

COMPOSITIO MATHEMATICA

FELIX BEHREND

Über Systeme reeller algebraischer Gleichungen

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 1-19

http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__1_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Über Systeme reeller algebraischer Gleichungen

von

Felix Behrend

Zürich



§ 1. Einleitung: Fragestellung und Ergebnisse.

1. *Der Hauptsatz.* E. Stiefel¹⁾ und H. Hopf²⁾ haben kürzlich auf topologischem Wege einige Sätze über Systeme von stetigen reellen Funktionen bewiesen, die besonders merkwürdig und interessant werden, wenn man die Funktionen zu Polynomen (in mehreren Veränderlichen) spezialisiert. Das Hauptresultat kann — für diesen Spezialfall — folgendermaßen zusammengefaßt werden.

$$(1) \quad f_\nu(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s), \quad \nu = 1, \dots, n; r \geq 1, s \geq 1,$$

seien n Formen in den beiden Variablenreihen x_1, \dots, x_r und y_1, \dots, y_s mit reellen Koeffizienten. Der Homogenitätsgrad in bezug auf jede der beiden Variablenreihen sei ungerade. Wenn aus dem Verschwinden aller f_ν ($\nu=1, \dots, n$) im Reellen das Verschwinden mindestens einer der beiden Variablenreihen folgt, d.h. wenn das Gleichungssystem

$$(2) \quad f_1 = 0, \dots, f_n = 0$$

außer den trivialen Lösungen $x_1 = \dots = x_r = 0$ oder $y_1 = \dots = y_s = 0$ keine reellen Lösungen besitzt, so heißt das System (1) bzw. das Gleichungssystem (2) *definit*. Es ist klar, daß aus der Existenz eines definiten Systems (1) die Existenz eines solchen für jedes $n' \geq n$ folgt; es gibt daher für jedes Paar $r \geq 1, s \geq 1$ natürlicher Zahlen ein kleinstes n , für welches ein definites System (1) existiert; es sei mit $n^*(r, s)$ bezeichnet. Eine Ab-

¹⁾ Vgl.: Richtungsfelder und Fernparallelismus in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten [Comment. Math. Helvet. 8 (1936), 305—353], insbesondere S. 349, sowie besonders eine demnächst in der *Compositio Math.* erscheinende Arbeit.

²⁾ Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra [erscheint demnächst in der *Compositio Math.*]; im folgenden zitiert mit „HOPF“.

schätzung von n^* nach unten liefert der folgende *Hauptsatz*:

(I) *Notwendig für die Existenz eines definiten Systems (1) ist, daß die Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} \text{ mit } n - r < k < s$$

sämtlich gerade sind ³⁾.

Hieraus folgt z.B. $n^*(r, s) \geq \text{Max}(r, s)$ ⁴⁾ als größte Abschätzung, die sich im allgemeinen durch genauere Untersuchung der Binomialkoeffizienten mod 2 wesentlich verbessern läßt.

H. Hopf warf nun die Frage nach einem rein algebraischen Beweis dieses auf topologischem Wege gewonnenen Satzes auf. Ein solcher kann leicht mit den von van der Waerden ⁵⁾ für die algebraische Geometrie entwickelten Methoden geführt werden. Dabei kann der im Stiefel-Hopfschen Satz zugrunde liegende Körper der reellen Zahlen durch einen beliebigen reell abgeschlossenen Körper R im Artin-Schreierschen Sinne ersetzt werden ⁶⁾.

Zunächst sei bemerkt, daß der Satz (I) dem folgenden, scheinbar spezielleren, äquivalent ist:

(I') *Notwendig für die Existenz eines definiten Systems (1) mit $n = r + s - 2$ ist, daß der Binomialkoeffizient*

$$\binom{r+s-2}{r-1} = \binom{r+s-2}{s-1}$$

gerade ist. ⁷⁾

³⁾ HOPF, § 1, 2, Satz I. — Folgerungen aus diesem Satz sind bei HOPF, § 1, zusammengestellt.

⁴⁾ HOPF, § 1, 2, Formel (9).

⁵⁾ Die Theorie ist im wesentlichen in folgenden Arbeiten entwickelt: Zur Nullstellentheorie der Polynomideale [Math. Annalen **96** (1927), 183—208]; Der Multiplizitätsbegriff in der algebraischen Geometrie [Math. Annalen **97** (1927), 757—774]; Verallgemeinerung des Bézoutschen Theorems [Math. Annalen **99** (1928), 497—541]; Zur algebraischen Geometrie (zitiert mit ZAG) I bis VII, Berichtigungen, VIII bis XV [Math. Annalen **108** (1933), 113—125, 253—259, 694—698, **109** (1933), 7—12, **110** (1935), 128—133, 134—160, **111** (1935), 432—437, **113** (1936), 36—39, 199—205, 692—704, 705—712, **114** (1937), 683—699, **115** (1938), 330—332, 359—378, 619—642, 645—655]; vgl. auch „Moderne Algebra“ (Springer, Berlin 1931), Teil 2, Kapitel 11 und 13, sowie „Einführung in die algebraische Geometrie“ (Springer, Berlin 1939).

⁶⁾ Ein Körper R heißt bekanntlich „formal reell“, wenn in ihm -1 sich nicht als Quadratsumme darstellen läßt. R heißt reell abgeschlossen, wenn keine algebraische Erweiterung reell ist; das ist dann und nur dann der Fall, wenn $R(i)$ algebraisch abgeschlossen ist. Vgl. hierzu: ARTIN-SCHREIER, Algebraische Konstruktion reeller Körper [Hamburger Abhandlungen **5** (1927), 85—99]. Man beachte, daß reelle Körper die Charakteristik 0 haben, so daß wir uns für unser Problem auf diesen Fall beschränken können.

⁷⁾ HOPF, § 1, 3 (b), Satz Ib.

Da (I') einfach ein Spezialfall von (I) ist, genügt es zu zeigen, daß (I) umgekehrt aus (I') folgt. Sei also (1) ein definites System. Für $n > r + s - 2$ ist der Satz (I) richtig, weil inhaltslos (wegen $n - r \geq s - 1$ gibt es kein k mit $n - r < k < s$). Es genügt also, den Fall $n \leq r + s - 2$ zu betrachten. Sei $1 \leq r' \leq r, 1 \leq s' \leq s, r' + s' - 2 = n$. Es gibt offenbar auch ein definites System von n Gleichungen mit r' und s' Variablen: man setze nämlich einfach in den gegebenen System $r - r'$ Variable x_{ρ} und $s - s'$ Variable y_{σ} gleich Null. Folglich muß nach (I') der Binomialkoeffizient $\binom{r'+s'-2}{s'-1} = \binom{n}{s'-1}$ gerade sein. Dabei kann $s' - 1 = k$ wegen $s' - 1 < s$ und $s' - 1 = n - (r' - 1) > n - r$ genau die Zahlen zwischen $n - r$ und s durchlaufen; das liefert aber gerade die Aussage von (I).

Im allgemeinen hat nun ein System (2) mit $n = r + s - 2$ im zugehörigen algebraisch abgeschlossenen Körper $R(i)$ nur endlich viele wesentlich verschiedene Lösungen (d.h. solche, deren Variablenreihen sich nicht lediglich um konstante Faktoren unterscheiden), und diese Lösungen lassen sich mit Hilfe eines von van der Waerden für algebraische Mannigfaltigkeiten in mehrfach projektiven Räumen entwickelten Algorithmus direkt abzählen⁸⁾, woraus sich dann (I') ergeben wird, wenn man die (noch etwas zu präzisierende) Tatsache benutzt, daß bei einem reellen System zu jeder Lösung auch die konjugiert komplexe existiert, daß also bei einem definiten System die Lösungszahl gerade sein muß. Wir werden übrigens beim Beweis den van der Waerdenschen Algorithmus nicht benutzen müssen, da man (nach den neueren Arbeiten von van der Waerden⁹⁾) einfachere Hilfsmittel besitzt, welche die Abzählung der Lösungen in unserem Fall direkt ermöglichen (§ 2).

Besonders interessant erscheint der Hauptsatz für den Fall eines Systems von Bilinearformen. Wie H. Hopf näher ausführt¹⁰⁾, folgt aus (I), daß im allgemeinen $n^*(r, r) > r$ ist; $n^*(r, r) = r$ kann höchstens dann eintreten, wenn r eine Potenz von 2 ist. Wendet man dies auf Systeme von Bilinearformen an, so kann man hieraus folgern: *Die Anzahl r der Einheiten einer (nicht notwendig assoziativen) Divisions-Algebra¹¹⁾ über R ist*

⁸⁾ ZAG I, § 3, 121—123.

⁹⁾ Insbesondere ZAG V, Satz 4, S. 129.

¹⁰⁾ Hopf, § 1, 3 (e), Satz 1e.

¹¹⁾ eines hyperkomplexen Systems ohne Nullteiler.

notwendigerweise eine Potenz von zwei¹²⁾. Dieser Anwendung wegen, und deshalb, weil die Frage der Existenz solcher hyperkomplexer Systeme ohne Nullteiler noch ungeklärt ist, erscheint es nützlich, für den Fall eines Systems von Bilinearformen noch einen zweiten, ein wenig abweichenden Beweisweg einzuschlagen. Statt im zweifach projektiven Raum $P_{r-1, s-1}$ von $r-1$ und $s-1$ Dimensionen werden wir hier im projektiven Raum P_{rs-1} operieren und zugleich auf einen Zusammenhang mit der Reyeschen Apolaritätstheorie¹³⁾ hinweisen, welcher ebenfalls vielleicht für die noch ungelöste Bestimmung des genauen Wertes von $n^*(r, s)$ (im Falle von Bilinearformen) von Vorteil sein dürfte (§ 3).

2. *Existenzsätze.* Über die Existenz von definiten Systemen ist trivial nur, daß für $n = r + s - 1$ stets definite Systeme existieren, weil ein System (2) mit $n = r + s - 1$ im allgemeinen überhaupt algebraisch unverträglich ist¹⁴⁾. Ferner gibt H. Hopf¹⁵⁾ mit Hilfe des Hurwitz-Radonschen Satzes für einige spezielle Werte von r, s Beispiele an, bei denen die durch (I) gegebenen unteren Schranken von $n^*(r, s)$ erreicht werden, die also den genauen Wert von $n^*(r, s)$ liefern. Insbesondere führt er an, daß $n^*(1, 1) = 1$, $n^*(2, 2) = 2$, $n^*(4, 4) = 4$, $n^*(8, 8) = 8$ ist, genauer: daß dies sogar mit Bilinearformen erfüllbar ist, daß es also nullteilerfreie hyperkomplexe Systeme mit 1, 2, 4 und 8 Einheiten gibt. Über die Existenz weiterer Divisionsalgebren, welche nach der oben angeführten Folgerung aus (I) jedenfalls nur für $r = 2^a$ statthaben kann, ist nichts bekannt. Daß hier überhaupt der Kern der ganzen Fragestellung liegt, zeigt der folgende Existenzsatz, der in § 4 bewiesen wird:

(II) *Es sei $n^*(r, r) = r$ für $r = 1, 2, 2^2, \dots, 2^h$ (dies ist also sicher für $h = 3$ erfüllt). Unter m' verstehe man stets den kleinsten nicht negativen Rest der Zahl m mod 2^h ; also: $m = 2^h q + m'$, $0 \leq m' \leq 2^h - 1$. Sind dann die sämtlichen Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k'}$ (oder, was dasselbe ist, $\binom{n}{k}$) mit $n - r < k < s$ gerade,*

¹²⁾ HOPF, § 1, 7, Satz IV.

¹³⁾ Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen [Journal für Math. 82 (1870), 1–20]; Lineare Systeme und Gewebe von Flächen zweiten Grades [Journal für Math. 82 (1870), 54–83].

¹⁴⁾ Ein explizites Beispiel gibt HOPF § 1, 1, Formel (6):

$$f_v = \sum_{\substack{0+\sigma=v+1 \\ 1 \leq 0 \leq r, 1 \leq \sigma \leq s}} x_0 y_\sigma, \quad v = 1, \dots, r + s - 1.$$

¹⁵⁾ HOPF, § 1, 4.

so existiert ein definites System von n Formen ungerader Grade in r Veränderlichen x_1, \dots, x_r und s Veränderlichen y_1, \dots, y_s .

Korollar: Dieser Satz gilt insbesondere für Bilinearformen, wenn es für $n = r = s = 1, 2, 2^2, \dots, 2^h$ definite Systeme von Bilinearformen gibt.

Falls die Voraussetzung für jedes h gilt, so wäre das Stiefel-Hopfsche Kriterium (I) auch hinreichend. Denn bei festem r, s, n kann man ja 2^h so groß wählen, daß die in (II) vorkommenden Zahlen k' einfach gleich k ausfallen.

3. *Bemerkungen.* Die hier bewiesenen Resultate lassen sich natürlich leicht auf mehr als zweifach homogene Funktionen übertragen; es erübrigt sich, hierauf näher einzugehen.

Es sei aber noch bemerkt, daß der Fall von homogenen Funktionen in einer Veränderlichenreihe, den wir hier übergangen haben, keineswegs ganz trivial ist. Interessant ist natürlich wieder nur der Fall eines Systems $f_\nu(x_1, \dots, x_r)$ ($\nu=1, \dots, n$) von Formen ungeraden Grades. Es ist klar, daß definite Systeme mit $n = r$ Formen existieren, weil ein solches Gleichungssystem im allgemeinen algebraisch unverträglich ist. Für $n < r$ herrscht niemals Definitheit, d.h. für $n < r$ hat ein System

$$(3) \quad f_1(x_1, \dots, x_r) = 0, \dots, f_n(x_1, \dots, x_r) = 0$$

von reellen homogenen Gleichungen ungeraden Grades stets mindestens eine reelle Lösung¹⁶⁾. Es genügt natürlich, den Fall $n = r - 1$ zu betrachten. Besitzt das System nur endlich viele Lösungen, so ist klar, daß eine unter ihnen reell sein muß, da ihre Anzahl nach dem Bézoutschen Theorem gleich dem Produkt der Grade, also ungerade wäre. Um auch für den „Ausnahmefall“ unendlich vieler Lösungen eine reelle Lösung zu finden, bedarf es einer ähnlichen Schlußweise, wie sie in § 2 für den „Ausnahmefall“ bei zweifach homogenen Formen verwendet wird. Da ein exakter Beweis des Bézoutschen Satzes genau die gleichen Schlüsse erfordert, welche für die Abzählung der Lösungsanzahl mehrfach homogener Systeme nötig sind, ist daher der eben formulierte Satz über Funktionen einer Veränderlichenreihe im Grunde von der gleichen „Schwierigkeit“ wie der (seine Verallgemeinerung auf zweifach homogene Funktionen darstellende) Satz (I). Lediglich die Frage nach der Existenz definiten Systeme ist im Falle mehrerer Variablenreihen schwerer zu entscheiden als im Falle einer einzigen Variablenreihe.

¹⁶⁾ HOPF, § 1, 3 (a), Satz B [Satz von BORSUK].

Von speziellem Interesse ist noch der Fall eines Systems von symmetrischen Funktionen, für die $r = s$ ist, und die durch

$$(4) \quad f(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_r) = f(y_1, \dots, y_r; x_1, \dots, x_r)$$

gekennzeichnet sind. Auf diesen Fall hoffe ich demnächst an anderer Stelle näher einzugehen ^{16a}).

§ 2. Beweis des Hauptsatzes (I').

Der zu beweisende Satz (I') kann folgendermaßen formuliert werden:

Voraussetzungen:

1. R sei ein reell abgeschlossener Körper ¹⁷).
2. $f_\nu(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s)$ ($\nu=1, \dots, r+s-2$) seien Formen mit Koeffizienten aus R ; der Homogenitätsgrad von f_ν sei g_ν in bezug auf die x_ρ und h_ν in bezug auf die y_σ .
3. $g_\nu \equiv h_\nu \equiv 1 \pmod{2}$ ($\nu=1, \dots, r+s-2$).
4. $\binom{r+s-2}{r-1} \equiv 1 \pmod{2}$.

Behauptung: Das Gleichungssystem

$$(2) \quad f_1 = 0, \dots, f_{r+s-2} = 0$$

ist nicht definit; es besitzt mindestens eine reelle (nichttriviale) Lösung.

Beweis ¹⁸):

1. Sinngemäß wird man zwei Lösungen von (2), deren Variablenreihen sich nur um konstante Faktoren unterscheiden,

^{16a}) Vgl. HOFF, Anhang II.

¹⁷) Vgl. ⁶).

¹⁸) Ich möchte an dieser Stelle Herrn B. L. VAN DER WAERDEN meinen besonderen Dank aussprechen. Ich hatte mich ursprünglich nur mit dem Fall eines Systems von Bilinearformen beschäftigt und die Bestimmung der Lösungsanzahl wie in § 3 durchgeführt. Es blieb aber bei meinem Beweis der „Ausnahmefall“ offen, wie man eine reelle Lösung findet, wenn die Lösungsanzahl unendlich ist. Auf eine Anfrage hin teilte mir Herr VAN DER WAERDEN einen Beweis für diesen Fall mit. Gleichzeitig wies er mich auf den Algorithmus aus ZAG I, § 3 (die obige Formel (5)) hin, der meiner Aufmerksamkeit entgangen war. Ich bemerkte daraufhin, daß sich auch der Fall allgemeiner Formen beliebiger ungerader Grade behandeln läßt, wobei der „Ausnahmefall“ mit der gleichen van der Waerdenschen Idee bewiesen werden kann wie bei Bilinearformen. Ich veröffentliche diesen Beweis (unter 2) mit der freundlichen Genehmigung von Herrn VAN DER WAERDEN; ich stelle ihn so dar, daß gleichzeitig die Anzahlbestimmung (unter 1) sich nochmals mitergibt. Dabei wird — wie bereits in der Einleitung angedeutet — an Stelle der idealtheoretischen Hilfsmittel von ZAG I der einfachere und natürlichere Hilfssatz aus ZAG V benutzt.

als nicht verschieden ansehen und den Fall, daß eine Variablenreihe ganz verschwindet, überhaupt als Lösung ausschließen. Man kann das am einfachsten dadurch zum Ausdruck bringen, daß man die erste Variablenreihe als Punkt des projektiven Raums P_{r-1} , die zweite als Punkt des P_{s-1} auffaßt. Indem man die Punkte des P_{r-1} und des P_{s-1} zu Paaren zusammenfaßt, sagt man auch: jede Lösung sei ein Punkt des zweifach-projektiven Raumes $P_{r-1, s-1}$. Je nachdem, ob die Koordinaten der Punkte des $P_{r-1, s-1}$ aus R , aus $R(i)$ oder aus Erweiterungen dieser Körper entnommen werden, handelt es sich natürlich um verschiedene Räume; es ist aber unnötig, dies durch eine eigene Bezeichnung zu unterscheiden.

Wenn (2) (in dem zu $R(i)$ gehörigen $P_{r-1, s-1}$) nur endlich viele Lösungen besitzt, so ist der Beweis unseres Satzes leicht zu führen. Die Anzahl G der Lösungen ist nach van der Waerden¹⁹⁾ (bei geeigneter Zählung der Vielfachheiten) gleich dem Koeffizienten von $p^{r-1}q^{s-1}$ in dem zu (2) gehörigen „Bedingungs-symbol“

$$(5) \quad \prod_{\nu=1}^{r+s-2} (g_{\nu}p + h_{\nu}q),$$

also (wegen $g_{\nu} \equiv h_{\nu} \equiv 1 \pmod{2}$) $\equiv \binom{r+s-2}{r-1} \equiv 1 \pmod{2}$. Da nun offenbar mit jeder Lösung von (2) auch die konjugiert komplexe Lösung in gleicher Vielfachheit auftritt, da also die Anzahl der komplexen Lösungen von (2) $\equiv 0 \pmod{2}$ ist, muß mindestens eine reelle Lösung vorhanden sein.

2. Es kann aber der „Ausnahmefall“ eintreten, daß (2) unendlich viele Lösungen hat; dann versagt die obige Schlußweise, und man muß einen anderen Weg einschlagen. Dabei wird sich der Fall endlich vieler Lösungen nochmals mitergeben, ohne daß wir von 1 mehr benutzen als den Schluß, daß bei ungerader Lösungsanzahl eine reelle Lösung vorhanden sein muß.

Sei also (2) ein System mit endlich oder unendlich vielen Lösungen. Wir konstruieren ein zweites System (2') von reellen Formen f'_{ν} ($\nu=1, \dots, r+s-2$); diese sollen die gleichen Grade haben wie die f_{ν} , aber vollständig in Linearfaktoren

$X = X(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\varrho=1}^r c_{\varrho} x_{\varrho}$ und $Y = Y(y_1, \dots, y_s) = \sum_{\sigma=1}^s d_{\sigma} y_{\sigma}$ zerfallen. Die Linearformen sollen „in allgemeiner Lage“ gewählt werden, d.h. so, daß keine r der X bzw. keine s der Y linear

¹⁹⁾ Vgl. 8).

abhängig sind. Außerdem mögen keine $r - 1$ der X einen Punkt mit $x_r = 0$ und keine $s - 1$ der Y einen Punkt mit $y_s = 0$ als „Schnittpunkt“ haben. Die Lösungen von

$$(2') \quad f'_1 = 0, \dots, f'_{r+s-2} = 0$$

lassen sich natürlich sämtlich angeben: für eine Lösung muß in jedem f'_ν mindestens ein Linearfaktor verschwinden; das ist aber wegen der vorausgesetzten „Allgemeinheit“ der Linearfaktoren nur möglich, wenn in $r - 1$ Formen f'_ν genau ein Linearfaktor X und in den übrigen $s - 1$ Formen genau ein Linearfaktor Y verschwindet. Die Anzahl G' der verschiedenen Lösungen von (2') ist also offenbar

$$(6) \quad G' = \sum g_{\nu_1} \cdots g_{\nu_{r-1}} h_{\mu_1} \cdots h_{\mu_{s-1}},$$

wo ν_1, \dots, ν_{r-1} alle Kombinationen von $r - 1$ aus $r + s - 2$ Elementen und μ_1, \dots, μ_{s-1} die komplementären Kombinationen durchläuft. Da jeder Summand $\equiv 1 \pmod{2}$ ist, und da die Anzahl der Summanden $\binom{r+s-2}{r-1}$ beträgt, ist also

$$(7) \quad G' \equiv 1 \pmod{2}.$$

Mit einem Parameter t bilde man nun das Funktionensystem $f_\nu^{(t)} = (1-t)f_\nu + tf'_\nu$ und das zugehörige Gleichungssystem

$$(2^{(t)}) \quad f_1^{(t)} = 0, \dots, f_{r+s-2}^{(t)} = 0,$$

welches für $t = 0$ in (2), für $t = 1$ in (2') übergeht. Dies System betrachte man im Körper $R(t)$ bzw. in einer algebraisch abgeschlossenen Erweiterung von $R(t)$.

Zunächst ist klar, daß (2^(t)) nur endlich viele Lösungen besitzt²⁰). Ihre Anzahl $G^{(t)}$ ist gleich der Anzahl der Lösungen von (2'), wobei aber diese Lösungen mit geeigneten Vielfach-

²⁰) Gäbe es unendlich viele Lösungen, so würde (2^(t)) also eine algebraische Mannigfaltigkeit mindestens erster Dimension bestimmen; diese hätte z.B. mit $f_{r+s-1} = x, y_s = 0$ einen Schnittpunkt $x_0 = \xi_0, y_0 = \eta_0$. Nun gibt es aber²¹) zu jeder Spezialisierung von t , also insbesondere für $t = 1$ ein Wertesystem ξ'_0, η'_0 derart, daß aus einer homogenen Relation $f(t; \xi_1, \dots, \xi_r; \eta_1, \dots, \eta_s) = 0$ die entsprechende Relation $f(1; \xi'_1, \dots, \xi'_r; \eta'_1, \dots, \eta'_s) = 0$ folgt; es gäbe daher eine Lösung von (2) für welche noch $x_r y_s = \xi'_r \eta'_s = 0$ erfüllt ist, was bei der Konstruktion von (2') ausgeschlossen wurde.

²¹) ZAG XIII, § 4, Existenzsatz; der dortige Satz gilt natürlich auch für mehrfach projektive Räume, da er nur auf der Existenz eines Resultantensystems beruht, und da ein solches auch für Formen in mehreren Variablenreihen existiert; vgl. Moderne Algebra, § 76, Aufgabe 4.

heiten zu zählen sind ²²⁾. Man hat sich nur noch davon zu überzeugen, daß diese Vielfachheiten sämtlich 1 sind. Zu diesem Zweck normieren wir $x_r = y_s = 1$ (was hier erlaubt ist, da Lösungen im „unendlich Fernen“ durch Konstruktion ausgeschlossen wurden) und wende das Kriterium 4 von ZAG V an, das für unsern Fall aussagt: wenn an der Stelle einer Lösung von (2') die Determinante

$$(8) \quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f'_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f'_1}{\partial x_{r-1}} & \frac{\partial f'_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f'_1}{\partial y_{s-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f'_{r+s-2}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f'_{r+s-2}}{\partial x_{r-1}} & \frac{\partial f'_{r+s-2}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f'_{r+s-2}}{\partial y_{s-1}} \end{vmatrix}$$

von 0 verschieden ist, so ist die Lösung eine einfache Lösung. Die zu betrachtende Lösung ergebe sich etwa als Schnittpunkt der Linearfaktoren (Hyperebenen) X_1 von f'_1, \dots, X_{r-1} von f'_{r-1} und Y_r von f'_r, \dots, Y_{r+s-2} von f'_{r+s-2} . Setzt man $f'_1 = X_1 F_1, \dots, f'_r = Y_r F_r, \dots$, so verschwinden F_1, \dots, F_r, \dots an der Lösungsstelle nicht, und es wird offenbar

$$(8') \quad D = \left(\prod_{\nu=1}^{r+s-2} F_\nu \right) \frac{\partial(X_1, \dots, X_{r-1})}{\partial(x_1, \dots, x_{r-1})} \frac{\partial(Y_1, \dots, Y_{s-1})}{\partial(y_1, \dots, y_{s-1})} \neq 0,$$

weil das (jetzt inhomogen geschriebene) lineare Gleichungssystem $X_1 = \dots = X_{r-1} = 0$, und ebenso $Y_1 = \dots = Y_{s-1} = 0$, genau eine Lösung hat, weil also die Determinanten auf der rechten Seite von (8') nicht verschwinden. — Die Vielfachheiten der betrachteten Lösungen sind also gleich 1. Hieraus folgt:

$$(9) \quad G^{(t)} = G' \equiv 1 \pmod{2}.$$

Das System (2^(t)) hat demnach eine ungerade Anzahl von Lösungen. Diese liegen in dem $P_{r-1, s-1}$, welcher zu einem gewissen algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper von $R(t)$ gehört. Ein algebraisch abgeschlossener Körper über $R(t)$ ist der Körper Ω aller Puiseuxschen Reihen nach aufsteigenden gebrochenen Potenzen von t mit Koeffizienten aus $R(i)$ ²³⁾. Der Unterkörper

²²⁾ Dies folgt aus dem Eindeutigkeitssatz in ZAG XIII, § 4; dieser gilt natürlich auch für Formen in mehreren Variablenreihen, da man z.B. $x_r = y_s = 1$ normieren kann.

²³⁾ Auf Konvergenz der Reihen braucht man dabei nicht zu achten; man kann sich aber auch auf Reihen beschränken, die algebraisch über $R(t)$ sind. Die von OSTROWSKI [Math. Zeitschrift 37 (1933), 98—133, § 1] gegebene Herleitung der Puiseuxschen Reihenentwicklung gilt für belieb'ge Körper von der Charakteristik Null.

P der reellen Puiseuxschen Reihen (d.h. der Reihen mit Koeffizienten aus R) ist „formal reell“ und wird nach Adjunktion von i algebraisch abgeschlossen ($P(i)=\Omega$); also ist er reell abgeschlossen²⁴). Nun hat das System (2^(t)) Koeffizienten aus P ; da es außerdem in $P(i)=\Omega$ eine ungerade Anzahl verschiedener Lösungen hat, schließt man wie unter 1, daß eine reelle Lösung, d.h. eine Lösung mit Koordinaten aus P existieren muß. Die homogenen Koordinaten $\xi_1, \dots, \xi_r; \eta_1, \dots, \eta_s$ dieser Lösung sind also reelle Puiseuxsche Reihen. Durch Multiplikation der ξ_ρ bzw. der η_σ mit einer geeigneten Potenz von t kann man sie so normieren, daß keine negativen Potenzen von t vorkommen, und daß mindestens ein ξ_ρ und mindestens ein η_σ ein von 0 verschiedenes konstantes Glied besitzt. Setzt man nun $t=0$, so erhält man offenbar eine (nicht-triviale) Lösung von (2) mit Koordinaten aus R ; (2) besitzt also — wie behauptet wurde — eine reelle Lösung.

§ 3. Systeme von Bilinearformen.

1. *Apolarität.* Man fasse wie eben x_1, \dots, x_r als homogene Punktkoordinaten im projektiven P_{r-1} , y_1, \dots, y_s als homogene Punktkoordinaten im P_{s-1} auf. Eine Hyperebene im P_{r-1} bzw. im P_{s-1} hat dann die Gleichung

$$(10) \quad \sum_{\rho=1}^r u_\rho x_\rho = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\sigma=1}^s v_\sigma y_\sigma = 0.$$

u_1, \dots, u_r bzw. v_1, \dots, v_s sind dann die zu den Punktkoordinaten dualen Hyperebenenkoordinaten im P_{r-1} bzw. P_{s-1} . Entsprechend kann man zwischen *Ordnungsbilinearformen*

$$(11) \quad \sum_{\substack{\rho=1, \dots, r \\ \sigma=1, \dots, s}} a_{\rho\sigma} x_\rho y_\sigma$$

und *Klassenbilinearformen*

$$(12) \quad \sum_{\substack{\rho=1, \dots, r \\ \sigma=1, \dots, s}} b_{\rho\sigma} u_\rho v_\sigma$$

unterscheiden. Bekanntlich ist der Ausdruck

$$(13) \quad \sum_{\substack{\rho=1, \dots, r \\ \sigma=1, \dots, s}} a_{\rho\sigma} b_{\rho\sigma}$$

invariant gegenüber projektiven Transformationen des P_{r-1} und P_{s-1} . Zwei Formen, für die

²⁴) Vgl. 6).

$$(14) \quad \sum_{\substack{\varrho=1, \dots, r \\ \sigma=1, \dots, s}} a_{\varrho\sigma} b_{\varrho\sigma} = 0$$

ist, heißen im Anschluß an REYE²⁵⁾ *apolar*.

Da für unser Problem die Multiplikation einer Bilinearform (11) oder (12) mit einem von 0 verschiedenen Faktor keine Rolle spielt, empfiehlt es sich, die $a_{\varrho\sigma}$ bzw. die $b_{\varrho\sigma}$ als homogene Koordinaten eines P_{rs-1} zu deuten; eine projektive Transformation im P_{r-1} und P_{s-1} impliziert eine projektive Transformation sowohl der $a_{\varrho\sigma}$ als auch der $b_{\varrho\sigma}$; wegen der Invarianz von (14) kann man die $b_{\varrho\sigma}$ als Punktkoordinaten, die $a_{\varrho\sigma}$ als Hyperebenenkoordinaten des *gleichen* P_{rs-1} deuten. Apolarität zweier Formen (11) und (12) bedeutet dann einfach, daß der Punkt $b_{\varrho\sigma}$ auf der Hyperebene $a_{\varrho\sigma}$ liegt.

Zu einer gegebenen Menge von Formen (12) die sämtlichen apolaren Formen (11) zu bestimmen, ist eine lineare Aufgabe; ist L die kleinste die gegebenen $b_{\varrho\sigma}$ enthaltende lineare Punktmanigfaltigkeit des P_{rs-1} , so werden die apolaren $a_{\varrho\sigma}$ durch die L enthaltenden Hyperebenen geliefert; sie bilden eine lineare Mannigfaltigkeit L' von Hyperebenen. Ist L von der Dimension d , so ist L' von der Dimension $(rs-1) - (d+1)$.

2. Bilineargleichungen. Eine Bilineargleichung

$$(15) \quad \sum_{\substack{\varrho=1, \dots, r \\ \sigma=1, \dots, s}} a_{\varrho\sigma} x_{\varrho} y_{\sigma} = 0$$

kann als Apolarität zwischen der Form $a_{\varrho\sigma}$ und der Form

$$(16) \quad b_{\varrho\sigma} = x_{\varrho} y_{\sigma}, \quad \varrho = 1, \dots, r; \quad \sigma = 1, \dots, s,$$

aufgefaßt werden. Diese hat die Gestalt

$$(17) \quad \sum_{\substack{\varrho=1, \dots, r \\ \sigma=1, \dots, s}} b_{\varrho\sigma} u_{\varrho} v_{\sigma} = \sum_{\varrho=1}^r x_{\varrho} u_{\varrho} \sum_{\sigma=1}^s y_{\sigma} v_{\sigma}.$$

Wir sagen kurz: (17) *zerfällt*.

Die Aufgabe, alle Lösungen eines Systems

$$(18) \quad \sum_{\substack{\varrho=1, \dots, r \\ \sigma=1, \dots, s}} a_{\varrho\sigma}^{(v)} x_{\varrho} y_{\sigma} = 0, \quad v = 1, \dots, n,$$

²⁵⁾ Vgl. ¹³⁾. REYE definiert die Apolarität nur für Formen in einer Variablenreihe, insbesondere also für quadratische Formen oder — was dasselbe ist — für symmetrische Bilinearformen. Die Reyeschen Entwicklungen lassen sich aber, wie hier gezeigt wird, ohne weiteres auf beliebige Bilinearformen übertragen.

von Bilinear Gleichungen zu bestimmen, ist also gleichbedeutend mit der Aufgabe, *alle zu den Formen $a_{\varrho\sigma}^{(v)}$ ($v=1, \dots, n$) apolaren zerfallenden Formen zu bestimmen.* Man darf annehmen, daß die $a_{\varrho\sigma}^{(v)}$ ($v=1, \dots, n$) linear unabhängig sind; sie spannen dann eine lineare Mannigfaltigkeit L' der Dimension $n-1$ auf; die *sämtlichen* zu den $a_{\varrho\sigma}^{(v)}$ apolaren $b_{\varrho\sigma}$ bilden dann eine $(rs-n-1)$ -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit L . Unsere Aufgabe ist daher weiter gleichbedeutend mit der folgenden: *in einer linearen Mannigfaltigkeit L (von gegebener Dimension) die zerfallenden Formen zu bestimmen.* Ist M die Menge *aller* zerfallenden Formen $b_{\varrho\sigma}$ im P_{rs-1} , so handelt es sich also um die Bestimmung der Schnittpunkte von M mit einer linearen Mannigfaltigkeit L . Zu diesem Zweck soll nun die Mannigfaltigkeit M genauer untersucht werden.

3. *Die Mannigfaltigkeit M der zerfallenden Formen.* Eine zerfallende Form $b_{\varrho\sigma}$ ist offenbar dadurch gekennzeichnet, daß der Rang der Matrix $(b_{\varrho\sigma})$ gleich 1 ist. Die Mannigfaltigkeit M ist also durch eine Reihe quadratischer Gleichungen zwischen den $b_{\varrho\sigma}$ gegeben; M ist *algebraisch*. Da man in

$$(16) \quad b_{\varrho\sigma} = x_{\varrho} y_{\sigma}, \quad \varrho = 1, \dots, r; \sigma = 1, \dots, s,$$

wo x_1, \dots, x_r den P_{r-1} , y_1, \dots, y_s den P_{s-1} durchläuft, eine Parameterdarstellung von M besitzt, *ist M eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension $d = (r-1) + (s-1) = r+s-2$* ²⁶⁾.

Eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit besitzt einen wohlbestimmten Grad g ; er ist definiert als die Anzahl der Schnittpunkte von M mit einer allgemeinen linearen Mannigfaltigkeit der Dimension $(rs-1) - d = (r-1)(s-1)$ ²⁷⁾.

Zur Bestimmung von g ²⁸⁾ schneiden wir M mit einer speziellen linearen Mannigfaltigkeit L dieser Dimension²⁹⁾. L definieren

²⁶⁾ Vgl. z.B.: Moderne Algebra II, §§ 89 und 90.

²⁷⁾ Vgl. z.B.: Moderne Algebra II, § 96.

²⁸⁾ REYE führt a.a.O.¹³⁾ für symmetrische Formen die Gradbestimmung in den einfachsten Fällen durch, indem er unmittelbar die quadratischen Relationen $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0$ usw. zugrunde legt und die dann mehrfach auftretenden Schnittgebilde abspaltet. Sein Beweis erscheint dem Verf. aber nicht von genügender Strenge; diese ließe sich zwar in den von REYE betrachteten einfachsten Fällen (d.h. für kleinste Werte von r und s) retten, für den Fall allgemeiner r und s scheint die Reyesche Methode jedoch undurchführbar.

²⁹⁾ Die Gradbestimmung ist natürlich im wesentlichen die gleiche wie in § 2, nur daß sie diesmal im P_{rs-1} gedeutet wird; man benötigt hier die Theorie der mehrfach projektiven Räume nicht.

wir so: wir wählen $r + s - 2$ Hyperebenen $u^{(\mu)} = (u_1^{(\mu)}, \dots, u_r^{(\mu)})$ im P_{r-1} und $r + s - 2$ Hyperebenen $v^{(\mu)} = (v_1^{(\mu)}, \dots, v_s^{(\mu)})$ im P_{s-1} ($\mu=1, \dots, r+s-2$). Unter L verstehe man die Menge der $b_{\rho\sigma}$, welche den Gleichungen

$$(19) \quad \sum_{\substack{\rho=1, \dots, r \\ \sigma=1, \dots, s}} b_{\rho\sigma} u_{\rho}^{(\mu)} v_{\sigma}^{(\mu)} = 0, \quad \mu = 1, \dots, r + s - 2,$$

genügen. Wenn man die Ebenen $u^{(\mu)}$ und ebenso die Ebenen $v^{(\mu)}$ in allgemeiner Lage wählt (d.h. so daß keine r bzw. keine s der Ebenen einen Punkt gemein haben), so sind die $r + s - 2$ linearen Gleichungen (19) wirklich linear unabhängig, d.h. L ist wirklich von der Dimension $(r-1)(s-1)$. L hat nämlich mit M nur endlich viele Punkte, also eine Mannigfaltigkeit nullter Dimension gemein. Diese Schnittpunkte lassen sich sämtlich angeben. Ist nämlich $b_{\rho\sigma} = x_{\rho} y_{\sigma}$ ein Schnittpunkt von L und M , so gilt wegen (19):

$$(20) \quad \sum_{\substack{\rho=1, \dots, r \\ \sigma=1, \dots, s}} b_{\rho\sigma} u_{\rho}^{(\mu)} v_{\sigma}^{(\mu)} = \sum_{\rho=1}^r x_{\rho} u_{\rho}^{(\mu)} \sum_{\sigma=1}^s y_{\sigma} v_{\sigma}^{(\mu)} = 0, \quad \mu = 1, \dots, r + s - 2.$$

Wegen der vorausgesetzten „allgemeinen Lage“ der Linearfaktoren ist dies nur möglich, wenn genau $r - 1$ Faktoren

$\sum_{\rho=1}^r x_{\rho} u_{\rho}^{(\mu)}$ und genau $s - 1$ Faktoren $\sum_{\sigma=1}^s y_{\sigma} v_{\sigma}^{(\mu)}$ verschwinden (und

zwar so, daß jeder Index μ (genau) einmal vorkommt). Liegt umgekehrt ein Punkt x_1, \dots, x_r auf $r - 1$ Ebenen $u^{(\mu)}$ und y_1, \dots, y_s auf den $s - 1$ Ebenen $v^{(\mu)}$ mit den übrigen Indices μ , so ist $b_{\rho\sigma} = x_{\rho} y_{\sigma}$ ein Schnittpunkt von M und L . Die Anzahl der Schnittpunkte ist also gleich der Anzahl der Kombinationen zu $r - 1$ Elementen aus $r + s - 2$ Elementen, also gleich $\binom{r+s-2}{r-1}$.

Hieraus folgt, daß der Grad der Mannigfaltigkeit M $g \geq \binom{r+s-2}{r-1}$

ist. Um zu beweisen, daß das Gleichheitszeichen steht, muß noch gezeigt werden, daß die Multiplizität der einzelnen Schnittpunkte genau 1 ist. Das ist nach dem schon benutzten van der Waerden'schen Kriterium aus ZAG V sicher dann der Fall, wenn die lineare Mannigfaltigkeit L mit der Tangentialmannigfaltigkeit von M in einem solchen Schnittpunkt nur einen Punkt (diesen Schnittpunkt) gemein hat. Sei $b_{\rho\sigma} = \beta_{\rho\sigma} = \xi_{\rho} \eta_{\sigma}$ ein solcher Schnittpunkt. Man denke sich die Gleichungen (19) so numeriert, daß ξ_1, \dots, ξ_r der Schnittpunkt der $r - 1$ Ebenen

$$(21) \quad \sum_{\rho=1}^r x_{\rho} u_{\rho}^{(\mu)} = 0, \quad \mu = 1, \dots, r - 1,$$

und η_1, \dots, η_s der Schnittpunkt der $s - 1$ Ebenen

$$(22) \quad \sum_{\sigma=1}^s y_{\sigma} v_{\sigma}^{(\mu)} = 0, \quad \mu = r, \dots, r + s - 2,$$

ist. Durch eine projektive Transformation des P_{r-1} und des P_{s-1} (welche — wie oben bemerkt — im P_{rs-1} eine M in sich überführende Transformation impliziert) kann man erreichen, daß die Ebenen (21) und (22) die Form

$$(21') \quad x_1 = 0, \dots, x_{r-1} = 0,$$

$$(22') \quad y_1 = 0, \dots, y_{s-1} = 0$$

annehmen. Der Schnittpunkt von (21') hat dann die Koordinaten $\xi_1 = \dots = \xi_{r-1} = 0, \xi_r = 1$, der Schnittpunkt von (22') die Koordinaten $\eta_1 = \dots = \eta_{s-1} = 0, \eta_s = 1$, also wird der Schnittpunkt von M und L

$$(23) \quad \beta_{rs} = 1, \text{ alle übrigen } \beta_{\rho\sigma} = 0.$$

Die L definierenden Gleichungen (19) erhalten die Gestalt

$$(19') \quad \begin{aligned} \sum_{\sigma=1}^s b_{\mu\sigma} v_{\sigma}^{(\mu)} &= 0, & \mu &= 1, \dots, r - 1, \\ \sum_{\rho=1}^r b_{\rho\mu} u_{\rho}^{(r-1+\mu)} &= 0, & \mu &= 1, \dots, s - 1. \end{aligned}$$

M läßt sich in der Umgebung von $\beta_{\rho\sigma}$ inhomogen so schreiben:

$$(16') \quad b_{\rho\sigma} = x_{\rho} y_{\sigma}, \quad \rho = 1, \dots, r; \quad \sigma = 1, \dots, s; \quad x_r = y_s = 1.$$

Für die Tangentialmannigfaltigkeit im Punkte $\beta_{\rho\sigma}$ hat man folgende Parameterdarstellung:

$$(24) \quad b_{\rho\sigma} = \beta_{\rho\sigma} + \sum_{\alpha=1}^{r-1} \lambda_{\alpha} \left[\frac{\partial b_{\rho\sigma}}{\partial x_{\alpha}} \right]_{b_{\rho\sigma} = \beta_{\rho\sigma}} + \sum_{\gamma=1}^{s-1} \tau_{\gamma} \left[\frac{\partial b_{\rho\sigma}}{\partial y_{\gamma}} \right]_{b_{\rho\sigma} = \beta_{\rho\sigma}}.$$

Das ergibt:

$$(24') \quad \begin{aligned} b_{\rho\sigma} &= 0 & \text{für } \rho < r, \sigma < s, \\ b_{r\sigma} &= \tau_{\sigma} & \text{für } \sigma < s, \\ b_{\rho s} &= \lambda_{\rho} & \text{für } \rho < r, \\ b_{rs} &= 1. \end{aligned}$$

Schneidet man die Tangentialmannigfaltigkeit (24') mit L , so erhält man für den Schnitt wegen (19'):

$$(25) \quad \begin{aligned} v_s^{(\mu)} \lambda_{\mu} &= 0, & \mu &= 1, \dots, r - 1, \\ u_r^{(r-1+\mu)} \tau_{\mu} &= 0, & \mu &= 1, \dots, s - 1. \end{aligned}$$

Nun sind die $u_r^{(r-1+\mu)}$ ($\mu=1, \dots, s-1$) sämtlich von Null ver-

schieden, da von den $r + s - 2$ Ebenen $u^{(\mu)}$ ($\mu=1, \dots, r+s-2$) genau $r - 1$ durch den Punkt $\xi_1 = \dots = \xi_{r-1} = 0$, $\xi_r = 1$ gehen, also die Ebenen (21') und keine weiteren. Ebenso sind die $v_s^{(\mu)}$ ($\mu=1, \dots, r-1$) sämtlich von Null verschieden. Aus (25) folgt daher $\lambda_1 = \dots = \lambda_{r-1} = \tau_1 = \dots = \tau_{s-1} = 0$, d.h. $b_{\rho\sigma} = \beta_{\rho\sigma}$ ist der einzige Schnittpunkt der Tangentialmannigfaltigkeit (24') von M mit L . — Damit ergibt sich also der

Satz: Die Mannigfaltigkeit M aller Punkte $b_{\rho\sigma}$ des P_{rs-1} mit Rang $(b_{\rho\sigma}) = 1$ ist eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension $d = r + s - 2$ und des Grades $g = \binom{r+s-2}{r-1}$.

4. *Beweis des Hauptsatzes (I') für Bilinearformen.* (I') besagt, daß für ungerades $\binom{r+s-2}{r-1}$ jedes System (18) mit $n = r + s - 2$ mindestens eine reelle Lösung hat, oder — was nach den eben angestellten Betrachtungen dasselbe ist — daß für ungeraden Grad g M mit jeder reellen linearen Mannigfaltigkeit L der Dimension $rs - 1 - d = (r-1)(s-1)$ mindestens einen reellen Schnittpunkt besitzt. Dies folgt aus dem folgenden allgemeinen

Satz: Ist R ein reell abgeschlossener Körper, M eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit des zugehörigen projektiven P_m von der Dimension d und von ungeradem Grade g , so hat M mit jeder reellen linearen Mannigfaltigkeit L der Dimension $m - d$ im P_m mindestens einen reellen Schnittpunkt.

Dies ist klar, wenn M und L nur endlich viele (also g) Schnittpunkte haben. Im „Ausnahmefall“ unendlich vieler Schnittpunkte schließt man entsprechend wie in § 2; man wählt eine zweite reelle lineare Mannigfaltigkeit L' der Dimension $m - d$, welche endlich viele (also g) Schnittpunkte mit M gemein hat, setzt $L^{(t)} = (1-t)L + tL'$, schließt, daß $L^{(t)}$ in dem zum Körper der reellen Puiseuxschen Reihen gehörigen P_m mit M einen Schnittpunkt hat, aus dem bei $t = 0$ ein reeller Schnittpunkt von M und L gewonnen wird.

Da der Grad eine sehr grobe Kennzeichnung einer algebraischen Mannigfaltigkeit darstellt (besonders wenn er zudem nur mod 2 verwendet wird), ist zu erwarten, daß ein genaueres Studium der Mannigfaltigkeit M im P_{rs-1} auch für unser Problem genauere als die hier gegebenen Ergebnisse zeitigen würde.

§ 4. Beweis des Existenzsatzes (II).

1. *Ein Hilfssatz über Binomialkoeffizienten.* Für das folgende brauchen wir ein handliches Kriterium für das Verhalten eines

Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} \pmod 2$. Zu diesem Zweck schreiben wir $n, k, n - k$ im Dualsystem:

$$(26) \quad n = n_0 + n_1 2 + n_2 2^2 + \dots + n_a 2^a, \quad 0 \leq n_\alpha \leq 1,$$

$$(27) \quad k = k_0 + k_1 2 + k_2 2^2 + \dots + k_a 2^a, \quad 0 \leq k_\alpha \leq 1,$$

$$(28) \quad n - k = l_0 + l_1 2 + l_2 2^2 + \dots + l_a 2^a, \quad 0 \leq l_\alpha \leq 1.$$

Nun geht 2 in $n!$ in der Potenz

$$(29) \quad \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{4} \right] + \left[\frac{n}{8} \right] + \dots = n - (n_0 + \dots + n_a)$$

auf. Folglich geht 2 in $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ in der Potenz

$$(30) \quad n - (n_0 + \dots + n_a) - (k - (k_0 + \dots + k_a)) - (n - k - (l_0 + \dots + l_a)) \\ = (k_0 + \dots + k_a) + (l_0 + \dots + l_a) - (n_0 + \dots + n_a)$$

auf. Dies ist dann und nur dann gleich 0, wenn $\sum k_\alpha + \sum l_\alpha = \sum n_\alpha$, d.h. wenn die Quersumme der Summe gleich der Summe der Quersummen ist. Nun ist klar, daß dies dann und nur dann eintritt, wenn bei der Addition an keiner Stelle eine „Dualübertragung“ in eine höhere Stelle eintritt, d.h. wenn für alle α

$$(31) \quad k_\alpha + l_\alpha = n_\alpha$$

ausfällt. Da alle drei Größen 0 oder 1 sind, tritt dies dann und nur dann ein, wenn $k_\alpha \leq n_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, a$) ist, d.h. wenn die in der Darstellung von k

$$(27) \quad k = k_0 + k_1 2 + k_2 2^2 + \dots + k_a 2^a$$

wirklich auftretenden (d.h. von 0 verschiedenen) Summanden sämtlich auch in der Darstellung von n

$$(26) \quad n = n_0 + n_1 2 + n_2 2^2 + \dots + n_a 2^a$$

vorkommen. Wir sagen in diesem Fall: k sei eine Teilsumme von n . Wir haben also den

Hilfssatz: Dann und nur dann ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ungerade, wenn k eine Teilsumme von n ist.

2. *Beweis von (II).* Außer der Darstellung (26) brauchen wir im folgenden noch eine zweite Darstellung von n

$$(32) \quad n = n_0 + n_1 2 + \dots + n_{h-1} 2^{h-1} + 2^h + 2^h + \dots + 2^h,$$

wo der Summand 2^h offenbar $(n_h + 2n_{h+1} + 4n_{h+2} + \dots)$ -mal vorkommt. Eine Teilsumme der Darstellung (32) (also eine Summe

beliebig vieler Summanden aus (32)) heiße deutlicher eine *Pseudoteilsunme* von n , während die Teilsunmen der Darstellung (26) *echte Teilsunmen* von n heißen. Jede Pseudoteilsunme ist offenbar einer echten Teilsunme mod 2^h kongruent, und man erhält alle Pseudoteilsunmen, indem man alle Zahlen $\leq n$ wählt, welche einer echten Teilsunme mod 2^h kongruent sind.

Seien nun n, r, s gegeben und die Voraussetzungen von (II) erfüllt, also alle $\binom{n}{k'}$ (bzw. alle $\binom{n'}{k'}$ ³⁰⁾) gerade, wo n' bzw. k' die kleinsten nichtnegativen Reste von n bzw. k mod 2^h bedeuten und wo $n - r < k < s$. Wir wollen nun zu den gegebenen Werten von n, r, s ein definites System konstruieren. Dazu wählen wir n reelle Linearformen X_1, \dots, X_n in den x_1, \dots, x_r und n reelle Linearformen Y_1, \dots, Y_n in den y_1, \dots, y_s und zwar so, daß je r Linearformen X_ν bzw. je s Y_ν linear unabhängig sind. Es folgt demnach aus dem Verschwinden von r Linearformen X_ν das Verschwinden aller x_ρ , aus dem Verschwinden von s Linearformen Y_ν das Verschwinden aller y_σ . — Wir schreiben die Zerlegung (32) noch einmal an, wollen aber nur die von 0 verschiedenen Summanden ausschreiben: sie mögen etwa m_1, \dots, m_q heißen; also:

$$(32') \quad n = n_0 + n_1 2 + \dots + n_{h-1} 2^{h-1} + 2^h + \dots + 2^h \\ = m_1 + \dots + m_q.$$

Die Zahlen m_1, \dots, m_q sind Potenzen von 2. Nun teilen wir die Linearformen X_1, \dots, X_n und Y_1, \dots, Y_n je in q Gruppen ein, so daß die ersten m_1 der ersten, weitere m_2 der zweiten und schließlich die letzten m_q der q -ten Gruppe angehören. Für die m_p der p -ten Gruppe angehörenden Linearformen X_ν und Y_ν bilden wir ein definites System mit m_p Gleichungen ungerader Homogenittsgrade; dies ist nach Voraussetzung möglich, weil $m_p =$ Potenz von $2 \leq 2^h$ ist, also $n^*(m_p, m_p) = m_p$. Im ganzen erhält man so $m_1 + \dots + m_q = n$ Gleichungen, welche homogen von ungeraden Graden in den X_ν und in den Y_ν , also auch in den x_ρ, y_σ sind. Wir behaupten: das so entstehende System von n Gleichungen in $x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s$ ist definit.

Sei nämlich $x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s$ eine reelle Lösung; dieser

³⁰⁾ Das ist nach dem Hilfssatz das gleiche: denn ist $\binom{n}{k'}$ ungerade, so ist k' Teilsunme von n , also (wegen $k' < 2^h$) auch von n' , also ist $\binom{n'}{k'}$ ungerade; und umgekehrt: ist $\binom{n'}{k'}$ ungerade, so ist k' Teilsunme von n' , also erst recht von n , d.h. $\binom{n}{k'}$ ist ungerade.

entspricht eine ebenfalls reelle Lösung $X_1, \dots, X_n; Y_1, \dots, Y_n$. Nun ist aber die p -te Teilgruppe ($p=1, \dots, q$) nach Konstruktion in den in ihr auftretenden X_p, Y_p definit; folglich müssen entweder die m_p vorkommenden X_p oder die m_p vorkommenden Y_p sämtlich verschwinden. Im ganzen verschwinden daher A Linearformen X_p und B Linearformen Y_p mit $A + B = n$. Dabei sind A und B Summen von Zahlen m_p , also Pseudoteilsommen von n . Wir behaupten nun weiter: B kann keiner der Zahlen k ($n-r < k < s$) gleich sein. Angenommen nämlich, es wäre B gleich einem solchen k . Da B Pseudoteilsomme von n ist, wäre $k' = B'$ echte Teilsomme von n (und n'); nach dem Hilfssatz wäre dann aber $\binom{n}{k'}$ (und $\binom{n'}{k'}$) ungerade, entgegen der Voraussetzung. Also ist — wie behauptet — B von allen k verschieden. Das heißt aber: es ist entweder $B \geq s$ oder $B \leq n - r$, woraus $A = n - B \geq r$ folgen würde. Es verschwinden also entweder mindestens r Formen X_p oder mindestens s Formen Y_p , was das Verschwinden aller x_ρ bzw. aller y_σ nach sich zieht. Das konstruierte System ist also wirklich definit.

Damit ist (II) bewiesen. Das Korollar ist trivial, wenn man bedenkt, daß das konstruierte System aus Bilineargleichungen in den $x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s$ besteht, sofern nur die Gleichungen in den X_p, Y_p bilinear waren.

3. *Anwendung.* Für $h = 3$ sind die Voraussetzungen von (II) jedenfalls erfüllt. Man beachte ferner: die k bilden eine Sequenz aufeinanderfolgender Zahlen, also auch die k' , und die k' -Sequenz kann dabei nicht durch $k' = 0$ gehen, weil $\binom{n}{0} = 1$ ungerade ist. Für $n' = 0, 1, \dots, 7$ liefern die folgenden Werte von k' gerade Binomialkoeffizienten $\binom{n'}{k'}$:

$n' = 0:$	$k' =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7;
$n' = 1:$	$k' =$		2,	3,	4,	5,	6,	7;
$n' = 2:$	$k' =$	1,		3,	4,	5,	6,	7;
$n' = 3:$	$k' =$				4,	5,	6,	7;
$n' = 4:$	$k' =$	1,	2,	3,		5,	6,	7;
$n' = 5:$	$k' =$		2,	3,			6,	7;
$n' = 6:$	$k' =$	1,		3,		5,		7;
$n' = 7:$	keine Möglichkeit für k' .							

Die aus dieser Zusammenstellung ablesbaren kleinsten Werte von n , für die nach unserer Methode ein definites System konstruierbar ist, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt,

und zwar geordnet nach den verschiedenen Werten von r und $s \pmod 8$:

$r \equiv$	1	2	3	4	5	6	7	8 (mod 8)
$s \equiv$								
1	$r+s-1$							
2	$r+s-1$	$r+s-2$	$r+s-1$	$r+s-2$	$r+s-1$	$r+s-2$	$r+s-1$	$r+s-2$
3	$r+s-1$	$r+s-1$	$r+s-2$	$r+s-3$	$r+s-1$	$r+s-1$	$r+s-2$	$r+s-3$
4	$r+s-1$	$r+s-2$	$r+s-3$	$r+s-4$	$r+s-1$	$r+s-2$	$r+s-3$	$r+s-4$
5	$r+s-1$	$r+s-1$	$r+s-1$	$r+s-1$	$r+s-2$	$r+s-3$	$r+s-4$	$r+s-5$
6	$r+s-1$	$r+s-2$	$r+s-1$	$r+s-2$	$r+s-3$	$r+s-4$	$r+s-5$	$r+s-6$
7	$r+s-1$	$r+s-1$	$r+s-2$	$r+s-3$	$r+s-4$	$r+s-5$	$r+s-6$	$r+s-7$
8	$r+s-1$	$r+s-2$	$r+s-3$	$r+s-4$	$r+s-5$	$r+s-6$	$r+s-7$	$r+s-8$
(mod 8)								

Der kleinste Wert $n^*(r, s)$ von n , für den ein definites System mit n Gleichungen in $x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s$ existiert, ist also \leq dem in der Tabelle angegebenen Wert. Insbesondere fallen natürlich für $s \leq 8$ (und entsprechend für $r \leq 8$) wegen $k < s \leq 8$, also $k' = k$ die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ und $\binom{n}{k'}$ zusammen; in diesen Fällen sind also die durch (I) gegebene untere und die durch (II) gegebene obere Schranke für $n^*(r, s)$ einander gleich. Für $r \leq 8$ oder $s \leq 8$ gibt also die obige Tabelle den genauen Wert von $n^*(r, s)$ an. — Für $r = s$ ergeben sich also z.B. die folgenden Abschätzungen ³¹⁾:

$$\begin{aligned}
 n^*(1, 1) &= 1, \\
 n^*(2, 2) &= 2, \\
 n^*(3, 3) &= n^*(4, 4) = 4, \\
 n^*(5, 5) &= n^*(6, 6) = n^*(7, 7) = n^*(8, 8) = 8, \\
 16 &\leq n^*(9, 9) \leq 17, \\
 16 &\leq n^*(10, 10) \leq 18, \\
 16 &\leq n^*(11, 11) \leq n^*(12, 12) \leq 20, \\
 16 &\leq n^*(13, 13) \leq n^*(14, 14) \leq n^*(15, 15) \leq n^*(16, 16) \leq 24, \\
 32 &\leq n^*(17, 17) \leq 33.
 \end{aligned}$$

Prag, den 29. Dez. 1938.

(Eingegangen den 10. Januar 1939.)

³¹⁾ Für die unteren Abschätzungen vgl.: HOFF, § 1, 3 (d), Satz Id.