

COMPOSITIO MATHEMATICA

SAMUEL EILENBERG

Généralisation du théorème de M. H. Hopf sur les classes des transformations en surfaces sphériques

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 428-433

http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__428_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Généralisation du théorème de M. H. Hopf sur les classes des transformations en surfaces sphériques

par

Samuel Eilenberg

Warszawa

1. Le i -ème groupe d'homotopie $\pi_i(S^m)$ de la surface sphérique m -dimensionnelle S^m (pour $m > 0$) sera désigné par (m^i) . C'est un groupe abélien au plus dénombrable¹⁾. $(m^i)^*$ désignera le groupe topologique compact orthogonal à (m^i) ²⁾. En particulier, (m^m) sera interprété comme le groupe des nombres entiers et, par conséquent, $(m^m)^*$ comme celui des nombres réels réduits mod 1.

2. Soit P^n un polyèdre n -dimensionnel et f une transformation continue telle que $f(P^n) \subset S^m$. A tout cycle m -dimensionnel Z^m de P^n à coefficients puisés de $(m^m)^*$ correspond alors un élément $g(f; Z^m) \in (m^m)^*$ qui est le *degré* de la transformation f sur le cycle Z^m . Cette correspondance est une homomorphie (continue) $\chi(f)$ du groupe $B^m(P^n)$ coef $(m^m)^*$ ³⁾ en groupe $(m^m)^*$, c.-à-d. un *caractère* du groupe $B^m(P^n)$ coef $(m^m)^*$.

Si deux transformations $f_0(P^n) \subset S^m$ et $f_1(P^n) \subset S^m$ appartiennent à la même classe, c. à d. sont homotopes, les caractères qui leur correspondent sont — comme on sait — égaux: $\chi(f_0) = \chi(f_1)$. Ainsi: à toute classe Φ de transformations continues $f(P^n) \subset S^m$ ($m > 0$) correspond un caractère $\chi(\Phi)$ du groupe $B^m(P^n)$ coef $(m^m)^*$.

3. On doit à M. Hopf⁴⁾ le théorème suivant:

(H) Si $n = m > 0$, les classes Φ de transformations continues

¹⁾ W. HUREWICZ [Proc. Akad. Amsterdam 38 (1935)], 113—114.

²⁾ L. PONTRJAGIN [Ann. of Math. (2) 35 (1934), 361—373].

³⁾ Nous désignons par $B^m(P^n)$ coef G le groupe d'homologie qu'on obtient en considérant les cycles m -dimensionnels de P^n à coefficients appartenant au groupe abélien G . Si le groupe G est topologique compact, ce groupe d'homologie l'est aussi; cf. L. PONTRJAGIN [Ann. of Math. (2) 35 (1934)], 906.

⁴⁾ H. HOPF [Comm. Math. Helv. 5 (1933), 38—54]; H. FREUDENTHAL [Comp. Math. 4 (1937), 235—238]; H. WHITNEY [Duke Math. Journ. 3 (1937), 46—55].

$f(P^n) \subset S^m$ et les caractères χ du groupe $B^m(P^n)$ coef $(m^m)^*$ sont en correspondance biunivoque, déterminée par $\chi(\Phi)$.

Je me propose d'établir ici la généralisation suivante de ce théorème:

THÉORÈME I. Soit P^n un polyèdre tel que

$$(3.1)_i \quad B^i(P^n) \text{ coef } (m^i)^* = 0^5),$$

$$(3.2)_i \quad B^{i+1}(P^n) \text{ coef } (m^i)^* = 0$$

pour $i = m + 1, m + 2, \dots$

Alors les classes Φ de transformations continues $f(P^n) \subset S^m$ et les caractères χ du groupe $B^m(P^n)$ coef $(m^m)^*$ sont en correspondance biunivoque déterminée par $\chi(\Phi)$.

Ce théorème résulte de deux théorèmes suivants qui seront démontrés plus loin:

THÉORÈME II. Soit P^n un polyèdre tel que

$$(3.3)_i \quad B^i(P^n) \text{ coef } (m^i)^* = 0$$

pour $i = m + 1, m + 2, \dots$

Pour que deux transformations continues $f_0(P^n) \subset S^m$ et $f_1(P^n) \subset S^m$ soient alors homotopes, il faut et il suffit que $\chi(f_0) = \chi(f_1)$.

THÉORÈME III. Soit P^n un polyèdre tel que

$$(3.4)_i \quad B^{i+1}(P^n) \text{ coef } (m^i)^* = 0$$

pour $i = m + 1, m + 2, \dots$

Alors, pour tout caractère χ du groupe $B^m(P^n)$ coef $(m^m)^*$, il existe une transformation continue $f(P^n) \subset S^m$ pour laquelle $\chi(f) = \chi$.

En particulier, dans les hypothèses du th. II, les transformations inessentielles $f(P^n) \subset S^m$ sont caractérisées par la condition $\chi(f) = 0$ (ce que nous avons démontré ailleurs, plus généralement pour les espaces P^n métriques compacts quelconques de dimension finie ⁶⁾).

4. Un polyèdre P^n est dit *acyclique en dimensions $\geq k$* (où $k > 0$) lorsque

$$(4.1)_i \quad B^i(P^n) \text{ coef } (i^i)^* = 0$$

pour tout $i \geq k$.

P^n est dit *acyclique*, lorsqu'il est connexe et acyclique en dimensions ≥ 1 .

⁵⁾ c.-à.-d. que le groupe en question se réduit à l'élément neutre.

⁶⁾ Fund. Math. 31 (1938), 193, th. VI.

On sait ⁷⁾ que, pour un polyèdre acyclique en dimensions $\geq m + 1$, les conditions (3.1)_i et (3.2)_i sont satisfaites pour tout $i \geq m + 1$. Le th. I implique donc le

THÉORÈME Ia. *Soit P^n un polyèdre acyclique en dimensions $\geq m + 1$. Alors les classes Φ de transformations continues $f(P^n) \subset S^m$ et les caractères χ du groupe $B^m(P^n)$ coef $(m^m)^*$ sont en correspondance biunivoque déterminée par $\chi(\Phi)$.*

THÉORÈME IV. *Pour qu'un polyèdre P^n soit acyclique en dimensions $\geq k$, il faut et il suffit que toute transformation continue $f(P^n) \subset S^m$ soit inessentielle pour tout $m \geq k$.*

THÉORÈME IVa ⁸⁾. *Pour qu'un polyèdre P^n soit acyclique, il faut et il suffit que toute transformation continue $f(P^n) \subset S^m$ soit inessentielle pour $m = 0, 1, \dots$*

Pour montrer que la condition du th. IV est nécessaire, on n'a qu'à appliquer le th. Ia. Pour prouver qu'elle est suffisante, désignons par m le plus grand entier tel que

$$(4.2) \quad B^m(P^n) \text{ coef } (m^m)^* \neq 0.$$

Il existe ²⁾ alors un caractère $\chi \neq 0$ du groupe (4.2). Le polyèdre P^n étant acyclique en dimensions $\geq m + 1$, on obtient en vertu du th. Ia une transformation continue $f(P^n) \subset S^m$ pour laquelle $\chi(f) = \chi \neq 0$, donc une transformation f essentielle.

Pour déduire le th. IVa du th. IV, on n'a qu'à remarquer que la connexité de P^n équivaut à ce que toute transformation continue $f(P^n) \subset S^0$ est inessentielle.

5. Soit X un sous-ensemble fermé d'un polyèdre P^n . Une transformation continue $f(X) \subset S^m$ sera dite *algébriquement prolongeable sur P^n* lorsque, pour tout cycle convergent $(m+1)$ -dimensionnel $Z^{m+1} \text{ mod } X$ de P^n ⁹⁾ à coefficients de $(m^m)^*$, on a $g(f; \partial Z^{m+1}) = 0$ ¹⁰⁾. Evidemment c'est une condition nécessaire pour l'existence d'un prolongement $f(P^n) \subset S^m$.

THÉORÈME V ¹¹⁾. *Soit X un sous-ensemble fermé d'un polyèdre P^n tel que*

⁷⁾ N. E. STEENROD [Amer. Journ. of Math. 58 (1936)], 675—676.

⁸⁾ Une partie de ce théorème (la nécessité) a été établie par M. K. BORSUK dans les Fund. Math 28 (1937), 203. L'autre partie (la suffisance) constitue une réponse affirmative à un des problèmes de M. BORSUK posés ibid., 210.

⁹⁾ Ce sont toujours les cycles à support compact; pour plus de détails voir S. EILENBERG [Fund. Math. 31 (1938)], 185—186.

¹⁰⁾ e. à d. $f(\partial Z^{m+1}) \simeq 0$ dans S^m , ∂Z^{m+1} désignant la frontière combinatoire de Z^{m+1} .

¹¹⁾ Pour le cas $n = m$, voir le renvoi ¹⁾.

$$(5.1)_i \quad B^{i+1}(P^n) \bmod X \text{ coef } (m^i)^* = 0$$

pour $i = m + 1, m + 2, \dots$ Pour qu'une transformation continue $f(X) \subset S^m$ admette un prolongement $f(P^n) \subset S^m$, il faut et il suffit qu'elle soit algébriquement prolongeable sur P^n .

Démonstration. Admettons que P^n est un sous-polyèdre simplicial de S^{2n+1} . Soit $Y \subset S^{2n+1} - P^n$ un polyèdre tel que

$$(5.2) \quad \text{Chaque cycle convergent mod } X \text{ de } S^{2n+1} - Y \text{ est homologue mod } X \text{ dans } S^{2n+1} - Y \text{ à un cycle convergent mod } X \text{ de } P^n \text{ }^{12}.$$

Ceci implique que

$$(5.3) \quad \text{Toute transformation continue } f(X) \subset S^m \text{ qui est algébriquement prolongeable sur } P^n \text{ est aussi algébriquement prolongeable sur } S^{2n+1} - Y.$$

Les propositions (5.2) et (5.1)_i donnent

$$(5.4)_i \quad B^{i+1}(S^{2n+1} - Y) \bmod X \text{ coef } (m^i)^* = 0$$

pour $i = m + 1, m + 2, \dots$

Or, comme nous l'avons démontré ailleurs ¹³, (5.4)_i implique que

$$(5.5) \quad \text{Toute transformation continue } f(X) \subset S^m \text{ algébriquement prolongeable sur } S^{2n+1} - Y \text{ admet un prolongement } f(S^{2n+1} - Y) \subset S^m.$$

La thèse du th. V résulte de (5.3) et (5.5).

6. *Démonstration du th. II.* Désignons par I l'intervalle fermé $[0, 1]$, par P^{n+1} le produit cartésien $P^n \times I$ et par X l'ensemble $P^n \times (0) + P^n \times (1) \subset P^{n+1}$. On déduit de (3.1)_i que

$$(6.1)_i \quad B^{i+1}(P^{n+1}) \bmod X \text{ coef } (m^i)^* = 0$$

pour $i = m + 1, m + 2, \dots$

Envisageons deux transformations continues

$$(6.2) \quad f_0(P^n) \subset S^m \quad f_1(P^n) \subset S^m$$

pour lesquelles

$$(6.3) \quad \chi(f_0) = \chi(f_1).$$

¹²) Il suffit dans ce but de faire Y égal à la somme de tous les simplexes fermés de S^{2n+1} disjoints à P^n .

¹³) Fund. Math. 31 (1938), 189, th. IV.

En posant

$$(6.4) \quad f(x, 0) = f_0(x), \quad f(x, 1) = f_1(x),$$

on obtient une transformation continue $f(X) \subset S^m$.

Soit Z^{m+1} un cycle $(m+1)$ -dimensionnel mod X de P^{n+1} à coefficients de $(m^m)^*$. On a alors

$$(6.5) \quad \partial Z^{m+1} = Z_0^m - Z_1^m,$$

où Z_0^m est un cycle de $P^n \times (0)$ et Z_1^m en est un de $P^n \times (1)$.

En désignant par Z_0^m et Z_1^m les cycles correspondants dans P^n , on a en vertu de (6.5) $Z_0^m \sim Z_1^m$ dans P^n , ce qui implique en vertu de (6.3) que

$$g(f_0; Z_0^m) = g(f_1; Z_1^m)$$

et d'après (6.4) que

$$g(f; Z_0^m) = g(f; Z_1^m),$$

d'où selon (6.5)

$$g(f; \partial Z^{m+1}) = 0.$$

La transformation $f(X) \subset S^m$ étant ainsi algébriquement prolongeable sur P^{n+1} , il existe en vertu de (6.1)_i et du th. V un prolongement $f(P^{n+1}) \subset S^m$, ce qui prouve en vertu de (6.4) que les transformations (6.2) sont homotopes.

7. *Démonstration du th. III.* Admettons que P^n est donné dans une division simpliciale et désignons par P^m la somme de tous les simplexes au plus m -dimensionnels de P^n . En vertu de (3.4)_i, on a alors

$$(7.1)_i \quad B^{i+1}(P^n) \text{ mod } P^m \text{ coef } (m^i)^* = 0$$

pour $i = m + 1, m + 2, \dots$

Tout caractère χ du groupe $B^m(P^n) \text{ coef } (m^m)^*$ est en même temps un caractère du groupe $B^m(P^m) \text{ coef } (m^m)^*$. En vertu du th. de M. Hopf⁴⁾, il existe donc une transformation continue $f(P^m) \subset S^m$ telle que $\chi(f) = \chi$. Pour tout cycle Z^m de P^m à coefficients de $(m^m)^*$, tel que $Z^m \sim 0$ dans P^n , on a alors $g(f; Z^m) = 0$, c.-à-d. que la transformation f est algébriquement prolongeable sur P^n . Les conditions (7.1)_i étant satisfaites, il existe en vertu du th. V un prolongement $f(P^n) \subset S^m$, ce qui achève la démonstration.

8. Remarquons pour terminer que la démonstration du th. V repose entièrement sur l'application du théorème cité dans le renvoi¹³), après avoir plongé P^n dans S^{2n+1} . Cependant la démonstration de ce théorème exige à son tour l'emploi de l'appareil des théorèmes de dualité tout entier. Il serait intéressant de démontrer le th. V (dont tous les autres théorèmes de cet article résultent) d'une façon intrinsèque.

(Reçu le 10 septembre 1938.)
