E$  est nulle.*

Désignons par  $\alpha$  la probabilité que cet intervalle existe et que  $X(t)$  y atteigne une valeur positive donnée  $a$ . La probabilité à déterminer étant la limite de  $\alpha$  pour  $a = 0$ , il suffit de montrer que  $\alpha = 0$ .

Il n'est pas a priori évident que  $\alpha$  existe. Si on l'admettait,

---

<sup>12)</sup> D'une manière précise, il faudrait dire: à partir du moment où l'on a trouvé une racine  $t(a)$  de  $X(t) = a$ , les propriétés probables de  $E(a)$  à droite de  $t(a)$  sont indépendantes de  $a$ .

une démonstration bien simple de  $\alpha = 0$  résulterait de ce que  $\alpha$  est, par raison d'homogénéité, indépendant de  $a$  et doit tendre vers zéro pour  $a$  infini. Mais il faut démontrer que  $\alpha$  existe, et est nul.

Donnons-nous un nombre  $\varepsilon$  compris entre zéro et un. Si  $|X(t)|$  n'atteint pas la valeur  $\varepsilon a$ , il ne peut pas atteindre la valeur  $a$ . Si  $|X(t)|$  atteint la valeur  $\varepsilon a$ , désignons par  $T$  la plus petite racine de  $|X(t)| = \varepsilon a$ , et par  $\varphi(T)$  et  $\alpha'$  les valeurs que prend dans cette hypothèse la probabilité que  $|X(t)|$  atteigne  $a$  suivant qu'on connaît  $T$ , ou non. Or on a évidemment  $\alpha < \alpha' = \mathcal{P}\{\varphi(T)\}$ . Nous allons démontrer que  $\varphi(T) = \varepsilon$ ; comme  $\varepsilon$  est arbitrairement petit, il en résultera bien que  $\alpha = 0$ .

Utilisons à cet effet le mode de raisonnement bien connu sous le nom de principe de la ruine des joueurs. Supposant que  $T_1$  ait une valeur  $t_1$ , nous désignerons par  $X_1(t)$  une fonction aléatoire, définie pour  $t > t_1$ , égale à  $|X(t)|$  tant que cette expression reste comprise entre 0 et  $a$ , et restant constante à partir du moment où l'une ou l'autre de ces limites est atteinte, ce qui finit presque sûrement par arriver; les valeurs possibles de  $X_1(\infty)$  sont donc  $a$  et zéro, leurs probabilités respectives étant  $\varepsilon' = \varphi(t_1)$  et  $1 - \varepsilon'$ ; donc la valeur probable de  $X_1(\infty)$  est  $\varepsilon'a$ . Or à tout instant  $t$ , quel que soit  $X(t)$ , l'accroissement  $\delta X_1(t)$  a sa valeur probable conditionnelle nulle, donc aussi sa valeur probable a priori; donc la valeur probable de  $X_1(t)$  reste constamment égale à sa valeur initiale  $X(t_1) = a$ ; donc la valeur probable de  $X_1(\infty)$  est  $\varepsilon a$ . Donc  $\varepsilon = \varepsilon'$ , c'est-à-dire  $\varphi(t_1) = \varepsilon$ , c.q.f.d.

2°. On ne peut donc pas considérer la longueur  $L$  de l'intervalle  $e$  commençant au point  $t_0$  comme une variable aléatoire dépendant d'une loi déterminée; il est en effet presque sûr que cet intervalle n'existe pas.

Pourtant toute valeur de  $t'$  pour laquelle  $X(t')$  n'est pas nul est intérieure à un intervalle  $e$ , commençant en un point  $t$  de  $E$ , et ne contenant à son intérieur aucun autre point de  $E$ . Il est donc presque sûr qu'on peut trouver un point  $t$  qui soit l'origine d'un intervalle  $e$ , bien que la probabilité de l'existence de cet intervalle soit nulle si  $t$  est donné. C'est que l'expérience susceptible de le réaliser a été effectuée une infinité non dénombrable de fois (autrement la probabilité totale resterait nulle); en d'autres termes l'ensemble  $E$  n'est pas dénombrable.

Les points de  $E$  qui sont isolés à gauche ne peuvent former qu'un ensemble dénombrable. L'hypothèse qu'un tel point  $t$  soit

isolé à gauche est sans influence sur les valeurs de  $X(t')$  pour  $t' > t$ ; on peut donc appliquer le résultat précédent, et, compte tenu du principe des probabilités totales, on voit que, comme nous l'avions annoncé: *il est presque sûr qu'aucun point de  $E$  n'est isolé à la fois à gauche et à droite.*

3°. Il est facile de préciser la structure de l'ensemble  $E$  qui est un ensemble parfait discontinu, obtenu en enlevant de l'intervalle  $(t_0, t_1)$  à l'intérieur duquel on se propose de définir  $E$  une infinité d'intervalles ouverts  $e, e', \dots$ , dont la réunion constitue le complément  $E'$  de  $E$ .

Partons d'un intervalle compris entre deux racines  $t_0$  et  $t_1$  de  $X(t)$ , et supposons qu'on n'ait aucun autre renseignement sur  $X(t)$  que les conditions  $X(t_0) = X(t_1) = 0$ . Il est presque sûr que  $t_0$  est un point de  $E$  non isolé à droite, que  $t_1$  n'est pas isolé à gauche, et que  $\tau = \frac{t_0 + t_1}{2}$  n'est pas racine de  $X(t)$ ; alors  $\tau$  est intérieur à un intervalle ouvert  $e$ , appartenant à  $E'$ , et dont les extrémités  $t'$  et  $t''$  sont des points de  $E$  ne coïncidant pas avec  $t_0$  et  $t_1$ ; on a  $t_0 < t' < t'' < t_1$ . Dans chacun des intervalles  $(t_0, t')$  et  $(t'', t_1)$  on recommence l'opération précédente, en enlevant deux intervalles ouverts  $e_1$  et  $e'_2$  qui appartiennent à  $E'$ . Après  $n$  opérations, il reste un ensemble  $E_n$  constitué par  $2^n$  intervalles conservés. Sauf dans des cas de probabilité nulle, on peut continuer ainsi indéfiniment;  $E$ , qui est la partie commune à tous les  $E_n$ , apparaît bien comme un ensemble parfait discontinu, non dénombrable.

Cet ensemble est en outre de mesure nulle. On peut le démontrer en montrant que la mesure  $m_n$  de  $E_n$  tend presque sûrement vers zéro; pour  $n$  infini, il n'est même pas très difficile de préciser l'ordre de grandeur de  $m_n$ . Il n'y a qu'à observer que la loi de probabilité dont dépend le choix de  $t'$  et  $t''$  entre  $t_0$  et  $t_1$  se retrouve, à un changement d'échelle près, dans chacune des opérations ayant pour effet de subdiviser chacun des intervalles de  $E_n$  en un intervalle enlevé et deux intervalles conservés. Le plus grand des  $2^n$  intervalles qui constituent  $E_n$ , quoique grand par rapport à la moyenne  $2^{-n}m_n$ , est petit par rapport à  $m_n$ ; cela suffit pour conclure que  $\frac{m_{n+1}}{m_n}$  est très probablement, si  $n$  est grand, très peu différent de sa valeur probable  $\mu = 1 - \mathcal{P}\left\{\frac{t'' - t'}{t_1 - t_0}\right\}$ , et que  $\sqrt[n]{m_n}$  tend vers  $\mu$  (qui est compris entre zéro et un).

Nous n'avons fait qu'esquisser ce raisonnement, parce qu'il nous paraît préférable de raisonner autrement; nous allons

montrer que: non seulement chaque  $E(a)$ , pris isolément, est presque sûrement de mesure nulle, mais il est presque sûr que tous les  $E(a)$  sont de mesures nulles.

L'ensemble  $E(a)$ , étant fermé, est mesurable. Ces ensembles étant sans points communs deux à deux, il ne peut y en avoir qu'une infinité dénombrable dont les mesures soient positives. Toutes les valeurs de  $a$ , entre les valeurs extrêmes de  $X(t)$  (donc entre  $-\infty$  et  $+\infty$  si  $t$  varie de  $t_0$  à  $+\infty$ ) jouant à ce point de vue le même rôle, s'il y a des valeurs de  $a$  qui soient exceptionnelles, c'est-à-dire pour lesquelles la mesure  $m(a)$  de  $E(a)$  soit positive, elles ne peuvent résulter que d'un tirage au sort donnant une probabilité nulle à n'importe quelle valeur, ou n'importe quel ensemble dénombrable de valeurs, donné d'avance.

Considérons alors l'hypothèse qu'il existe une valeur  $a'$  de  $a$  pour laquelle  $m(a') > \varepsilon > 0$ . Divisons l'intervalle fini ou infini  $(t_0, t_1)$  en intervalles partiels de longueur  $\varepsilon$  (ou  $\leq \varepsilon$ ); pour que  $m(a')$  dépasse  $\varepsilon$ , il faut que  $a'$  soit une valeur exceptionnelle pour au moins deux intervalles différents, de rangs  $i$  et  $j$  par exemple; si  $i$  et  $j$  sont donnés, la probabilité de cette circonstance est nulle, puisque dans le  $i^{\text{ème}}$  intervalle il y a au plus une infinité dénombrable de valeurs exceptionnelles et qu'il est presque sûr qu'aucune n'est aussi exceptionnelle pour le  $j^{\text{ème}}$  intervalle. Comme il n'y a qu'une infinité dénombrable de couples  $i, j$  à examiner, la probabilité qu'il existe une valeur de  $a$  exceptionnelle pour deux intervalles est nulle. L'hypothèse  $m(a') > \varepsilon$  n'est donc presque sûrement pas réalisée; au contraire  $\text{Max } m(a) \leq \varepsilon$ , et, comme il en est ainsi quel que soit  $\varepsilon$  positif, il est presque sûr que  $\text{Max } m(a) = 0$ , c.q.f.d.

4<sup>o</sup>. Nous allons maintenant employer un mode de raisonnement tout différent pour étudier les longueurs des intervalles  $e, e', \dots$ , qui constituent l'ensemble  $E'$  complémentaire de  $E$ . Nous savons que, dans tout intervalle  $(t_0, t_1)$  comprenant des points de  $E$  à son intérieur, il y a presque sûrement une infinité de ces intervalles  $e$ , tandis qu'il n'y en a qu'un nombre fini dépassant une longueur donnée  $\varepsilon$ ; presque tous sont donc arbitrairement petits.

Mais un problème ayant un sens précis est le suivant: *étudier la longueur  $L$  d'un intervalle  $e$ , sachant qu'elle est supérieure à un nombre donné  $l_0$* . Nous allons montrer que:

$$(35) \quad \text{Pr} \{L > l/L > l_0\} = \sqrt{\frac{l_0}{l}} \quad (l \geq l_0).$$

Désignons par  $t_0$  l'origine de l'intervalle considéré, par  $\varepsilon$  un nombre positif arbitrairement petit, en tout cas inférieur à  $l_0$ , et par  $\tau$  la plus petite racine positive de l'équation

$$(36) \quad \tau + X^2(t_0 + \tau) = \varepsilon$$

posons  $|X(t_0 + \tau)| = \xi$ . Pour les fonctions  $X(t)$  considérées, continues et ne s'annulant pas entre  $t_0$  et  $t_0 + l_0$ ,  $\tau$  est bien déterminé et l'on a:

$$0 < \tau < \varepsilon, \quad 0 < \xi^2 < \varepsilon.$$

Supposons d'abord  $\xi$  connu et posons  $L' = L - \tau$ . Si nous faisons abstraction de l'hypothèse  $L > l_0$ ,  $L'$  est la distance de la première racine de  $X(t)$  suivant le point  $t_0 + \tau$  où  $|X| = \xi$ ; nous avons indiqué au § 4, 2<sup>o</sup>, que  $L'$  est de la forme  $\xi^2 T$ ,  $T$  dépendant de la loi (17); en d'autres termes

$$(37) \quad \Pr \{L' > l\} = \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_l^\infty u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2u}} du.$$

Par suite, si  $\xi$  est infiniment petit,

$$(37') \quad \Pr \{L' > l\} \sim \xi \sqrt{\frac{2}{\pi l}},$$

et cela uniformément si  $l > l_0$ .

Revenons maintenant à la définition initiale de  $\xi$ ; c'est un nombre aléatoire, fonction de  $\varepsilon$ , compris entre 0 et  $\varepsilon$ , et son maximum tend vers zéro avec  $\varepsilon$ . La nouvelle probabilité de  $L' > l$  est une moyenne pondérée des différentes valeurs de l'expression (37);  $\varepsilon$  tendant vers zéro, il vient donc

$$(38) \quad \Pr \{L' > l\} \sim \mu \sqrt{\frac{2}{\pi l}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0, \mu = \mathcal{P}\{\xi\}),$$

formule où la loi dont dépend  $\xi$  n'intervient que par le facteur  $\mu$ . Comme d'ailleurs  $\tau$  tend vers zéro avec  $\varepsilon$ , et qu'on ne change pas la valeur principale du second membre en y remplaçant  $l$  par  $l - \tau$ , il vient

$$\Pr \{L > l\} = \Pr \{L' > l - \tau\} \sim \mu \sqrt{\frac{2}{\pi l}}$$

et par suite, pour la probabilité conditionnelle qu'il s'agit d'étudier

$$\lim \Pr \{L > l / L > l_0\} = \lim \frac{\Pr \{L > l\}}{\Pr \{L > l_0\}} = \sqrt{\frac{l_0}{l}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Comme d'ailleurs cette probabilité est indépendante du paramètre  $\varepsilon$  introduit dans le calcul, la formule (35) se trouve établie.

5°. La formule (35) entraîne des conséquences importantes. Elle nous permet d'identifier l'ensemble des intervalles  $e$  avec l'ensemble des discontinuités dans le processus stochastique lié aux formules (10) et (17). Dans ce processus, pour un intervalle de temps  $y = s\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ , le nombre probable des sauts supérieurs à une valeur donnée est  $\frac{s}{\sqrt{l}}$ , de sorte que, si l'on sait que la hauteur d'un saut est supérieure à  $l_0$ , la probabilité qu'elle soit supérieure à  $l > l_0$  est  $\sqrt{\frac{l_0}{l}}$ . C'est bien la loi que nous venons de trouver.

Il importe de bien préciser que cela suffit pour affirmer l'identification des deux processus, et pour appliquer à l'un tous les résultats obtenus pour l'autre. Considérons en effet la fonction  $T(y) = T\left(s\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$  dépendant du processus lié aux formules (10) et (17). Si nous rangeons dans l'ordre des grandeurs décroissantes les sauts dont elle est la somme, et si nous désignons par  $N(l)$  le nombre de ceux dont la grandeur dépasse  $l$ , il résulte de la loi forte des grands nombres que, quand  $l$  tend vers zéro, d'une part  $N(l)$  est un infiniment grand presque sûrement équivalent à  $\frac{s}{\sqrt{l}}$ , d'autre part la somme des sauts inférieurs à  $l$  est un infiniment petit presque sûrement équivalent à  $s\sqrt{l}$ . Ces résultats s'appliquent d'ailleurs d'une manière uniforme, si au lieu d'un intervalle déterminé  $(0, s)$ , on considère l'ensemble des intervalles intérieurs à un intervalle fixe et de longueurs supérieurs à un nombre arbitrairement petit, mais fixe.

Pour chaque intervalle  $ds$ , la probabilité d'un saut supérieur à un nombre très petit  $l_0$  est  $\frac{ds}{\sqrt{l_0}}$ . On ne change évidemment rien au processus décrit en déterminant d'abord, pour chaque intervalle  $ds$ , si un tel saut est réalisé; puis on déterminera, dans ce cas, sa grandeur exacte par un tirage au sort donnant la probabilité  $\sqrt{\frac{l_0}{l}}$  à l'ensemble des longueurs supérieurs à  $l$ . Si  $l_0$  est assez petit, on commet d'ailleurs sur le tracé de la courbe  $t = T\left(s\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$  des erreurs arbitrairement petites, sauf dans des cas de probabilité arbitrairement petite, d'une part en négligeant la somme des sauts inférieurs à  $l_0$ , d'autre part en remplaçant  $s$  par  $s' = N(l_0)\sqrt{l_0}$ .

Supposons alors qu'un processus de définition d'une suite d'intervalles soit tel que leur somme soit finie, ce qui permet de négliger la somme de ceux qui n'atteignent pas une longueur  $l_0$  très petite, et que, pour les intervalles non négligés, la longueur dépende de la loi (35). Si nous posons  $s' = N(l_0)\sqrt{l_0}$ , la somme de ces intervalles, considérée comme une fonction de  $s'$ , dépend d'un processus identique à celui déduit de l'étude de  $T(y)$  en négligeant les sauts inférieurs à  $l_0$ . Comme cela est vrai quelque petit que soit  $l_0$ , l'identification des deux processus est possible avec une précision arbitrairement grande; ils sont bien identiques.

Il en résulte que, pour l'étude des intervalles  $e$ ,  $N(l)$  désignant le nombre de ceux dont la longueur dépasse  $l$ , à l'intérieur d'un intervalle donné  $(0, t)$ , on peut définir  $s$  comme limite de  $N(l)\sqrt{l}$  quand  $l$  tend vers zéro; cette limite existe presque sûrement. De même la somme des intervalles de longueur inférieure à  $l$  est un infiniment petit presque sûrement équivalent à  $s\sqrt{l}$ , ce qui donne un nouveau moyen de définir  $s$ .

Le paramètre  $s = S(t)$  ainsi défini joue un rôle important dans l'étude de  $X(t)$ . Il est déterminé d'une manière non aléatoire si l'on connaît  $X(t)$ , ou du moins les racines de cette fonction. Si l'on ne connaît de  $X(t)$  que la valeur initiale  $X(0) = 0$ ,  $S(t)$  est, pour chaque valeur de  $t$ , une variable aléatoire qui, d'après les remarques qui précèdent, dépendent de la même loi que  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}Y(t)$ . On a donc

$$(39) \quad \Pr \{S(t) < \sigma\} = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\sigma e^{-\frac{\pi s^2}{4t}} ds.$$

Cette formule suppose que l'on n'ait aucun autre renseignement sur  $X(t)$  que  $X(0) = 0$ . Pour une valeur  $u$  de  $t$  dont on suppose qu'elle soit racine de  $X(t)$ , on se trouve exactement dans les mêmes conditions que pour l'étude de  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}Y(u)$  si l'on sait que  $X(u) = Y(u)$ , c'est-à-dire si l'on n'est pas à l'intérieur d'un intervalle où  $Y(t)$  est constant (l'hypothèse qu'à l'intérieur d'un tel intervalle  $X(t)$  atteigne le maximum de  $X(t)$  est infiniment peu probable). La formule (19) donne donc

$$(40) \quad \Pr \{S(u) > s / X(u) = 0\} = e^{-\frac{\pi s^2}{4u}}.$$

Cette probabilité est toujours supérieure à celle de la même inégalité si l'on ne connaît pas  $X(u)$ ; l'hypothèse  $X(u) = 0$  augmente donc la probabilité des grandes valeurs de  $S(u)$ .

6°. L'identification des propriétés stochastiques des intervalles  $e$  séparés par les racines de  $X(t)$ , et celle des intervalles  $e_1$  où  $Y(t)$  est constant, qui sont séparés par les racines de  $X_1(t) = Y(t) - X(t)$ , pouvait être prévue à priori; le problème est au fond le même dans les deux cas. Tout point où  $X(t) = 0$  est un point où un intervalle  $e$  peut commencer; tout point où  $X_1(t) = 0$  est un point où un intervalle  $e_1$  peut commencer. Dans un cas comme dans l'autre, la probabilité pour que la racine considérée de  $X(t)$  ou  $X_1(t)$  soit isolée à droite est nulle, mais, si elle l'est, il est évident que, la variation de  $|X(t)|$  dans un cas, celle de  $X_1(t)$  dans l'autre dépendant exactement de la même loi jusqu'à la racine suivante de ces fonctions, la nature stochastique des intervalles  $e$  et  $e_1$  est exactement la même. On aurait pu se contenter de cette remarque pour justifier la formule (35).

Il en résulte évidemment que la nature stochastique des fonctions  $|X(t)|$  et  $X_1(t)$  est la même. On peut en effet les déterminer en déterminant d'abord leurs racines, et ensuite leurs variations dans chacun des intervalles séparés par ces racines; pour chacune de ces opérations, qu'il s'agisse de  $|X(t)|$  ou de  $X_1(t)$ , la loi est bien la même.

Nous avons déjà observé que, pour chaque valeur donnée de  $t$ ,  $Y(t)$  et  $X(t)$  dépendent de la même loi de probabilité; nous voyons maintenant que  $X(t)$  apparaît comme la différence des deux termes  $Y(t)$  et  $Y(t) - X(t)$  qui dépendent de la même loi, qui est celle dont dépend aussi  $|X(t)|$ . Ce résultat peut naturellement aussi se vérifier en partant de la loi dont dépend l'ensemble des deux variables  $X$  et  $Y$ , loi que nous avons déterminée pour établir la formule (19).

7°. Une valeur  $u$  de  $t$  choisie arbitrairement est presque sûrement intérieure à un intervalle  $e$ , comme à un intervalle  $e_1$ . Il est facile de déterminer les lois dont dépendent l'origine  $u - T_1$  et l'extrémité  $u + T_2$  de  $e$ ; les mêmes lois s'appliquent s'il s'agit de  $e_1$ .

Si l'on connaît  $|X(u)| = a$ , la loi dont dépend  $T_2$  est évidemment, d'après la remarque initiale du § 4,2°, et la formule (16), définie par

$$(41) \quad \Pr \{t < T_2 < t + dt \mid |X(u)| = a\} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2t}} t^{-\frac{3}{2}} dt.$$

La probabilité a priori de la même inégalité est la valeur probable de la même circonstance, si l'on remplace  $a$  par la variable

aléatoire  $|X(u)|$ . Elle a donc la valeur

$$\frac{dt}{\pi t \sqrt{tu}} \int_0^\infty a e^{-\frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{u}\right)} da,$$

c'est-à-dire

$$(42) \quad \Pr \{t < T_2 < t + dt\} = \sqrt{\frac{u}{t}} \frac{dt}{\pi(t+u)} = \frac{2}{\pi} d \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{t}{u}}.$$

Cette formule, s'appliquant aussi aux intervalles  $e_1$ , résout une question que posait la remarque finale du § 2. Nous avons observé que, dans le processus lié à une loi stable d'exposant caractéristique inférieur à 2, une valeur de  $t$  donnée avait chance, au moment où elle est atteinte, d'être dépassée par un saut brusque; nous n'avions pas précisé la loi dont dépend la quantité  $T_2$  dont  $t$  est ainsi dépassé. La formule (42) définit cette loi pour la fonction  $T(y)$  dépendant du processus défini par la formule (10).

Étudions maintenant la loi dont dépend  $T_1$ ;  $X(t)$  dépendant du même processus que  $X(u-t)$ ,  $T_1$  peut être assimilé au point de vue de l'étude de cette loi à la plus petite racine  $T_0$  de  $X(t)$  dans l'hypothèse  $|X(0)| = a$ ,  $X(u) = 0$ . La probabilité a priori [si l'on ne connaît pas  $X(u)$ ] que cette racine appartienne à un intervalle  $dt$  étant donnée par la formule (41), la probabilité que  $X(t) = 0$  entraîne  $X(u) = 0$  (à  $du$  près) étant proportionnelle à  $\frac{1}{\sqrt{u-t}}$ , la probabilité a posteriori de la même circonstance, si l'on sait que  $X(u) = 0$ , est

$$c e^{-\frac{a^2}{2t}} \frac{dt}{t \sqrt{t(u-t)}},$$

$c$  étant une constante. L'intégrale de cette expression dans l'intervalle  $(0, u)$ , qu'il faut égaler à l'unité pour calculer  $c$ , se calcule aisément par le changement de variable  $u - t = tv^2$ ; on trouve ainsi, en écrivant maintenant  $T_1$  au lieu de  $T_0$ ,

$$(43) \quad \Pr \{t < T_1 < t + dt / X(0) = |X(u)| - a = 0\} \\ = a \sqrt{\frac{u}{2\pi}} e^{\frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{t \sqrt{t(u-t)}}.$$

Si maintenant  $|X(u)|$  est inconnu, la probabilité de la même inégalité devient la valeur probable de l'expression précédente quand on remplace  $a$  par la variable aléatoire  $|X(u)|$ , c'est à dire

$$\frac{dt}{\pi \sqrt{t(u-t)}} \int_0^\infty c^{-\frac{a^2}{2t}} \frac{a da}{t} = \frac{dt}{\pi \sqrt{t(u-t)}}.$$

Il vient donc, pour  $t$  compris entre zéro et  $u$

$$(44) \quad \begin{cases} \Pr \{t < T_1 < t + dt / X(0) = 0\} = \frac{dt}{\pi \sqrt{t(u-t)}}, \\ \Pr \{T_1 < t / X(0) = 0\} = \frac{2}{\pi} \text{Arc sin } \sqrt{\frac{t}{u}}. \end{cases}$$

On reconnaît la loi déjà considérée au § 5, et qui s'interprète géométriquement de la manière suivante:  $T_1$  est la projection sur l'axe des  $t$  d'un point choisi au hasard sur la circonférence de diamètre  $(0, u)$ , ou sur la demi-circonférence limitée à ce diamètre.

On remarque que  $T_1$  et  $u - T_1$  dépendent de la même loi, ce qui était évident pour le problème du § 5; dans le cas actuel, on pouvait le prévoir en utilisant la remarque que  $|X(t)|$  et  $Y(t) - X(t)$  sont deux réalisations différentes du même processus. Il en résulte que  $T_1$  dépend de la même loi que la plus petite racine  $T'$  de  $X(t) = Y(u)$ , ou, ce qui revient au même, la plus grande racine de  $Y(t) - X(t)$  inférieure à  $u$ ;  $Y(t) - X(t)$  s'annule bien pour  $t = 0$ , comme  $X(t)$  dans le problème qui nous occupe; les conditions aux limites se correspondent bien. Or la définition de  $T'$ , valeur de  $t$  réalisant le maximum de  $X(t)$  dans l'intervalle  $(0, u)$  ne change pas si l'on échange les deux extrémités de cet intervalle. La symétrie serait détruite si l'on donnait pour  $X(0)$  et  $X(u)$  deux valeurs différentes; mais la donnée d'une seule de ces valeurs permet seulement de placer l'axe  $x = 0$  et est sans influence sur la forme de la courbe  $x = X(t)$ ;  $T'$  et  $u - T'$  dépendent donc de la même loi; donc aussi  $T_1$  et  $u - T_1$ .

Remarquons que, une fois  $T' = u \cos^2 \Phi$  déterminé par un tirage au sort dans lequel  $\Phi$  est une variable choisie entre zéro et  $\frac{\pi}{2}$  avec répartition uniforme de la probabilité,  $Y(u) = X(T') - X(0)$  et  $Y(u) - X(u) = X(T') - X(u)$  dépendent respectivement de la variation de  $X(t)$  à gauche et à droite du point  $T'$ . Dans chacun de ces deux cas, on sait que la valeur maxima de  $X(t)$  est réalisée au point  $T'$ , de sorte qu'on est dans les conditions qui permettent l'application de la formule (19); il en résulte que  $Y(u)$  et  $Y(u) - X(u)$  sont respectivement des formes  $X_1 \cos^2 \Phi$  et  $X_2 \sin^2 \Phi$ ,  $X_1$  et  $X_2$  dépendant d'une même loi, celle dont dépendrait  $X(u)$  si l'on faisait l'hypothèse que, pour  $t = u$ ,  $X(t)$  atteigne une valeur non encore dépassée. On retrouve le résultat obtenu tout à l'heure d'après lequel  $Y(u)$  et  $Y(u) - X(u)$  dépendent de la même loi, définie par la formule (15); mais on voit de plus la nature de la corrélation entre ces deux quantités, obtenues en

multipliant respectivement les facteurs indépendants  $X_1$  et  $X_2$  par les facteurs  $\cos \Phi$  et  $\sin \Phi$  entre lesquels existe au contraire une relation non aléatoire.

8°. Terminons ces remarques sur les racines de  $X(t)$  en indiquant sommairement deux calculs de vérification.

D'une part, lorsqu'on connaît  $T_1$ , la longueur  $T_1 + T_2$  de l'intervalle  $e$  qui commence au point  $u - T_1$  est au moins égale à  $T_1$ ; la probabilité de  $T_2 > t$ , d'après la formule (35), est alors  $\sqrt{\frac{T_1}{T_1 + t}}$ ; si  $T_1$  est inconnu, la probabilité de  $T_2 > t$ , est la valeur probable de cette expression; d'après la formule (44), il vient

$$\Pr \{T_2 > t\} = \frac{1}{\pi} \int_0^u \frac{d\tau}{\sqrt{(u-\tau)(t+\tau)}},$$

ce qui, en posant  $\tau = u \cos^2 \theta - t \sin^2 \xi$ , donne  $\frac{2}{\pi} \text{Arc tg } \sqrt{\frac{u}{t}}$ ; on retrouve la formule (42).

D'autre part, si l'on connaît  $T'$ , qui dépend de la même loi que  $T_1$ ,  $Y(u) = X(T')$  dépend de la loi définie par la formule (19),  $t$  étant remplacé par  $T'$ . On en déduit

$$\begin{aligned} \Pr \{y < Y(u) < y + dy\} &= \mathcal{N} \left\{ e^{-\frac{y^2}{2T'}} \frac{y dy}{T'} \right\} \\ &= \frac{y dy}{\pi} \int_0^u e^{-\frac{y^2}{2t}} \frac{dt}{t \sqrt{t(u-t)}} = \frac{y dy}{\pi u} \int_1^\infty e^{-\frac{y^2}{2u} \lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda-1}} \\ &= \frac{2y dy}{\pi u} e^{-\frac{y^2}{2u}} \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2u} v^2} dv = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{-\frac{y^2}{2u}} dy; \end{aligned}$$

on retrouve bien la loi (15). C'est le calcul de vérification que nous avons annoncé à propos de la formule (19). On retrouve de même la formule (39) en partant de la formule (40); c'est le même calcul avec d'autres notations.

## § 8. Le signe de $X(t)$ .

Nous supposons toujours qu'il s'agisse du cas gaussien. Désignons par  $M(u) = u \mu(u)$  la mesure de l'ensemble des valeurs de  $t$  de l'intervalle  $(0, u)$  pour lesquelles  $X(t)$  est positif. Le problème dont nous allons nous occuper, sur l'intérêt duquel M. Marcinkiewicz a attiré notre attention, est le suivant: *quelle est la loi de probabilité dont dépend  $\mu(u)$  si l'on connaît, soit  $X(0) = a$*

et  $X(u) = b$ , soit un seul de ces nombres? Nous désignerons respectivement par  $G(a, b, u, x)$  et  $F(a, u, x)$  les valeurs que prend, dans l'une ou l'autre de ces hypothèses, la probabilité de  $\mu(u) < x$ .

Ce problème se présente tout naturellement après l'étude des racines de  $X(t)$  et des intervalles  $e$  qui les séparent. On peut en effet déterminer le signe de  $X(t)$  en déterminant d'abord les intervalles  $e$ , puis en déterminant, pour chacun de ces intervalles, le signe de  $X(t)$  par un tirage au sort; ces tirages au sort sont indépendants, et donnent chacun la probabilité  $\frac{1}{2}$  à chacun des signes possibles; il peut seulement y avoir exception pour les intervalles extrêmes, si  $a$  et  $b$  sont connus et non nuls; alors pour ces intervalles (ou pour l'un d'eux), le signe de  $X(t)$  est imposé par les données.

Il est utile d'avoir présent à l'esprit le lien entre le processus de définition de  $X(t)$  et le jeu de pile ou face. Si l'on commence, à l'instant  $t = 0$ , une partie de pile ou face dans laquelle la durée de chaque coup soit  $\tau$  et l'enjeu  $\sqrt{\tau}$ , le gain réalisé à l'instant  $t$  est une fonction de  $t$  qui peut être assimilée avec  $X(t)$  d'autant plus exactement que  $\tau$  est plus petit. On peut ainsi étudier les propriétés probables de  $X(t)$ , soit en étudiant d'abord le jeu de pile ou face et passant à la limite, soit en s'inspirant simplement de l'analogie pour appliquer les mêmes méthodes dans les deux cas. De toute façon, les résultats asymptotiquement exacts dans le cas d'une partie de pile ou face indéfiniment prolongée correspondent à des résultats relatifs à  $X(t)$  qui sont exacts pour n'importe quelle valeur finie de  $t$ . Ainsi la formule asymptotique (27) correspond à la formule exacte (37), et le corollaire 2 du théorème 3 correspond au théorème suivant, qui n'est au fond qu'un autre énoncé du corollaire 1.

**COROLLAIRE 3** (du théorème 3). Un nombre positif  $s$  étant donné, on considère la racine  $U$  de  $S(u) = s$ ; elle est presque sûrement unique;  $\mu(U)$  est de la forme  $\sin^2 \Phi$ ,  $\Phi$  étant choisi au hasard entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  avec une répartition uniforme de la probabilité dans cet intervalle. En d'autres termes on a

$$(45) \quad \Pr \{ \mu(U) < x / S(U) = s \} = \frac{2}{\pi} \text{Arc sin } \sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Pour déterminer  $F(a, u, x)$  et  $G(a, b, u, x)$ , nous allons procéder en plusieurs étapes.

1°. Cas où  $a = b = 0$ , et où  $s$  et  $u = U(s)$  sont connus simul-

tanément; il s'agit donc d'un problème de probabilité conditionnelle;  $u = U(s)$  est une condition imposée à  $X(t)$ , elle implique  $b = 0$ ,  $u$  étant la racine de  $X(t)$  pour laquelle  $s$  a une valeur donnée.

La fonction  $U(s)$ , considérée comme fonction de  $y = s\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ , est la fonction aléatoire obtenue par le processus défini par la formule (10); chaque saut de  $U(s)$  correspond à un intervalle de variation de  $t$  pour lequel le signe de  $X(t)$  dépend d'un tirage au sort, et  $u\mu(u)$  est la somme des sauts pour lesquels on trouve ainsi que  $X(t)$  est positif. Comme, pour définir  $U(\sigma)$  (pour  $0 < \sigma < s$ ), on peut choisir d'abord les sauts et ensuite les valeurs de  $\sigma$  pour lesquelles ils se produisent et que chaque valeur de  $\sigma$  ainsi choisie a une probabilité  $\frac{1}{2}$  d'être inférieure à  $\frac{s}{2}$ , le processus qui définit  $u\mu(u)$  est identique à celui qui définit  $U\left(\frac{s}{2}\right)$ , somme des sauts pour lesquels  $\sigma$  est compris entre zéro et  $\frac{s}{2}$ ; dans un cas comme dans l'autre, chaque saut a en effet une chance sur deux d'appartenir à la somme étudiée. Or  $u = U(s)$  est connu, et la détermination de  $U\left(\frac{s}{2}\right)$  est le problème d'interpolation résolu par la formule (34); pour le problème qui nous occupe, on n'a qu'à remplacer  $\tau$ ,  $b - a$  et  $x - a$ , par  $s\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ,  $u$ , et  $ux$ ,  $dx$  par  $u dx$ , et  $U\left(\frac{s}{2}\right)$  par  $u\mu(u)$ ; il vient ainsi

$$(46) \quad \text{Pr} \left\{ \mu(u) < x/u = U(s) \right\} = \frac{s}{8\sqrt{u}} \int_0^x \xi^{-\frac{3}{2}} (1-\xi)^{-\frac{3}{2}} \frac{\pi s^2}{e^{4u}} \left[ 1 - \frac{1}{4\xi(1-\xi)} \right] d\xi.$$

Il faut bien comprendre qu'ici  $u$  est donné, tandis que, dans la formule (45),  $U$  était un nombre aléatoire défini par  $S(U) = s$ . On remarque que l'expression (45) est indépendante de  $s$ , et que celle-ci ne dépend que de  $x$  et  $\frac{s^2}{u}$ ; on pouvait le prévoir, par raison d'homogénéité.

Au point de vue qui a déjà fait l'objet du corollaire 1 du théorème 3, on peut considérer  $2M(u) - u$  comme une fonction de  $y = s\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  obtenue par le processus lié à la loi symétrique stable d'exposant caractéristique  $\frac{1}{2}$ ;  $u$  est sa variation totale,  $2\mu(u) - 1$  est le rapport de ces deux expressions; la formule (46) définit donc la loi dont dépend ce rapport lorsque  $s$  et  $u$  sont connus simultanément.

2°. *Détermination de  $G(0, 0, u, x)$* ; comme il est évident, par raison d'homogénéité, que cette fonction ne dépend pas de  $u$ , on peut écrire  $G(0, 0, x)$ .

Ici  $u$  est connu, et  $s = S(y)$  est la variable aléatoire définie par la formule (40), pour la valeur  $u$  de la variable  $t$ ;  $G(0, 0, x)$  est donc la valeur probable de l'expression (46), lorsqu'on remplace  $s$  pas  $S(u)$ . Le coefficient de  $d\xi$  dans l'intégrale obtenue est alors

$$\int_0^\infty \frac{\pi s^2}{16u\sqrt{u}} \xi^{-\frac{3}{2}} (1-\xi)^{-\frac{3}{2}} e^{-\lambda s^2} ds \left[ \lambda = \frac{\pi}{16u\xi(1-\xi)} \right],$$

c'est-à-dire, en posant  $s\sqrt{\lambda} = \sigma$ ,

$$\frac{\pi}{16} [\lambda u \xi (1-\xi)]^{-\frac{3}{2}} \int_0^\infty \sigma^2 e^{-\sigma^2} d\sigma = 1.$$

On trouve donc pour  $\mu(u)$  une probabilité uniformément répartie entre zéro et un; en d'autres termes

$$(47) \quad G(0, 0, x) = x \quad (0 \leq x \leq 1).$$

On remarque que, si  $s$  est connu et  $u = U(s)$  indéterminé, cela revient au même que de supposer  $u$  connu et  $s$  inconnu, mais sa loi de probabilité étant alors définie par la formule (39) et non la formule (40). Le calcul est analogue à celui qui précède, l'exposant de  $s$  étant seulement diminué d'une unité, et le facteur constant modifié; l'exposant de  $\lambda$  sera alors  $-1$ , et non  $-\frac{3}{2}$ ; il restera alors finalement, comme coefficient de  $d\xi$ ,  $\frac{1}{\pi\sqrt{\xi(1-\xi)}}$ ; on retrouve bien dans ces conditions la formule (41).

Au point de vue du jeu de pile ou face, le résultat correspondant à la formule (47) est le suivant: pour une valeur donnée paire et très grande de  $n$ , on sait que le gain après  $n$  coups est nul; on désigne par  $\mu_n$  la fréquence, parmi les  $n$  premiers coups, de ceux après lesquels le gain total s'est trouvé positif (les gains nuls étant comptés une fois sur deux, si l'on veut établir la symétrie; leur fréquence est négligeable); dans ces conditions la loi dont dépend  $\mu_n$  tend, pour  $n$  infini, vers la répartition uniforme de la probabilité dans l'intervalle  $(0, 1)$ .

La formule (47) peut s'interpréter aussi, comme il a été indiqué à propos de la formule (46), au point de vue de l'étude du processus lié à la loi symétrique stable d'exposant  $\frac{1}{2}$ . Si l'on arrête le processus au moment où la variation totale de la fonction

aléatoire étudiée atteint une valeur donnée  $u$ , et si, sans savoir à quel instant cela se produit, on suppose qu'à cet instant la valeur  $u$  soit atteinte et non dépassée par un saut brusque, la valeur correspondante de la fonction est une variable aléatoire choisie entre  $-u$  et  $u$  avec répartition uniforme de la probabilité.

3°. *Détermination de  $G(a, 0, u, x)$ .* La fonction  $-X(t)$  dépendant du même processus que  $X(t)$ , on obtient la même loi de probabilité pour  $\mu(u)$  dans l'hypothèse  $X(0) = a, X(u) = b$ , et pour  $1 - \mu(u)$ , dans l'hypothèse  $X(0) = a, X(u) = 0$ ; en d'autres termes

$$(48) \quad G(a, b, u, x) = 1 - G(-a, -b, u, 1-x).$$

Il suffit donc de considérer le cas où  $a$  est positif.

Désignons par  $T$  la plus petite racine de  $X(t)$ ; elle dépend de la loi définie par la formule (43); le nombre  $T_1$  de cette formule se ramène en effet à  $T$  si l'on remplace  $X(t)$  par  $X(u-t)$ . Or, dans l'hypothèse  $T = t$ , qui entraîne  $X(t) = 0, \mu(u) < x$ , c'est-à-dire  $M(u) < ux$ , revient à dire que, entre  $t$  et  $u$ , la mesure de l'ensemble des valeurs de  $t'$  pour lesquelles  $X(t')$  est positif est inférieure à  $ux - t$  (puisque, de zéro à  $t$ ,  $X(t') > 0$ ). La probabilité de  $\mu(u) < x$ , calculée dans l'hypothèse  $T = t$ , est alors nulle si  $t > ux$ , et, dans le cas contraire, l'application de la formule (47) à l'intervalle  $(t, u)$  montre qu'elle est égale à  $\frac{ux-t}{u-t}$ . La probabilité  $G(a, 0, u, x)$  qu'il s'agit de calculer est la valeur probable de la précédente,  $t$  étant remplacé par la variable aléatoire  $T$ . Il vient donc, pour  $a$  positif

$$(49) \quad G(a, 0, u, x) = a \sqrt{\frac{u}{2\pi}} \int_0^{ux} \frac{ux-t}{[t(u-t)]^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{a^2}{2}(\frac{1}{u}-\frac{1}{t})} dt.$$

Compte tenu de la formule (48), on a dans tous les cas  $G(a, 0, u, x)$ ; on peut vérifier, ce qui était évident a priori, que cette fonction ne dépend que de  $\frac{a^2}{u}$  et  $x$ . On a de plus, évidemment

$$(50) \quad G(0, a, u, x) = G(a, 0, u, x).$$

4°. *Détermination de  $F(0, u, x) = F(0, x)$ .* Cette expression est évidemment la valeur probable de  $G(0, a, u, x)$  lorsqu'on remplace  $a$  par la variable aléatoire  $X(u)$ .

Considérons d'abord l'expression  $F_0(x)$  obtenue en supposant

$X(u)$  positif. La probabilité d'un intervalle  $da$  étant alors

$$\sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{-\frac{a^2}{2u}} da,$$

il vient

$$F_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{ux} \frac{ux-t}{[t(u-t)]^{\frac{3}{2}}} dt \int_0^\infty a e^{-\frac{a^2}{2t}} da = \frac{1}{\pi} \int_0^{ux} \frac{ux-t}{u-t} \frac{dt}{\sqrt{t(u-t)}}$$

et par suite

$$f_0(x) = \frac{dF_0(x)}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_0^{ux} \frac{u dt}{(u-t)\sqrt{t(u-t)}}.$$

En posant  $t = u \sin^2 \varphi$ ,  $x = \sin^2 \alpha$ , il vient

$$(51) \quad f_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

En supposant  $X(u)$  négatif, on trouve évidemment, au lieu de  $f_0(x)$ , l'expression analogue

$$(52) \quad f_1(x) = f_0(1-x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

La dérivée  $f(x)$  de  $F(0, x)$  étant la moyenne arithmétique des deux expressions précédentes, il vient

$$(53) \quad f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$$

$$(54) \quad F(0, x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc} \sin \sqrt{x}.$$

On peut aussi obtenir ce résultat en partant des formules (44) et (47), sans utiliser l'expression de  $G(0, a, u, x)$ . Plaçons-nous dans le cas où, sans connaître  $X(u)$ , on suppose seulement que ce nombre soit négatif.  $M(u)$  est alors de la forme  $TU$ ,  $T$  désignant la plus grande racine de  $X(t)$  inférieure à  $u$ , qui dépend ici de la loi (44), et  $U$  désignant la fréquence des valeurs positives de  $X(t)$  quand  $t$  varie de zéro à  $T$ . D'après la formule (47), si  $T = t$ , la probabilité de  $U < \frac{x}{t}$  est  $\frac{x}{t}$  si  $t > x$ ; elle est égale à l'unité si  $t < x$ . On en déduit en posant  $t = u\tau$ ,

$$(55) \quad \begin{aligned} \operatorname{Pr} \left\{ m(u) = \frac{TU}{u} < x \right\} &= \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} + \frac{x}{\pi} \int_x^1 \frac{d\tau}{\tau \sqrt{\tau(1-\tau)}} \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc} \sin \sqrt{x} + \frac{2}{\pi} \sqrt{x(1-x)}, \end{aligned}$$

et, en dérivant par rapport à  $x$ , on retrouve la formule (52); on en déduit les formules (51), (53) et (54).

Ce raisonnement utilise d'ailleurs les mêmes principes que le précédent; il ne s'en distingue que parce que l'intégration par rapport à  $a$  est effectuée au début, pour arriver à la formule (44); dans le précédent, on terminait par cette intégration.

De toute façon, il est remarquable que la loi obtenue soit, non seulement celle qui intervient dans les formules (44), mais aussi celle qui intervient dans la formule (45), qui était relative au cas où, se donnant  $s$ , on continue le processus jusqu'à la valeur  $u = U(s)$ . Bien que dans ces conditions  $X(u)$  soit nul et qu'il n'en soit pas de même dans le problème qui vient de nous occuper,  $\frac{s^2}{u}$  dépend dans les deux cas de la même loi de probabilité, et l'expression obtenue, (45) ou (53), est la valeur probable de l'expression (46) lorsqu'on considère  $\frac{s^2}{u}$  comme une variable aléatoire dépendant de la loi en question. Toutefois il ne nous paraît pas évident a priori que  $F(0, x)$  doive être égal à cette valeur probable; le raisonnement précédent, qui met en évidence le rôle de l'intervalle compris entre  $u$  et la dernière racine de  $X(t)$  précédant  $u$ , nous paraît nécessaire.

On remarque que  $f(x)$  ne change pas si l'on change  $x$  en  $1 - x$ ; il en résulte que la valeur probable de  $\mu(u)$  est  $\frac{1}{2}$ . Cela était évident a priori; il en est ainsi toutes les fois que ceux des nombres  $X(0) = a$  et  $X(u) = b$  que l'on se donne sont nuls dans ce cas, pour un point  $t$  choisi au hasard entre zéro et  $t$ , la probabilité que  $X(t)$  soit positif est  $\frac{1}{2}$ ; or cette probabilité est la valeur probable de  $\mu(u)$ .

5°. *Détermination de  $F(a, u, x)$ .* On a évidemment la relation

$$(56) \quad F(-a, u, x) = 1 - F(a, u, 1-x)$$

analogue à la relation (48); il suffit donc de considérer le cas où  $a$  est positif.

Désignons toujours par  $T$  la plus petite racine de  $X(t)$ , qui dépend de la loi définie par la formule (49). On remarque que si  $T \geq u$ , on a  $\mu(u) = 1$ , circonstance au contraire infiniment peu probable si  $T < u$ . On a donc

$$(57) \quad 1 - F(a, u, 1-0) = \Pr \{T \geq u\} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty e^{-\frac{a^2}{2t}} t^{-\frac{3}{2}} dt.$$

Si  $T < u$ , la proportion dans l'intervalle  $(T, u)$  des valeurs qui rendent  $X(t)$  positif dépend de la loi définie par les formules (53) et (54); il n'y a qu'à remplacer, dans  $f(x)dx$  et dans  $F(0, x)$ ,  $x$  par  $\xi = \frac{ux-T}{u-T}$ ; si  $x < 1$ , il faut bien entendu que  $T$  soit inférieur à  $ux$  pour que  $\mu(u)$  puisse être inférieur à  $x$ . La fonction  $F(a, u, x)$ , que nous voulons calculer et sa dérivée  $f(a, u, x)$  sont alors les valeurs probables d'expressions nulles si  $T > ux$  et respectivement égales, si  $T < ux$ , à  $F(0, \xi)$  et  $f(\xi) \frac{d\xi}{dx}$ . Il vient donc

$$f(a, u, x) = \frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{u}{2\pi(1-x)}} \int_0^{ux} e^{-\frac{a^2}{2t}} \frac{dt}{t \sqrt{t(ux-t)}},$$

$$F(a, u, x) = \frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{ux} e^{-\frac{a^2}{2t}} \text{Arc sin} \sqrt{\frac{ux-t}{u-t}} t^{-\frac{3}{2}} dt,$$

ou, en posant  $t = uv$ , et toujours pour  $a > 0$ ,  $0 < x < 1$ ,

$$(58) \quad f(a, u, x) = \frac{a}{\pi \sqrt{2\pi u(1-x)}} \int_0^x e^{-\frac{a^2}{2uv}} \frac{dv}{v \sqrt{v(x-v)}},$$

$$(59) \quad F(a, u, x) = \frac{a}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \int_0^x e^{-\frac{a^2}{2uv}} \text{Arc sin} \sqrt{\frac{x-v}{1-v}} v^{-\frac{3}{2}} dv.$$

Ce sont bien des fonctions de  $\frac{a^2}{u}$  et  $x$ ; pour  $x = 1$ , on retrouve la formule (57).

**6<sup>o</sup>.** *Détermination de  $G(a, b, u, x)$ .* Le cas où  $a = 0$  a déjà été étudié; d'après la formule (48), il suffit de traiter le cas où  $a > 0$ . La méthode est analogue à celle qui vient d'être appliquée à l'étude de  $F(a, u, x)$ : il faut mettre en évidence la plus petite racine  $T$  de  $X(t)$ ; dans l'intervalle  $(0, T)$ ,  $X(t)$  est positif; dans l'intervalle  $(T, u)$  (si  $T < u$ ), on est ramené au problème résolu par les formules (48) à (50.)

Il faut remarquer que, si  $b < 0$ , on a sûrement  $T < u$ ; si  $b > 0$ , il n'en est ainsi que dans des cas dont la probabilité est donnée par la formule (20); comme ce sont ceux où  $\mu(u) < 1$ , il vient

$$(60) \quad \text{Pr} \{ \mu(u) < 1 \} = \text{Min} \left[ 1, e^{-\frac{2ab}{u}} \right] = e^{-\frac{|ab|+ab}{u}}.$$

Dans les deux cas, la probabilité de  $t < T < t + dt$  est proportionnelle au produit de la probabilité a priori de la même circonstance, donnée par la formule (41), par la probabilité que

$X(t) = 0$  entraîne  $X(u) = b$  (à  $db$  près). On a donc

$$\Pr \{t < T < t + dt\} = c e^{-\frac{a^2}{2t} - \frac{b^2}{2(u-t)}} \frac{dt}{t \sqrt{t(u-t)}} = h(t)dt,$$

$c$  étant une constante, que l'on calcule en égalant la probabilité totale relative à l'intervalle  $(0, u)$  à sa valeur (60). En posant  $u - t = \left| \frac{b}{a} \right| tv^2$ , on trouve, pour cette probabilité totale

$$\frac{2c}{u} \sqrt{\left| \frac{b}{a} \right|} e^{-\frac{a^2+b^2-2|ab|}{2u}} \int_0^\infty e^{-\frac{|ab|}{2u} \left(v + \frac{1}{v}\right)} dv.$$

Si l'on pose ensuite  $v + \frac{1}{v} = x$ , puis  $x^2 - 4 = y^2$ , le dernier facteur de cette expression devient

$$\int_2^\infty e^{-\frac{|ab|}{2u} x^2} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \int_0^\infty e^{-\frac{|ab|}{2u} (4+y^2)} dy = \sqrt{\frac{\pi u}{2|ab|}} e^{-\frac{2|ab|}{u}}.$$

L'équation qui définit  $c$  s'écrit alors

$$c \sqrt{\frac{2\pi}{ua^2}} = e^{\frac{(a-b)^2}{2u}}$$

et il vient

$$(61) \quad h(t) = \sqrt{\frac{ua^2}{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} (u-t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(a-b)^2}{2u} - \frac{a^2}{2t} - \frac{b^2}{2(u-t)}},$$

cette expression est valable quels que soient  $a$  et  $b$ .

Pour  $a > 0$ , et  $0 < x < 1$ , en raisonnant comme pour le calcul de  $F(a, u, x)$ , on trouve

$$(62) \quad G(a, b, u, x) = \int_0^{ux} h(t) G\left(0, b, u-t, \frac{ux-t}{u-t}\right) dt,$$

ce qui, compte tenu des formules (48) à (50), achève la détermination de la fonction  $G(a, b, u, x)$ .

7<sup>o</sup>. *La valeur probable de  $\mu(u)$ .* Nous désignerons cette valeur probable par  $m(a, u)$ , si  $a$  est seul connu, et par  $m(a, b, u)$ , si  $a$  et  $b$  sont connus. On peut, naturellement, la déduire des expressions de  $F(a, u, x)$  et  $G(a, b, u, x)$ ; mais il est plus simple d'observer qu'elle représente la probabilité que  $X(t)$  soit positif si l'on choisit  $t$  au hasard entre zéro et  $u$ , indépendamment de la série d'expériences qui détermine  $X(t)$ .

On sait qu'on peut lier à  $X(t)$  une variable aléatoire unique

$U$  de manière que cette série d'expériences équivaille au choix de  $U$  entre zéro et un avec une répartition uniforme de la probabilité. Sauf dans des cas très peu probables, ceux où  $X(t)$  est très petit, une connaissance approchée de  $U$  et  $t$  suffit pour décider du signe de  $X(t)$ ; l'ensemble du plan des  $tU$  correspondant au cas où  $X(t)$  est positif est donc mesurable superficiellement, et le théorème de Fubini permet d'invertir l'ordre des intégrations pour calculer la probabilité de cette circonstance.

Occupons-nous, pour fixer les idées, du cas où  $a$  et  $b$  sont connus tous les deux. D'après le § 6, 1<sup>o</sup>, si  $0 < t < u$ , en posant

$$x = \frac{(u-t)a + tb}{u}, \quad \sigma^2 = \frac{t(u-t)}{u},$$

$x - X(t)$  dépend de la loi de Laplace-Gauss d'écart type  $\sigma$ , c'est-à-dire que

$$(63) \quad \Pr \{X(t) > 0 / X(0) = a, X(u) = b\} = \sqrt{\frac{u}{2\pi t(u-t)}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u\xi^2}{2t(u-t)}} d\xi,$$

et  $m(a, b, u)$  est la valeur moyenne de cette expression quand  $t$  varie de zéro à  $u$ .

Considérons en particulier le cas où  $a = b$ ; alors  $x = a$ , et il vient

$$m(a, a, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \int_{-\infty}^a d\xi \int_0^u e^{-\frac{u\xi^2}{2t(u-t)}} \frac{dt}{\sqrt{t(u-t)}}.$$

En faisant successivement les changements de variables

$$4t(u-t) = u^2 y^2, \quad y^2 = \frac{1}{1+v^2},$$

il vient

$$\begin{aligned} m(a, a, u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \int_{-\infty}^a d\xi \int_0^1 e^{-\frac{2\xi^2}{uy^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \int_{-\infty}^a d\xi \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2(1+v^2)}{2u}} \frac{dv}{1+v^2}, \end{aligned}$$

et enfin en posant  $\xi = \eta\sqrt{u}$ ,

$$(64) \quad m(a, a, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{a}{\sqrt{u}}}^{\frac{a}{\sqrt{u}}} d\eta \int_0^\infty e^{-\frac{\eta^2}{2}(1+v^2)} \frac{dv}{1+v^2}.$$

Comme on devait le prévoir,  $m - \frac{1}{2}$  est une fonction de  $\frac{a}{\sqrt{u}}$  impaire, croissant de  $-\frac{1}{2}$  à  $+\frac{1}{2}$  quand  $\frac{a}{\sqrt{u}}$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

### § 9. La répartition des valeurs de $X(t)$ .

Nous désignerons par  $\Phi(u, x)$  la fonction sommatoire de  $X(t)$  pour l'intervalle  $(0, u)$ , c'est-à-dire la mesure de l'ensemble des valeurs de  $t$  de cet intervalle pour lesquelles  $X(t) < x$ . C'est une fonction qui croît constamment de zéro à un quand  $x$  varie entre les valeurs extrêmes de  $X(t)$ ; le maximum  $Y(u)$  de  $X(t)$  dépend de lois que nous avons déjà indiquées dans les cas où l'on connaît un des nombres  $X(0) = a$  et  $X(u) = b$ , ou ces deux nombres; on obtient de même les lois dont dépend le minimum [il suffit d'appliquer les résultats précédents à  $-X(t)$ ], et il ne serait pas bien difficile de définir la corrélation entre le minimum et le maximum.

L'objet principal des remarques qui vont suivre est de montrer que l'on a presque sûrement

$$(65) \quad \Phi'_x(u, 0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} s.$$

On aurait naturellement une formule analogue, donnant  $\Phi'_x(u, x)$  pour une valeur quelconque de  $x$ , en introduisant le nombre  $S(u, x)$  qui joue, dans l'étude de l'ensemble des racines de  $X(t) - x$ , le même rôle que  $S(u)$  dans l'ensemble des racines de  $X(t)$ .

1°. Commençons par étudier la probabilité de  $X(t) < a$  quand  $t$  est choisi au hasard dans un intervalle de longueur  $l$  compris entre deux racines consécutives de  $X(t)$  et qu'on suppose  $X(t)$  positif dans cet intervalle; nous pouvons supposer que ce soit l'intervalle  $(0, l)$ . Si l'on faisait seulement l'hypothèse  $X(0) = X(l) = 0$ , la solution serait donnée par la formule (64); nous allons appliquer, avec les modifications nécessaires, la méthode qui nous a conduit à cette formule.

Considérons d'abord une valeur donnée de  $t$  ( $0 < t < l$ ). Pour étudier la variation de  $X(t')$  entre les valeurs zéro et  $t$ , cela revient au même de supposer  $X(t') > X(0)$  ou  $X(t') < X(t)$ ; si l'on ne tient compte que des hypothèses relatives à l'intervalle  $(0, t)$ , la loi dont dépend  $X(t) - X(0) = X(t)$  est donc celle définie par la formule (19); compte tenu de  $X(t') > X(l)$ , la même remarque s'applique à  $X(t) - X(l)$ , et donne la probabilité que  $X(t) = x$  entraîne  $X(l) = 0$  (à  $dx$  près). Cette conséquence étant supposée réalisée, on en déduit que la probabilité conditionnelle de  $x < X(t) < x + dx$  est proportionnelle au produit

$$\frac{x}{t} e^{-\frac{x^2}{2t}} \frac{x}{l-t} e^{-\frac{x^2}{2(l-t)}} dx = \frac{x^2}{t(l-t)} e^{-\frac{lx^2}{2t(l-t)}} dx;$$

son intégrale de zéro à l'infini devant être égale à l'unité, il vient

$$(66) \quad \Pr \{x < X(t) < x + dx\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{l}{t(l-t)} \right]^{\frac{3}{2}} x^2 e^{-\frac{lx^2}{2t(l-t)}} dx.$$

Remplaçons maintenant  $t$  par une variable aléatoire  $T$  choisie au hasard dans l'intervalle  $(0, l)$ , avec une répartition uniforme de la probabilité. La nouvelle probabilité de la même inégalité est la valeur probable de l'expression précédente, c'est-à-dire

$$\sqrt{\frac{2l}{\pi}} x^2 dx \int_0^l e^{-\frac{lx^2}{2t(l-t)}} [t(l-t)]^{-\frac{3}{2}} dt.$$

Par le changement de variables  $4t(l-t) = l^2 u^2 = \frac{l^2}{1+v^2}$ , cette expression devient

$$\begin{aligned} 8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} l^{-\frac{3}{2}} x^2 dx \int_0^1 e^{-\frac{2x^2}{lu^2}} \frac{du}{u^2 \sqrt{1-u^2}} \\ = 8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} l^{-\frac{3}{2}} x^2 e^{-\frac{2x^2}{l}} dx \int_0^\infty e^{-\frac{2x^2 v^2}{l}} dv = e^{-\frac{2x^2}{l}} \frac{4x dx}{l}. \end{aligned}$$

Il vient donc, pour une variable  $T$  choisie au hasard entre 0 et  $t$ ,

$$(67) \quad \Pr \{X(T) > x\} = e^{-\frac{2x^2}{l}} \quad (x > 0).$$

C'est la même loi que celle dont dépend  $X\left(\frac{l}{4}\right)$  si l'on ne tient compte que des hypothèses  $X(0) = 0$  et  $X(t) > 0$  pour  $0 < t < \frac{l}{4}$ .

On peut déterminer, par une méthode analogue, la probabilité de  $X(T) > x$  dans le cas où l'on suppose  $X(0) = a > 0$ ,  $X(u) = b > 0$  et  $X(t) > 0$  dans tout l'intervalle  $(a, b)$ ; il nous suffira, pour la suite, d'observer que ces probabilités ne peuvent qu'augmenter avec  $a$  et  $b$ , de sorte que la formule (67) en donne une borne inférieure. Cela résulte de ce qu'il en est ainsi de  $\Pr \{X(t) > x\}$  pour chaque valeur de  $t$ ; c'est donc vrai aussi pour  $\Pr \{X(T) > x\}$  qui est la valeur moyenne de l'expression précédente quand  $t$  varie de zéro à  $u$ .

Le résultat obtenu s'applique évidemment aussi si  $a$  et  $b$ , au lieu d'être connus, sont des nombres positifs aléatoires. Sans rien

savoir sur  $a$  et  $b$ , on peut donc affirmer que, si  $X(t) > 0$  pour  $0 < t < u$ , on a

$$(68) \quad \Pr \{X(T) > x\} \geq e^{-\frac{2x^2}{t}}.$$

Bien entendu aussi, si l'on sait que zéro et  $u$  sont deux racines consécutives de  $X(t)$  mais que l'on ne connaisse pas le signe de cette fonction entre ces deux racines, la formule (67) s'applique en remplaçant  $X(T)$  par  $|X(T)|$ , tandis que la probabilité de  $X(T) > x$  devient deux fois plus petite.

2°. Il nous faut maintenant étudier la variation de  $X(t)$  au voisinage de l'origine, dans l'hypothèse où  $X(0) = 0$ , et  $X(t) > 0$  pour  $t$  positif assez petit. On sait que, pour une valeur de  $t$  considérée isolément,  $X(t)$  est probablement de l'ordre de grandeur de  $\sqrt{t}$ ; mais des valeurs de  $X(t)$  grandes par rapport à  $\sqrt{t}$ , ou au contraire petites par rapport à ce nombre, peuvent se trouver réalisées pour des valeurs arbitrairement petites de  $t$ . Il s'agit de préciser leur ordre de grandeur. C'est d'ailleurs seulement le résultat relatif aux petites valeurs qui nous servira dans la suite; aussi nous contenterons-nous d'indications sommaires relatives aux grandes valeurs.

Si l'on fait abstraction de la condition  $X(t) > 0$ , on peut appliquer un résultat de M. Khintchine d'après lequel, si  $c > 1$ , il existe presque sûrement un nombre positif  $T$  tel que, pour  $t < T$ , on ait

$$(69) \quad X(t) < c \sqrt{2t \log \log \frac{1}{t}},$$

tandis que, si  $c \leq 1$ , cette inégalité est presque sûrement en défaut pour des valeurs arbitrairement petites de  $t$ .

On pourrait penser que la condition  $X(t) > 0$ , qui augmente la probabilité des grandes valeurs de  $X(t)$ , doit conduire à modifier le premier de ces résultats. Il n'en est rien. La démonstration du théorème de M. Khintchine subsiste en effet sans modification importante si l'on y remplace la loi de Laplace-Gauss par la loi

$$(70) \quad \Pr \{X(t) > x\} = e^{-\frac{x^2}{2t}},$$

qui la remplace dans le problème actuel; (cette formule résulte évidemment de la formule (19), car, pour l'étude de  $X(t) - X(0)$  cela revient au même de supposer,  $t'$  variant de 0 à  $t$ , que  $X(0)$  soit le minimum de  $X(t')$ , ou que  $X(t)$  en soit le maximum).

Il faut bien remarquer que cela n'était nullement évident; même complété par la remarque qui précède, ce résultat ne permet pas d'affirmer que, si  $c > 1$ , il existe presque sûrement une fonction positive  $T$  de  $t$ , telle que, pour  $0 < t < u$  et  $0 < t' - t < T$ , on ait

$$X(t') - X(t) < c \sqrt{2(t' - t) \log \log \frac{1}{t' - t}}.$$

Tout ce qu'on peut dire, c'est que, pour chaque valeur de  $t$ ,  $T$  existe presque sûrement; cela n'exclut pas l'hypothèse d'après laquelle il existerait presque sûrement des valeurs de  $t$ , non connues d'avance, pour lesquelles  $T$  n'existerait pas. Cette question, croyons-nous, n'est pas résolue actuellement; en tout cas  $T$  ne saurait être indépendant de  $t$ , car, comme nous l'avons montré ailleurs (Variables aléatoires, p. 172) si l'on fait varier à la fois  $t$  et  $t'$ , on obtient un énoncé analogue à celui de M. Khintchine, mais où l'inégalité (69) est remplacée par

$$X(t') - X(t) < c \sqrt{2(t' - t) \log \frac{1}{t' - t}} \quad (t' > t).$$

Des valeurs de  $X(t') - X(t)$  plus grandes que celles qui interviennent dans l'énoncé de M. Khintchine sont donc presque sûrement réalisées pour des valeurs arbitrairement petites de  $t' - t$ ; mais peut-être n'existe-t-il pas, sauf dans des cas dont la probabilité est nulle, de suite d'intervalles de longueurs tendant vers zéro, pour lesquelles ces grandes valeurs sont réalisées, et ayant de plus une de leurs extrémités fixes.

Revenant au cas d'une origine fixe, rappelons encore que les grandes valeurs dont le théorème de M. Khintchine établit l'existence sont très rares; mais, lorsqu'elles sont réalisées, le rapport  $\frac{X^2(t)}{t}$  reste longtemps grand, c'est-à-dire qu'il le reste pendant un intervalle d'étendue très grande sur l'échelle des  $\lambda = \log \frac{1}{t}$ ; mais, sur cette échelle, leur étendue relative est très petite, et la fréquence des valeurs de  $t$  pour lesquelles on a

$$(71) \quad X^2(t) < 2ct$$

tend presque sûrement vers sa probabilité théorique  $1 - e^{-c}$  déduite de la formule (70); il en est de même si l'on considère une suite de valeurs de  $t$  décroissant comme les termes d'une progression géométrique.

3°. Occupons-nous maintenant des petites valeurs de  $X(t)$ ; une borne inférieure presque sûre de ces valeurs est donnée par le théorème suivant:

THÉORÈME: Si  $X(0) = 0$ , et  $X(t) > 0$  pour  $t$  positif assez petit, et si  $c$  est une constante supérieure à un, il existe presque sûrement un nombre positif  $T$  tel que, pour  $t < T$ , on ait

$$(72) \quad X(t) > \sqrt{2t} \left( \log \frac{1}{t} \right)^{-c}.$$

Si au contraire  $c \leq 1$ , l'inégalité inverse

$$(73) \quad X(t) < \sqrt{2t} \left( \log \frac{1}{t} \right)^{-c}$$

est presque sûrement réalisée pour des valeurs arbitrairement petites de  $t$ .

La démonstration est analogue à celle du théorème de M. Khintchine. On considère la suite des valeurs  $t_n = q^n$  ( $q < 1$ ;  $n=1, 2, \dots$ ); nous poserons  $X(t_n) = X_n$  et désignerons par  $X_n - Y_n$  le minimum de  $X(t)$  dans l'intervalle  $(t_n, t_{n-1})$ . Il faut commencer par calculer la probabilité

$$\varphi_n(z) = \Pr \{X_n - Y_n < z\}.$$

Si  $X_n$  a une valeur connue  $x$ , la probabilité de l'inégalité

$$z < x - Y_n < z + dz,$$

compte tenu de ce que l'on a sûrement  $Y_n < x$ , est égale à

$$k(x)e^{-\frac{(x-z)^2}{2\tau_n}} dz \quad \left( \tau_n = t_{n-1} - t_n = \frac{1-q}{q} t_n \right),$$

$k(x)$  étant déterminé par la condition que l'intégrale de cette expression de zéro à  $x$  soit l'unité. C'est une loi absolument continue, et la densité de probabilité ne s'annule pas avec  $z$ . Or la probabilité cherchée  $\varphi_n(z)$  est la valeur probable de celle calculée dans l'hypothèse  $X_n = x$ , quand on y remplace  $x$  par la variable aléatoire  $X_n$ ; c'est donc aussi une fonction absolument continue, et  $\varphi'(0)$  n'est pas nul. Compte tenu d'autre part de l'homogénéité, il vient

$$(74) \quad \varphi_n(z) = \Pr \{X_n - Y_n < z\} = \varphi\left(\frac{z}{\sqrt{2t_n}}\right),$$

et, pour les petites valeurs de  $\frac{z}{\sqrt{2t_n}}$ , cette probabilité est équivalente à,  $k\frac{z}{\sqrt{2t_n}}$ ,  $k$  étant positif.

Cette loi est donc différente de celle dont dépend  $X_n$ , pour laquelle la probabilité des petites valeurs est équivalente à  $\frac{z^2}{2t_n}$ . Cette différence est importante; dans le cas du théorème de M. Khintchine cité plus haut, on peut prévoir le résultat en ne considérant que les valeurs  $X_n = X(q^n)$  de  $X(t)$ ; dans le cas qui nous occupe, on serait conduit à des résultats inexacts en prenant  $X_n$  comme valeur approchée de  $X_n - Y_n$ .

Considérons alors la probabilité

$$(75) \quad \alpha_n = \Pr \left\{ X_n - Y_n < \sqrt{2t_n} \left( \log \frac{1}{t_n} \right)^{-c'} \right\} \sim k'n^{-c'}$$

$$\left[ k' = k \left( \log \frac{1}{q} \right)^{-c'} \right].$$

Elle est le terme général d'une série convergente, si  $c' > 1$ , et divergente si  $c' \leq 1$ .

Supposons d'abord  $c > 1$ ; choisissons  $c'$  entre 1 et  $c$ . D'après le lemme de M. Cantelli, il résulte alors de la convergence de  $\sum \alpha_n$  que l'inégalité

$$X_n - Y_n > \sqrt{2t_n} \left( \log \frac{1}{t_n} \right)^{-c'}$$

est presque sûrement vérifiée pour tout  $n$  assez grand; puisque  $c > c'$ , on en déduit, pour  $n$  assez grand et  $t$  quelconque entre  $t_n$  et  $t_{n-1}$ ,

$$X(t) \geq X_n - Y_n > \sqrt{2t} \left( \log \frac{1}{t} \right)^{-c'}$$

c'est-à-dire que l'inégalité (72) est bien vérifiée pour tout  $t$  assez petit.

On peut préciser ce résultat en observant que le reste de la série  $\sum \alpha_n$  borne supérieurement la probabilité que l'inégalité (72) soit en défaut pour des valeurs de  $t$  supérieures à une valeur donnée. On obtiendra naturellement une borne supérieure plus petite si l'on remplace l'inégalité (72) par l'inégalité moins restrictive

$$(76) \quad X(t) > t^\alpha \sqrt{2t} \quad \left( 0 < \alpha < \frac{1}{2} \right),$$

et, par une méthode identique à celle que nous venons d'appliquer à l'inégalité (72), on voit que: *il existe presque sûrement un nombre  $T'$  tel que l'inégalité (76) soit vérifiée pour  $t < T'$ ; elle l'est pour*

$t < t'$  ( $t'$  étant un nombre donné) *sauf dans des cas de probabilité inférieure à  $K t'^\alpha$*  ( $K$  étant une constante absolue).

L'inégalité (73), relative au cas  $c \leq 1$ , ne nous servant pas dans la suite, nous nous contenterons d'indiquer le principe de sa démonstration. Elle repose sur notre extension du lemme de M. Borel (Variables aléatoires, p. 249) d'après laquelle ce lemme s'étend au cas des probabilités enchaînées, à condition de considérer, non la loi de probabilité a priori de la  $n^{\text{ième}}$  expérience, mais la loi conditionnelle dont elle dépend lorsque le résultat de l'expérience précédente est connu. Il devient alors une liaison presque sûre entre les convergences de séries toutes les deux aléatoires.

On est ainsi conduit à considérer, au lieu de  $\varphi_n(z)$ , la probabilité conditionnelle

$$\varphi_n(z, x') = \Pr \{X_n - Y_n < z / X_{n-1} = x'\}.$$

Nous ne développerons pas le calcul de cette probabilité. On arrive à cette conclusion que, si

$$(77) \quad X_{n-1} = x' < \sqrt{2t_{n-1}},$$

$\varphi_n(z, x')$  a, comme  $\varphi_n(z)$ , une borne inférieure de la forme  $K \frac{z}{\sqrt{2t_n}}$ , de sorte que

$$\alpha'_n = \Pr \left\{ X_n - Y_n < \sqrt{2t_n} \left( \log \frac{1}{t_n} \right)^{-c} \mid X_{n-1} = x' \right\} > K \left( n \log \frac{1}{q} \right)^{-c}$$

est le terme général d'une série divergente, si  $c \leq 1$ . Or la condition (77) n'est autre que la condition (71), écrite pour  $c = 1$  et  $t = t_{n-1}$ ; elle est réalisée avec une fréquence presque sûrement bornée inférieurement, de sorte que la série de terme général  $\alpha'_n$  est presque sûrement divergente. Il en résulte que l'inégalité (73) est presque sûrement réalisée une infinité de fois, c.q.f.d.

4°. La démonstration de la formule (65) est maintenant immédiate dans le cas où 0 et  $u$  sont deux racines consécutives de  $X(t)$ . Dans ce cas  $s = 0$ , et il s'agit de démontrer que  $\frac{\Phi(u, x)}{x}$  tend vers zéro avec  $x$ . Or les petites valeurs de  $X(t)$  ne sont réalisées que près des extrémités de l'intervalle  $(0, u)$  qui jouent toutes les deux le même rôle. On peut donc ne considérer que les valeurs de  $t$  assez petites pour que les inégalités (69) et (72) soient réalisées. Les conditions

$$\sqrt{2t} < x \left( \log \frac{1}{t} \right)^{c'} < x \left( \log \frac{1}{x} \right)^c \quad (c > c' > 1),$$

$$t < t' \quad \left[ 2t' = \frac{x^2}{c^2 \log \log \frac{1}{t'}} \sim \frac{x^2}{c^2 \log \log \frac{1}{x}}, \quad x \rightarrow 0; \quad c > 1 \right]$$

sont donc respectivement nécessaire et suffisante, dans l'intervalle  $\left(0, \frac{u}{2}\right)$ , pour que l'on ait  $X(t) < x$ . Un résultat analogue s'appliquant aux valeurs voisines de  $u$ , on voit que, pour  $x$  assez petit, on a

$$(78) \quad \frac{x^2}{c^2 \log \log \frac{1}{x}} < \Phi(u, x) < x^2 \left( \log \frac{1}{x} \right)^{2c},$$

ce qui démontre et précise le résultat annoncé.

**5°.** Démontrons maintenant la formule (65) dans le cas général. Il suffit de démontrer que, pour les valeurs  $x_n = q^n$  de  $x$ ,  $1 - q$  étant positif et arbitrairement petit, on a presque sûrement

$$(79) \quad \Phi(u, x_n) - \Phi(u, 0) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} s x_n \quad (n \rightarrow \infty).$$

L'intervalle  $(0, u)$  se trouve divisé en intervalles séparés par les racines de  $X(t)$ , et, d'après le résultat qui précède, on peut négliger tous ceux dont la longueur est supérieure à un nombre fixe arbitrairement petit, et ne tenir compte que des intervalles très nombreux et très petits auxquels on peut appliquer la loi forte des grands nombres: le nombre de ceux dont la longueur est comprise entre  $x_n^2 \lambda$  et  $x_n^2 (\lambda + \varepsilon)$  est un infiniment grand presque sûrement équivalent, d'après la définition de  $s$ , à

$$(80) \quad \frac{s}{x_n} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda + \varepsilon}} \right) = \frac{s \varepsilon}{2 x_n} \lambda'^{-\frac{3}{2}} \quad (\lambda < \lambda' < \lambda + \varepsilon).$$

Les valeurs de  $X(t)$  dans ces différents intervalles peuvent être considérées comme résultant d'expériences très nombreuses et indépendantes les unes des autres. La mesure de l'ensemble des valeurs de  $t$  de ces intervalles pour lesquelles  $0 < X(t) < x_n$  diffère alors très peu de sa valeur probable qui, d'après la formule (67), et compte tenu de ce que, pour chaque intervalle  $e$ ,  $X(t)$  a une chance sur deux d'être positif, est, en négligeant les termes qui sont  $o(\varepsilon)$ ,

$$\frac{s\epsilon x_n}{4\sqrt{\lambda}} \left(1 - e^{-\frac{2}{\lambda}}\right).$$

En divisant alors l'intervalle de variation de  $\lambda$  (de zéro à l'infini) en intervalles très nombreux et très petits, on trouve, pour la valeur probable de l'ensemble de tous les  $t$  de l'intervalle  $(0, u)$  pour lesquels  $0 < X(t) < x$ , la valeur

$$\frac{sx_n}{4} \int_0^\infty \left(1 - e^{-\frac{2}{\lambda}}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = sx_n \int_0^\infty e^{-\frac{2}{\lambda}} \lambda^{-\frac{3}{2}} d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} sx_n.$$

C'est précisément l'expression qu'il s'agissait d'obtenir; mais elle ne représente pour le moment qu'une évaluation asymptotique de la valeur probable conditionnelle, évaluée en connaissant les racines de  $X(t)$  et en supposant effectivement vérifiées les propriétés presque sûres de l'ensemble de ces racines qui nous ont permis de définir  $s$ , de la différence  $\Phi(u, x_n) - \Phi(u, 0)$ . Il s'agit de montrer que cette évaluation s'applique à cette expression elle-même. Pour cela nous allons montrer que l'erreur, c'est-à-dire la différence entre cette expression et sa valeur probable, est en valeur absolue inférieure à  $2\epsilon x_n$ , sauf dans des cas dont la probabilité est, quelque petit que soit  $\epsilon$ , le terme général d'une série convergente; compte tenu du lemme de M. Cantelli, cela suffit à établir le résultat énoncé.

Considérons d'abord les erreurs dues à ceux des intervalles  $e$  dont la longueur  $l$  est inférieure à  $\lambda x_n^2$ ; la longueur totale de ces intervalles est un infiniment petit équivalent à  $s x_n \sqrt{\lambda}$ , tandis que le plus grand est équivalent à  $\lambda x_n^2$ . La valeur probable du carré de l'erreur relative à un intervalle de longueur  $l$  ne pouvant dépasser  $l^2$ , celle du carré de l'erreur totale, pour les intervalles considérés, est au plus égale à

$$\sum l^2 \leq \sum l \text{Max } l \sim s \lambda^{\frac{3}{2}} x_n^3.$$

La probabilité que l'erreur effective dépasse  $\epsilon x_n$  est alors, d'après l'inégalité de Tchebycheff, inférieure à  $\frac{s \lambda^{\frac{3}{2}} x_n^3}{\epsilon^2}$ ; comme  $x_n = q^n$  ( $q < 1$ ), c'est bien le terme général d'une série convergente, quelque petit que soit  $\epsilon$  et quelque grand que soit  $\lambda$ .

Prenons alors  $\lambda$  assez grand pour que, dans tout intervalle  $e$  de longueur  $l > \lambda x_n^2$ , on puisse, avec une erreur relative finie, remplacer la valeur quadratique moyenne de l'erreur étudiée par sa valeur limite qui, par raison d'homogénéité, est de la forme

$kx_n^2$ ,  $k$  étant constant. Le nombre des intervalles considérés étant un infiniment grand presque sûrement équivalent à  $\frac{s}{x_n\sqrt{\lambda}}$ , la valeur probable du carré de l'erreur totale est équivalente, avec une erreur relative finie et d'autant plus petite que  $\lambda$  est plus grand, à  $\frac{k^2 sx_n^2}{\sqrt{\lambda}}$ ; pour une valeur de  $\lambda$  convenablement choisie, elle sera inférieure à  $2\frac{k^2 sx_n^2}{\sqrt{\lambda}}$ , et, d'après l'inégalité de Tchebycheff, l'erreur effective sera en valeur absolue inférieure à  $\varepsilon x_n$ , sauf dans des cas dont la probabilité est inférieure à  $\frac{2k^2 sx_n}{\sqrt{\lambda}\varepsilon^2}$ , ce qui est encore le terme général d'une série convergente.

L'erreur relative à l'ensemble de tous les intervalles est alors la somme de deux termes dont chacun est presque sûrement, pour  $n$  assez grand, inférieur en valeur absolue à  $\varepsilon x_n$ ; elle est donc elle-même inférieure à  $2\varepsilon x_n$ , c.q.f.d.

6°. *Remarque finale.* Si, au lieu de la valeur algébrique de  $X(t)$ , on considère sa valeur absolue, on obtient évidemment le résultat suivant: l'ensemble des valeurs de  $t$  comprises entre zéro et  $u$  pour lesquelles  $|X(t)| < x$ , a une mesure presque sûrement équivalente, quand  $x$  tend vers zéro, à  $\sqrt{2\pi} sx$ .

Or  $Y(t) - X(t)$  et  $|X(t)|$  dépendent du même processus. Par suite: l'ensemble des valeurs de  $t$  de l'intervalle  $(0, u)$  pour lesquelles  $X(t)$  diffère de moins de  $x$  du maximum  $Y(t)$  des valeurs antérieurement atteintes a une mesure presque sûrement équivalente, quand  $x$  tend vers zéro, à  $\sqrt{2\pi} sx = 2xY(t)$ .

Cette proportionnalité se conçoit aisément; chaque fois que  $X(t)$  est voisin de  $Y(t)$ , la probabilité d'une nouvelle augmentation est toujours la même. Les augmentations ayant lieu par impulsions infiniment petites, un accroissement fixe est la somme d'une infinité d'accroissements élémentaires; la loi forte des grands nombres s'applique: l'accroissement effectif est alors presque sûrement proportionnel au temps pendant lequel la possibilité d'un accroissement s'est présenté.

(Reçu le 29 mars 1939.)