

COMPOSITIO MATHEMATICA

V. KUPRADZE

Zur Frage der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem inhomogenen ebenen Medium

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 228-234

http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__228_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Zur Frage der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem inhomogenen ebenen Medium

von

V. Kupradze

Tbilisi

Fällt eine elektromagnetische Welle $f(M)$ in ein ebenes Medium T_i mit der (genügend glatten) Begrenzung C ein, so entsteht ein zusätzliches elektromagnetisches Feld mit den elektrischen und magnetischen Vektoren u^* , die den Maxwell'schen Gleichungen genügen. Ist $f(M)$ monochromatisch, so hat man

$$\begin{aligned} u^* &= \Re(e^{int} \cdot u) \\ \Delta u + s^2(M)u &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

wo

$$\begin{aligned} s^2(M) &= \begin{cases} k_i^2 & \text{in } T_i \\ k_a^2 & \text{in } T_a \text{ (dem Äußeren von } C), \end{cases} \\ k_i^2 &= \frac{1}{c^2} (n^2 \varepsilon \mu - in \sigma \mu), \end{aligned} \quad (2)$$

$$k_a^2 = \frac{n^2}{c^2}, \quad (3)$$

hier ist ε die Dielektrizitätskonstante, μ die magnetische Permeabilität, σ die Leitfähigkeit in T_i , n eine reelle positive Zahl, die Schwingungszahl; in T_a sind $\sigma = 0$, $\varepsilon = \mu = 1$.

Zur Lösung des ebenen Problems genügt es, die z -Komponente des Feldes zu finden; nach den Maxwell'schen Gleichungen lassen sich aus ihr die übrigen durch Differentiationen ermitteln. Bekanntlich müssen diese z -Komponenten außer (1) noch Randbedingungen längs C erfüllen, und zwar für den elektrischen Vektor

$$u_i = u_a, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_a, \quad (4)$$

für den magnetischen Vektor

$$u_i = u_a, \quad \frac{1}{k_i^2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_i = \frac{1}{k_a^2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_a.$$

Schließlich muß gewissen Bedingungen über das Verschwinden im Unendlichen genügt werden, den Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingungen:

$$\frac{\partial u}{\partial R} + ik_a u = o(R^{-\frac{1}{2}}) \quad (5)$$

$$(R^2 = x^2 + y^2).$$

In meinen Arbeiten [1], [2] und in der Sternbergschen Arbeit [3] wurde gezeigt, daß sich die Lösungen dieser zwei Aufgaben ergeben als Lösungen folgender Integralgleichungen ¹⁾

$$u(P) = (k_i^2 - k_a^2) \iint_{T_i} G(P, Q) u(Q) d\sigma_Q + f(P), \quad (6)$$

$$\frac{u(P)}{s^2(P)} = \frac{k_i^2 - k_a^2}{k_i^2} \iint_{T_i} G(P, Q) u(Q) d\sigma_Q +$$

$$+ \frac{k_a^2 - k_i^2}{k_i^2 k_a^2} \int_C \frac{\partial G}{\partial n} u(Q) ds + \frac{f(P)}{k_a^2} \quad (7)$$

mit

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} H_0^{(2)}(k_a r_{PQ}),$$

wo r_{PQ} den Abstand der Punkte P, Q bedeute, $f(P)$ die gegebene einfallende Welle sei, die

$$\Delta f + k_a^2 f = 0$$

genüge, und $H_0^{(2)}(k_a r)$ die Hankelsche Funktion zweiter Art nullter Ordnung.

(6) ist eine gewöhnliche Fredholmsche Integralgleichung, für die sich die Lösungsexistenz aus der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung ergibt; (7) ist eine belastete Fredholmsche Integralgleichung, für die man nach geeigneter Umformung das Analoge behaupten kann. Diese Untersuchung und den Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für (7) habe ich in einer kurzen Note ([4]) veröffentlicht. Den Eindeutigkeitsbeweis für (6) habe ich kurz in der Arbeit [1], ausführlicher in der Arbeit [2] veröffentlicht. ²⁾

Diese Beweise begegneten der Kritik des Herrn Hans Freudenthal, der einen neuen Eindeutigkeitsbeweis für (6) erbrachte

¹⁾ Ich verwende hier die Bezeichnungen von Herrn Sternberg.

²⁾ In diesen Arbeiten wird allein der Fall $\sigma \neq 0$ behandelt. In der Arbeit [1] fehlt leider durch ein Korrekturversehen dieser Hinweis, doch aus dem Gang der Untersuchung geht hervor, daß nur von diesem Fall die Rede ist. Der allgemeine Fall wurde in [4] behandelt.

(siehe [5]). Weil diese Kritik, wie mir scheint, wenigstens teilweise, auf Mißverständnissen beruht, erlaube ich mir, zur Rechtfertigung meiner Methode, hier in — wie ich glaube — vollkommen einwandfreier Form auf die Fragestellung zurückzukommen. Ich beschränke mich dabei auf den Fall einer nichtverschwindenden Leitfähigkeit in T_i : $\sigma \neq 0$.

Wir wollen zeigen, daß die Gleichung

$$u(P) = (k_i^2 - k_a^2) \iint_{T_i} G(P, Q) u(Q) d\sigma_Q, \quad (8)$$

mit k_i^2, k_a^2 gemäß (2) und (3), nur die triviale Lösung

$$u = 0 \quad (9)$$

besitzt.

Beachten wir, daß aus der asymptotischen Darstellung

$$H_n^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \pi \frac{2n+1}{r})} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right],$$

der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(x) = -H_1^{(2)}(x)$$

und der Gleichung (8) vermöge einer einfachen rechnerischen Umformung folgt

$$u = O(r^{-\frac{1}{2}}), \quad \frac{\partial u}{\partial r} = O(r^{-\frac{1}{2}}), \quad (10)$$

d.h., daß $\sqrt{r}|u|$ und $\sqrt{r} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|$ beschränkt sind. Schreiben wir

$$u_a = \varphi_a + i\psi_a, \quad u_i = \varphi_i + i\psi_i, \quad (11)$$

und beachten wir

$$u_a^* = \Re(e^{int} u_a), \quad u_i^* = \Re(e^{int} u_i), \quad (11')$$

so ersehen wir aus (1) und (2) leicht, daß

$$\Delta u_a^* = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_a^*}{\partial t^2}, \quad \Delta u_i^* = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial t^2} + \frac{\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \quad (12)$$

gilt. So erhalten wir die mit der Zeit periodischen Ausdrücke

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right)^2 \right\}, \\ E_a &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_a^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_a^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial u_a^*}{\partial t} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Hieraus ergibt sich nach (12)

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_i}{\partial t} &= \operatorname{div} \left[\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \operatorname{grad} u_i^* \right] - \frac{\mu\sigma}{c^2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right)^2, \\ \frac{\partial E_a}{\partial t} &= \operatorname{div} \left[\frac{\partial u_a^*}{\partial t} \operatorname{grad} u_a^* \right].\end{aligned}\quad (14)$$

Achten wir auf die Stetigkeit von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ längs C , so können wir den Gaußschen Satz auf die Funktion

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\mu\sigma}{c^2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right)^2$$

mit

$$E = E_i + E_a$$

anwenden; wir integrieren dabei über $T_i + T_{a,R}$, d.h. die Kreisscheibe, die begrenzt wird von dem Kreis Σ_R mit dem (genügend großen) Radius R . So ergibt sich

$$\iint_{T_i + T_{a,R}} \frac{\partial E}{\partial t} d\sigma = \int_{\Sigma_R} \frac{\partial u_a^*}{\partial t} \cdot \frac{\partial u_a^*}{\partial n} ds - \frac{\mu\sigma}{c^2} \iint_{T_i} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right)^2 d\sigma \quad (15)$$

(n = innere Normale).

Man erhält leicht aus (11) und (11'):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_a^*}{\partial t} \cdot \frac{\partial u_a^*}{\partial n} &= -n(\varphi \sin nt + \psi \cos nt) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} \cos nt - \frac{\partial \psi}{\partial R} \sin nt \right) \\ &= -k_a n (\varphi \sin nt + \psi \cos nt)^2 - n(\varphi \sin nt + \psi \cos nt) \cdot \\ &\quad \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} - k_a \psi \right) \cos nt - \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} + k_a \varphi \right) \sin nt \right] \\ &= -\frac{n}{k_a} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} \cos nt - \frac{\partial \psi}{\partial R} \sin nt \right)^2 + \\ &\quad + \frac{n}{k_a} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} \cos nt - \frac{\partial \psi}{\partial R} \sin nt \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} - k_a \psi \right) \cos nt - \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} + k_a \varphi \right) \sin nt \right].\end{aligned}\quad (16)$$

Wir beachten, daß die Bedingung (5), der die gesuchte Lösung genügen muß, in zwei Bedingungen zerfällt:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} - k_a \psi \right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right), \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} + k_a \varphi \right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right). \quad (17)$$

Tragen wir (16) in (15) ein, so erhalten wir rechts u.a. Integrale

der Form:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{R}\varphi \cdot \sqrt{R} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial R} - k_a\psi \right) d\alpha, \quad \int_0^{2\pi} \sqrt{R}\psi \cdot \sqrt{R} \left(\frac{\partial\psi}{\partial R} + k_a\varphi \right) d\alpha,$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{R} \frac{\partial\varphi}{\partial R} \cdot \sqrt{R} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial R} - k_a\psi \right) d\alpha, \quad \int_0^{2\pi} \sqrt{R} \frac{\partial\psi}{\partial R} \cdot \sqrt{R} \left(\frac{\partial\psi}{\partial R} + k_a\varphi \right) d\alpha.$$

Auf grund der oben gemachten Bemerkung über die Beschränktheit von $\sqrt{R}|\varphi|$, $\sqrt{R}|\psi|$, $\sqrt{R}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right|$, $\sqrt{R}\left|\frac{\partial\psi}{\partial R}\right|$ und aufgrund von (17) bemerken wir, daß alle diese Integrale mit wachsendem R nach Null streben. Aus (15) ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{T_i + T_{a,R}} E d\sigma &= -k_a n \int_0^{2\pi} [\sqrt{R}(\varphi_a \sin nt + \psi_a \cos nt)]^2 d\alpha - \\ &\quad - \frac{\mu\sigma}{c^2} \iint_{T_i} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right)^2 d\sigma = \\ &= -\frac{u}{k_a} \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{R} \left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial R} \cos nt - \frac{\partial\psi_a}{\partial R} \sin nt \right) \right]^2 d\alpha - \\ &\quad - \frac{\mu\sigma}{c^2} \iint_{T_i} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right)^2 d\sigma. \end{aligned} \quad (18)$$

Da wegen der Annahme $\sigma \neq 0$ das zweite Integral rechts *nicht* verschwindet, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{T_i + T_{a,R}} E d\sigma \leq 0. \quad (19)$$

Da aber $\iint_{T_i + T_{a,R}} E d\sigma$ mit der Zeit periodisch ist, muß aus (19) folgen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{T_i + T_{a,R}} E d\sigma = 0. \quad (20)$$

(20) kann man auch physikalisch deuten als formelmäßigen Ausdruck für die Konstanz der „Quasienergie“ bei stationären Prozessen.

Aus (20) und (18) folgen die asymptotischen Beziehungen

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [\sqrt{R}(\varphi_a \sin nt + \psi_a \cos nt)]^2 d\alpha &\rightarrow 0, \\ \int_0^{2\pi} \sqrt{R} \left[\frac{\partial\varphi_a}{\partial R} \cos nt - \frac{\partial\psi_a}{\partial R} \sin nt \right]^2 d\alpha &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (21)$$

und die Gleichung

$$\iint_{T_i} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right)^2 d\sigma = 0. \quad (22)$$

Aus (21) erhalten wir die asymptotischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\sqrt{R}\varphi_a)^2 d\alpha &\rightarrow 0, & \int_0^{2\pi} (\sqrt{R}\psi_a)^2 d\alpha &\rightarrow 0, \\ \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{R} \frac{\partial \varphi_a}{\partial R} \right)^2 d\alpha &\rightarrow 0, & \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{R} \frac{\partial \psi_a}{\partial R} \right)^2 d\alpha &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

und hieraus

$$\int_0^{2\pi} R |u_a|^2 d\alpha \rightarrow 0, \quad \int_0^{2\pi} R \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 d\alpha \rightarrow 0.$$

Die Schwarzsche Ungleichheit liefert:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{R} |u_a| d\alpha \rightarrow 0, \quad \int_0^{2\pi} \sqrt{R} \left(\frac{\partial u_a}{\partial R} \right) d\alpha \rightarrow 0. \quad (23)$$

Aus (22) folgt

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t} = 0, \text{ also } \varphi_i \sin nt + \psi_i \cos nt = 0$$

und hieraus

$$\varphi_i = \psi_i = 0.$$

Also

$$u_i = 0 \text{ in } T_i,$$

also wegen der Stetigkeit auf C :

$$\begin{aligned} u_i &= 0, & \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_i &= 0, \\ u_a &= 0, & \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_a &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Der Wert von u in irgendeinem Punkte (x_0, y_0) von T_a im Innern von Σ_R errechnet auf grund einer bekannten Formel zu

$$\begin{aligned} u_a(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_C \left(u_a \frac{\partial H_0^{(2)}(k_a r)}{\partial n} - H_0^{(2)}(k_a r) \frac{\partial u_a}{\partial n} ds \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_R} \left(u_a \frac{\partial H_0^{(2)}(k_a r)}{\partial n} - H_0^{(2)}(k_a r) \frac{\partial u_a}{\partial n} \right) ds. \end{aligned} \quad (25)$$

Wegen (24) verschwindet das erste Integral; das zweite läßt

sich mit (23) und dem asymptotischen Ausdruck für $H_0^{(2)}(k_a r)$ abschätzen; dabei ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{R} u_a \cdot A_1(r) d\alpha - \int_0^{2\pi} A(r) \sqrt{R} \frac{\partial u_a}{\partial R} d\alpha$$

mit

$$A(r) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi k_a}} e^{-i(k_a r - \frac{\pi}{4})} \left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right]$$

und einem analogen Ausdruck für $A_1(r)$. Also

$$\left| \int_0^{2\pi} \sqrt{R} u_a \cdot A_1(r) d\alpha \right| \leq \int_0^{2\pi} \sqrt{R} |u_a| \cdot |A_1(r)| d\alpha \rightarrow 0,$$

$$\left| \int_0^{2\pi} \sqrt{R} \frac{\partial u_a}{\partial R} \cdot A(r) d\alpha \right| \leq \int_0^{2\pi} \sqrt{R} \left| \frac{\partial u_a}{\partial R} \right| \cdot |A(r)| d\alpha \rightarrow 0$$

und daher

$$u_a(x, y) = 0 \text{ in } T_a,$$

w.z.b.w.

Das ist bewiesen unter der Voraussetzung $\sigma \neq 0$. Ist $\sigma = 0$, d.h. herrscht in T_i ein Dielektrikum, so können wir nicht auf (22) schließen; wir haben dann nur die Beziehung (21). In diesem Fall können wir dasselbe Resultat erzielen mit Hilfe einer Reihenentwicklung

$$u_a = \sum H_0^{(2)}(k_a r) [a_m \cos m\vartheta + b_m \sin m\vartheta]. \quad (26)$$

Herr Freudenthal behandelt auch den Fall $\sigma = 0$; er macht dabei, wenn auch nicht explizit, von einer derartigen Entwicklung Gebrauch.

Literatur.

- [1] V. KUPRADZE [C. R. USSR (n. s.) 1936, 1, 7–9].
- [2] V. KUPRADZE [Arbeiten aus dem Math. Inst. Tiflis 1 (1937)].
- [3] W. STERNBERG [Compositio Math. 3 (1936), 254–275].
- [4] V. KUPRADZE [C. R. USSR (n. s.) 16 (1937), 165–168].
- [5] H. FREUDENTHAL [Compositio Math. 6 (1938), 221–227].³⁾

(Eingegangen den 24. November 1937. Abgeändert den 7. August 1938.)

³⁾ Der Verf. machte mir diese Arbeit vor dem Druck zugänglich.