

COMPOSITIO MATHEMATICA

L. BERWALD

**Über Finslersche und Cartansche Geometrie II.
Invarianten bei der Variation vielfacher Integrale und
Parallelhyperflächen in Cartanschen Räumen**

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 141-176

http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__141_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Über Finslersche und Cartansche Geometrie II

Invarianten bei der Variation vielfacher Integrale und Parallelhyperflächen in Cartanschen Räumen

von

L. Berwald

Prag

*Herrn Prof. Dr. Georg Pick zu seinem
80. Geburtstag am 10. August 1939 gewidmet.*

In der vorliegenden Abhandlung wird ein Teil der Ergebnisse einer früheren Arbeit über zweidimensionale Finslersche Räume¹⁾ auf n Dimensionen verallgemeinert. Dabei stellt sich heraus, daß die Verallgemeinerung nicht der Finslerschen Geometrie angehört, sondern der Theorie der n -dimensionalen Cartanschen Räume, d.h. jener n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, deren Geometrie durch ein $(n-1)$ -faches Integral beherrscht wird, das die „Oberfläche“ eines Hyperflächenstückes definiert²⁾. Es handelt sich im Folgenden in erster Reihe um den Begriff und die wichtigsten Eigenschaften der Scharen von Parallelhyperflächen in diesen Räumen, sowie um die geometrische Deutung der mittleren extremalen Krümmung H einer Hyperfläche im Cartanschen Raum³⁾ und — für Extremalen — des Skalars U_0^* von Koschmieder⁴⁾, der in die Normalform der zweiten Variation des „Oberflächen“-Integrals eingeht (§ 3.) Von Interesse dürfte die Feststellung sein, daß die bekannten Eigenschaften geodätisch paralleler Hyperflächen in Riemannschen Räumen auch noch für die Parallelhyperflächen in jenen Cartanschen Räumen erhalten bleiben, in denen ein Rauminhalt existiert, dagegen in den allgemeinen Cartanschen Räumen zum Teil verloren gehen (Nr. 9).

Im § 1 werden die Grundbegriffe der Cartanschen Geometrie kurz zusammengestellt. Sodann wird (§ 2) die Normalform der zweiten Variation des „Oberflächen“-Integrals abgeleitet, erstreckt über ein Stück einer Extremalen bei festem $(n-2)$ -dimensionalen

¹⁾ L. BERWALD [2]. (Die Nummern in eckiger Klammer beziehen sich auf das Schriftenverzeichnis am Ende der Arbeit.)

²⁾ E. CARTAN, [4].

³⁾ L. KOSCHMIEDER, [10] (für $n = 3$), [11] (für beliebiges n).

⁴⁾ L. KOSCHMIEDER, [12], [13].

Rand. Der Gedankengang dieser Herleitung ist zum Teil der gleiche wie bei Herrn L. Koschmieder ⁴⁾; doch wird die Funktion F_2 hier auf einfachere Weise eingeführt. Erwähnt sei aus § 2 noch die Darstellung des Skalars U_0^* für eine Minimalhyperfläche im Riemannschen Raum durch den verjüngten Krümmungstensor des Raumes und die skalare Krümmung der Hyperfläche, sowie die Einführung der weiterhin benutzten besonderen Koordinaten.

Um den gedanklichen Zusammenhang möglichst deutlich hervortreten zu lassen, wurde ein Teil der verhältnismäßig umfangreichen Rechnungen in den Anhang verwiesen. Das Schriftenverzeichnis beschränkt sich ausschließlich auf die Arbeiten, deren Ergebnisse in der Abhandlung erwähnt werden.

§ 1. Die Grundbegriffe der Cartanschen Geometrie.

1. *Oberfläche, Maßtensor und Rauminhalt.* In einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit mit den Koordinaten x^i ⁵⁾ sei

$$(1.1) \quad x^i = x^i(v^1, v^2, \dots, v^{n-1})$$

eine reguläre Parameterdarstellung einer Hyperfläche \mathfrak{F} ⁶⁾. Die Ableitungen der x^i nach den v^α mögen durch angehängte Zeiger bezeichnet werden:

$$(1.2) \quad x_\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial v^\alpha}, \quad x_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}, \quad \text{u.s.f.}$$

Die Matrix

$$(x_\alpha^i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial v^1} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial x^1}{\partial v^{n-1}}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial v^{n-1}} \end{pmatrix}$$

hat dann den Rang $n - 1$. Die aus der Matrix (x_α^i) durch Weglassen der k -ten Spalte gebildete Determinante werde mit $(-1)^{k+1} p_k$ bezeichnet. Bei bestimmter Wahl der Parameter v^α wird durch die angegebene Wahl der p_k in jedem Punkt der Hyperfläche eine positive Normalenrichtung ausgezeichnet, die Hyperfläche also orientiert. Wir lassen in der Hyperfläche nur Parametertransformationen mit positiver Funktionaldeterminante zu, so daß die

⁵⁾ Lateinische Zeiger laufen von 1 bis n , griechische von 1 bis $n - 1$. Über jeden lateinischen oder griechischen Zeiger, der zweimal in einem Gliede auftritt, ist zu summieren, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil angegeben ist.

⁶⁾ Wir setzen bei allen auftretenden Funktionen die Existenz stetiger partieller Ableitungen bis zu einer hinreichend hohen Ordnung voraus.

Orientierung der Hyperfläche bei Parametertransformation erhalten bleibt.

Es liege nun ein $(n-1)$ -faches Integral

$$(1.3) \quad O = \int_{(n-1)} F(x^1, x^2, \dots, x^n; p_1, p_2, \dots, p_n) dv^1 dv^2 \dots dv^{n-1} = \int_{(n-1)} F(x, p) dv$$

vor, erstreckt über einen $(n-1)$ -dimensionalen Bereich der Hyperfläche \mathfrak{F} ⁷⁾. Wir deuten O als $(n-1)$ -dimensionale „Oberfläche“ des Bereiches. Von F wird vorausgesetzt:

1. In einem gewissen Bereich \mathfrak{B} der $2n$ Argumente $x^1, x^2, \dots, x^n; p_1, p_2, \dots, p_n$, auf den wir uns weiterhin beschränken, besitzt F stetige partielle Ableitungen bis zu einer hinreichend hohen Ordnung. \mathfrak{B} soll keine Wertesysteme mit $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$ enthalten.

2. F ist in p_1, p_2, \dots, p_n positiv homogen von erster Ordnung.

3. $F > 0$.

4. Die Funktion F_1 , die durch

$$(1.4) \quad \text{adj} \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} = F_1 p_i p_k$$

definiert ist, wo die linke Seite das algebraische Komplement von $\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k}$ in $\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} \right)$ bezeichnet, ist wesentlich positiv ⁸⁾.

Wir nennen eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, in der ein „Oberflächen“-Integral (1.3) der betrachteten Art gegeben ist, einen n -dimensionalen Cartanschen Raum.

Es ist zweckmäßig, als geometrisches Element eines solchen Raumes das orientierte *Hyperflächenelement* zu betrachten. Ein Hyperflächenelement $(x^1, x^2, \dots, x^n; p_1, p_2, \dots, p_n) = (x, p)$ ist gegeben durch seinen Punkt x^i und durch n nicht sämtlich verschwindende Zahlen p_1, p_2, \dots, p_n , die in dem Sinne homogen sind, daß sie alle mit demselben willkürlichen *positiven* Faktor multipliziert werden dürfen. Die p_i sind die Koeffizienten der Gleichung

$$p_i dx^i = 0,$$

welche ausdrückt, daß die Richtung $dx^1:dx^2:\dots:dx^n$ im Punkte x^i in der Hyperebene des Hyperflächenelements liegt.

Eine einfache Rechnung ⁹⁾ zeigt, daß

⁷⁾ J. RADON, [16] und G. VIVANTI, [18] haben gezeigt, daß jedes parameterinvariante $(n-1)$ -fache Integral in die Gestalt (1.3) gesetzt werden kann.

⁸⁾ F_1 wurde von TH. DE DONDER, [6], S. 1005 eingeführt.

⁹⁾ Anhang, B.

$$(1.5) \quad \det \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} F^2 \right)}{\partial p_i \partial p_k} \right) = F^{n+1} F_1 > 0$$

ist. Somit ist auch

$$(1.6) \quad g = \left[\det \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} F^2 \right)}{\partial p_i \partial p_k} \right) \right]^{\frac{1}{n-1}} = (F^{n+1} F_1)^{\frac{1}{n-1}} > 0,$$

wenn die $(n-1)$ -te Wurzel stets positiv gezogen wird.

Die Funktionen

$$(1.7) \quad g^{ik} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} F^2 \right)}{\partial p_i \partial p_k}$$

sind wegen der Homogenität von F in den p_1, \dots, p_n positiv homogen von der Ordnung Null und verhalten sich bei Koordinatentransformation wie die Komponenten eines kontravarianten Tensors zweiter Stufe. Ihre Determinante hat wegen (1.5), (1.6) den wesentlich positiven Wert $\frac{1}{g}$. Daher existiert das durch

$$(1.8) \quad g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j \quad (=1 \text{ für } i=j, =0 \text{ für } i \neq j)$$

definierte reziproke System g_{ik} . Mittels der g_{ik} , g^{ik} wird das Hinunter- und Heraufziehen von lateinischen Zeigern in der üblichen Weise erklärt.

Durch

$$(1.9) \quad ds^2 = g_{ik}(x, p) dx^i dx^k$$

wird jedem Hyperflächenelement (x, p) eine *euklidische* Maßbestimmung zugeordnet. $g_{ik}(x, p)$ ist in diesem Sinne der *Maßtensor des Cartanschen Raumes*¹⁰⁾. Ist eine einparametrische Schar von Hyperflächen

$$(1.10) \quad x^i = x^i(v^1, v^2, \dots, v^{n-1}, c) \quad (c_1 \leq c \leq c_2)$$

gegeben, die ein Feld¹¹⁾ bildet, so definiert (1.9), wenn die x^i , p_k (1.10) entnommen werden, die *längs des Feldes oskulierende Riemannsche Maßbestimmung*.

Die Maßbestimmung (1.9) induziert in der Hyperfläche (1.1) eine Maßbestimmung mit dem Maßtensor

¹⁰⁾ Er wurde von L. KOSCHMIEDER, [13], § 8 eingeführt.

¹¹⁾ Vgl. etwa (für $n=3$) O. BOLZA, [3], S. 684. Wir betrachten auch Felder, die nicht von Extremalen gebildet sind.

$$(1.11) \quad g_{\alpha\beta} = g_{ik}(x(v), p(v)) x_{\alpha}^i x_{\beta}^k.$$

Es ist

$$(1.12) \quad \det (g_{\alpha\beta}) = F^2(x(v), p(v)).^{12)}$$

Somit existiert das zu den $g_{\alpha\beta}$ reziproke System $g^{\alpha\beta}$, und es kann mittels der $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ das Hinunter- und Heraufziehen griechischer Zeiger in der gewöhnlichen Weise erklärt werden.

Aus (1.12) folgt, daß längs der Hyperflächen eines Feldes (1.10) die Begriffe „ $(n-1)$ -dimensionale Oberfläche“ in der Cartanschen und in der längs des Feldes oskulierenden Riemannschen Maßbestimmung zusammenfallen.

Als Einheitsvektor der Normalen wird in jedem Hyperflächenelement der Normalen-Einheitsvektor des Elementes in der diesem zugeordneten euklidischen Maßbestimmung definiert. Seine kovarianten Komponenten sind also durch

$$(1.13) \quad l_i x_{\rho}^i = 0, \quad g^{ik} l_i l_k = 1$$

bestimmt, wenn man das Hyperflächenelement in eine Hyperfläche eingebettet denkt. Da die Hyperfläche orientiert ist, folgt aus den $n-1$ ersten dieser Gleichungen $l_i = \varrho p_i$, $\varrho > 0$. Die letzte ergibt sodann mit Rücksicht auf (1.7)

$$(1.14) \quad l_i = \frac{\sqrt{g}}{F} p_i.$$

Für die kontravarianten Komponenten des Normalen-Einheitsvektors erhält man aus (1.7), (1.14) wegen der Homogenität von F

$$(1.15) \quad l^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial p_i}.$$

Der Normalen-Einheitsvektor ist seiner Erklärung nach längs eines Hyperflächenfeldes der Cartanschen und der längs des Feldes oskulierenden Riemannschen Maßbestimmung gemeinsam. Der Begriff „Senkrechtstehen“ zu den Hyperflächen des Feldes in der oskulierenden Riemannschen Maßbestimmung fällt also mit dem Begriff „Transversalität zu den Hyperflächen des Feldes“ zusammen.

Der Vektor dx^i im Hyperflächenelement (x, p) , der vom Punkte x^i des Elementes zum beliebigen Nachbarpunkt $x^i + dx^i$ führt, hat in der dem Hyperflächenelement zugeordneten euklidischen Maßbestimmung die Transversal- oder Normalkomponente

¹²⁾ Anhang, B.

$$(1.16) \quad \omega(d) = l_i dx^i = \frac{\sqrt{g}}{F} p_i dx^i \text{ }^{13)}.$$

Wird jedem Punkte einer Kurve $x^i = x^i(t)$ im Cartanschen Raum das Hyperflächenelement $(x(t), p(t))$ zugeordnet, das von der Kurve im Punkte $x^i(t)$ senkrecht durchsetzt wird, so kann man als *Bogenelement ds der Kurve* im Punkte $x^i(t)$ ihr Bogenelement in der dem Hyperflächenelement $(x(t), p(t))$ zugeordneten euklidischen Maßbestimmung erklären. ds ist dann durch

$$(1.17) \quad \frac{dx^i}{ds} = l^i(x(t), p(t))$$

definiert ¹⁴⁾.

Endlich erklären wir als *Rauminhalt* eines n -dimensionalen Bereiches in Bezug auf ein Feld (1.10) von Hyperflächen seinen Rauminhalt in der längs des Feldes oskulierenden Riemannschen Maßbestimmung (1.9), also das über den Bereich erstreckte n -fache Integral

$$(1.18) \quad V = \int_{(n)} \sqrt{g} dx^1 dx^2 \dots dx^n,$$

in dem die x, p (1.10) zu entnehmen sind ¹⁵⁾. Die Cartanschen Räume, in denen ein von der Wahl des Feldes (1.10) unabhängiger Rauminhalt existiert, also \sqrt{g} von den p_i unabhängig ist, bilden eine besonders wichtige Unterklasse. Sie sind durch das Verschwinden des Vektors

$$(1.19) \quad A^i = -F \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right).$$

gekennzeichnet ¹⁶⁾.

Außer dem Vektor A^i spielt in den Cartanschen Räumen auch der Tensor

$$(1.20) \quad A^{kij} = -\frac{1}{2} \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial g^{ki}}{\partial p_j}$$

eine Rolle, mit dem A^i vermöge

$$(1.21) \quad A_k{}^{ki} = A^i$$

zusammenhängt.

¹³⁾ Wenn kein Zweifel über die in $\omega(d)$ auftretenden Differentiale besteht, schreiben wir auch kurz ω .

¹⁴⁾ E. CARTAN, [4], IX. Abschnitt.

¹⁵⁾ L. KOSCHMIEDER, [10] ($n = 3$), [11] (n beliebig).

¹⁶⁾ E. CARTAN, [4], V. Abschnitt.

2. *Reguläre Cartansche Räume.* Ein Cartanscher Raum heißt *regulär*, wenn der Tensor

$$(2.1) \quad H^{ij} = g^{ij} + A_k A^{kij},$$

der wegen

$$(2.2) \quad A^{kij} = g^{ki} A^j - \frac{F}{4g^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial^3(F^2)}{\partial p_k \partial p_i \partial p_j}$$

symmetrisch ist, den Rang n hat. In einem solchen Raum läßt sich für Tensoren in einem beliebigen Hyperflächenelement ein invariantes Differential und damit auch eine Parallelübertragung nach einem willkürlichen Nachbarelement durch invariante Forderungen eindeutig festlegen, wie Herr E. Cartan gezeigt hat¹⁷⁾. Um die Parameter $\Gamma_{ih}^{*k} = \Gamma_{hi}^{*k}$ dieser Parallelübertragung ausführlich anzuschreiben, bezeichnen wir das zu $H_h^p = g_{hj} H^{jp}$ inverse System mit K_k^g , ferner die Christoffelsymbole erster Art für den Maßtensor g_{ik} des Cartanschen Raumes mit Γ_{ijh} :

$$(2.3) \quad \Gamma_{ijh} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{hi}}{\partial x^j} \right)$$

und deuten endlich Überschiebung mit dem Normalen-Einheitsvektor durch den Zeiger Null an; z.B.

$$(2.4) \quad \Gamma_{r0h}^* = \Gamma_{rh}^* l_j = \Gamma_{rjh}^* l_j, \quad \Gamma_{r00} = \Gamma_{rjh} l^j l^h = \Gamma_{rh}^j l_j l^h.$$

Dann ist

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \Gamma_{ijh}^* &= g_{jk} \Gamma_{ih}^{*k} = \Gamma_{ijh} + A_{ij}^m (\Gamma_{m0h} - l_h \Gamma_{m00}) + \\ &+ A_{hj}^m (\Gamma_{m0i} - l_i \Gamma_{m00}) - A_{ih}^m (\Gamma_{m0j} - l_j \Gamma_{m00}) + \\ &+ (A_{ij}^m l_h + A_{hj}^m l_i - A_{ih}^m l_j - A_{ij}^p A_{ph}^m - A_{hj}^p A_{pi}^m + \\ &+ A_{ih}^p A_{pj}^m) \cdot K_m^r (\Gamma_{r00} + A^q \Gamma_{q0r}). \end{aligned}$$

Wir benötigen im Folgenden nur das *invariante Differential* Dl_i des Normalen-Einheitsvektors l_i

$$(2.6) \quad Dl_i = (\delta_i^r - l_i A^r) (dl_r - \Gamma_{r0h}^* dx^h)^{18)}.$$

Wegen $Dg_{ik} = 0$, $l^i l_i = 1$ gilt $l^i Dl_i = 0$. $Dl_i = 0$ definiert die Parallelübertragung des Hyperflächenelementes (x, p) vom Punkte x^i nach dem Punkte $x^i + dx^i$. Ferner ist der quadrierte Winkel $d\varphi^2$ zweier benachbarter Hyperflächenelemente (x, p) , $(x + dx, p + dp)$ durch

$$(2.7) \quad d\varphi^2 = g^{ik} Dl_i Dl_k$$

¹⁷⁾ E. CARTAN, [4], bes. VI. Abschnitt.

¹⁸⁾ In dieser Gestalt bei L. BERWALD, [1].

erklärt, wo Dl_i das den Zuwüchsen dx^i, dp_i entsprechende invariante Differential (2.6) ist ¹⁹⁾.

Liegt in einem regulären Cartanschen Raum eine Hyperfläche (1.1) vor, und bezieht sich dx^h auf ein Fortschreiten in der Hyperfläche, so definiert

$$(2.8) \quad x^i_{\rho} Dl_i = -a_{\rho\sigma} dv^{\sigma}$$

den zweiten Fundamentaltensor der Hyperfläche und

$$(2.9) \quad \mathfrak{R} = \frac{a_{\rho\sigma} dv^{\rho} dv^{\sigma}}{g_{\rho\sigma} dv^{\rho} dv^{\sigma}}$$

ihre Normalkrümmung ²⁰⁾. Die stationären Werte der Normalkrümmung heißen die Hauptkrümmungen $\frac{1}{R_{\alpha}}$ der Hyperfläche. Sie sind die Wurzeln der Gleichung

$$(2.10) \quad \det \left(\frac{1}{R} g_{\rho\sigma} - a_{\rho\sigma} \right) = 0$$

und daher dann und nur dann alle ungleich Null, wenn $\det(a_{\rho\sigma}) \neq 0$.

Eine Hyperfläche heißt *geodätisch* oder eine *Hyperebene*, wenn ihre Elemente auseinander durch Parallelübertragung längs der Hyperfläche hervorgehen. Hyperebenen sind offenbar durch $a_{\rho\sigma} = 0$ gekennzeichnet.

3. *Die metrische Dualität der Cartanschen Räume mit $A^i = 0$* ²¹⁾. In einem beliebigen Cartanschen Raum wird durch

$$(3.1) \quad x'^i = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{1}{2} \frac{F^2}{g} (x, p) \right) = \frac{F}{\sqrt{g}} (l^i - A^i)$$

jedem Hyperflächenelement (x, p) ein Linienelement (x, x') im gleichen Punkte x^i zugeordnet. Dieses Linienelement ist wegen $l_i A^i = 0$ nur in den Räumen mit $A^i = 0$ im Sinne der Maßbestimmung des Cartanschen Raumes stets senkrecht zum Hyperflächenelement (x, p) . Wir setzen in dieser Nummer durchwegs $A^i = 0$ voraus. Dann lautet die Zuordnung (3.1)

$$(3.2) \quad x'^i = \frac{F}{g} \frac{\partial F}{\partial p_i} = \frac{F}{\sqrt{g}} l^i.$$

¹⁹⁾ E. CARTAN, [4], IV. Abschnitt (für zwei Hyperflächenelemente im gleichen Punkt); L. BERWALD, [1], Nr. 6 (allgemein).

²⁰⁾ L. BERWALD, [1], Nr. 25.

²¹⁾ Vgl. E. CARTAN, [5], XII. Abschnitt, wo dasselbe in umgekehrter Richtung gemacht wird.

Aus (3.2) ergibt sich umgekehrt

$$(3.3) \quad g_{ik}x'^i = \frac{F}{\sqrt{g}} l_k = p_k.$$

Weiter folgt, wenn der Punkt x^i festgehalten wird,

$$(3.4) \quad dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial p_k} dp_k = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} F^2 \right)}{\partial p_i \partial p_k} dp_k = g^{ik} dp_k$$

und

$$(3.5) \quad dp_k = g_{ik} dx'^i.$$

Die Transformation (3.2) ist im Kleinen umkehrbar eindeutig, da die Funktionaldeterminante $\det \left(\frac{\partial x'^i}{\partial p_k} \right)$ wegen (3.4) und (1.7) den Wert

$$(3.6) \quad \det \left(\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_k} \left(\frac{F^2}{2g} \right) \right) = \frac{1}{g} > 0$$

hat. Wir können also

$$(3.7) \quad \bar{F}(x, x') = \frac{F}{\sqrt{g}}(x, p)$$

setzen, wo rechts für die p die Funktionen der x, x' einzusetzen sind, die sich aus (3.2) durch Auflösung ergeben. \bar{F} ist dann wesentlich positiv, ferner in den x' positiv homogen von erster Ordnung. Denn dem Übergang $p \rightarrow \varrho p$ ($\varrho > 0$) entspricht wegen der Homogenität von F vermöge (3.2) der Übergang $x'^i \rightarrow \varrho x'^i$ und vermöge (3.7) der Übergang $\bar{F} \rightarrow \varrho \bar{F}$.

Durch (3.7) wird somit dem betrachteten Cartanschen Raum mit $A^i = 0$ der Finslersche Raum mit dem Grundintegral

$$(3.8) \quad s = \int \bar{F}(x, x') dt$$

zugeordnet. Bezeichnen wir die Größen, die sich auf den Finslerschen Raum (3.8) beziehen, durch Überstreichen, so ergibt sich zunächst für den Einheitsvektor \bar{l}^i von der Richtung x'^i

$$(3.9) \quad \bar{l}^i = \frac{x'^i}{\bar{F}} = l^i.$$

Ferner ist wegen (3.2), (3.5), (3.3)

$$(3.10) \quad \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \bar{F}^2 \right)}{\partial x'^k} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{1}{2} \frac{F^2}{g} \right) \frac{\partial p_i}{\partial x'^k} = x'^i g_{ik} = p_k,$$

so daß wir wegen (3.5) für den Maßtensor \bar{g}_{jk} des Finslerschen Raumes

$$(3.11) \quad \bar{g}_{jk} = \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} \bar{F}^2 \right)}{\partial x'^j \partial x'^k} = \frac{\partial p_k}{\partial x'^j} = g_{jk}$$

erhalten. Dieser Maßtensor fällt also unter der Voraussetzung $A^i = 0$ mit dem Maßtensor g_{jk} des Cartanschen Raumes zusammen. Da sich zeigen läßt, daß das Gleiche infolge der Zuordnung (3.2) auch für die Parallelübertragung gilt²¹⁾, so folgt:

Ein Cartanscher Raum mit $A^i = 0$ läßt sich als Finslerscher Raum auffassen, wenn man jedem Hyperflächenelement das dazu senkrechte Linienelement im gleichen Punkte zuordnet.

Das durch (1.17) erklärte Bogenelement einer Kurve fällt in einem Cartanschen Raum mit $A^i = 0$ wegen (3.9) mit ihrem Bogenelement ds in der Finslerschen Maßbestimmung (3.8) zusammen. Ferner sind in einem solchen Cartanschen Raum die Kurven mit der Eigenschaft, daß die zu ihnen senkrechten Hyperflächenelemente durch Parallelübertragung längs der Kurve auseinander hervorgehen, identisch mit den Extremalen der Finslerschen Maßbestimmung (3.8).

4. *Mittlere extremale Krümmung und Extremalen.* Die erste Variation von F nimmt wegen $\delta x_\alpha^i = \frac{\partial \delta x^i}{\partial v^\alpha}$ nach einer Umformung durch Teilintegration die Gestalt

$$(4.1) \quad \delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha^i} \right) \delta x^i + \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(\frac{\partial F}{\partial x_\alpha^i} \delta x^i \right)$$

an. Für $\delta x^i = dx^i = x_\rho^i dx^\rho$ ergibt der letzte Summand rechts wegen

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha^i} x_\rho^i = F \delta_\rho^\alpha \quad (\delta_\rho^\alpha = 1 \text{ für } \alpha = \rho, = 0 \text{ für } \alpha \neq \rho)$$

denselben Wert dF wie die linke Seite. Also ist

$$(4.2) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha^i} \right) x_\rho^i = 0$$

oder

$$(4.3) \quad \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha^i} = W p_i.$$

W läßt sich in die Gestalt

²¹⁾ Vgl. Anhang, (A. 14) und (A. 2).

$$(4.4) \quad W = W(x^i; x_{\alpha}^i; x_{\alpha\beta}^i) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial p_k} - \frac{g}{F} g^{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}^k p_k$$

setzen ²³).

Wegen (4.1), (4.3), (1.16), (1.3) wird die erste Variation des Grundintegrals (1.3) bei fester $(n-2)$ -dimensionaler Berandung

$$(4.5) \quad \delta O = \int_{(n-1)} \delta F dv^1 dv^2 \dots dv^{n-1} = \int_{(n-1)} \frac{W}{\sqrt{g}} \omega(\delta) dO.$$

Somit ist der Ausdruck

$$(4.6) \quad H = -\frac{1}{n-1} \frac{W}{\sqrt{g}} = -\frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial p_k} - g^{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}^k l_k \right)$$

bei Koordinaten- und Parametertransformation invariant. H heißt die *mittlere extremale Krümmung* der Hyperfläche ²⁴), und die Hyperflächen mit $H = 0$ die *Extremalen*. Für einen Riemannschen Raum ist die mittlere extremale Krümmung mit der mittleren Krümmung identisch und die Extremalen daher mit den Minimalhyperflächen ²⁵).

Bettet man eine beliebige Hyperfläche in ein Feld (1.10) von Hyperflächen ein, so ist die mittlere extremale Krümmung in jedem Punkte der Hyperfläche gleich ihrer mittleren Krümmung in der Riemannschen Maßbestimmung, die längs des Feldes oskuliert. Insbesondere ist ein Feld von Extremalen in der längs des Feldes oskulierenden Riemannschen Maßbestimmung ein Feld von Minimalhyperflächen. Ein Beweis dieser Sätze folgt in Nr. 7.

§ 2. Die Koschmiedersche Normalform der zweiten Variation des „Oberflächen“-Integrals. Transversalkoordinaten.

5. *Ableitung der Normalform der zweiten Variation* ²⁶). Wir gehen jetzt von einer Extremalen aus. Dann ist wegen (4.5) und $W = 0$

$$(5.1) \quad \delta^2 O = \int_{(n-1)} \frac{\delta W}{\sqrt{g}} \omega(\delta) dO.$$

²³) Vgl. J. RADON, [16], sowie Anhang, C. Für $n = 2$ ist $p_1 = -y'$, $p_2 = x'$, $g = F^3 F_1$, $g^{\alpha\beta} = \frac{1}{F^2}$, also $W = -T$ mit $T = F_{xv'} - F_{v'x'} + F_1(x'y'' - y'x'')$.

²⁴) H wurde (abgesehen vom Zahlenfaktor $\frac{1}{n-1}$) von L. KOSCHMIEDER, [10], [11] eingeführt, von dem auch der Name herrührt.

²⁵) Vgl. Anhang, G.

²⁶) Vgl. L. KOSCHMIEDER, [12], [13].

Zur Berechnung der ersten Variation

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial W}{\partial x_\alpha^i} \delta x_\alpha^i + \frac{\partial^2 W}{\partial x_\alpha^i \partial x_\beta^j} \delta x_\alpha^i \delta x_\beta^j$$

hat man, bei zunächst beliebiger Ausgangshyperfläche ²⁷⁾.

$$(5.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial x_\alpha^i} = -\frac{\partial}{\partial v^\beta} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_i \right) - \frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial p_i}{\partial v^\beta}, \\ \frac{\partial W}{\partial x_\alpha^i \partial x_\beta^j} = -\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_i. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte ein, so ergibt sich nach kurzer Rechnung ²⁷⁾

$$(5.3) \quad \delta W = \left[\frac{\partial W}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial p_i}{\partial v^\beta} \right) \right] \delta x^i - \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial (p_i \delta x^i)}{\partial v^\beta} \right).$$

Da längs der Ausgangsextremalen $W = 0$ ist, so ist auch $dW = 0$, wenn tangential zu ihr differenziert wird. Aus (5.3) folgt also für $\delta x^i = dx^i = x_\rho^i dv^\rho$

$$(5.4) \quad \left[\frac{\partial W}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial p_i}{\partial v^\beta} \right) \right] x_\rho^i = 0.$$

Daher existiert eine Funktion F_2 der $x^i, x_\rho^i, x_\rho^\sigma, x_\rho^\sigma$, so daß

$$(5.5) \quad \frac{\partial W}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial p_i}{\partial v^\beta} \right) = F_2 p_i$$

ist ²⁸⁾. Setzen wir diesen Wert in (5.3) ein, so erhalten wir

$$(5.6) \quad \delta W = F_2 p_i \delta x^i - \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial (p_i \delta x^i)}{\partial v^\beta} \right).$$

Führen wir hier mittels (1.16) $\omega(\delta)$ an Stelle von $p_i \delta x^i$ ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen ²⁹⁾

$$(5.7) \quad \begin{cases} \delta W = -\sqrt{g} \left\{ \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(F g^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega}{\partial v^\beta} \right) + U_0^* \omega \right\} \\ \text{mit} \\ U_0^* = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(F g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial v^\beta} \left(\frac{\sqrt{g}}{F} \right) \right) - \frac{F}{g} F_2. \end{cases}$$

U_0^* ist bei Koordinaten- und Parametertransformationen invariant ³⁰⁾.

²⁷⁾ Anhang, D.

²⁸⁾ Bei L. KOSCHMIEDER, [12], [13] ist F_2 mit L bezeichnet.

²⁹⁾ Anhang, E.

³⁰⁾ U_0^* wurde von L. KOSCHMIEDER, [13], S. 482 eingeführt. Für $n = 2$ reduziert sich U_0^* auf die Invariante K von A. L. UNDERHILL, [17].

Die „akzessorische“ Differentialgleichung $\delta W = 0$ oder

$$(5.8) \quad \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(F g^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega}{\partial v^\beta} \right) + U_0^* \omega = 0$$

stellt die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß die durch Variation aus einer Extremalen entstandene Hyperfläche in erster Annäherung wieder eine Extremale ist. In (5.8) geht nur die Normalkomponente $\omega(\delta)$ der Variation δx^i ein; die Tangentialkomponente bleibt willkürlich.

Für die zweite Variation des Grundintegrals von einer Extremalen ($W=0$) aus bei fester $(n-2)$ -dimensionaler Berandung ergibt sich jetzt aus (5.1), (5.7) und (1.3) durch eine Teilintegration die in anderer Schreibweise von L. Koschmieder angegebene Normalform

$$(5.9) \quad \delta^2 O = \int_{(n-1)} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega}{\partial v^\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial v^\beta} - U_0^* \omega^2 \right) dO. \quad 31)$$

6. *Geometrisches zur Normalform der zweiten Variation.* Es liege in einem regulären Cartanschen Raum eine beliebige Hyperfläche (nicht notwendig eine Extremale) vor. Dann hängt der in die Normalform (5.9) eingehende Vektor $-\frac{\partial \omega}{\partial v^\alpha}$ der Hyperfläche mit dem invarianten Differential des Normalen-Einheitsvektors

$$(6.1) \quad \Delta l_i = (\delta_r^i - l_i A^r)(\delta l_r - \Gamma_{r\sigma h}^* \delta x^h),$$

das der Variation δx^i entspricht, vermöge

$$(6.2) \quad -\frac{\partial \omega}{\partial v^e} = x_\rho^i \Delta l_i + a_\rho^\sigma g_{ij} (\delta x^i + A^i \omega(\delta)) x_\sigma^j$$

zusammen ³²⁾. Es ist also immer

$$(6.2^*) \quad -\frac{\partial \omega}{\partial v^e} = x_\rho^i \Delta l_i,$$

falls die Ausgangshyperfläche eine Hyperebene ist [Nr. 2]. Bei willkürlicher Ausgangshyperfläche gilt (6.2*) jedenfalls dann, wenn so variiert wird, daß

$$(6.3) \quad \delta x^i = \omega(\delta)(l^i - A^i)$$

³¹⁾ L. KOSCHMIEDER, [13], S. 482.

³²⁾ Anhang, F.

ist; in den Räumen mit $A^i = 0$ also gewiß dann, wenn die Variation senkrecht zur Hyperfläche erfolgt. Wenn alle Hauptkrümmungen der Hyperfläche ungleich Null sind [Nr. 2] so sind die Variationen (6.3) auch die einzigen, für die $-\frac{\partial\omega}{\partial v^e} = x_{\varrho}^i \Delta l_i$ ist. In allen diesen Fällen stellt der in die Normalform (5.9) eingehende Skalar $g^{\alpha\beta} \frac{\partial\omega}{\partial v^\alpha} \frac{\partial\omega}{\partial v^\beta}$ den quadrierten Winkel $\delta\varphi^2$ des ursprünglichen und des variierten Hyperflächenelementes dar.

Die Bedeutung von U_0^* ist für einen *Riemannschen* Raum

$$(6.4) \quad F = \sqrt{g(x)g^{ik}(x)p_i p_k}$$

leicht anzugeben³³⁾. Es seien $\Gamma_{ih}^j = g^{jk}\Gamma_{ikh}$ die Christoffelsymbole zweiter Art für den Maßstensor g_{ik} ,

$$(6.5) \quad R_{ihk}^j = \frac{\partial\Gamma_{ih}^j}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial x^h} + \Gamma_{ih}^m \Gamma_{mk}^j - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mh}^j$$

der *Krümmungstensor* des Riemannschen Raumes und

$$(6.6) \quad R_{ih} = R_{ih}^r$$

seine Verjüngung; ferner $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \dots, \frac{1}{R_{n-1}}$ die *Hauptkrümmungen* der Extremalen und

$$(6.7) \quad K = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{\alpha > \beta} \frac{1}{R_\alpha R_\beta}.$$

Dann ist

$$(6.8) \quad \boxed{U_0^* = R_{ih} l^i l^h - (n-1)(n-2)K. \text{ }^{33a)}$$

Zur geometrischen Deutung von (6.8) seien m_α^i $n-1$ paar-

³³⁾ Anhang, G. Allgemein hat L. BERWALD, [1] Nr. 33 für einen beliebigen regulären Cartanschen Raum U_0^* durch die Krümmung und Torsion des Raumes und der Extremalen ausgedrückt. Dieser Arbeit ist zu entnehmen, daß die Beziehung (6.8) auch noch für die Cartanschen Räume mit $A^i = 0$ gültig bleibt.

^{33a)} Nachträglich bemerke ich, dass Herr A. DUSCHEK für die zweite Variation der Oberfläche einer allgemeinen Fläche von beliebiger Dimension im Riemannschen Raum eine Formel aufgestellt hat, aus der für Minimalhyperflächen die Formel (6.8) ohne Schwierigkeit folgt. Vgl. A. DUSCHEK, Zur geometrischen Variationsrechnung, 3. Mitteilung, Das Variationsproblem der F_m im Riemannschen R_n und eine Verallgemeinerung des Gauß-Bonnetschen Satzes [Math. Zeitschr. 40 (1935), 279—291], bes. (1.12) und (3.30).

weise senkrechte Einheitsvektoren im betrachteten Punkte der Extremalen tangential zu dieser und

$$(6.9) \quad (n, \alpha) = R_{ijhk} m_{\alpha}^i m_{\alpha}^h l^j l^k \quad (R_{ijhk} = g_{jr} R_{ihk}^r)$$

das *Riemannsche Krümmungsmaß* des Raumes in der durch den Normalen-Einheitsvektor l^i der Extremalen und den Vektor m_{α}^i bestimmten Flächenrichtung. Dann ist der Minuend rechts in (6.8) gleich $\sum_{\alpha} (n, \alpha)$ ³⁴⁾. Ferner gilt für eine Extremale nach Nr. 4

$$(6.10) \quad \sum_{\alpha} \frac{1}{R_{\alpha}} = 0.$$

Daher ergibt sich

$$(6.11) \quad \boxed{U_0^* = \sum_{\alpha} \left[(n, \alpha) + \frac{1}{R_{\alpha}^2} \right].}$$

In die akzessorische Differentialgleichung (5.8) gehen ausschließlich die Größen F , $g^{\alpha\beta}$, ω ein, die in jedem Hyperflächenelement der Ausgangsextremalen nur von der ihm zugeordneten euklidischen Maßbestimmung abhängen, sowie ihre partiellen Ableitungen nach den Parametern der Extremalen. Bettet man also eine Extremale des Cartanschen Raumes in ein willkürliches Feld (1.10) von Hyperflächen ein, so hat die längs des Feldes oskulierende Riemannsche Maßbestimmung in jedem Hyperflächenelement der Extremalen dieselbe Invariante U_0^* wie die Cartansche Maßbestimmung. U_0^* drückt sich also für eine Extremale, die in ein Feld von Hyperflächen eingebettet ist, vermöge (6.8) durch den verjüngten Krümmungstensor der längs des Feldes oskulierenden Riemannschen Maßbestimmung und durch die Invariante K der Extremalen in dieser Maßbestimmung aus. Besteht das ganze Feld aus Extremalen, so gilt das für jede Hyperfläche des Feldes.

7. *Transversalkoordinaten.* Als Transversalkoordinaten bezeichnen wir Koordinaten, deren Parameterlinien $x^1 = \text{konst.}$, $x^2 = \text{konst.}$, . . ., $x^{n-1} = \text{konst.}$ senkrecht zu den Koordinaten-Hyperflächen $x^n = \text{konst.}$ sind. Wir wählen außerdem auf den Hyperflächen $x^n = \text{konst.}$ die x^{α} als Parameter, so daß

³⁴⁾ G. HERGLOTZ, [9].

$$(7.1) \quad \begin{cases} x_\alpha^k = \delta_\alpha^k & (=1 \text{ für } k = \alpha; = 0 \text{ für } k \neq \alpha), & x_{\alpha\beta}^k = 0; \\ p_\alpha = 0, & p_n = 1 \end{cases}$$

wird. Transversalkoordinaten sind durch

$$(7.2) \quad l^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} = 0$$

gekennzeichnet. Wegen der Annahme $v^\alpha = x^\alpha$ stehen hier links die Argumente $x^1, x^2, \dots, x^n; 0, 0, \dots, 0, 1$ ³⁵⁾. Aus (7.2) folgt wegen der Homogenität von F

$$(7.3) \quad \frac{\partial F}{\partial p_n} = F, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_n} = 0.$$

Mit Rücksicht auf (1.14), (1.15) ergibt sich aus den vorstehenden Gleichungen

$$(7.4) \quad l_\alpha = 0, \quad l_n = \frac{\sqrt{g}}{F}, \quad l^n = \frac{F}{\sqrt{g}},$$

ferner wegen (1.7), (1.8)

$$(7.5) \quad \begin{cases} g^{\alpha n} = 0, & g^{nn} = \frac{F^2}{g}, \\ g_{\alpha n} = 0, & g_{nn} = \frac{g}{F^2}, \end{cases}$$

wo g_{ik} der Maßtensor der längs des Feldes $x^n = \text{konst.}$ oskulierenden Riemannschen Maßbestimmung ist. Über n ist dabei nicht zu summieren.

Weiter folgt aus (4.4), (7.1)—(7.3)

$$(7.6) \quad W(x^1, \dots, x^n; 0, \dots, 0, 1; 0, \dots, 0, 0) = \frac{\partial F}{\partial x^n}$$

und aus (5.5) und (7.1)

$$(7.7) \quad F_2(x^1, \dots, x^n; 0, \dots, 0, 1; 0, \dots, 0, 0; 0, \dots, 0, 0) = \frac{\partial^2 F}{(\partial x^n)^2}.$$

Daher ist wegen (4.6) die mittlere extremale Krümmung der Hyperflächen $x^n = \text{konst.}$

$$(7.8) \quad H = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial x^n}.$$

Wir beweisen jetzt den am Ende von Nr. 4 ausgesprochenen

³⁵⁾ Im Folgenden sind in (7.3)—(7.5), (7.11)—(7.14) durchwegs, in (7.6)—(7.8) rechts, in (7.15), (7.16) links die Argumente $x^1, x^2, \dots, x^n; 0, 0, \dots, 0, 1$ zu setzen.

Satz. Dabei benutzen wir die folgenden Formeln der Riemannschen Geometrie

$$(7.9) \quad \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^n} = \Gamma_{nr}^r, \quad \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^n} = -g^{is} \Gamma_{sn}^k - g^{ks} \Gamma_{sn}^i,$$

sowie die Ableitungsgleichungen

$$(7.10) \quad \frac{\partial l^i}{\partial v^\beta} + l^h \Gamma_{hk}^i x_\beta^k = -a_\beta^\alpha x_\alpha^i$$

einer Hyperfläche (1.1) mit dem Normalen-Einheitsvektor l^i und den Fundamentaltensoren $g_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$ im Riemannschen Raum.

Es liege nun im Cartanschen Raum ein beliebiges Feld von Hyperflächen vor, die wir zu Hyperflächen $x^n = \text{konst.}$ eines Transversalkoordinatensystems machen. Wir vereinbaren, daß in den folgenden Gleichungen dieser Nummer über n nicht summiert werden soll. Wegen (7.5) gilt dann für die längs des Feldes oskulierende Riemannsche Maßbestimmung

$$(7.11) \quad F = (g g^{nn})^{\frac{1}{2}}$$

und daher

$$(7.12) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial x^n} = \frac{1}{2} \sqrt{g^{nn}} \frac{\partial \log g}{\partial x^n} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g^{nn}}} \frac{\partial g^{nn}}{\partial x^n}.$$

Nun ist wegen (7.9) und (7.5)

$$(7.13) \quad \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^n} = \Gamma_{n\alpha}^\alpha + \Gamma_{nn}^n, \quad \frac{\partial g^{nn}}{\partial x^n} = -2g^{nn} \Gamma_{nn}^n$$

und daher mit Rücksicht auf (7.4), (7.5)

$$(7.14) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial x^n} = \sqrt{g^{nn}} \Gamma_{n\alpha}^\alpha = l^n \Gamma_{n\alpha}^\alpha.$$

Andererseits folgt aus (7.10) für die Hyperflächen $x^n = \text{konst.}$ in der längs ihnen oskulierenden Riemannschen Maßbestimmung für $i = \alpha$, $v^\alpha = x^\alpha$ wegen (7.1), (7.2)

$$(7.15) \quad l^n \Gamma_{n\beta}^\alpha = -a_\beta^\alpha.$$

Also wird schließlich

$$(7.16) \quad -\frac{1}{n-1} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial x^n} = \frac{1}{n-1} a_\alpha^\alpha.$$

Diese Gleichung sagt wegen (7.8) aus, daß die mittlere extremale Krümmung der Hyperflächen $x^n = \text{konst.}$ mit ihrer mittleren

Krümmung in der längs dieser Hyperflächen oskulierenden Riemannschen Maßbestimmung zusammenfällt, w.z.b.w.

Auf ähnliche Weise kann man auch die Sätze vom Ende der Nr. 6 durch Rechnung bestätigen.

§ 3. Parallelerflächen.

8. *Infinitesimale Paralleltransformation und Parallelerflächen.* Die infinitesimale Paralleltransformation ist jene homogene infinitesimale Berührungstransformation, die den Koordinaten x^i, p_i der Hyperflächenelemente (x, p) solche Zuwüchse $\delta x^i, \delta p_i$ erteilt, daß die Normalkomponente

$$(8.1) \quad \omega(\delta) = l_i \delta x^i = \frac{\sqrt{g}}{F} p_i \delta x^i = (F^{3-n} F_1)^{\frac{1}{2(n-1)}} p_i \delta x^i$$

des Vektors δx^i den konstanten Wert $\delta\tau$ erhält. Sie hat die charakteristische Funktion

$$(8.2) \quad \xi(x, p) = \frac{F}{\sqrt{g}} = (F^{3-n} F_1)^{-\frac{1}{2(n-1)}},$$

wo auch rechts die Argumente x, p zu denken sind. Ihre Gleichungen lauten also

$$(8.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \delta x^i = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{F}{\sqrt{g}} \right) \delta\tau = (l^i - A^i) \delta\tau, \\ \text{(b)} \quad \delta p_i = - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{F}{\sqrt{g}} \right) \delta\tau. \end{array} \right.$$

Aus (8.3a) folgt, daß in einem regulären Cartanschen Raum durch die infinitesimale Paralleltransformation jedes Hyperflächenelement (x, p) im Sinne des in diesem Raum herrschenden Parallelismus vom Punkte x^i nach dem Punkte $x^i + (l^i - A^i) \delta\tau$ parallel übertragen wird. Denn bettet man das Hyperflächenelement in eine Hyperfläche (1.1) ein, so gilt wegen (6.2), (6.3) für das invariante Differential Δl_i des Normalen-Einheitsvektors, das der Variation (8.3a) entspricht, $x^i_{,q} \Delta l_i = - \frac{\partial \omega(\delta)}{\partial v^e}$. Δl_i ist also Null, da $\omega(\delta)$ konstant ist ³⁶⁾.

³⁶⁾ Man bestätigt das auch leicht direkt: Wegen $\delta \left(\frac{F}{\sqrt{g}} \right) = 0$ ist nach L. BERWALD, [1], Nr. 8

$$\delta l_r = \frac{\sqrt{g}}{F} \delta p_r = - \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\frac{F}{\sqrt{g}} \right) \delta\tau = (l^h - A^h) \Gamma_{\lambda\sigma r}^* \delta\tau = \Gamma_{\lambda\sigma r}^* \delta x^h,$$

was wegen (6.1) und $\Gamma_{\lambda\sigma r}^* = \Gamma_{r\sigma\lambda}^*$ mit $\Delta l_i = 0$ gleichbedeutend ist.

Die infinitesimale Paralleltransformation soll insbesondere eine *Dilatation* genannt werden, wenn die Verschiebung δx^i für jedes Hyperflächenelement (x, p) senkrecht zum Element erfolgt. Wegen (8.3a) und $l_i A^i = 0$ gibt es Dilatationen nur in den Räumen mit $A^i = 0$ ³⁷⁾.

Wir definieren jetzt die Begriffe: Parallelhyperebenen und Breitenabstand.

Eine Hyperflächenschar

$$(8.4) \quad S(x^i) = \tau$$

heißt eine Schar von Parallelhyperebenen und S der zugehörige Breitenabstand, wenn die willkürliche Hyperfläche τ der Schar durch infinitesimale Paralleltransformation in die Hyperfläche $\tau + \delta\tau$ der Schar übergeht.

Es wird mit anderen Worten verlangt, daß bei Vernachlässigung von Gliedern höherer als erster Ordnung in den δx^i

$$(8.5) \quad S(x^i + \delta x^i) - S(x^i) = \delta\tau,$$

also $\frac{\partial S}{\partial x^i} \delta x^i = p_i \delta x^i = \delta\tau$ gilt. Mit Rücksicht auf die Definition (8.1) der infinitesimalen Paralleltransformation folgt aus der gestellten Forderung die partielle Differentialgleichung

$$(8.6) \quad \frac{\sqrt{g}}{F} \left(x^i, \frac{\partial S}{\partial x^i} \right) = 1$$

oder

$$(8.7) \quad F^{3-n} \left(x^i, \frac{\partial S}{\partial x^i} \right) F_1 \left(x^i, \frac{\partial S}{\partial x^i} \right) = 1.$$

Zu einer willkürlich gegebenen Ausgangshyperfläche läßt sich durch Integration der Differentialgleichung (8.7) eindeutig eine Schar von Parallelhyperebenen (8.4) bestimmen, für die S der Breitenabstand ist. Sind τ_1 und τ_2 in (8.4) die Werte des Breitenabstandes S für zwei Hyperflächen der Schar, so nennen wir $\tau_2 - \tau_1$ den Breitenabstand der beiden Parallelhyperebenen.

Für einen *Riemannschen* Raum (6.4) lautet die Differentialgleichung (8.7)

$$(8.8) \quad A_1(S) = 1,$$

wo $A_1(S) = g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k}$ der erste Differentialparameter ist. In

³⁷⁾ Vgl. E. CARTAN, [4], X. Abschnitt.

einem Riemannschen Raum sind also Parallelhyperflächen mit geodätisch parallelen Hyperflächen identisch, und der Breitenabstand mit der Bogenlänge der zu ihnen senkrechten geodätischen Linien, gerechnet von einer festen Hyperfläche der Schar aus ³⁸⁾.

Wenn ein System von Transversalkoordinaten vorliegt, in dem die Hyperflächen $x^n = \text{konst.}$ Parallelhyperflächen mit dem Breitenabstand x^n sind, so gilt wegen (8.6), (7.2)—(7.5)

$$(8.9) \quad l^i = \delta_n^i, \quad l_i = \delta_i^n$$

und

$$(8.10) \quad \begin{cases} g^{\alpha n} = 0, & g^{nn} = 1, \\ g_{\alpha n} = 0, & g_{nn} = 1, \end{cases}$$

wo über n nicht zu summieren ist. Das quadrierte Bogenelement der längs $x^n = \text{konst.}$ oskulierenden Riemannschen Maßbestimmung nimmt also die geodätische Form

$$(8.11) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + (dx^n)^2$$

an.

Für die mittlere extremale Krümmung der Parallelhyperflächen $x^n = \text{konst.}$ ergibt sich aus (7.8) und (8.6)

$$(8.12) \quad H = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x^n}.$$

In (8.9)—(8.12) stehen in den Funktionen $F, l^i, l_i, g_{ik}, g^{ik}$ überall die Argumente $x^1, x^2, \dots, x^n; 0, 0, \dots, 0, 1$.

Ist die Hyperfläche $x^n = 0$ Extremale, also

$$(8.13) \quad \frac{\partial F}{\partial x^n}(x^1, \dots, x^{n-1}, 0; 0, \dots, 0, 1) = 0,$$

so ist wegen (7.7), (5.7) und (8.6) für sie

$$(8.14) \quad U_0^* = -\frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{(\partial x^n)^2},$$

wo rechts dieselben Argumente stehen wie in (8.13).

9. *Die orthogonalen Trajektorien einer Schar von Parallelhyperflächen und die geometrische Bedeutung des Breitenabstandes.* Von den geometrischen Eigenschaften der Parallelhyperflächen

³⁸⁾ Vgl. etwa L. P. EISENHART, [7], S. 57 f.

und des Breitenabstandes in Riemannschen Räumen bleibt in einem allgemeinen Cartanschen Raum nur die folgende erhalten:

Je zwei Parallelhyperflächen derselben Schar schneiden aus allen orthogonalen Trajektorien der Schar die gleiche Bogenlänge aus und diese ist ihr Breitenabstand. Wenn umgekehrt eine Kurvenkongruenz Normalenkongruenz ist und je zwei der zur Kongruenz senkrechten Hyperflächen aus allen Kurven der Kongruenz dieselbe Bogenlänge ausschneiden, so sind diese Hyperflächen Parallelhyperflächen.

Beweis: Es liege eine Normalenkongruenz vor, und es sei

$$(9.1) \quad S(x^i) = \text{konst.}$$

die Schar der zur Kongruenz senkrechten Hyperflächen. s sei die durch (1.17) erklärte Bogenlänge auf den Kurven der Kongruenz. Dann gilt wegen (1.15) und der Homogenität von F

$$(9.2) \quad \frac{dS}{ds} = \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds} = p_i l^i = \frac{F}{\sqrt{g}} \left(x^i, \frac{\partial S}{\partial x^i} \right).$$

Für eine Schar von Parallelhyperflächen (9.1) mit dem Breitenabstand S folgt aus (8.6) und (9.2)

$$(9.3) \quad S = s - s_0.$$

Umgekehrt folgt aus (9.3) und (9.2) die Differentialgleichung (8.6) der Parallelhyperflächen.

In einem beliebigen regulären Cartanschen Raum sind die orthogonalen Trajektorien einer Schar von Parallelhyperflächen nicht notwendig Extremalen des Variationsproblems $\delta s = 0$ und die Hyperflächenelemente der Parallelhyperflächen längs einer solchen Trajektorie im allgemeinen auch nicht parallel. Dagegen verhalten sich in dieser Hinsicht die Cartanschen Räume mit $A^i = 0$ ebenso wie die Riemannschen Räume:

In den Cartanschen Räumen mit $A^i = 0$ ist jede Schar von Parallelhyperflächen Transversalschar eines Feldes von Extremalen des Variationsproblems $\delta s = 0$ und umgekehrt jede Transversalschar einer aus Extremalen dieses Variationsproblems bestehenden Normalenkongruenz eine Schar von Parallelhyperflächen³⁹⁾.

Dieser Satz beruht darauf, daß sich nach Nr. 3 jeder Cartansche

³⁹⁾ Für $n = 2$ sind die Riemannschen Räume die einzigen Cartanschen Räume mit $A^i = 0$, da $A^i = 0$ in diesem Fall das Verschwinden des sogenannten Hauptskalars bedeutet. Ein Beispiel für einen nicht-Riemannschen Cartanschen Raum mit $A^i = 0$ ist etwa

$$F = (p_1 p_2 \cdots p_n)^{\frac{1}{n}}, \quad n \text{ ungerade, } > 1.$$

Raum mit $A^i = 0$ als Finslerscher Raum mit der Grundfunktion (3.7) auffassen läßt, und ist nur ein besonderer Fall eines bekannten Satzes der Variationsrechnung über geodätisch parallele Hyperflächen im Falle des Grundintegrals (3.8). Sein erster Teil folgt mit Hilfe der Schlußbemerkung von Nr. 3 auch daraus, daß nach Nr. 8 in einem Cartanschen Raum mit $A^i = 0$ die Hyperflächenelemente einer Schar von Parallelhyperflächen längs einer orthogonalen Trajektorie der Schar durch Parallelübertragung aus einander hervorgehen und kann übrigens mit Hilfe der Gleichungen in Nr. 3 auch rechnerisch leicht bestätigt werden.

Infolge des letzten Satzes ergeben sich in den Cartanschen Räumen mit $A^i = 0$ aus einer vollständigen Lösung

$$(9.4) \quad S(x^i, a_\alpha) = \tau \quad (a_\alpha, \tau \text{ Konstanten})$$

der Differentialgleichung (8.6) der Parallelhyperflächen die Gleichungen der Extremalen der entsprechenden Finslerschen Maßbestimmung in der Gestalt

$$(9.5) \quad \frac{\partial S}{\partial a_\alpha} = b_\alpha \quad (b_\alpha \text{ Konstanten}).$$

10. Eine kennzeichnende Eigenschaft der Parallelhyperflächen ⁴¹⁾. Es sei Γ die Schar der Parallelhyperflächen zu einer beliebigen Ausgangshyperfläche Γ_0 , deren Breitenabstand $S(x^i)$ von Γ_0 der Ungleichung $0 \leq S \leq S_1$ genügt. Die Parallelhyperfläche mit dem Breitenabstand S_1 von Γ_0 heiße Γ_1 . Wir denken uns in stetig veränderlicher Weise auf den Hyperflächen Γ $(n-1)$ -dimensionale Bereiche von gleicher „Oberfläche“ O abgetragen. Der Ort der Randpunkte dieser Bereiche ist eine Hyperfläche \mathfrak{R} . Wir berechnen den Rauminhalt V des von Γ_0 , Γ_1 und \mathfrak{R} begrenzten Raumbereiches in Bezug auf das Feld der Parallelhyperflächen Γ . Dazu führen wir ein im übrigen beliebiges Koordinatensystem x^i ein, in dem die Hyperflächen Γ die Koordinatenhyperflächen $x^n = \text{konst.}$ und $x^n = S$ der Breitenabstand der Parallelhyperflächen

⁴⁰⁾ In anderer Weise wurde der Begriff der infinitesimalen Paralleltransformation vom Riemanschen Fall auf den Fall des einfachsten Variationsproblems in der inhomogenen Form $\delta \int f(x, y^\alpha, y'^\alpha) dx = 0$ von F. ENGEL, [8] ($n = 2$) und H. LIEBMANN, [15] verallgemeinert. H. LIEBMANN, [14] erörtert auch den Zusammenhang der Engelschen Paralleltransformation mit der Charakteristikentheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

⁴¹⁾ Für $n = 2$ (zweidimensionaler Finslerscher Raum) wurde diese Eigenschaft von Herrn P. FUNK gefunden. Vgl. L. BERWALD, [2], Nr. 5.

Γ von Γ_0 ist. Nach Voraussetzung ist dann

$$(10.1) \quad \int_{(n-1)} F(x^1, x^2, \dots, x^n; 0, 0, \dots, 0, 1) dx^1 dx^2 \dots dx^{n-1} = 0$$

von x^n unabhängig, ferner wegen (8.6)

$$(10.2) \quad g(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n; 0, 0, \dots, 0, 1) = F^2(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n; 0, 0, \dots, 0, 1),$$

also

$$(10.3) \quad V = \int_{(n)} \sqrt{g} dx^1 dx^2 \dots dx^n = \int_0^{S_1} \int_{(n-1)} F dx^1 dx^2 \dots dx^{n-1} dx^n = O \cdot S_1.$$

Diese Eigenschaft ist kennzeichnend: Es liege ein Feld von Hyperflächen $S(x^i) = \text{konst.}$ vor. Wir tragen in stetig veränderlicher Weise auf allen Hyperflächen des Feldes $(n-1)$ -dimensionale Bereiche von gleicher „Oberfläche“ O ab. \mathfrak{R} sei der Ort der Randpunkte dieser Bereiche, Γ_0 die Hyperfläche des Feldes, die dem Werte $S(x^i) = 0$ entspricht, Γ eine beliebige Hyperfläche des Feldes. Dann ist der Rauminhalt des von Γ_0 , Γ und \mathfrak{R} begrenzten Raumstückes in Bezug auf das Feld

$$(10.4) \quad V = \int_{(n)} \sqrt{g} dx^1 dx^2 \dots dx^n.$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit in dem für x^n in Betracht kommenden Intervall $\frac{\partial S}{\partial x^n} \neq 0$ voraussetzen. Als Parameter auf den Hyperflächen $S(x^i) = \text{konst.}$ wählen wir dann die x^α , so daß

$$(10.5) \quad p_\alpha = -\frac{\partial x^n}{\partial x^\alpha} = \frac{\frac{\partial S}{\partial x^\alpha}}{\frac{\partial S}{\partial x^n}}, \quad p_n = 1$$

ist. In \sqrt{g} stehen jetzt die Argumente $x^1, x^2, \dots, x^n, \frac{\partial S}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial S}{\partial x^n}, 1$.

Führen wir zur Auswertung des Integrals in (10.4) $x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, S$ als neue unabhängige Veränderliche ein, so ist

$$(10.6) \quad V = \int_0^S \int_{(n-1)} \sqrt{g} \Delta dx^1 dx^2 \dots dx^{n-1} dS$$

mit

$$(10.7) \quad \Delta = \frac{\partial x^n}{\partial S}, \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{\partial S}{\partial x^n}.$$

Soll V den Wert $O \cdot S$ haben, so muß für die oben angegebenen Argumente

$$(10.8) \quad \sqrt{g} \Delta = F$$

sein. Mit Rücksicht auf die Homogenität von F und (10.7) folgt hieraus

$$(10.9) \quad \frac{F}{\sqrt{g}} \left(x^1, x^2, \dots, x^n; \frac{\partial S}{\partial x^1}, \frac{\partial S}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x^n} \right) = 1.$$

Die Hyperflächen des Feldes sind also Parallelhyperflächen und S ihr Breitenabstand.

11. Geometrische Deutungen der mittleren extremalen Krümmung und der Invariante von Koschmieder mit Hilfe der infinitesimalen Paralleltransformation. Wir unterwerfen eine Hyperfläche Γ_0 der infinitesimalen Paralleltransformation [Nr. 8]. Dann ist $\omega(\delta) = \delta\tau$ ($\delta\tau$ konstant), so daß die Gleichungen (4.5), (4.6)

$$(11.1) \quad \delta O = - (n-1) \delta\tau \int_{(n-1)} H dO$$

ergeben, wo H die mittlere extremale Krümmung von Γ_0 bedeutet. Ist Γ_0 Extremale, also $H = 0$, so folgt ferner aus (5.9)

$$(11.2) \quad \delta^2 O = - \delta\tau^2 \int_{(n-1)} U_0^* dO.$$

Zur Deutung von H und U_0^* werde zu Γ_0 die Schar der Parallelhyperflächen konstruiert. Für τ schreiben wir im Folgenden wieder S (Breitenabstand von Γ_0). O_0 bedeute die $(n-1)$ -dimensionale „Oberfläche“ eines einfach zusammenhängenden Bereiches \mathfrak{B}_0 auf Γ_0 . Die Parallelhyperflächen seien durch die Schar ihrer Transversalen punktweise auf einander bezogen und auf der Parallelhyperfläche Γ mit dem Breitenabstand S von Γ_0 sei $O = O(O_0, S)$ die „Oberfläche“ des dem Bereich \mathfrak{B}_0 entsprechenden Bereiches auf Γ . Wie ziehen nun den Bereich \mathfrak{B}_0 auf einen Punkt P_0 zusammen. Dann folgt aus (11.1) im Punkte P_0 für eine beliebige Ausgangshyperfläche Γ_0

$$(11.3) \quad \boxed{H(\Gamma_0) = - \frac{1}{n-1} \left(\frac{\partial^2 O}{\partial S \partial O_0} \right)_{\substack{S=0 \\ O_0=0}},}$$

und aus (11.2) für eine Extremale Γ_0

$$(11.4) \quad \boxed{U_0^* = - \left(\frac{\partial^3 O}{\partial S^2 \partial O_0} \right)_{\substack{S=0 \\ O_0=0}} .}$$

Da $O = O(O_0, S)$ zugleich mit O_0 gegen Null konvergiert, gilt eine (11.3) entsprechende Gleichung offenbar für jeden in Betracht kommenden Wert von S :

$$(11.5) \quad H(\Gamma) = - \frac{1}{n-1} \left(\frac{\partial^2 O}{\partial S \partial O_0} \right)_{O_0=0} .$$

Daher kann man, wenn Γ_0 Extremale, also $H(\Gamma_0) = 0$, und Γ die Parallelhyperfläche mit dem Breitenabstand S von Γ_0 ist, (11.4) auch in die Gestalt

$$U_0^* = - \lim_{S \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{S} \left(\frac{\partial^2 O}{\partial S \partial O_0} \right)_{O_0=0} \right\}$$

oder

$$(11.6) \quad \boxed{U_0^* = (n-1) \lim_{S \rightarrow 0} \frac{H(\Gamma)}{S}} \quad 41a)$$

setzen.

Die Gleichungen (11.3), (11.4), (11.6) lassen sich aus (8.12), (8.14) ebenfalls leicht ableiten.

12. Über Scharen von Parallelhyperflächen, die zugleich Extremalen sind. Wir beantworten schließlich die Frage, wann es in einem Cartanschen Raum eine Schar von Parallelhyperflächen gibt, die zugleich Extremalen sind.

Dazu führen wir Transversalkoordinaten ein, derart daß die Parallelhyperflächen der Schar die Gleichung $x^n = \text{konst.}$ bekommen und x^n der Breitenabstand ist. Da für alle diese Hyperflächen auch $H = 0$ gelten soll, so folgt aus (8.12), daß $F(x^1, x^2, \dots, x^n; 0, 0, \dots, 0, 1)$ von x^n unabhängig ist. Es gibt also eine eingliedrige Gruppe von Punkttransformationen des Raumes in sich

$$(12.1) \quad \bar{x}^\alpha = x^\alpha, \quad \bar{x}^n = x^n + t,$$

welche die Hyperflächen der Schar vertauscht. Die Bahnkurven

^{41a)} Für Minimalflächen im dreidimensionalen euklidischen Raum findet sich, wie ich nachträglich sehe, die (11.6) entsprechende Gleichung schon bei A. DUSCHNEK, a.a.O. ^{33a)}, Formel (3.37); für Minimalhyperflächen im Riemannschen Raum folgt (11.6) leicht aus Formel (3.33) daselbst.

dieser Gruppe sind die orthogonalen Trajektorien $x^1 = \text{konst.}, \dots, x^{n-1} = \text{konst.}$ der Parallelhyperflächenschar. Da x^n die Bogenlänge dieser orthogonalen Trajektorien bedeutet [Nr. 9], so verschiebt jede Transformation (12.1) alle Punkte des Raumes auf diesen orthogonalen Trajektorien um den gleichen Bogen. Für die Riemannsche Maßbestimmung, die längs der Schar von Parallelhyperflächen $x^n = \text{konst.}$ oskuliert, sind die Transformationen (12.1) Bewegungen, d.h. sie lassen ihr Bogenelement ungeändert; u.z. insbesondere *Schiebungen* oder *Translationen* ⁴²⁾, weil in dieser Riemannschen Maßbestimmung die orthogonalen Trajektorien $x^1 = \text{konst.}, \dots, x^{n-1} = \text{konst.}$ der Parallelhyperflächenschar geodätische Linien sind und x^n ihre Bogenlänge [Nr. 8]. Endlich folgt aus (8.14), daß für die Hyperflächen der Schar $U_0^* = 0$ ist.

Das Vorstehende gilt insbesondere, wenn $F(x, p)$ für jedes zugelassene Wertesystem der p_i von x^n unabhängig ist. Dann lassen die Transformationen (12.1) das Grundintegral (1.3) des Cartanschen Raumes ungeändert. Gibt es umgekehrt eine eingliedrige stetige Gruppe von Punkttransformationen, die das Grundintegral (1.3) des Cartanschen Raumes ungeändert lassen, deren Bahnkurven eine Normalenkongruenz bilden, und deren Transformationen alle Bahnkurven um denselben Bogen in sich verschieben, so sind die Hyperflächen der Schar, zu denen die Bahnkurven senkrecht sind, gleichzeitig Parallelhyperflächen und Extremalen des Cartanschen Raumes. Man sieht das unmittelbar, wenn man die Gleichungen der Gruppe in der Gestalt (12.1) annimmt, die Bahnkurven zu Kurven $x^1 = \text{konst.}, \dots, x^{n-1} = \text{konst.}$ eines Transversalkoordinatensystems wählt und (1.17), (7.4), (7.8) beachtet.

In einem regulären Cartanschen Raum besteht eine Schar von Parallelhyperflächen, die gleichzeitig Extremalen sind, stets aus lauter Hyperebenen.

Zum Beweise ist zu zeigen, daß die rechte Seite von (2.6) verschwindet, wenn man in den Γ_{ijh}^* die Argumente $x^1, \dots, x^n; 0, 0, \dots, 0, 1$ wählt und $dx^n = 0$ setzt. Wegen (8.10) und der Unabhängigkeit aller g_{ik} von x^n sind sämtliche Γ_{ikh} mit mindestens einem Zeiger n Null, und daher verschwinden mit Rücksicht auf (8.9) auch alle $\Gamma_{m0h} = \Gamma_{mjh} b^j = \Gamma_{mnh}$. Somit folgt aus (2.5) $\Gamma_{ijh}^* = \Gamma_{ijh}$ und $\Gamma_{r0h}^* = \Gamma_{r0h} = 0$. Da wegen (8.9) auch $dl_i = 0$ ist, ergibt (2.6) in der Tat $Dl_i = 0$.

⁴²⁾ Vgl. etwa L. P. EISENHART [7], S. 239.

Da beim Beweise die Bedingung $dx^n = 0$ gar nicht benutzt wurde, sind die Hyperflächenelemente der Hyperebenen $x^n = \text{konst.}$ alle zu einander parallel.

Anhang.

A. *Ableitung und Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.*
Für die folgenden Rechnungen ist es zweckmäßig, durch

$$(A.1) \quad x_i^{\rho} = g_{ik} g^{\rho\sigma} x_{\sigma}^k$$

sogenannte Verbindungsgrößen x_i^{ρ} einzuführen. Dann gilt

$$(A.2) \quad \boxed{x_i^{\rho} x_{\tau}^i = \delta_{\tau}^{\rho}, \quad x_i^{\rho} l^i = 0,}$$

ferner

$$(A.3) \quad g_{\rho\mu} x_k^{\mu} = g_{ik} x_{\rho}^i, \quad g^{\rho\mu} x_{\rho}^i = g^{ik} x_k^{\mu}, \quad g^{\rho\sigma} = g^{ik} x_i^{\rho} x_k^{\sigma}.$$

Ein beliebiger Tensor, der in einem willkürlichen Element (x, p) der betrachteten Hyperfläche definiert ist, läßt sich nach den $x_i^{\rho}, x_i^{\sigma}, l^i, l_i$ zerlegen; z.B.

$$(A.4) \quad T_i^k = T_{\rho}^{\sigma} x_i^{\rho} x_{\sigma}^k + T_{\rho 0} x_i^{\rho} l^k + T^{0\sigma} l_i x_{\sigma}^k + T_{00} l_i l^k,$$

mit

$$(A.5) \quad T_{\rho}^{\sigma} = T_p^g x_{\rho}^p x_{\sigma}^g, \quad T_{\rho 0} = T_p^g x_{\rho}^p l_g, \quad T^{0\sigma} = T_p^g x_{\rho}^{\sigma} l^p, \quad T_{00} = T_p^g l^p l_g.$$

Ein Tensor, in dessen Zerlegung kein l_i und kein l^i vorkommt, heißt ein Hyperflächentensor. Offenbar ist $g_{ik} - l_i l_k$ ein solcher, und daher

$$(A.6) \quad g_{\rho\sigma} x_i^{\rho} x_k^{\sigma} = g_{ik} - l_i l_k.$$

Wegen (A.3) folgt hieraus durch Überschiebung mit g^{ih}

$$(A.7) \quad \boxed{x_{\rho}^h x_k^{\rho} = \delta_k^h - l_k l^h}$$

und daraus auf entsprechende Weise mittels (1.7), (1.15)

$$(A.8) \quad g^{\rho\sigma} x_{\rho}^h x_{\sigma}^j = g^{hj} - l^h l^j = \frac{F}{g} \frac{\partial^2 F}{\partial p_h \partial p_j}.$$

Wir berechnen jetzt die Ableitungen $\frac{\partial p_i}{\partial x_{\rho}^j}, \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_{\rho}^j \partial x_{\sigma}^k}$. Aus der Erklärung der p_i [Nr. 1] folgt unmittelbar

$$(A.9) \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_{\rho}^j} x_{\rho}^r = -\frac{\partial p_j}{\partial x_{\rho}^i} x_{\rho}^r = p_i \delta_j^r - p_j \delta_i^r$$

und hieraus durch Überschiebung mit x_r^σ wegen (A.2), (1.14)

$$(A.10) \quad \boxed{\frac{\partial p_i}{\partial x_\sigma^j} = -\frac{\partial p_i}{\partial x_\sigma^i} = p_i x_j^\sigma - p_j x_i^\sigma = \frac{F}{\sqrt{g}} (l_i x_j^\sigma - l_j x_i^\sigma)}.$$

Aus (A.9) folgt durch Ableitung nach x_σ^k

$$(A.11) \quad \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_\sigma^j \partial x_\sigma^k} x_\sigma^r = -\frac{\partial p_i}{\partial x_\sigma^j} \delta_k^r + \frac{\partial p_i}{\partial x_\sigma^k} \delta_j^r - \frac{\partial p_j}{\partial x_\sigma^k} \delta_i^r$$

und hieraus durch Auflösung nach $\frac{\partial^2 p_i}{\partial x_\sigma^j \partial x_\sigma^k}$ wegen (A.10)

$$(A.12) \quad \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_\sigma^j \partial x_\sigma^k} = \frac{F}{\sqrt{g}} \{l_i (x_j^\sigma x_k^\sigma - x_j^\sigma x_k^\sigma) + l_j (x_k^\sigma x_i^\sigma - x_k^\sigma x_i^\sigma) + l_k (x_i^\sigma x_j^\sigma - x_i^\sigma x_j^\sigma)\}$$

Somit ist

$$(A.13) \quad l^i \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_\sigma^j \partial x_\sigma^k} = \frac{F}{\sqrt{g}} (x_j^\sigma x_k^\sigma - x_j^\sigma x_k^\sigma).$$

Endlich benötigen wir noch Ausdrücke für $\frac{\partial F}{\partial x_\sigma^i}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_\sigma^i \partial x_\sigma^k}$, $\frac{\partial x_i^\sigma}{\partial x_\sigma^k}$.

Aus (1.15) und (A.10), bzw. (1.15) und (A.13) folgt wegen der Homogenität von F

$$(A.14) \quad \boxed{\frac{\partial F}{\partial x_\sigma^i} = \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x_\sigma^i} = F x_i^\sigma}.$$

$$(A.15) \quad \frac{\partial F}{\partial p_m} \frac{\partial^2 p_m}{\partial x_\sigma^i \partial x_\sigma^k} = F (x_i^\sigma x_k^\sigma - x_i^\sigma x_k^\sigma).$$

Ferner folgt aus (A.8), (A.10), (1.14)

$$(A.16) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p_h \partial p_j} \frac{\partial p_h}{\partial x_\sigma^i} \frac{\partial p_j}{\partial x_\sigma^k} = \frac{g}{F} g^{\sigma\sigma} p_i p_k = F g^{\sigma\sigma} l_i l_k.$$

Aus (A.15), (A.16) ergibt sich

$$(A.17) \quad \boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial x_\sigma^i \partial x_\sigma^k} = \frac{g}{F} g^{\sigma\sigma} p_i p_k + F (x_i^\sigma x_k^\sigma - x_i^\sigma x_k^\sigma) = F \{g^{\sigma\sigma} l_i l_k + x_i^\sigma x_k^\sigma - x_i^\sigma x_k^\sigma\}}.$$

Zur Berechnung von $\frac{\partial x_i^\sigma}{\partial x_\sigma^k}$ leiten wir (A.14) partiell nach x_σ^k ab,

ersetzen links $\frac{\partial^2 F}{\partial x_\sigma^i \partial x_\sigma^k}$ aus (A.17), rechts $\frac{\partial F}{\partial x_\sigma^k}$ aus (A.14) und

erhalten so

$$(A.18) \quad \boxed{\frac{\partial x_i^e}{\partial x_\sigma^k} = \frac{\partial x_k^\sigma}{\partial x_i^e} = g^{\rho\sigma} l_i l_k - x_i^\sigma x_k^\rho}.$$

B. *Ableitung der Gleichungen (1.5), (1.6), (1.12).* Aus

$$(B.1) \quad g^{n-1} = \det \left(\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} F^2 \right)}{\partial p_i \partial p_k} \right) = \det \left(F \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial p_k} \right)$$

folgt durch Ränderung und elementare Umformungen

$$(B.2) \quad g^{n-1} = \det \left(\begin{array}{c|c} F \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial p_k} & \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\det \left(\begin{array}{c|c} F \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} & \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ \hline -\frac{\partial F}{\partial p_k} & 1 \end{array} \right) = -F^{n-1} \det \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} & \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ \hline \frac{\partial F}{\partial p_k} & -F \end{array} \right).$$

Nun ist wegen der Homogenität von F

$$(B.3) \quad (a) \quad \frac{\partial F}{\partial p_k} p_k = F, \quad (b) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} p_k = 0.$$

Multipliziert man also die k -te Spalte der Determinante rechts in (B.2) mit p_k und addiert die für $k=1, 2, \dots, n$ erhaltenen Produkte zur letzten Spalte, so kommt

$$(B.4) \quad g^{n-1} = -F^{n-1} \det \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} & \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ \hline \frac{\partial F}{\partial p_k} & 0 \end{array} \right).$$

Wegen (B.3b) existiert eine Funktion F_1 , so daß (1.4) oder

$$(B.5) \quad F_1 p_i p_k = f_{ik} \quad (f_{ik} = \text{adj. } \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k})$$

gilt. F_1 kann durch

$$(B.6) \quad F_1 = -\frac{1}{F^2} \det \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} & \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ \hline \frac{\partial F}{\partial p_k} & 0 \end{array} \right)$$

dargestellt werden, wie man leicht bestätigt. Aus (B.4), (B.6) folgen (1.6) und (1.5).

Ersetzt man in $\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} \right)$ die Elemente durch ihre aus (A.8) folgenden Werte, so ersieht man, daß f_{ik} auch durch

$$(B.7) \quad f_{ik} = (-1)^{i+k} \det \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} x_\alpha^I x_\beta^K \right)$$

gegeben ist, wo I, K die Werte 1 bis n mit Ausnahme von i und k durchlaufen⁴³). (B.7) läßt sich in

$$(B.8) \quad f_{ik} = \frac{g^{n-1}}{F^{n-1}} \det (g^{\alpha\beta}) p_i p_k = \frac{g^{n-1}}{F^{n-1}} \frac{1}{\det (g_{\alpha\beta})} p_i p_k$$

umformen. Also ist auch

$$(B.9) \quad F_1 = \frac{g^{n-1}}{F^{n-1}} \frac{1}{\det (g_{\alpha\beta})}.$$

Vergleich von (B.9) mit (1.6) ergibt (1.12).

C. *Ableitung von (4.4).* Es ist

$$(C.1) \quad W_i = \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha^i \partial x^k} x_\alpha^k - \frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha^i \partial x_\beta^k} x_\alpha^k x_\beta^k.$$

Nun folgt aus (A. 9)

$$(C.2) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha^i \partial x^k} x_\alpha^k = \frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial p_m} \frac{\partial p_m}{\partial x_\alpha^i} x_\alpha^k = \frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial p_m} (p_m \delta_i^k - p_i \delta_m^k)$$

oder wegen der Homogenität von F

$$(C.3) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_\alpha^i \partial x^k} x_\alpha^k = \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial p_k} p_i.$$

Setzt man diesen Wert in (C.1) ein und beachtet (A.17), so ergibt sich

$$(C.4) \quad W_i = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial p_k} - \frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_k x_\alpha^k x_\beta^k \right) p_i. \quad 44)$$

D. *Ableitung von (5.2) und (5.3).* Aus (4.4) folgt

$$(D.1) \quad \frac{\partial W}{\partial x_\alpha^i} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial p_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_k \right) x_\alpha^k x_\beta^k.$$

Für das erste Glied ergibt sich mit Rücksicht auf (A.8) und (A.10)

⁴³ Vgl. L. KOSCHMIEDER, [13], S. 472.

⁴⁴ Im Wesentlichen schon bei J. RADON, [16].

$$\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial p_k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p_k \partial p_m} \frac{\partial p_m}{\partial x_i^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} x_\beta^k x_m^\alpha (p_m x_i^\alpha - p_i x_m^\alpha) \right]$$

oder

$$(D.2) \quad \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial p_k} \right) = - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_i \right) x_\beta^k = \\ - \frac{\partial}{\partial v^\beta} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_\rho^k} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_i \right) x_{\rho\beta}^k.$$

Setzt man diesen Wert in (D.1) ein, so kommt

$$(D.3) \quad \frac{\partial W}{\partial x_i^\alpha} = - \frac{\partial}{\partial v^\beta} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_i \right) + \left[\frac{\partial}{\partial x_\rho^k} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_k \right) \right] x_{\rho\beta}^k.$$

Nun ist wegen (A.3)

$$(D.4) \quad \frac{\partial}{\partial x_\rho^k} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_i \right) = \frac{\partial}{\partial x_\rho^k} \left(\frac{g}{F} g^{rs} x_r^\alpha x_s^\beta p_i \right) = \\ p_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\rho^k} \left(\frac{g}{F} g^{rs} \right) x_r^\alpha x_s^\beta + \frac{g}{F} \left(g^{rs} \frac{\partial x_r^\alpha}{\partial x_\rho^k} x_s^\beta + g^{rs} \frac{\partial x_s^\beta}{\partial x_\rho^k} x_r^\alpha \right) \right\} + \frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial p_i}{\partial x_\rho^k}.$$

Wegen (1.7), (A.14), (A.10) und der Homogenität von F ist

$$(D.5) \quad \frac{\partial}{\partial x_\rho^k} \left(\frac{g}{F} g^{rs} \right) = - \frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x_\rho^k} g g^{rs} + \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial x_\rho^k} \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{2} F^2 \right)}{\partial p_r \partial p_s} \\ = - \frac{1}{F} x_k^\rho g g^{rs} + \frac{1}{F} \frac{\partial^3 \left(\frac{1}{2} F^2 \right)}{\partial p_r \partial p_s \partial p_m} (p_m x_k^\rho - p_k x_m^\rho) \\ = - \frac{1}{F} g g^{rs} x_k^\rho - \frac{1}{F} \frac{\partial^3 \left(\frac{1}{2} F^2 \right)}{\partial p_r \partial p_s \partial p_m} x_m^\rho p_k.$$

Ferner hat man wegen (A.18) und (A.3)

$$(D.6) \quad \begin{cases} g^{rs} \frac{\partial x_r^\alpha}{\partial x_\rho^k} x_s^\beta = - g^{rs} x_k^\alpha x_r^\rho x_s^\beta = - g^{\rho\beta} x_k^\alpha, \\ g^{rs} \frac{\partial x_s^\beta}{\partial x_\rho^k} x_r^\alpha = - g^{rs} x_r^\alpha x_k^\beta x_s^\rho = - g^{\rho\alpha} x_k^\beta. \end{cases}$$

Durch Einsetzen aus (D.5) und (D.6) in (D.4) ergibt sich mit Rücksicht auf (A.3)

$$(D.7) \quad \frac{\partial}{\partial x_\rho^k} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_i \right) = - \frac{1}{F} \frac{\partial^3 \left(\frac{1}{2} F^2 \right)}{\partial p_r \partial p_s \partial p_m} x_r^\alpha x_s^\beta x_m^\rho p_i p_k - \\ \frac{g}{F} (g^{\alpha\beta} p_i x_k^\rho + g^{\beta\rho} p_i x_k^\alpha + g^{\rho\alpha} p_i x_k^\beta) + \frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial p_i}{\partial x_\rho^k}.$$

Vertauscht man hier die Zeiger i und k sowie ϱ und α , subtrahiert, und beachtet (A.10), so ergibt sich

$$(D.8) \quad \frac{\partial}{\partial x_k^i} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \left(\frac{g}{F} g^{\varrho\beta} p_k \right) = - \frac{g}{F} g^{\varrho\alpha} \frac{\partial p_i}{\partial x_k^i}.$$

Endlich erhält man durch Einsetzen von (D.8) in (D.3) nach Vertauschung der Zeiger ϱ und β

$$(D.9) \quad \frac{\partial W}{\partial x_\alpha^i} = - \frac{\partial}{\partial v^\beta} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_i \right) - \frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial p_i}{\partial v^\beta},$$

oder die erste Gleichung (5.2). Die zweite versteht sich von selbst. Setzt man die Werte (5.2) in den Ausdruck für δW ein, so kommt

$$(D.10) \quad \begin{aligned} \delta W &= \frac{\partial W}{\partial x^i} \delta x^i - \frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial p_i}{\partial v^\beta} \frac{\partial \delta x^i}{\partial v^\alpha} - \left[\frac{\partial}{\partial v^\beta} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_i \right) \frac{\partial \delta x^i}{\partial v^\alpha} + \frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_i \frac{\partial^2 \delta x^i}{\partial v^\beta \partial v^\alpha} \right] \\ &= \left[\frac{\partial W}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial p_i}{\partial v^\beta} \right) \right] \delta x^i - \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial p_i}{\partial v^\beta} \delta x^i \right) - \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} p_i \frac{\partial \delta x^i}{\partial v^\beta} \right) \\ &= \left[\frac{\partial W}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial p_i}{\partial v^\beta} \right) \right] \delta x^i - \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial (p_i \delta x^i)}{\partial v^\beta} \right). \end{aligned}$$

E. Umformung von (5.6). Wir führen an Stelle von $p_i \delta x^i$ in (5.6) mittels (1.16) $\omega(\delta)$ ein. Es ist:

$$(E.1) \quad p_i \delta x^i = \frac{F}{\sqrt{g}} \omega = \left(\frac{\sqrt{g}}{F} \right)^{-1} \omega,$$

$$(E.2) \quad \frac{\partial (p_i \delta x^i)}{\partial v^\beta} = \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial \omega}{\partial v^\beta} - \omega \frac{F^2}{g} \frac{\partial}{\partial v^\beta} \left(\frac{\sqrt{g}}{F} \right),$$

$$(E.3) \quad \frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial (p_i \delta x^i)}{\partial v^\beta} = \frac{\sqrt{g}}{F} F g^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega}{\partial v^\beta} - \omega F g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial v^\beta} \left(\frac{\sqrt{g}}{F} \right)$$

und daher

$$(E.4) \quad \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(\frac{g}{F} g^{\alpha\beta} \frac{\partial (p_i \delta x^i)}{\partial v^\beta} \right) = \frac{\sqrt{g}}{F} \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(F g^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega}{\partial v^\beta} \right) - \omega \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(F g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial v^\beta} \left(\frac{\sqrt{g}}{F} \right) \right).$$

Setzt man das in (5.6) ein, so ergibt sich

$$(E.5) \quad \delta W = - \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(F g^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega}{\partial v^\beta} \right) - \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \left(F g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial v^\beta} \left(\frac{\sqrt{g}}{F} \right) \right) + \frac{F}{g} F_2 \right] \omega \right\},$$

d.h. (5.7).

F. Der Hyperflächenvektor $\frac{\partial \omega}{\partial v^\alpha}$ und das invariante Differential Δl_i . Wegen (A.10) entspricht der Variation δx^i die Variation

$$(F.1) \quad \delta p_j = \frac{\partial p_j}{\partial x^k} \delta x^k = \frac{F}{\sqrt{g}} (l_j x_k^g - l_k x_j^g) \frac{\partial \delta x^k}{\partial v^g}$$

von p_j . Ferner ist ⁴⁵⁾

$$(F.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^h} \left(\frac{\sqrt{g}}{F} \right) = \frac{\sqrt{g}}{F} (l^j - A^j) l_k \Gamma_{jh}^{*k}, \\ \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\sqrt{g}}{F} \right) = -\frac{g}{F^2} (l_j - A^j), \end{cases}$$

also wegen (F.1), (A.2) und $l_j A^j = 0$

$$(F.3) \quad \delta \log \left(\frac{\sqrt{g}}{F} \right) = (l^j - A^j) l_k \Gamma_{jh}^{*k} \delta x^h - (x_k^g + l_k A^g) \frac{\partial \delta x^k}{\partial v^g}, \quad (A^g = A^j x_j^g)$$

und wegen (1.14) und (F.1)

$$(F.4) \quad \begin{cases} \delta l_r = \delta \left(\frac{\sqrt{g}}{F} p_r \right) = (l_r l^j - l_r A^j) l_k \Gamma_{jh}^{*k} \delta x^h - l_k (x_r^g + l_r A^g) \frac{\partial \delta x^k}{\partial v^g}, \\ \delta l_r - \Gamma_{r0h}^* \delta x^h = -(l_r A^j + \delta_r^j - l_r l^j) l_k \Gamma_{jh}^{*k} \delta x^h - l_k (x_r^g + l_r A^g) \frac{\partial \delta x^k}{\partial v^g}. \end{cases}$$

Wegen $A^j l_j = 0$ gilt nun $A^j = A^g x_g^j$. Beachtet man außerdem (A.7), so folgt

$$(F.5) \quad l_r A^j + \delta_r^j - l_r l^j = x_g^j (x_r^g + l_r A^g).$$

Somit wird

$$(F.6) \quad \delta l_r - \Gamma_{r0h}^* \delta x^h = -l_k (x_r^g + l_r A^g) \left(\frac{\partial \delta x^k}{\partial v^g} + x_g^j \Gamma_{jh}^{*k} \delta x^h \right)$$

und, wegen $l_r A^r = 0$, wenn der Summationsbuchstabe g durch σ ersetzt wird,

$$(F.7) \quad \Delta l_i = (\delta_i^r - l_i A^r) (\delta l_r - \Gamma_{r0h}^* \delta x^h) = -x_i^\sigma l_k \left(\frac{\partial \delta x^k}{\partial v^\sigma} + x_\sigma^j \Gamma_{jh}^{*k} \delta x^h \right).$$

Andererseits benutzen wir das folgende System von Fundamentalgleichungen der Hyperflächentheorie in regulären Cartanschen Räumen ⁴⁶⁾:

$$(F.8) \quad \frac{\partial l_h}{\partial v^g} = l_k \Gamma_{jh}^{*k} x_g^j - a_{\mu g} x_h^\mu - A^\mu a_{\mu g} l_h.$$

Aus (F.8) folgt mit Rücksicht auf (1.16)

$$\frac{\partial \omega(\delta)}{\partial v^g} = \frac{\partial l_h}{\partial v^g} \delta x^h + l_k \frac{\partial \delta x^k}{\partial v^g} = l_k \left(\frac{\partial \delta x^k}{\partial v^g} + x_g^j \Gamma_{jh}^{*k} \delta x^h \right) - a_{\mu g} x_i^\mu (\delta x^i + A^i \omega(\delta))$$

⁴⁵⁾ L. BERWALD, [1], Nr. 8 und (1.15), (1.19) der vorliegenden Abhandlung.

⁴⁶⁾ L. BERWALD, [1], (25.11).

oder wegen (A.2), (F.7)

$$(F.9) \quad -\frac{\partial \omega}{\partial v^e} = x_{\varrho}^i \Delta l_i + a_{\mu \varrho} x_i^{\mu} (\delta x^i + A^i \omega(\delta)).$$

Ersetzt man hier x_i^{μ} durch seinen Wert (A.1), so ergibt sich (6.2).

G. *Berechnung von U_0^* für eine Minimalhyperfläche im Riemannschen Raum.* Es habe Γ_{ijh} die Bedeutung (2.3); $\Gamma_{ih}^k = g^{jk} \Gamma_{ijh}$ sowie entsprechend $\gamma_{\varrho\sigma}^{\tau}$ seien bezüglich die Christoffelsymbole zweiter Art für die Maßtensoren g_{ik} , $g_{\alpha\beta}$ des Riemannschen Raumes und der Hyperfläche (1.1). Dann lauten die Ableitungsgleichungen der Hyperfläche:

$$(G.1) \quad x_{\varrho\sigma}^i + \Gamma_{hk}^i x_{\varrho}^h x_{\sigma}^k = \gamma_{\varrho\sigma}^{\tau} x_{\tau}^i + a_{\varrho\sigma} l^i,$$

$$(G.2) \quad \frac{\partial l^i}{\partial v^{\sigma}} + \Gamma_{hk}^i l^h x_{\sigma}^k = -a_{\sigma}^{\tau} x_{\tau}^i.$$

Wegen der Invarianzeigenschaft von U_0^* können wir bei der Berechnung von U_0^* besondere Koordinaten benutzen. Sie seien Transversalkoordinaten und so gewählt, daß die Schar der zur betrachteten Hyperfläche geodätisch parallelen Hyperflächen die Gleichung $x^n = \text{konst.}$ hat und x^n der Breitenabstand der Schar ist. Dann gelten die Gleichungen (8.9) ff., und es wird

$$(G.3) \quad \Gamma_{nn}^n = 0, \quad \Gamma_{nn}^{\varrho} = 0, \quad \Gamma_{n\varrho}^n = 0, \quad (\text{über } n \text{ nicht summieren!}).$$

Ferner folgt aus (G.1), (G.2)

$$(G.4) \quad \Gamma_{\varrho\sigma}^n = a_{\varrho\sigma}, \quad \Gamma_{n\sigma}^{\varrho} = -a_{\sigma}^{\varrho}, \quad \Gamma_{\varrho\sigma}^{\tau} = \gamma_{\varrho\sigma}^{\tau}.$$

Wegen (8.9), (8.10) vereinfacht sich die Gleichung (6.4) (für $p_{\alpha} = 0$, $p_n = 1$) jetzt zu

$$(G.5) \quad F(x^1, x^2, \dots, x^n; 0, 0, \dots, 0, 1) = \sqrt{g},$$

und daher ist mit Rücksicht auf (G.3), (7.9)

$$(G.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x^n} = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^n} = \sqrt{g} \Gamma_{nr}^r = \sqrt{g} \Gamma_{n\varrho}^{\varrho}, \\ \frac{\partial^2 F}{(\partial x^n)^2} = \sqrt{g} \left(\Gamma_{n\varrho}^{\varrho} \Gamma_{n\sigma}^{\sigma} + \frac{\partial \Gamma_{n\varrho}^{\varrho}}{\partial x^n} \right), \end{cases}$$

wo über n nicht zu summieren ist. Somit folgt aus (8.12), (G.4)–(G.6) für eine beliebige Hyperfläche $x^n = \text{konst.}$

$$(G.7) \quad H = \frac{1}{n-1} a_{\varrho}^{\varrho}.$$

Ist nun insbesondere die betrachtete Hyperfläche $x^n = \text{konst.}$ Minimalhyperfläche, also

$$(G.8) \quad a_\rho^{\rho} = -\Gamma_{n\rho}^{\rho} = 0,$$

so folgt aus (8.14) und (G.6)

$$(G.9) \quad U_0^* = -\frac{\partial \Gamma_{n\rho}^{\rho}}{\partial x^n}.$$

Andererseits ist in den benutzten Koordinaten im Hinblick auf (6.5)

$$(G.10) \quad R_{ih} l^i l^h = R_{ihr}^r l^i l^h = R_{nn\rho}^{\rho} = \frac{\partial \Gamma_{nn}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{n\rho}^{\rho}}{\partial x^n} + \Gamma_{nn}^m \Gamma_{m\rho}^{\rho} - \Gamma_{n\rho}^m \Gamma_{mn}^{\rho},$$

wo über n nicht zu summieren ist. Mit Rücksicht auf (G.3), (G.4), (G.9) vereinfacht sich (G. 10) zu

$$(G.11) \quad R_{ih} l^i l^h = U_0^* - a_\rho^{\sigma} a_\sigma^{\rho}.$$

Wegen (G.8) und

$$(G.12) \quad K = \frac{1}{(n-1)(n-2)} (a_\rho^{\rho} a_\sigma^{\sigma} - a_\sigma^{\rho} a_\rho^{\sigma})$$

sagt (G.11) dasselbe aus wie (6.8).

Schriftenverzeichnis.

1. L. BERWALD, Über die n -dimensionalen Cartanschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines $(n-1)$ -fachen Oberflächenintegrals [Acta Math. 71 (1939), 191—248].
2. L. BERWALD, Über Finslersche und Cartansche Geometrie I. Geometrische Erklärungen der Krümmung und des Hauptskalars eines zweidimensionalen Finslerschen Raumes [Mathematica, Cluj 16 (1940)].
3. O. BOLZA, Vorlesungen über Variationsrechnung [Teubner, Leipzig und Berlin 1909].
4. E. CARTAN, Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire. Actualités scientifiques 72 [Hermann et Cie, Paris 1933].
5. E. CARTAN, Les espaces de Finsler. Actualités scientifiques 79 [Hermann et Cie, Paris 1934].
6. TH. DE DONDER, Sur les invariants du calcul des variations [C. R. Paris 155 (1912), 577—580, 1003—1005].
7. L. P. EISENHART, Riemannian Geometry [Princeton University Press, Princeton 1926].
8. F. ENGEL, Eine Verallgemeinerung der infinitesimalen Paralleltransformation [Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 19 (1910), 306—317].
9. G. HERGLOTZ, Zur Einsteinschen Gravitationstheorie [Leipziger Berichte 68 (1916), 199—203].
10. L. KOSCHMIEDER, Über zwei bei der Variation der Doppelintegrale auftretende Invarianten [Math. Ann. 94 (1925), 252—261].

11. L. KOSCHMIEDER, Invarianten bei der Variation vielfacher Integrale [Math. Zeitschr. **24** (1925), 181—190].
12. L. KOSCHMIEDER, Sobre la segunda variación de las integrales múltiples [Revista Matemática Hispano-Americana (2) **1** (1926), 129—146].
13. L. KOSCHMIEDER, Invarianten der Integranden vielfacher Integrale in der Variationsrechnung I, II [Proc. Amsterdam **31** (1927), 140—150, 469—484].
14. H. LIEBMANN, Die Transformation von Variationsproblemen [Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. **25** (1917), 366—383].
15. H. LIEBMANN, Die äquivalente Extremalentransformation, eine Anwendung der Berührungstransformationen [Leipziger Berichte **69** (1917), 13—44].
16. J. RADON, Über einige Fragen betreffend die Theorie der Maxima und Minima mehrfacher Integrale [Monatshefte f. Math. u. Phys. **22** (1911), 53—63].
17. A. L. UNDERHILL, Invariants of the function $f(x, y, x', y')$ in the calculus of variations [Trans. Amer. Math. Soc. **9** (1908), 316—338 (auch Diss. Chicago 1907)].
18. G. VIVANTI, Sull' equazione di Eulero per gli integrali multipli [Rend. Circ. Mat. Palermo **33** (1912), 268—274].

(Eingegangen den 8. März 1939.)
