

COMPOSITIO MATHEMATICA

N. VEDENISSOFF

Généralisation de quelques théorèmes sur la dimension

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 194-200

http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__194_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Généralisation de quelques théorèmes sur la dimension

par

N. Vedenisoff

Moscou

Nous considérons des recouvrements ouverts finis (ça veut dire composés d'ensembles ouverts en nombre fini) d'espaces topologiques, que nous appelons simplement, pour abrégier le langage, „recouvrements”. En supposant l'existence d'entiers m tels que dans tout recouvrement d'un espace donné R on puisse inscrire ¹⁾ un recouvrement d'ordre non supérieur à $m + 1$, soit n le plus petit de ces entiers. Nous l'appelons *dimension* de l'espace R et nous écrivons $\dim R = n$. En modifiant convenablement la notion de l' ε -transformation ²⁾, nous étendons (§ 1) au cas des espaces parfaitement normaux ³⁾ compacts le théorème connu de P. Alexandroff ⁴⁾, qui affirme, que pour un espace métrique compact R , $\dim R$ est le plus petit des entiers m tels qu'à tout ε positif corresponde une ε -transformation de R en un polytope à n -dimensions. Au § 2 nous supposons que l'espace R considéré est un espace de Hausdorff bicompat. Dans ces conditions nous démontrons entre autres résultats, que l'espace des composantes de R est de dimension 0 (généralisation d'un théorème de P. Alexandroff ⁵⁾) et que parmi les composantes d'un espace n -dimensionnel une au moins est n -dimensionnelle (généralisation d'un théorème de L. Tumarkin ⁶⁾).

¹⁾ Un recouvrement $\omega = \{O_1, \dots, O_s\}$ est inscrit dans le recouvrement $\gamma = \{G_1, \dots, G_t\}$ si tout ensemble de ω est contenu dans un au moins des ensembles du recouvrement γ .

²⁾ Voir par exemple: ALEXANDROFF-HOPF, *Topologie*, I, S. 103. Ce livre est cité dans la suite comme AH.

³⁾ Cette dénomination est due à M. E. Čech. Un espace est parfaitement normal, s'il est normal et si tout ensemble ouvert de cet espace est un F_σ (donc tout ensemble fermé un G_δ).

⁴⁾ AH, S. 370.

⁵⁾ P. ALEXANDROFF [Math. Ann. 96 (1926), 555—571], 570.

⁶⁾ L. TUMARKIN [Recueil Math. 35 (1928), 133—138].

§ 1.

Soit $\omega = \{O_0, O_1, \dots, O_s\}$ un recouvrement de l'espace topologique X . Nous disons qu'une transformation continue $y = f(x)$ de l'espace X en un espace Y est une ω -transformation, si pour tout point $y \in f(X)$ l'ensemble $f^{-1}(y)$ est contenu dans l'un au moins des ensembles du recouvrement ω .

THÉORÈME I. *Soit X un espace parfaitement normal compact. Pour que la dimension de X soit égale à n , il faut et il suffit que 1) à tout recouvrement ω de X corresponde une ω -transformation de X en un polytope à n dimensions, 2) on puisse trouver un recouvrement $\tilde{\omega}$ de X tel qu'il est impossible d'effectuer une $\tilde{\omega}$ -transformation de X en polytopes de dimension inférieure à n .*

Nous commençons par le lemme ⁷⁾:

LEMME 1. *Pour qu'un espace de Hausdorff R soit parfaitement normal, il faut et il suffit qu'à tout ensemble fermé $F \subset R$ corresponde une fonction continue ⁸⁾ non négative $f(x)$ qui est égale à 0 sur F et seulement sur F .*

La condition est suffisante. En effet soit $f(x)$ une fonction continue égale à 0 sur F et seulement sur F ; alors en désignant par G_n l'ensemble $E_x \left[f < \frac{1}{n} \right]$ qui est ouvert dans R , on a $F = G_1 G_2 \dots$. Les ensembles fermés F_0, F_1 étant disjoints, supposons que l'on puisse trouver deux fonctions continues non négatives $f_i(x)$, ($i=0, 1$), telles que l'on ait: $F_i = E_x [f_i = 0]$.

En posant $\varphi(x) = f_0(x) - f_1(x)$, désignons respectivement par Γ_0, Γ_1 les ensembles ouverts $E_x [\varphi < 0]$, $E [\varphi > 0]$. On voit que F_0, F_1 sont séparés par Γ_0, Γ_1 , donc la suffisance est démontrée.

La condition est nécessaire. En effet, soit R un espace parfaitement normal et F un ensemble fermé dans R ; on a $F = G_1 G_2 \dots$, les ensembles G_k ($k=1, 2, \dots$) étant ouverts dans R . Selon le théorème connu d'Urysohn ⁹⁾, il existe une fonction continue non négative $f_k(x)$, égale à 0 sur F et à 1 sur $\Phi_k = R - G_k$. Il est évident que la fonction $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f_k(x)$ jouit des propriétés signalées dans l'énoncé du lemme, c.q.f.d.

Cela posé nous pouvons démontrer le

LEMME 2. *Soit donné un recouvrement $\omega = \{O_0, O_1, \dots, O_p\}$ d'un*

⁷⁾ Comparer avec ma note „Sur les fonctions continues . . .” [Fund. Math. 27 (1936), 234—238], 238.

⁸⁾ A valeurs réelles et définie sur tout l'espace R .

⁹⁾ AH, S. 74.

espace X parfaitement normal. Si l'on a $\dim X = n$, il existe une ω -transformation de X en un polytope à n -dimensions ¹⁰⁾.

En effet la dimension de X étant égale à n on peut inscrire dans le recouvrement ω un recouvrement $\omega^* = \{O_0^*, O_1^*, \dots, O_q^*\}$ dont l'ordre est égal ou inférieur à $n + 1$. Considérons les ensembles fermés $F_i = X - O_i^*$ ($i=0, 1, \dots, q$) qu'on peut évidemment supposer non vides.

Conformément au lemme 1 il existe une fonction continue non négative $f_i(x)$ telle que $F_i = E_x[f_i = 0]$ ($i=0, 1, \dots, q$). Cela posé, soit $S = (a_0, a_1, \dots, a_q)$ un simplexe non dégénéré fermé à q dimensions. Considérons les fonctions

$$\lambda_i(x) = \frac{f_i(x)}{f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_q(x)} \quad (i=0, 1, \dots, q);$$

le dénominateur $f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_q(x)$ est positif pour tout point x de X (en effet en admettant le contraire on voit que l'ensemble $F_0 F_1 \dots F_q$ est non vide, ce qui est impossible puisque ω^* est un recouvrement de X), donc les $\lambda_i(x)$ sont des fonctions continues de x . On voit facilement que le point $y = f(x)$, dont les coordonnées barycentriques relatives aux points a_0, a_1, \dots, a_q sont $\lambda_0(x), \lambda_1(x), \dots, \lambda_q(x)$ est un point de S . On a même plus: l'ensemble $Y = f(X)$ est situé sur le polytope Q formé de toutes les faces de S dont le nombre de dimensions est non supérieur à n . En effet soit $T^k = (a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ une face ouverte ¹¹⁾ à k dimensions du simplexe S . Pour un point $y = f(x) \in T^k$ les coordonnées barycentriques $\lambda_{i_0}(x), \lambda_{i_1}(x), \dots, \lambda_{i_k}(x)$ sont positives, donc $x \in F_{i_0} + F_{i_1} + \dots + F_{i_k}$, donc $x \in O_{i_0}^* O_{i_1}^* \dots O_{i_k}^*$; l'ordre du recouvrement ω^* étant non supérieur à $n + 1$, il s'ensuit $k \leq n + 1$, $y \in T^k \subset Q$, donc $Y \subset Q$. Enfin puisque chaque point y de Y est situé sur une des faces ouvertes de S , la transformation $y = f(x)$ est une ω^* -transformation, ce qui achève la démonstration du lemme 2.

Remarque. En se servant d'une définition inductive de la dimension, E. Čech ¹²⁾ a généralisé quelques-uns des théorèmes classiques sur la dimension au cas des espaces parfaitement normaux; en particulier il a démontré que dans ces conditions

¹⁰⁾ Ce lemme est à rapprocher d'un théorème de A. TYCHONOFF [Math. Ann. **111** (1935), 760—761].

¹¹⁾ Les sommets de S , ainsi que son intérieur sont comptés parmi les faces ouvertes de S .

¹²⁾ Bull. intern. Acad. Sc. Bohême **1932**, 1—18.

sa dimension est non inférieure à celle qui est considérée dans cet article; donc a fortiori le lemme 2 a lieu aussi pour la dimension de E. Čech.

LEMME 3. *Étant donnée une transformation continue $y=f(x)$ d'un espace de Hausdorff compact X en un espace de Hausdorff Y , vérifiant le premier axiome de dénombrabilité, l'ensemble $f(X)$ est fermé dans Y .*

En effet soit y un point limite de $f(X)$. Y vérifie le premier axiome de dénombrabilité, donc il existe une suite dénombrable de points $y_n \in f(X)$ qui converge vers le point y . Soit $x_n \in X$ un point tel que $y_n = f(x_n)$. L'espace X étant compact, la suite des x_n a un point limite $x \in X$; en vertu de la continuité de la transformation le point $f(x)$ est un point limite de la suite des y_n , donc $y = f(x)$, c.q.f.d.

En vertu du théorème célèbre de Lebesgue-Brouwer¹³⁾, pour achever la démonstration du théorème I il suffit de prouver le lemme suivant:

LEMME 4. *Soit X un espace régulier compact de dimension n . Il existe un recouvrement $\tilde{\omega}$ de l'espace X tel qu'il n'est possible de faire une $\tilde{\omega}$ -transformation de X en aucun espace Y de Hausdorff bicompat, vérifiant le premier axiome de dénombrabilité et tel que $\dim Y < n$.*

Il suffit évidemment de démontrer qu'étant donnée une ω -transformation de X en un espace Y , possédant les propriétés énoncées dans le lemme, on peut inscrire dans le recouvrement ω un recouvrement ω' , dont l'ordre est inférieur à $n + 1$.

En vertu du lemme 3 on peut se borner au cas où l'on a $f(X) = Y$.

Soit y un point de Y . Pour un ensemble O_m au moins du recouvrement ω on a $f^{-1}(y) \subset O_m$. L'espace Y étant un espace bicompat vérifiant le premier axiome de dénombrabilité, on peut trouver une suite de voisinages V_i ($i=1, 2, \dots$) du point y telle que l'on a

$$y \in \bar{V}_1 \bar{V}_2 \cdots, V_i \supset \bar{V}_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots).$$

Posons $\Phi_i = f^{-1}(\bar{V}_i)$; c'est un ensemble fermé dans X . En admettant que tous les ensembles fermés $B_i = \Phi_i (X - O_m)$ sont non vides, on voit que leur intersection B est aussi non vide; or pour un point $x' \in B$ on a $f(x') = y$, ce qui est en contradiction avec le fait que $f^{-1}(y) \subset O_m$; donc à partir d'un certain indice les ensembles B_i sont vides. Nous avons montré qu'à tout

¹³⁾ AH, S. 378.

point $y \in Y$ on peut attacher un voisinage V_y tel que l'ensemble $f^{-1}(V_y)$ est contenu dans un des ensembles du recouvrement ω . On peut trouver un nombre fini de points y_1, y_2, \dots, y_r de façon que les ensembles $V_{y_1}, V_{y_2}, \dots, V_{y_r}$ recouvrent l'espace Y . Puisqu'on a $\dim Y < n$, on peut inscrire dans le recouvrement en question un recouvrement U_0, U_1, \dots, U_t d'ordre inférieur à $n + 1$. En posant $O'_i = f^{-1}(U_i)$ ($i=0, 1, \dots, t$) on obtient un recouvrement ω' d'ordre inférieur à $n + 1$ qui est inscrit dans le recouvrement ω , c.q.f.d.

§ 2.

THÉORÈME II. *Soit R un espace de Hausdorff bicompat. La décomposition de R en composantes est une décomposition continue ¹⁴⁾ 0-dimensionnelle ¹⁵⁾.*

Le théorème II est une conséquence facile du théorème suivant:

Soit R un espace de Hausdorff bicompat, x un point de R , K_x la composante de x dans l'espace R . Alors K_x est l'intersection de tous les ensembles contenant x qui sont ouverts et fermés à la fois ¹⁶⁾.

Soit K_x une composante de R , G un voisinage de K_x ; selon le théorème cité de M. Sura-Bura pour chaque point $y \in R - G$ on peut trouver une décomposition de R en deux ensemble ouverts disjoints, $R = P_y + Q_y$ telle que $K_x \subset P_y$, $y \in Q_y$. L'espace R étant bicompat, on peut trouver un nombre fini de points y_1, y_2, \dots, y_p tels que $Q_{y_1} + \dots + Q_{y_p} \supset R - G$. L'ensemble $P = P_{y_1} P_{y_2} \dots P_{y_p}$ est un voisinage ouvert de K_x qui fait partie de G et qui est évidemment une réunion de composantes de R ; donc la décomposition de R en composantes est continue.

L'ensembles P est de plus fermé, puisque les P_{y_i} sont fermés comme complémentaires d'ensembles ouverts; cela veut dire que l'espace R^* induit par la décomposition de R en composantes (qui est bicompat comme image continue de l'espace de Hausdorff bicompat R) est de dimension 0 au sens d'Urysohn-Menger. Or il est aisé de voir qu'un espace bicompat 0-dimensionnel au sens d'Urysohn-Menger est aussi de dimension 0 dans le sens adopté ici. Le théorème II est démontré.

¹⁴⁾ AH, S. 67.

¹⁵⁾ P. ALEXANDROFF, Math. Ann. **96** (1926), 555—571], 570. Une décomposition continue est 0-dimensionnelle, si l'espace induit par cette décomposition est de dimension 0.

¹⁶⁾ Cette dernière proposition a été démontrée par M. ŠURA-BURA, et sera bientôt publiée dans un des périodiques mathématiques de l'USSR.

Il est immédiat qu'un espace de dimension 0 est punctiforme¹⁷⁾. D'autre part chaque composante d'un espace de Hausdorff bicomact punctiforme R se réduit à un point; donc dans ce cas la représentation continue de R sur l'espace de ses composantes¹⁸⁾ est biunivoque; il s'ensuit que ces deux espaces sont homéomorphes. Nous sommes arrivés à un théorème généralisant une proposition d'Urysohn (Fund. Math. 7, 75):

THÉORÈME III. *Les espaces bicomacts 0-dimensionnels sont identiques aux espaces de Hausdorff bicomacts punctiformes.*

THÉORÈME IV¹⁹⁾. *Si l'on a une décomposition continue 0-dimensionnelle d'un espace de Hausdorff bicomact $R = \sum X$ en ensembles fermés, dont chacun est de dimension non supérieure à n , la dimension de R est non supérieure à n .*

Commençons par le lemme suivant:

LEMME 5²⁰⁾. *Étant donné un ensemble fermé F et un ensemble ouvert $G \supset F$ d'un espace de dimension 0, on peut trouver un ensemble H ouvert et fermé à la fois, tel que $F \subset H \subset G$.*

En effet, dans le recouvrement composé des ensembles $G_1 = G$, $G_2 = R - F$ on peut inscrire un recouvrement H_1, H_2, \dots, H_i composé d'ensembles ouverts disjoints; la réunion de ceux des ensembles H_1, \dots, H_i qui ont des points communs avec F , est un ensemble ouvert et fermé à la fois contenant F et contenu dans G , c.q.f.d.

On en déduit le

LEMME 6. F_0, F_1, \dots, F_r étant des ensembles fermés disjoints d'un espace R de dimension 0 et $\gamma = \{G_0, G_1, \dots, G_r\}$ étant un recouvrement de R tel que l'on a $F_i \subset G_i$ ($i=0, 1, \dots, r$), on peut trouver un recouvrement $\omega = \{O_0, O_1, \dots, O_r\}$ composé d'ensembles ouverts disjoints, tel que $F_i \subset O_i$ ($i=0, 1, \dots, r$).

En effet, en appliquant le lemme précédent aux ensembles F_i, G_i on obtient des ensembles ouverts et fermés à la fois, tels que l'on a $F_i \subset H_i \subset G_i$ ($i=0, 1, \dots, r$). En posant $O_0 = H_0$, $O_1 = H_1 - H_0, \dots, O_i = H_i - (H_0 + \dots + H_{i-1}), \dots$, on voit que ces ensembles satisfont aux conditions du lemme 6.

¹⁷⁾ Un espace R est punctiforme, si tout sous-ensemble bicomact connexe de R se réduit à un point.

¹⁸⁾ C'est à dire: l'espace induit par la décomposition de R en composantes.

¹⁹⁾ Les théorème IV, V, ainsi que le lemme 6, présentent une généralisation des résultats de L. TUMARKIN [Recueil Math. 35 (1928), 133—138].

²⁰⁾ Le lemme 5 affirme qu'un espace de dimension 0 dans le sens adopté dans la présente note est aussi de dimension 0 au sens d'E. Čech. La réciproque est encore vraie.

Passons à la démonstration du théorème IV. Soit donné un recouvrement $\omega = \{O_0, O_1, \dots, O_r\}$ de l'espace R ; soit X un des ensembles de la décomposition de R . Comme on a $\dim X \leq n$ on peut inscrire dans le recouvrement ω un recouvrement de X $\alpha_X = \{A_0^X, A_1^X, \dots, A_{s_X}^X\}$ qui est formé d'ensembles ouverts dans X et dont l'ordre ne surpasse pas $n + 1$. L'espace X étant normal ²¹⁾ on peut inscrire dans le recouvrement α_X un recouvrement $\beta_X = \{B_0^X, \dots, B_{s_X}^X\}$ formé d'ensembles fermés dans X , donc aussi dans R ; évidemment l'ordre du recouvrement β_X est non supérieur à $n + 1$. Ensuite ²²⁾ on peut trouver un recouvrement $\bar{\gamma} = \{\bar{G}_0, \dots, \bar{G}_{s_X}\}$ dont l'ordre est égal à celui de β_X , qui est formé d'ensembles ouverts dans R et tel que l'on a $B_i^X \subset \bar{G}_i^X$ ($i=0, 1, \dots, s_X$).

Enfin attachons à chaque A_i un ensemble déterminé O_k du recouvrement ω contenant A_i , et posons $G_i^X = \bar{G}_i^X \cap O_k$. On obtient ainsi un recouvrement $\gamma_X = \{G_0^X, G_1^X, \dots, G_{s_X}^X\}$ de X formé d'ensembles ouverts dans R , inscrit dans le recouvrement ω et dont l'ordre ne surpasse pas $n + 1$.

Cela posé, soit $B_X = \sum_{i=0}^{s_X} G_i^X$. Soit R^* l'espace induit par notre décomposition; soit $X = f(x)$ la représentation continue de R sur R^* qu'on obtient en faisant correspondre au point $x \in R$ l'ensemble X dont il fait partie. De la définition même de la décomposition continue il s'ensuit que X est un „point” intérieur de $B_X^* = f(B_X)$ dans l'espace R^* ; donc il existe un voisinage U_X^* du „point” X dans l'espace R^* , qui est contenu dans B_X^* . L'espace R^* étant bicompat on peut trouver un nombre fini de „points” X_0, \dots, X_t de façon que les ensembles $U_{X_0}^*, \dots, U_{X_t}^*$ recouvrent R^* . Selon le lemme 6 on peut inscrire dans ce dernier recouvrement un recouvrement V_0^*, \dots, V_t^* composé d'ensembles ouverts disjoints et tels que $X_j \in V_j^*$ ($j=0, 1, \dots, t$). Les ensembles $V_j = f^{-1}(V_j^*)$ forment un recouvrement de R composé d'ensembles ouverts disjoints. On voit sans peine que les ensembles $O_{ij} = G_i^X \cap V_j$ ($j=0, \dots, t; i=0, \dots, s_X$) forment un recouvrement $\tilde{\omega}$ inscrit dans ω et dont l'ordre ne surpasse pas $n + 1$, c.q.f.d.

Les théorèmes II et IV ont pour conséquence le théorème suivant.

THÉORÈME V. *Parmi les composantes d'un espace de Hausdorff bicompat de dimension n , une au moins est de dimension n .*

(Reçu le 8 juillet 1939.)

²¹⁾ AH, S. 73.

²²⁾ AH, S. 71.