

# COMPOSITIO MATHEMATICA

ISAIE MAXIMOFF

## **Sur les ensembles mesurables B dans l'espace transfini**

*Compositio Mathematica*, tome 7 (1940), p. 201-213

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1940\\_\\_7\\_\\_201\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__201_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Sur les ensembles mesurables B dans l'espace transfini

par

Isaie Maximoff

Tscheboksary

---

1. Soit  $\Omega_i$  le premier nombre transfini que précèdent  $\aleph_i$  nombres transfinis. La suite de nombres  $x_\alpha$ ,  $1 \leq \alpha < \Omega_i$ ,

$$(1) \quad x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_\alpha, \dots] \quad (1 \leq \alpha < \Omega_i);$$

sera nommée point de l'espace transfini d'ordre  $i$ . Nous désignons cet espace par  $I_x^{(i)}$ .

Nous dirons qu'un point quelconque

$$x^{(1)} = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_\alpha^{(1)} \dots\} \quad (\alpha < \Omega_i)$$

de l'espace  $I_x^{(i)}$  est égal à un autre point

$$x^{(2)} = \{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots, x_\alpha^{(2)}, \dots\} \quad (\alpha < \Omega_i)$$

à  $\mu$  près si

$$x_\alpha^{(1)} = x_\alpha^{(2)}$$

pour tout  $\alpha$  qui satisfait à la condition

$$\mu \leq \alpha < \Omega_i.$$

L'ensemble des points  $x$  de  $I_x^{(i)}$  pour lesquels  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $n$  étant un nombre *naturel* quelconque ( $n < \Omega_0$ ), sont donnés, est appelé *portion* d'ordre  $n$  de  $I_x^{(i)}$ .

L'ensemble des points  $x$  de  $I_x^{(i)}$  pour lesquels  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  ( $n < \Omega_0$ ) sont donnés est appelé *arrondissement* de  $I_x^{(i)}$ , et nous le désignons par  $(x_1 x_2 x_3 \dots x_n \dots)$  ( $n < \Omega_0$ ).

Appelons espace transfini à  $m$  dimensions l'ensemble de tous les systèmes  $[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}]$  où  $x^{(s)}$ ,  $1 \leq s \leq m$ , est un point quelconque de  $I_{x^{(s)}}^{(i)}$ . Cet espace sera désigné par  $I_{x^{(1)}x^{(2)} \dots x^{(m)}}^{(i)}$  ou par  $I_X^{(i)}$  où  $X = [x^{(1)}x^{(2)} \dots x^{(m)}]$ .

Appelons *portion* d'ordre  $n$  de l'espace  $I_x^{(i)}$  l'ensemble des points  $M[x^{(1)}x^{(2)} \dots x^{(m)}]$  de cet espace dont les coordonnées  $x^{(1)}$ ,

$x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$  appartiennent chacune aux portions d'ordre  $n$  quelconques, soient  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ , situées respectivement dans les espaces

$$I_{x^{(1)}}^{(i)}, I_{x^{(2)}}^{(i)}, \dots, I_{x^{(m)}}^{(i)}.$$

Appelons arrondissement de  $I_x^{(i)}$  l'ensemble de tous les points  $X = [x^{(1)}x^{(2)} \dots x^{(m)}]$  de cet espace dont les coordonnées  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$  appartiennent chacune aux arrondissements  $A_1, A_2, \dots, A_m$  quelconques, situés respectivement dans les espaces

$$I_{x^{(1)}}^{(i)}, I_{x^{(2)}}^{(i)}, \dots, I_{x^{(m)}}^{(i)}.$$

Il est évident que si  $m$  est un nombre naturel quelconque, l'ensemble de toutes les portions de  $I_{x^{(1)}x^{(2)} \dots x^{(m)}}^{(i)}$  est de la puissance  $\aleph_i$ .

Considérons une suite d'ensembles

$$(2) \quad E_1, E_2, E_3, \dots, E_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

formés de points de  $I_x^{(i)}$ .

Nous aurons à effectuer sur ces ensembles les trois opérations suivantes.

I. Somme ( $\Omega_i$ ). Cette opération fait correspondre à la suite (2) l'ensemble

$$(3) \quad S = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_\alpha + \dots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

formé des points appartenant à l'un au moins des ensembles  $E_\alpha$ .

L'ensemble  $S$  ainsi obtenu s'appelle la *somme* ( $\Omega_i$ ) des ensembles donnés  $E_\alpha$  ( $\alpha < \Omega_i$ ).

II. Partie commune ( $\Omega_i$ ). Cette opération donne l'ensemble  $P$  formé des points communs à tous les ensembles de la suite (2). L'ensemble  $P$  ainsi obtenu s'appelle partie commune ( $\Omega_i$ ) aux ensembles de la suite (2); nous la désignons par

$$P = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot \dots \cdot E_\alpha \cdot \dots \quad (\alpha < \Omega_i).$$

Une suite d'ensembles

$$(4) \quad E_1, E_2, E_3, \dots, E_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

de points de  $I_x^{(i)}$  est appelée convergente ( $\Omega_i$ ) si pour chaque point  $X$  de cet espace il existe une valeur  $\alpha = \alpha_0$ , dépendant de  $X$ , telle que  $X$  ou bien appartient nécessairement à tous les  $E_\alpha$ ,  $\alpha \geq \alpha_0$ , ou bien n'appartient à aucun des  $E_\alpha$ ,  $\alpha \geq \alpha_0$ .

III. Limite ( $\Omega_i$ ). L'ensemble  $E$  de tous les points  $X$  qui

appartiennent à tous les  $E_\alpha$ ,  $\alpha \geq \alpha_0$  ( $\alpha_0$  dépend de  $X$ ), est appelé limite ( $\Omega_i$ ) de la suite convergente (4) et nous écrivons:

$$E = \lim_{\alpha \rightarrow \Omega_i} E_\alpha.$$

*Classe initiale.* Si l'ensemble  $E$  de l'espace  $I_x^{(i)}$  et son complémentaire  $CE = I_x^{(i)} - E$  peuvent être représentés comme sommes ( $\Omega_i$ ) de portions de cet espace,  $E$  appartient à la classe initiale  $K_0^{(i)}(\mathfrak{N}_i)$ .

La classe  $K_\alpha^{(i)}(\mathfrak{N}_i)$  est définie comme l'ensemble de tous les ensembles de points  $E$  qui sont limites ( $\Omega_i$ ) d'ensembles  $E_\alpha$  de classes précédentes

$$E = \lim_{\alpha \rightarrow \Omega_i} E_\alpha.$$

Si un ensemble  $E$  appartient à la classe  $K_\alpha^{(i)}(\mathfrak{N}_i)$  sans appartenir à une classe précédente, nous dirons que *l'ensemble  $E$  est de classe  $\alpha$* .

Le but de cette note est de démontrer que pour tout nombre  $\alpha$ ,  $\alpha < \Omega_{i+1}$ , il existe effectivement au moins un ensemble  $E$  qui est de classe  $\alpha$ .

**2.** La notion fondamentale qui nous servira dans cette étude est celle de point-limite.

Le point  $x_0$  de  $I_x^{(i)}$  est dit limite de la suite de points

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_\nu, \dots \quad (\nu < \Omega_0),$$

si quel que soit l'entier  $n$ , les  $x_\nu$  sont, pour  $\nu$  assez grand, contenus dans la portion d'ordre  $n$  qui contient  $x_0$ , et si, en outre, les  $x_\nu$  sont égaux à  $x_0$  à  $\Omega_0$  près.

Nous dirons que le point  $X_0 = [x_0^{(1)} x_0^{(2)} \dots x_0^{(m)}]$  de  $I_x^{(i)}$  est limite de la suite de points

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_\nu, \dots \quad (\nu < \Omega_0)$$

où  $X_\nu = [x_\nu^{(1)}, x_\nu^{(2)}, \dots, x_\nu^{(m)}]$  si  $x_0^{(s)}$  est limite de la suite de points

$$x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)}, \dots, x_\nu^{(s)}, \dots \quad (1 \leq s \leq m, \nu < \Omega_0).$$

Pour exprimer que  $X_0$  est limite de la suite

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_\nu, \dots \quad (\nu < \Omega_0),$$

nous écrivons

$$X_0 = \lim_{\nu \rightarrow \Omega_0} X_\nu.$$

Etant donné un ensemble  $P$  de points de  $I_x^{(i)}$ , on dit qu'un point  $X_0$  (faisant partie ou non de  $P$ ) est *point-limite pour  $P$*  si toute portion contenant  $X_0$  contient au moins un point  $X_1$

de  $P$  tel que  $X_1$  est égal à  $X_0$  à  $\Omega_0$  près, mais  $X_1 \neq X_0$ . Désignons par  $P^{(1)}$  l'ensemble déterminé de manière suivante:

en premier lieu, tout point-limite pour  $P$  appartient à  $P^{(1)}$ ;  
 en second lieu, si un point  $\bar{X}$  appartient à  $P^{(1)}$ , alors  $P^{(1)}$  contient tout point  $X$  qui appartient à l'arrondissement contenant  $\bar{X}$ .

Nous dirons que  $P^{(1)}$  est le *dérivé* de  $P$ .

Nous appellerons *fermé* tout ensemble  $F$  de  $I_x^{(i)}$  qui jouit des propriétés suivantes:

- a) tout point-limite pour  $F$  est contenu dans  $F$ ;
- b) si un point  $\bar{X}$  appartient à  $F$ , alors  $F$  contient tout point  $X$  qui appartient à l'arrondissement contenant  $\bar{X}$ .

Nous dirons qu'une portion est *relative* à l'ensemble  $E$ , si elle contient au moins un point de  $E$ , et qu'elle est *extérieure* à  $E$ , si elle ne contient aucun point de  $E$ .

**THÉORÈME 1.** Tout ensemble fermé  $F$  est complémentaire de la somme de toutes les portions extérieures à  $F$ .

Démonstration. Soit

$$(P) P_1, P_2, P_3, \dots, P_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

la suite de toutes les portions extérieures à  $F$  et soit

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_\alpha + \dots$$

Je dis que  $F = I_x^{(i)} - P$  ou  $F = CP$ .

En effet, soit  $f$  un point quelconque de  $F$ .

Il est clair que  $f$  n'est pas contenu dans  $P$ , par suite,  $f$  est contenu dans  $CP$ . Cela veut dire que  $F \subset CP$ .

Soit  $p$  un point quelconque de  $CP$ .

Il est clair que  $p$  n'est pas contenu dans  $P$ . Cela veut dire que si  $Q_n$  est la portion d'ordre  $n$  contenant  $p$ , cette portion  $Q_n$ , quel que soit  $n$ , n'est identique à aucune des portions

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

La portion  $Q_n$  contient au moins un point  $q_n$  de  $F$ , quel que soit  $n$ . Soit  $q_n^1$  un point qui est déterminé de la manière suivante: en premier lieu,  $q_n^1$  appartient à l'arrondissement contenant  $q_n$ ; en second lieu,  $q_n^1$  est égal au point  $p$  à près de  $\Omega_0$ .

Le point  $q_n^1$  ainsi déterminé appartient à  $F$ , puisque  $F$  est fermé.

On doit considérer les cas suivants:

Ou bien il existe un entier  $\nu$  tel que  $q_n^1 = p$  pour tout  $n > \nu$ . Dans ce cas  $p$  appartient à  $F$  puisque  $q_n^1$  est un élément de  $F$ .

Ou bien il n'existe aucun entier  $\nu$  tel que  $q_n^1 = p$  pour tout

$n > \nu$ . Cela veut dire que pour tout entier  $\nu$  on peut trouver un entier  $n$ ,  $n > \nu$ , tel que  $q_n^1 \neq p$ .

Dans ce cas  $p$  est un point-limite pour  $F$ , par suite,  $p$  appartient à l'ensemble fermé  $F$ . Donc, nous avons:  $CP \subset F$  et  $F \subset CP$  d'où résulte  $F = CP$ .

Voici une conséquence immédiate du théorème précédent: tout ensemble fermé appartient à la classe  $K_1^{(i)}(\aleph_i)$ .

Voici encore un exemple d'un ensemble fermé qui est de classe 1: soit  $X$  un point quelconque de  $I_X^{(i)}$ , l'arrondissement  $A(X)$  contenant  $X$  est un ensemble de classe 1 et, en outre, il est fermé.

**THÉORÈME 2.** Le complémentaire de la somme  $(\Omega_i)$  de portions est fermé.

Démonstration. Soit  $p$  un point-limite quelconque pour  $CS$  où  $S$  est la somme de portions. La portion  $Q_n(p)$  d'ordre  $n$  contenant  $p$  contient au moins un point  $q_n$  de  $CS$  tel que  $q_n$  est égal au point  $p$  à  $\Omega_0$  près et  $q \neq p$ . Le point  $q_n$  appartient à  $CS$ , par suite, il n'appartient pas à  $S$ , quel que soit  $n$ . Comme  $q_n$  n'appartient pas à  $S$ , la portion  $Q_n(p)$  n'est pas contenu dans  $S$ , quel que soit  $m$ . Cela veut dire que  $p$  n'appartient pas à  $S$ , par suite,  $p$  est contenu dans  $S$ . Donc,  $S$  est fermé.

**THÉORÈME 3.** La partie commune  $(\Omega_i)$  aux ensembles fermés est fermé.

Démonstration. Prenons une suite quelconque d'ensembles fermés

$$(F) F_1, F_2, F_3, \dots, F_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega_i).$$

D'après le théorème 1 on peut écrire:

$F_\alpha = CS_\alpha$  où  $S_\alpha$  est la somme  $(\Omega_i)$  d'ensembles fermés. Alors  $F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdots F_\alpha \cdots = CS_1 \cdot CS_2 \cdot CS_3 \cdots CS_\alpha = C(S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_\alpha + \cdots)$ . Comme  $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_\alpha + \cdots$  est aussi la somme  $(\Omega_i)$  de portions, d'après le théorème 2, l'ensemble  $C(S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_\alpha + \cdots)$  est fermé, par suite, l'ensemble  $F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdots F_\alpha \cdots$  est fermé.

**3.** Soit  $E$  un ensemble quelconque de points de  $I_X^{(i)}$ . En faisant correspondre à tout élément  $X$  de cet ensemble un point

$$Y = [y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)}]$$

de  $I_y^{(i)}$ , nous obtenons une fonction

$$Y = f(X)$$

définie sur  $E$ .

Alors supposons que  $E = I_X^{(i)}$ .

Cette fonction est dite continue en point  $X_0$  si, pour tout nombre naturel  $n$ , il existe un entier  $\mu_n$  tel que  $f(X)$  est contenu dans la portion  $P$  d'ordre  $n$ , contenant  $Y_0 = f(X_0)$ , lorsque  $X_0$  est contenu dans la portion  $Q$  d'ordre  $\mu_n$  contenant  $X_0$ , et qu'en outre, si  $\bar{Y} = f(\bar{X})$  et si  $X$  parcourt l'arrondissement de  $I_X^{(i)}$ , alors  $Y$  parcourt l'arrondissement de  $I_Y^{(i)}$  contenant  $Y_0$ .

Dans ce qui suit joue un rôle essentiel la suite de fonctions continues

$$t_1 = \varphi_1(t), t_2 = \varphi_2(t), \dots, t_\alpha = \varphi_\alpha(t), \dots \quad (\alpha < \Omega_i),$$

ayant les propriétés suivantes:

a) à toute suite de points

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

situés respectivement dans

$$I_{t_1}^{(i)}, I_{t_2}^{(i)}, I_{t_3}^{(i)}, \dots, I_{t_\alpha}^{(i)}, \dots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

correspond un point et un seul de  $I_t^{(i)}$ ;

b) si  $t' \neq t''$  il existe un nombre  $\alpha$ ,  $\alpha < \Omega_i$ , tel que

$$\varphi_\alpha(t') \neq \varphi_\alpha(t'').$$

Voici le procédé analogue à celui de N. Lusin <sup>1)</sup> qui nous donne une telle suite de fonctions. L'ensemble de tous les points

$$x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_\alpha, \dots] \quad (\alpha < \Omega_i)$$

de  $I_x^{(i)}$  pour lesquels

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_\alpha,$$

$\alpha$  étant fixe, sont donnés est appelé groupe d'ordre  $\alpha$  de  $I_X^{(i)}$ .

Maintenant à tout groupe  $\delta$  d'ordre 1 de  $I_t^{(i)}$  nous faisons correspondre un groupe d'ordre 1 de  $I_t^{(i)}$ , et réciproquement.

À tout groupe  $\delta$  d'ordre 2 de  $I_t^{(i)}$  nous faisons correspondre un système  $\Gamma_2$  formé de deux groupes  $\delta_1$  et  $\delta_2$  d'ordre 2 respectivement situés dans  $I_{t_1}^{(i)}$  et  $I_{t_2}^{(i)}$  de manière que le groupe d'ordre 1 contenant  $\delta$  corresponde au groupe d'ordre 1 contenant  $\delta_1$ , et que *vice versa* à tout système  $\Gamma_2$  analogue corresponde un groupe d'ordre 2 de  $I_t^{(i)}$ .

<sup>1)</sup> Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications (Paris, 1930), 115—116.

Soit  $n$  un nombre de première espèce et  $n < \Omega_i$ . D'une manière générale, à tout groupe  $\delta$  d'ordre  $n$  de  $I_i^{(i)}$  correspond un système  $\Gamma_n$  formé de  $n$  groupes  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  d'ordre  $n$  situés respectivement sur  $I_{t_1}^{(i)}, I_{t_2}^{(i)}, \dots, I_{t_n}^{(i)}$  de telle manière que le groupe d'ordre  $n - 1$  contenant  $\delta$  corresponde à un groupe  $\Gamma_{n-1}$  formé de groupes d'ordre  $n-1$  contenant respectivement  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}$  et que vice versa à tout système analogue  $\Gamma_n$  corresponde un groupe d'ordre  $n$  de  $I_i^{(i)}$ .

Soit  $\alpha$  un nombre transfini de seconde espèce tel que  $\alpha < \Omega_i$ . D'une manière générale, à tout groupe  $\delta$  d'ordre  $\alpha$  de  $I_i^{(i)}$  correspond un système  $\Gamma_\alpha$  formé de groupes

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\alpha$$

d'ordre  $\alpha$  situés respectivement dans

$$I_{t_1}^{(i)}, I_{t_2}^{(i)}, \dots, I_{t_\alpha}^{(i)}$$

de telle manière que chaque groupe d'ordre  $\alpha'$ ,  $\alpha' < \alpha$ , contenant  $\delta$  corresponde à un système  $\Gamma_{\alpha'}$  formé de groupes d'ordre  $\alpha'$  contenant respectivement  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\alpha'}$ , et *vice versa*.

On voit bien que le procédé indiqué nous donne les équations.

$$(L) \quad t_1 = \varphi_1(t), t_2 = \varphi_2(t), \dots, t_\alpha = \varphi_\alpha(t), \dots \quad (\alpha < \Omega_i),$$

$\varphi_n(t)$  étant continue sur  $I_i^{(i)}$ .

Donc, nous avons les fonctions cherchées  $\varphi_\alpha(t)$ .

4. Nous dirons que tout ensemble  $E$  de  $I_X^{(i)}$  qu'on obtient à partir des portions de  $I_X^{(i)}$  au moyen des deux opérations „somme  $(\Omega_i)$ ” et „partie commune  $(\Omega_i)$ ”, répétées au plus  $\aleph_i$  fois, est mesurable  $B(\aleph_i)$ . Nous désignons par  $B^{(i)}(\aleph_i)$  la classe de tous les ensembles mesurables  $B(\aleph_i)$ .

Il est évident que chaque classe  $K_\alpha^{(i)}(\aleph_i)$ ,  $\alpha < \Omega_{i+1}$ , ne peut contenir que des ensembles mesurables  $B(\aleph_i)$ ; l'inverse a encore lieu: tout ensemble de points  $E$  mesurable  $B(\aleph_i)$  appartient à une classe  $K_\alpha^{(i)}(\aleph_i)$  déterminée. Il est aisé de démontrer les théorèmes suivants:

**THÉORÈME 4.** Si un ensemble de points  $E$  est de classe  $\alpha$ , son complémentaire  $CE$  l'est aussi.

**THÉORÈME 5.** La somme  $(\Omega_i)$  et la partie commune  $(\Omega_i)$  d'ensembles sont de classe au plus égale à la classe immédiatement supérieure aux classes de tous les ensembles composants.

**THÉORÈME 6.** Soit  $Y = f(X)$  une fonction continue sur  $I_X^{(i)}$ . Si  $f(X)$  parcourt tous les points  $Y$  d'un ensemble  $B$  de classe  $\alpha$ ,  $X$  parcourt tous les points d'un ensemble  $A$  de classe  $\alpha'$ ,  $\alpha' \leq \alpha$ .



classe  $< \alpha$  sans parties communes deux à deux. Si une parenthèse est un ensemble accessible inférieurement de classe  $\alpha$ , elle est une somme  $(\Omega_i)$  d'ensembles de classe  $< \alpha$  et, par suite, une somme  $(\Omega_i)$  d'éléments de classe  $< \alpha$ .

Or, si une parenthèse est de classe  $\alpha$  et n'est pas un ensemble accessible inférieurement de cette classe, c'est un élément de classe  $\alpha$ . Donc,  $E$  est une somme  $(\Omega_i)$  d'éléments de classe  $\leq \alpha$  sans partie commune deux à deux.

Comme chaque ensemble  $E$  de classe  $K_0^{(i)}(\aleph_i)$  est une somme  $(\Omega_i)$  de portions, le théorème est vrai pour  $\alpha = 0$ , et, par suite, dans tous les cas.

**THÉORÈME 8.** Si  $E$  est un ensemble plan situé dans  $I_{tx}^{(i)}$  et si nous transformons l'espace  $I_{tx}^{(i)}$  en un espace  $I_{\tau x}^{(i)}$  au moyen des équations  $t = \varphi(\tau)$ ,  $x = x$ , la fonction  $\varphi$  étant continue dans  $I_{\tau}^{(i)}$ , la transformée  $E'$  de  $E$  est un ensemble dont la classe ne dépasse pas la classe de  $E$ .

Pour le démontrer nous construisons une fonction

$$[t, y] = \Phi[\tau, x],$$

déterminée par la formule:

$$\Phi[\tau, x] = [\varphi(\tau), x].$$

Il est évident que la fonction  $\Phi$  est continue sur  $I_{\tau x}^{(i)}$ . Si le point  $[t, y]$  parcourt l'ensemble  $E$ , le point correspondant  $[\tau, x]$  parcourt l'ensemble  $E'$  qui d'après le théorème 6 est de classe inférieure ou égale à la classe de  $E$ .

5. Prenons dans l'espace  $I_{xy}^{(i)}$  à deux dimensions un ensemble  $E$  de classe  $\alpha$ . Nous dirons que l'ensemble de tous les points  $[x_0, y]$  de cet espace où  $x_0$  est un point donné de  $I_x^{(i)}$ , est une droite parallèle à l'axe  $OY$ . Nous la désignons par l'équation  $x = x_0$ .

Désignons par l'équation  $y = x$  l'ensemble de tous les points  $[x, y]$  de  $I_{xy}^{(i)}$  satisfaisant à l'équation  $y = x$ . Nous l'appelons une diagonale de  $I_{xy}^{(i)}$ .

Si nous coupons l'ensemble  $E$  par la droite  $x = x_0$  nous obtenons un ensemble linéaire, et il importe de reconnaître la nature de cet ensemble  $e$ .

On peut sans peine démontrer les théorèmes suivants:

**THÉORÈME 9.** Tout ensemble à deux dimensions de classe  $\alpha$  est coupé par chaque droite  $x = x_0$  suivant un ensemble linéaire de classe  $\leq \alpha$ .

**THÉORÈME 10.** Tout élément  $E$  à deux dimensions de classe  $\alpha$  est coupé par chaque droite  $x = x_0$  suivant un ensemble  $e$  qui ou bien est de classe  $< \alpha$ , ou bien est un ensemble de classe  $\alpha$  accessible inférieurement et supérieurement en même temps, ou bien un élément de classe  $\alpha$ .

Ceci étant établi, nous posons la définition suivante: nous dirons qu'un élément de classe  $\alpha$  situé dans  $I_{x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(m)}x}^{(i)}$  est *universel* si l'on obtient tous les éléments à  $m$  dimensions possibles de classe  $\alpha$  en coupant l'ensemble  $E$  par l'ensemble

$$I_{x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(m)}x_0}^{(i)}$$

de tous les points  $[x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(m)}x_0]$ .

**THÉORÈME 11.** Il y a des éléments universels de classe 1 à  $m + 1$  dimensions.

Pour le voir, prenons une suite

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

formée de toutes les portions de  $I_{x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(m)}}^{(i)}$ . Soit  $\delta = (a_1 a_2 \dots a_k)$ ,  $k < \Omega_0$ , une portion d'ordre  $k$  dans  $I_x^{(i)}$ . Faisons correspondre à  $\delta$  l'ensemble  $E_\delta$  des points  $[x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(m)}x]$  de  $I_{x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(m)}x}^{(i)}$  dont les coordonnées  $x$  appartiennent à  $\delta$  et dont les  $[x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(m)}]$  appartiennent à la somme des  $k$  portions  $\pi_{a_1} + \pi_{a_2} + \dots + \pi_{a_k}$ . Il est clair que  $E_\delta$  est une somme ( $\Omega_i$ ) de portions à  $m + 1$  dimensions.

Cela posé prenons la somme  $S$  de tous les ensembles  $E_\delta$  ainsi définis. Comme l'ensemble de tous les ensembles  $E_\delta$  a la puissance  $\aleph_i$ , l'ensemble  $S$  est un ensemble de classe 1 inférieurement.

Je dis que son complémentaire  $E = CS$  est un élément universel de classe 1.

Pour le voir prenons un élément quelconque à  $m$  dimensions de classe 1. Soit  $e$  cet ensemble. Le complémentaire  $Ce$  de  $e$  est une somme ( $\Omega_i$ ).

$$\pi_{a_1} + \pi_{a_2} + \pi_{a_3} + \dots + \pi_{a_\nu} + \dots \quad (n < \Omega_i)$$

de portions de  $I_{x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(m)}}^{(i)}$ . Si nous prenons le point

$$x_0 = [a_1 a_2 a_3 \dots a_\nu, \dots], \quad \nu < \Omega_i,$$

de  $I_x^{(i)}$ , on voit bien que l'ensemble  $I_{x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(m)}x_0}^{(i)}$  coupe  $S$  précisément suivant l'ensemble  $Ce$ , par suite,  $E$  précisément suivant l'ensemble  $e$ . Donc, on obtient tous les éléments à  $n$  dimensions de classe 1 en coupant  $E$  par  $I_{x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(m)}x_0}^{(i)}$ .

D'autre part, il y a des éléments à  $m$  dimensions de classe 1 qui ne sont pas des ensembles de classe  $K_0^{(i)}(\aleph_i)$ . De cela il résulte que  $E$  est un élément universel de classe 1.

**THÉORÈME 12.** Il y a des éléments universels de toute classe  $\beta$ ,  $\beta < \Omega_{i+1}$ .

Démonstration. Nous supposons que cette existence est déjà démontrée pour toutes les classes inférieures à  $\beta$ , et nous allons démontrer qu'elle a encore lieu pour la classe  $\beta$  elle-même,  $\beta < \Omega_{i+1}$ .

Soit

$$(1) \quad E_1, E_2, E_3, \dots, E_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

une suite d'éléments universels de toutes les classes précédentes [sauf  $K_0^{(i)}(\aleph_i)$ ] à deux dimensions, chacun de ces éléments étant répété dans la suite (1) une infinité  $\aleph_i$  de fois. Nous supposons que l'élément universel  $E_\alpha$  est situé dans l'espace  $I_{\alpha x}^{(i)}$ .

Alors désignons par  $E_\alpha^1$  le transformé de  $E_\alpha$  au moyen des équations

$$t_\alpha = \varphi_\alpha(t), \quad x = x$$

où les  $\varphi_\alpha(t)$  sont les fonctions continues déterminées précédemment [voir §]. D'après le théorème 8 l'ensemble  $E_\alpha^1$  est d'une classe qui ne dépasse pas la classe de  $E_\alpha$ . Donc, la réunion  $S$  des ensembles  $E_\alpha^1$  est un ensemble, ou bien de classe  $< \beta$ , ou bien accessible inférieurement de classe  $\beta$ .

Nous allons démontrer que  $S$  a la propriété suivante: quel que soit l'ensemble  $e$  à  $m$  dimensions supposé ou bien de classe  $< \beta$ , ou bien accessible inférieurement de classe  $\beta$ , il existe un point  $\tau_0$  tel que la droite  $\tau = \tau_0$  parallèle à l'axe  $OX$  dans  $I_{\alpha x}^{(i)}$  coupe  $S$  précisément selon cet ensemble  $e$ .

En effet, nous avons

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_\alpha + \dots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

où  $e_\alpha$  est un élément de classe  $< \beta$ . D'après la définition même de la suite (1) il existe un point  $t_{\alpha_k}^0$  tel que la droite  $t_{\alpha_k} = t_{\alpha_k}^0$  parallèle à l'axe  $OX$  dans  $I_{\alpha_k x}^{(i)}$  coupe  $E_{\alpha_k}$  précisément selon  $e_k$ . Puisque, dans la suite (1) chaque terme étant considéré comme un ensemble géométrique est répété une infinité  $\aleph_i$  de fois, nous pouvons supposer la suite de nombres

$$(2) \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\nu, \dots \quad (\nu < \Omega_i)$$

croissante, donc sans nombres égaux. Dans ces conditions, d'après la propriété supposée des fonctions

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega_i),$$

il existe un point  $\tau_0$  tel que  $t_{\alpha_k}^0 = \varphi_{\alpha_k}(\tau_0)$ , quel que soit  $k$ , et tel que pour les autres  $\tau_\alpha^0$  définis par les égalités  $t_\alpha^0 = \varphi_\alpha(\tau_\alpha^0)$  les droites  $t_\alpha = t_\alpha^0$  parallèles à l'axe  $OX$  dans  $I_{t_\alpha x}^{(i)}$  ne coupent pas les éléments universels correspondants. Le point  $\tau_0$  étant défini de cette manière on voit bien que la droite  $t = \tau_0$  parallèle à l'axe  $OX$  dans  $I_{tx}^{(i)}$  coupe  $S$  précisément selon l'ensemble  $e$ .

Soit  $E$  le complémentaire de  $S$ . Nous allons démontrer que l'ensemble plan  $E$  ainsi défini est effectivement un élément de classe  $\beta$  et, par suite, qu'il existe des ensembles de toute classe.

Pour le voir nous menons la diagonale  $x = t$  dans  $I_{tx}^{(i)}$  et nous désignons par  $\eta$  l'ensemble des points de cette diagonale qui n'appartiennent pas à  $E$ . Nous dirons que le point  $x$  de  $I_x^{(i)}$  est projection du point  $[t, x]$  de  $I_{tx}^{(i)}$  sur l'axe  $OX$ . Soit  $e$  la projection de  $\eta$  sur l'axe  $OX$ . Nous commençons par la démonstration du fait que  $e$  ne peut être obtenu en coupant  $E$  par une droite  $t = t_0$  parallèle à l'axe  $OX$ .

En effet, soit  $t_0$  un point de  $I_t^{(i)}$  tel que la droite  $t = t_0$  coupe  $E$  selon  $e$ . Considérons le point  $M$  de la diagonale située sur la droite  $t = t_0$ . Nous allons démontrer que l'existence de ce point  $M$  implique contradiction.

Deux cas seulement sont possibles.

Ou bien le point  $M$  appartient à  $E$ . Dans ce cas, la projection  $N$  de  $M$  appartient à  $e$ . D'autre part,  $e$  est la projection de l'ensemble  $\eta$  formé des points du complémentaire  $CE$  qui appartiennent à la diagonale. Donc,  $M$  appartient à  $CE$ , ce qui est contradictoire.

Ou bien le point  $M$  appartient à  $CE$ . Dans ce cas, la projection  $N$  de  $M$  appartient à  $e$ . Or, l'ensemble  $e$  est la projection des points de  $E$  situés sur la droite  $t = t_0$ . Donc,  $M$  appartient à  $E$ , et nous tombons à nouveau dans une contradiction.

Cela posé, prenons l'ensemble plan  $E$  tel qu'on obtient sûrement tous les ensembles linéaires possibles de classe  $< \beta$  en coupant  $E$  par les parallèles  $t = t_0$  à l'axe  $OX$ . Si l'ensemble  $E$  était lui-même de classe  $< \beta$ , la partie commune à  $E$  et à la diagonale  $x = t$  le serait aussi. Dans ces conditions l'ensemble  $\eta$  serait de classe  $< \beta$  ainsi que sa projection  $e$  sur l'axe  $OX$ .

Donc, l'ensemble  $e$  devrait être obtenu en coupant  $E$  par une droite  $t = t_0$  ce qui est impossible.

Voici la conclusion à laquelle nous sommes ainsi amenés par ce raisonnement:

Toute classe

$$K_{\beta}^{(i)}(\aleph_i) \quad (\beta < \Omega_{i+1})$$

contient au moins un ensemble qui n'appartient à aucune classe précédente,

$$K_{\beta_1}^{(i)}(\aleph_i) \quad (\beta_1 < \beta).$$

(Reçu le 14 novembre 1938.

Reçu avec des modifications le 22 mars 1939.)

---