COMPOSITIO MATHEMATICA

GEORGES ALEXITS

La torsion des espaces distanciés

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 471-477
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__471_0>

La torsion des espaces distanciés

par

Georges Alexits

Budapest

Dans la géométrie classique, on étudie les propriétés locales des figures par l'application de méthodes infinitésimales à la représentation paramétrique de la figure considérée. Cette méthode, heuristique peut-être, recherche donc, à vrai dire, plutôt les propriétés de la représentation paramétrique que celles de la figure géométrique proprement dite. Or l'esprit géométrique considère une figure comme un espace déterminé par ses points et par sa métrique particulière. Il faudrait donc rechercher, outre les propriétés infinitésimales des représentations analytiques, les propriétés locales de la métrique intrinsèque des figures considérées comme espaces distanciés. On se dégagerait ainsi des liens de la représentation par l'intermédiaire des coordonnées et il semble que, par cela, la géométrie infinitésimale étalerait des aspects nouveaux, de même que les points de vue de la théorie des fonctions ont changé successivement sous l'influence croissante de la théorie des ensembles de points.

M. Menger [1]), convaincu de la nécessité d'une étude approfondie des propriétés métriques locales des espaces distanciés, a établi l'équivalent métrique de la notion de courbure des arcs. Plus tard, M. Wald [2]) a même réussi à définir la courbure superficielle d'un espace distancié et à éclaircir, par cette voie, la notion gaussienne de surface. Malgré ces résultats fondamentaux, le problème de définir une notion métrique correspondant à la notion classique de la torsion des arcs n'a pas encore été résolu. Pour faire disparaître cette lacune de la théorie, nous allons définir, dans ce qui suit, la torsion des espaces distanciés, en ne considérant que les distances mutuelles des points de l'espace.

---

[1]) K. Menger, Untersuchungen über allgemeine Metrik IV [Math. Ann. **103** (1930), 466—501].

[2]) A. Wald, Begründung einer koordinatenlosen Differentialgeometrie der Flächen [Ergebn. Math. Koll. Wien **7** (1936), 24—46].

Notre notion métrique de torsion est par suite une propriété intrinsèque de la figure considérée; elle ne dépend donc pas de la nature de l'espace dans lequel la figure est plongée et n'exige point l'introduction des coordonnées. On verra aussi que cette notion métrique de torsion équivaut, pour les arcs étudiés dans la géométrie infinitésimale, à la notion classique de la torsion.

1. *Définition de la torsion des espaces distanciés.*

On appelle *espace distancié* un ensemble E tel que, à tout couple p, q de ses élements, soit attaché un nombre pq satisfaisant aux conditions suivantes [3]):

1. $pq = qp \geqq 0$;
2. $pq = 0$ *et* $p = q$ *s'entraînent réciproquement*;
3. $pq + qr \geqq pr$ (*inégalité triangulaire*).

Les éléments de E s'appellent *points* de l'espace E et le nombre pq la *distance* des points p et q. Envisageons les points $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de E et posons pour abréger

$$D(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & (p_1p_2)^2 & \ldots & (p_1p_n)^2 \\ 1 & (p_1p_2)^2 & 0 & \ldots & (p_2p_n)^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & (p_1p_n)^2 & (p_2p_n)^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Etant donné un quadruplet de points p_1, p_2, p_3, p_4 de E, nous lui attribuons un sens de parcours, par exemple $p_1 \to p_2 \to p_3 \to p_4$. Supposons que $D(p_1, p_2, p_3) \neq 0$ et $D(p_2, p_3, p_4) \neq 0$; alors, nous appellerons le nombre

$$\tau(p_1, p_4;\ p_2, p_3) = \frac{p_2p_3}{p_1p_4}\sqrt{\frac{18\,|\,D(p_1, p_2, p_3\, p_4)\,|}{D(p_1, p_2, p_3)\cdot D(p_2, p_3, p_4)}} \tag{1}$$

la torsion des points p_1, p_2, p_3, p_4 *correspondant au sens de parcours* $p_1 \to p_2 \to p_3 \to p_4$. Grâce à la représentation héronienne

$$-D(p, q, r) = (pq+pr+qr)(pq+pr-qr)(pq+qr-pr)(pr+qr-qp),$$

on obtient, en vertu de l'inégalité triangulaire:

$$D(p_1, p_2, p_3) \leqq 0;\ D(p_2, p_3, p_4) \leqq 0.$$

Par conséquent, si quatre points possèdent une torsion correspondant à un certain sens de parcours, cette torsion est toujours $\geqq 0$.

Soit maintenant p un point d'accumulation de l'espace E et considérons la torsion $\tau(p, q; r_1, r_2)$ pour tout quadruplet de points

[3]) M. FRÉCHET, Sur quelques points du calcul fonctionnel [Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906), 1—74].

p, q, r_1, r_2 de E et pour tout sens de parcours de ces quadruplets pour lesquels $\tau(p, q; r_1, r_2)$ existe. Si la limite

$$\tau(p) = \lim_{q \to p} \left(\lim_{\substack{r_1 \to p \\ r_2 \to p}} \tau(p, q; r_1, r_2) \right) \tag{2}$$

existe, nous l'appellerons *la torsion de l'espace distancié E en son point p*. On a évidemment $\tau(p) \geqq 0$ en tout point p de E où la torsion $\tau(p)$ existe.

2. *La signification géométrique de la torsion $\tau(p)$ dans les espaces euclidiens.*

Pour établir la signification géométrique de $\tau(p)$ dans l'espace euclidien E_n à n dimensions, désignons par T le tétraèdre ayant pour sommets les points p, q, r_1, r_2 de E_n. Soit V le volume de T, A_1 l'aire du triangle déterminé par les points p, r_1, r_2 et A_2 l'aire du triangle ayant q, r_1, r_2 pour sommets. Soit encore $S_{pr_1r_2}$ le plan déterminé par les points p, r_1, r_2 et $S_{qr_1r_2}$ le plan passant par les points q, r_1, r_2. Désignons par le symbole $\widehat{PQ}$ l'angle dièdre des plans P et Q. La formule suivante de la géométrie élémentaire est bien connue:

$$\sin \widehat{S_{pr_1r_2} S_{qr_1r_2}} = r_1r_2 \cdot \frac{3V}{2A_1 \cdot A_2}. \tag{3}$$

Dans les espaces euclidiens, les déterminants figurant dans la définition de la torsion de quatre points ont un sens géométrique élémentaire:

$$D(p, q, r_1, r_2) = 288V^2;$$
$$D(p, r_1, r_2) = -16A_1^2; \quad D(q, r_1, r_2) = -16A_2^2.$$

On obtient donc, en comparant les relations (1) et (3):

$$\tau(p, q; r_1, r_2) = 3\,\frac{\sin \widehat{S_{pr_1r_2} S_{qr_1r_2}}}{pq}. \tag{4}$$

On constate, en même temps, que, dans les espaces euclidiens, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la torsion $\tau(p, q; r_1, r_2)$ est: $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$; c'est à dire que trois points consécutifs du quadruplet ordonné p, r_1, r_2, q ne soient pas situés sur une droite.

Envisageons le cas où les points p, q, r_1, r_2 sont situés sur un arc C, le mot „arc" désignant une image homéomorphe d'un segment. Si r_1 et r_2 convergent sur C indépendamment vers le point p, alors $S_{pr_1r_2}$ converge vers le plan osculateur [4]) S_p de C, pourvu que ce plan osculateur existe au point p. De même, si C possède une tangente au point p, le plan $S_{qr_1r_2}$ converge vers le plan S_{pq} contenant le point q et la tangente de C prise au point p. Par conséquent, si la torsion de l'arc C existe, il s'ensuit, d'après (2) et (4):

$$\tau(p) = 3 \cdot \lim_{q \to p} \frac{\sin \widehat{S_p S_{pq}}}{pq}. \tag{5}$$

On voit donc que la torsion $\tau(p)$ exprime une propriété géométrique bien intuitive concernant la structure des arcs euclidiens.

3. *La torsion des arcs représentés par l'intermédiaire des fonctions d'un paramètre.*

Soit C un arc situé dans l'espace E_3 et représenté par la fonction vectorielle

$$p = \boldsymbol{p}(s)$$

où $\boldsymbol{p}(s)$ désigne un vecteur dont les composantes sont des fonctions continues de la longueur d'arc s que nous choisissons pour paramètre. Désignons par q le point défini par la valeur $\boldsymbol{p}(s+\Delta s)$ de la fonction $\boldsymbol{p}(s)$ et par $t(p)$ la torsion classique de l'arc $\boldsymbol{p}(s)$ au point p. Nous allons justifier l'emploi du mot „torsion" pour le nombre $\tau(p)$ et nous démontrerons, à cette fin, le théorème suivant:

Si les trois premières dérivées de la fonction $\boldsymbol{p}(s)$ sont finies au point s, alors

$$\tau(p) = |t(p)|.$$

Soient, en effet, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{p}''$, $\boldsymbol{p}'''$ les trois premières dérivées de la fonction $\boldsymbol{p}(s)$ et posons $\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(s+\Delta s) - \boldsymbol{p}(s)$, donc

$$\Delta \boldsymbol{p} = \Delta s \cdot \boldsymbol{p}' + \frac{\Delta s^2}{2} \boldsymbol{p}'' + \frac{\Delta s^3}{6} (\boldsymbol{p}''' + \boldsymbol{\varepsilon}) \tag{6}$$

---

[4]) Il faut remarquer, pour éviter tout malentendu, que l'expression de plan osculateur de C signifie toujours la limite des plans passant par p et deux autres points de C tendant vers p. Nous utilisons donc la notion de plan osculateur même pour les arcs qui ne sont pas donnés par une représentation paramétrique. Par suite, nous ne supposons pas que les arcs ayant un plan osculateur soient assujettis à certaines conditions de dérivabilité. La même remarque se rapporte aussi à la notion de la tangente.

où $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \boldsymbol{\epsilon} = 0$. Le plan S_{pq} contient, par définition, les vecteurs $\boldsymbol{p}'$ et $\Delta \boldsymbol{p}$; le vecteur $\boldsymbol{v}$ de sa normale est donc orthogonal aux vecteurs $\boldsymbol{p}'$ et $\Delta \boldsymbol{p}$; par conséquent [5])

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{p}' \,.\, \Delta \boldsymbol{p}].$$

Il en résulte, d'après (6):

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta s^2}{2}[\boldsymbol{p}' \,.\, \boldsymbol{p}''] + \frac{\Delta s^3}{6}[\boldsymbol{p}' \,.\, (\boldsymbol{p}''' + \boldsymbol{\epsilon})]. \tag{7}$$

Le vecteur $\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{p}' \,.\, \boldsymbol{p}'']$ étant orthogonal au plan osculateur S_p, l'angle des vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ est égal à l'angle dièdre $\widehat{S_p S_{pq}}$. On obtient donc, en vertu de (7):

$$\sin \widehat{S_p S_{pq}} = \frac{|[\boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{w}]|}{|\boldsymbol{v}| \cdot |\boldsymbol{w}|} = \frac{\frac{|\Delta s|^3}{6} |[\boldsymbol{p}' \,.\, (\boldsymbol{p}''' + \boldsymbol{\epsilon})] \cdot [\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{p}'']|}{\left|\frac{\Delta s^2}{2}[\boldsymbol{p}' \,.\, \boldsymbol{p}''] + \frac{\Delta s^3}{6}[\boldsymbol{p}' \,.\, (\boldsymbol{p}''' + \boldsymbol{\epsilon})]\right| \cdot |[\boldsymbol{p}' \,.\, \boldsymbol{p}'']|} =$$

$$\frac{|\Delta s|}{3} \cdot \frac{|\boldsymbol{p}'([\boldsymbol{p}' \,.\, (\boldsymbol{p}''' + \boldsymbol{\epsilon})]\boldsymbol{p}'') - \boldsymbol{p}''([\boldsymbol{p}' \,.\, (\boldsymbol{p}''' + \boldsymbol{\epsilon})]\boldsymbol{p}')|}{|[\boldsymbol{p}' \,.\, \boldsymbol{p}''] + \frac{\Delta s}{3}[\boldsymbol{p}' \,.\, (\boldsymbol{p}''' + \boldsymbol{\epsilon})]| \cdot |[\boldsymbol{p}' \,.\, \boldsymbol{p}'']|} =$$

$$\frac{|\Delta s|}{3} \cdot \frac{|[\boldsymbol{p}' \,.\, (\boldsymbol{p}''' + \boldsymbol{\epsilon})]\boldsymbol{p}''|}{|[\boldsymbol{p}' \,.\, \boldsymbol{p}''] + \frac{\Delta s}{3}[\boldsymbol{p}' \,.\, (\boldsymbol{p}''' + \boldsymbol{\epsilon})]| \cdot |[\boldsymbol{p}' \,.\, \boldsymbol{p}'']} .$$

Vu que $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \boldsymbol{\epsilon} = 0$, il s'ensuit [6])

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sin S_p S_{pq}}{|\Delta s|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}''\boldsymbol{p}'''|}{|\boldsymbol{p}''|^2} = \frac{1}{3}\,|t(p)|. \tag{8}$$

Les conditions de dérivabilité imposées à la fonction $\boldsymbol{p}(s)$ entraînent la relation

$$\lim_{q \to p} \frac{|\Delta s|}{pq} = 1;$$

on obtient donc, en comparant les relations (5) et (8), ce résultat:

$$\tau(p) = |t(p)|; \qquad \text{c.q.f.d.}$$

---

[5]) Nous désignons, comme d'habitude, par $[\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b}]$ le produit vectoriel et par $\boldsymbol{ab}$ le produit scalaire des vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$.

[6]) Je tiens l'idée de cette démonstration vectorielle simple de la relation (8) de M. Hittrich. Une autre démonstration vectorielle un peu plus longue m'a été communiquée par M. Szmodics.

4. *La torsion des arcs plans.*

En combinant le théorème précédent avec un résultat classique, on obtient immédiatement ce corollaire: Etant donné, dans l'espace E_3, un arc non rectiligne C représentable sous la forme $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(s)$ où les trois premières dérivées de $\boldsymbol{p}(s)$ sont partout continues, la condition nécessaire et suffisante, pour que C soit plan, est $\tau(p) = 0$ en tout point p de C. Mais ce résultat n'est point satisfaisant, parce qu'il contient une condition de dérivabilité. Pour parvenir à une caractérisation plus satisfaisante des arcs plans, il faudrait résoudre ce problème:

Etant donné un arc non rectiligne arbitraire C situé dans l'espace E_n, est-il vrai que la condition nécessaire et suffisante, pour que C soit plan est $\tau(p) = 0$ en tout point p de C?

La solution de ce problème me paraît être affirmative; mais il faut remarquer que, même si elle l'était en effet, on ne pourrait pas supprimer la condition que C soit situé dans un espace euclidien. Pour s'en convaincre, il suffit de construire un arc non-euclidien ayant en tout point une torsion nulle. Nous allons construire un arc C ayant les propriétés suivantes: 1. *Tout point de C a un voisinage isométrique avec un arc plan analytique*; 2. $\tau(p) = 0$ *en tout point p de C*; 3. *C n'est isométrique avec aucun ensemble plan.*

Envisageons l'espace C dont les points sont identiques avec les points du demi-cercle $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqq 0$ et définissons la distance pq des points $p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2)$ de C comme il suit:

$$pq = \begin{cases} \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}, & si \ \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \leqq \frac{2}{3}; \\ \frac{2}{3}, & si \ \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

C est évidemment un espace distancié homéomorphe avec le demi-cercle $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqq 0$; par conséquent C est un arc. De plus, tout voisinage de diamètre $< \frac{2}{3}$ d'un point arbitraire de C est isométrique avec un sous-arc de ce demi-cercle. On obtient donc, pour quatre points différents p, q, r_1, r_2 compris dans un voisinage de diamètre $< \frac{2}{3}$:

$$D(p, q, r_1, r_2) = 0; \ D(p, r_1, r_2) < 0; \ D(q, r_1, r_2) < 0.$$

Il en résulte, d'après la relation (1):

$$\tau(p, q; r_1, r_2) = 0;$$

par conséquent:

$$\tau(p) = \lim_{q \to p} \left(\lim_{\substack{r_1 \to p \\ r_2 \to p}} \tau(p, q; r_1, r_2) \right) = 0$$

en tout point p de C. Et pourtant C n'est isométrique avec aucun ensemble plan. Envisageons, en effet, les quatre points $p_1 = (-1, 0)$ $p_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$, $p_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3}\right)$, $p_4 = (1, 0)$ de C. La définition de la distance pq dans l'espace C prouve que

$$p_1p_2 = p_1p_3 = p_1p_4 = p_2p_3 = p_2p_4 = p_3p_4 = \frac{2}{3}.$$

Or, dans le plan, il n'existe pas quatre points dont toutes les six distances seraient égales; C n'est donc isométrique avec aucun ensemble plan.

REMARQUE SUPPLEMENTAIRE [1]).

M. Egerváry a attiré mon attention sur une définition de torsion due à Darboux [Leçons sur la théorie générale des surfaces, vol. IV (1896), 426]; définition qui se prête à une généralisation immédiate aux espaces distanciés. Il faut aussi remarquer qu'une démonstration semblable à la démonstration du No. 3 a été donnée récemment par M. R. Sauer [Monatsh. Math. Phys. 45 (1937), 358—365].

Quant au problème posé au No. 4, on peut procédér comme il suit: Appelons torsion de deuxième espèce le nombre

$$\tau_{II}(p) = \lim_{p_k \to p} \tau(p_1, p_4; p_2, p_3) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

où p_1, p_2, p_3, p_4 sont quatre points d'un arc C pris dans leur ordre naturel imposé par le sens de parcours positif de C. On peut démontrer ce théorème: *La condition nécessaire et suffisante, pour que l'arc euclidien rectifiable C soit plan, est* $\tau_{II}(p) = 0$ *en tout point p de C.*

La nécessité de cette condition est évidente, il ne faut donc démontrer que sa suffisance. Voici la marche de la démonstration. Soient p, q deux points arbitraires de C. Intercalons les points $p = p_0, p_1, \ldots, p_{n+3} = q$ ainsi que $p_ip_{i+1} = p_jp_{j+1}$ pour tout $i, j = 0, 1, \ldots, n + 2$. On démontre aisément que la relation $\tau_{II}(p) = 0$ pour tout point p entraîne $\tau(p_i, p_{i+3}; p_{i+1}, p_{i+2}) < \varepsilon$, $i = 0, 1, \ldots, n$, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, pourvu que n soit assez grand. On en tire d'après (4):

$$\widehat{S_{p_0p_1p_2}S_{p_{n+1}p_{n+2}p_{n+3}}} \leqq \sum_{i=0}^{n} \widehat{S_{p_ip_{i+1}p_{i+2}}S_{p_{i+1}p_{1+2}p_{i+3}}} < \varepsilon\frac{\pi}{6}\sum_{i=0}^{n} p_ip_{i+3}.$$

Désignons par λ la longeur finie de C, alors $\Sigma\, p_ip_{i+3} < 3\lambda$, par conséquent

$$\widehat{S_{p_0p_1p_2}S_{p_{n+1}p_{n+2}p_{n+3}}} < \varepsilon\frac{\lambda\pi}{2}.$$

On en tire que l'angle dièdre des plans osculateurs S_p, S_q est nulle, c'est à dire: tous les plans osculateurs de C sont parallèles, c q f d.

(Reçu le 21 janvier 1939.)

1) Faite dans les épreuves le 24 mars 1939.