Compositio Mathematica

Werner Rogosinski

Über beschränkte Potenzreihen I

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 67-106
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__67_0>

Über beschränkte Potenzreihen I

von

Werner Rogosinski

Königsberg

Meinem verehrten Lehrer E. Landau zum 60. Geburtstage gewidmet.

Es handelt sich in dieser Arbeit um den Wertevorrat einer beschränkten Potenzreihe; genauer wird die Klasse $\mathfrak{F}$ der für $|z| < 1$ regulären Funktionen

(1) $$f(z) = \alpha z + \beta z^2 + \ldots$$

betrachtet, die dort der Beschränkung

(2) $$|f(z)| < 1$$

genügen. Mit $\mathfrak{F}_{|\alpha|}$ bezeichnen wir die Unterklasse der $f(z)$ mit festem $|\alpha|$.

Durch Übergang von $f(z)$ zu $\varepsilon f(z)$ mit passendem ε, $|\varepsilon| = 1$, kann man die Normierung

(3) $$\alpha = f'(0) \geqq 0$$

erreichen. Ist diese erfüllt, so sprechen wir von der Klasse $\mathfrak{F}_+$ und bei festem $\alpha \geqq 0$ von der Klasse $\mathfrak{F}_\alpha$.

Im wesentlichen wird das folgende Problem behandelt:

Gegeben sei eine endliche oder unendliche Folge (ζ_k) *mit*

(4) $$0 < |\zeta_k| \leqq |\zeta_{k+1}| < 1; \qquad k \geqq 1.$$

Welchen gemeinsamen Wert w *kann eine Funktion* $f(z)$ *aus* $\mathfrak{F}_+$ *bzw.* $\mathfrak{F}_\alpha$ *an diesen Stellen* ζ_k *annehmen?*

Für jedes solche zulässige w nennen wir die Folge (ζ_k) eine *w-Verteilung.* Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I: Die ζ_k sind *gewisse, nicht notwendig sämtliche w-Stellen* von $f(z)$. Wir sprechen dann von einer *w-Mindestverteilung.*

II: Die ζ_k sind *sämtliche w-Stellen* von $f(z)$ in $|z| < 1$. Wir sprechen dann von einer *w-Vollverteilung.*

In die Behandlung und Beantwortung dieses Problems gehen nur die von der Verteilung abhängigen Größen

(5) $$P = \prod_k |\zeta_k|; \qquad S = \sum_k \frac{1-|\zeta_k|^2}{\zeta_k}$$

und die Funktion

(6) $$P(z) = \prod_k \frac{z-\zeta_k}{z\bar{\zeta}_k - 1}\eta_k^{-1} = P - PSz + \ldots; \quad \zeta_k = |\zeta_k|\eta_k,$$

ein. Dabei besteht zwischen P und S die leicht beweisbare Ungleichung

(7) $$|S| \leqq \frac{1-P^2}{P},$$

in welcher das Gleichheitszeichen (für $P \neq 0$) nur gilt, wenn die Folge (ζ_k) aus einem einzigen ζ besteht.

Schließlich lassen wir auch zu, daß die Folge (ζ_k) *leer* ist [1]); insbesondere bedeutet dies für eine Vollverteilung, daß der betreffende Wort w von $f(z)$ in $|z| < 1$ *nicht* angenommen wird. Zumeist werden wir für die zu betrachtenden Verteilungen noch *die neue Normierung*

(8) $$S \geqq 0$$

voraussetzen [2]). Durch Übergang von $f(z)$ zu $\varepsilon^{-1} f(\varepsilon z)$ mit einem geeigneten ε, $|\varepsilon| = 1$, kann dies *innerhalb* $\mathfrak{E}_\alpha$ stets erreicht werden.

Zugleich erkennt man, daß erst durch diese Normierung die Voraussetzung (3) *voll ausgenutzt wird.*

Wo es erforderlich ist (z.B. in den Hauptformeln), schreiben wir *bei Mindestverteilungen* (zum Unterschied von Vollverteilungen) P^*, S^* und $P^*(z)$. Die gelegentliche Schreibweise P_w, S_w bzw. P^*_w, S^*_w soll andeuten, daß es sich gerade um eine w-Verteilung handelt.

Die Methode der Untersuchung beruht, wie dies in diesem Problemkreise nur natürlich ist, ausschließlich auf dem *Schwarzschen Lemma* [3]) und seinen Verallgemeinerungen. *Alle bewiesenen Abgrenzungen, soweit nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird, sind Bestaussagen.* Sie werden gewöhnlich unter der Normierung (8) zunächst für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$ und dann durch Variation der $\alpha \geqq 0$ für die Klasse $\mathfrak{E}_+$ hergeleitet. Man beachte, daß alle aus

---

[1]) In diesem Falle ist $P = 1$, $S = 0$ zu setzen.

[2]) Besteht die Folge (ζ_k) aus p gleichen Stellen ζ, so ist also $\zeta \geqq 0$ zu normieren.

[3]) Schwarz, 110—111. *Das Literaturverzeichnis befindet sich am Ende dieses Teiles der Arbeit.*

diesen Abgrenzungen folgenden Ungleichungen, die nur die absoluten Beträge der Funktionswerte enthalten, zugleich für die Klassen $\mathfrak{C}_{|\alpha|}$ und $\mathfrak{C}$ scharf werden, wenn man die Normierung (8) aufhebt[4]) und α, S durch $|\alpha|$, $|S|$ ersetzt. Die Extremalfunktionen bei diesen Ungleichungen für die Klassen $\mathfrak{C}_{|\alpha|}$ bzw. $\mathfrak{C}$ sind aus denen für $\mathfrak{C}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{C}_+$ durch die oben genannten Übergänge sofort zu ersehen.

1. Die Arbeit zerfällt gemäß den zwei Arten von Verteilungen in *zwei Teile*. Der erste, hier zuerst allein veröffentlichte Teil, behandelt die *Mindestverteilungen.* Hier sind ein Teil der Ergebnisse, so weit sie insbesondere die Klassen $\mathfrak{C}_{|\alpha|}$ und $\mathfrak{C}$ betreffen, nicht neu[5]). Die systematische Neudarstellung der hierher gehörigen Fragen möge sowohl durch die oft vereinfachte Beweisanordnung, durch manche Ergänzung (z.B. die mir bemerkenswert erscheinende Ungleichung (18) !) und die neuen Ergebnisse für die Klassen $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{C}_+$ gerechtfertigt sein. Außerdem gibt dieser Teil der Arbeit gute Vergleichsmöglichkeiten mit den entsprechenden Ergebnissen bei Vollverteilungen, die im 2. Teil mitgeteilt werden sollen. Er zerfällt in drei Paragraphen:

1. 1: Im *ersten Paragraphen* werden die 0-*Mindestverteilungen* behandelt. Hier gelten für die Klasse $\mathfrak{C}_\alpha$ die *Jensensche Ungleichung*[6])

$$\alpha \leqq P_0^* \tag{9*}$$

mit dem Gleichheitszeichen für $f(z) = zP_0^*(z)$ und die Majorantenrelation[7])

$$\frac{f(z)}{zP_0^*(z)} \prec \frac{z - \frac{\alpha}{P_0^*}}{z\frac{\alpha}{P_0^*} - 1}; \qquad P_0^* > 0, \tag{10}$$

mit den Extremalfunktionen $f(z) = zP_0^*(z)\dfrac{z\varepsilon - \frac{\alpha}{P_0^*}}{z\varepsilon\frac{\alpha}{P_0^*} - 1}$, $|\varepsilon| = 1.$[8])

Die Jensensche Ungleichung beantwortet unser Problem der

---

[4]) Im Falle $\zeta_k \equiv \zeta$ fällt also die Normierung $\zeta \geqq 0$ fort.

[5]) Siehe etwa Bieberbach, 3. Abschnitt, 114—158; Dieudonné, 92—112.

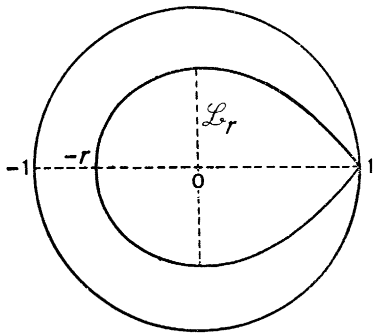
[6]) Jensen 1, 362—363; Carathéodory-Fejér; Bieberbach, 120.

[7]) $f(z) \prec F(z)$ in $|z| < 1$ bedeutet, daß für festes z der Wert $f(z)$ dem „Wertevorrat" von $F(\zeta)$ für $|\zeta| \leqq |z|$ angehört; vergl. Rogosinski 1, 1.

[8]) Für $P_0^* = 0$ ist notwendig $f(z) \equiv 0$.

0-Mindestverteilungen bereits vollständig, d.h. jede Verteilung mit $\alpha \leqq P_0^* \leqq 1$ *ist in der Klasse* $\mathfrak{E}_\alpha$ *realisierbar.* Für die Klasse $\mathfrak{E}_+$ unterliegt die Verteilung überhaupt keiner Einschränkung.

Die Majorantenrelation (10) liefert für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$ scharfe Abgrenzungen der Funktionswerte $f(z)$ *bei festem* z (nicht nur $|z|$!) und gegebener 0-Mindestverteilung. Aus ihr folgen insbesondere Abschätzungen von $|f(z)|$ nach oben und für $|z| < \frac{\alpha}{P_0^*}$ auch nach unten. Variation der $\alpha \geqq 0$ ergibt die scharfen Abgrenzungen für die Klasse $\mathfrak{E}_+$[9]): *Es sei* $0 < r < 1$ *und* $\mathfrak{B}_r$ *bezeichne den Kreisbogenbereich, der in der linken Halbebene von dem Halbkreise* $|w| = r$, *rechts aber von den beiden anschließenden Kreisbögen durch* 1, ir, -1 *bzw.* 1, $-ir$, -1 *begrenzt wird* (Figur 1).



Figur 1.

Für jede Funktion $f(z)$ *aus* $\mathfrak{E}_+$ *liegt dan* $\frac{f(z)}{zP_0^*(z)}$ *in* $\mathfrak{B}_{|z|}$.

Ist $\zeta \neq 0$ eine mindestens p-fache Nullstelle von $f(z)$, so liefert (10) mit $z = \zeta$ und $\zeta_k \equiv \zeta$ scharfe Abgrenzungen für $f^{(p)}(\zeta)$ innerhalb $\mathfrak{E}_\alpha$, und der obige Satz innerhalb $\mathfrak{E}_+$. Für die nichtnormierte Klasse $\mathfrak{E}$ findet man insbesondere

$$\frac{|f^{(p)}(\zeta)|}{p!} \leqq \frac{|\zeta|}{(1-|\zeta|^2)^p}. \tag{11}$$

Auch die höheren Ableitungen an solchen Nullstellen kann man prinzipiell abgrenzen; die Ergebnisse werden aber praktisch kaum noch übersichtlich. Für die Klasse $\mathfrak{E}$ zeige ich die scharfe Ungleichung

$$\left.\begin{aligned} |f''(\zeta)| &\leqq \frac{2}{(1-|\zeta|^2)^2} && \text{für } |\zeta| \leqq \frac{1}{2}; \\ |f''(\zeta)| &\leqq \frac{1+4|\zeta|^2}{2|\zeta|(1-|\zeta|^2)^2} && \text{für } |\zeta| \geqq \frac{1}{2}; \end{aligned}\right\} \quad f(\zeta) = 0. \tag{12}$$

Schließlich wird die genaue Abgrenzung des zweiten Koeffizienten β der Entwicklung (1) sowohl für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$ al^c

[9]) Für den Fall $P_0^* = 1$ siehe Rogosinski 2, 213.

auch für $\mathfrak{G}_+$ bei gegebener 0-Mindestverteilung durchgeführt. Für die nichtnormierte Klasse $\mathfrak{G}$ ergibt sich insbesondere das folgende *Gegenstück zur Jensenschen Formel*:

$$(13)\qquad \begin{aligned} |\beta| &\leqq P_0^*\left(1+\frac{|S_0^*|^2}{4}\right) \quad &\text{für}\quad |S_0^*| \leqq 2,\\ |\beta| &\leqq P_0^* \cdot |S_0^*| &\text{für}\quad |S_0^*| \geqq 2.\end{aligned}$$

Man beachte, daß im Falle $|S_0^*| \geqq 2$, der wegen (7) nur für $\frac{1-P_0^{*2}}{P_0^*} \geqq 2$, d.i. $P_0^* \leqq \sqrt{2}-1$ möglich ist, $|\beta| \leqq 1-P_0^{*2}$ wird, so daß man auch eine Abschätzung von P_0^* nach oben erhält. Im ersten Falle, der sicherlich für $P_0^* \geqq \sqrt{2}-1$ erfüllt ist, folgt $|\beta| \leqq \frac{(1+P_0^{*2})^2}{4P_0^*}$.

Der Fall *einer* Nullstelle, $P_0^* = |\zeta|$, $S_0^* = \frac{1-|\zeta|^2}{\zeta}$ verdient besonderes Interesse.

1. 2: Der *zweite Paragraph* bringt *die w-Mindestverteilungen* für die allgemeinen w mit $0 < |w| < 1$. Der Übergang von $f(z)$ zu der Funktion

$$(14)\quad f_w(z) = z\,\frac{f(z)-w}{f(z)\,\overline{w}-1}\,\gamma^{-1} = |w|\,z - \alpha\gamma^{-1}(1-|w|^2)\,z^2 + \ldots;\; w = |w|\gamma,$$

aus $\mathfrak{G}_+$ führt diesen Fall auf den der 0-Mindestverteilungen zurück. Man beachte aber, daß der Koeffizient α erst in dem zweiten Koeffizienten der Entwicklung (14) auftritt.

Die Jensensche Ungleichung wird hier zu [10])

$$(15^*)\qquad |w| \leqq P_0^*,$$

und das Gleichheitszeichen ist innerhalb $\mathfrak{G}_+$ nur im Falle $\frac{f(z)-w}{f(z)\overline{w}-1} = \gamma P^*(z)$ richtig.

Diese Extremalfunktion gehört aber, wenn die Verteilung durch $S > 0$ normiert ist, nur im Falle $w > 0$ zu $\mathfrak{G}_+$. Daher beantwortet die Ungleichung (15*) unser Problem der w-Mindestverteilung für die Klasse $\mathfrak{G}_+$ *nicht vollständig*, obschon diese Abschätzung für $|w|$ selbst scharf ist. Für die nichtnormierte Klasse $\mathfrak{G}$ ist sie die beste Aussage.

Das Problem der w-Mindestverteilungen für die Klasse $\mathfrak{G}_\alpha$ wird

---

[10]) Dieudonné, 97, Formel (12).

dagegen durch die Ungleichung [11])

$$\left|\alpha\frac{1-|w|^2}{w}-S^*\right|\leqq\frac{P^*}{|w|}-\frac{|w|}{P^*} \tag{16}$$

beantwortet, in der das Gleichheitszeichen nur bei Funktionen

$$\frac{f(z)-w}{f(z)\bar{w}-1}=\gamma P^*(z)\frac{z\varepsilon-\frac{|w|}{P^*}}{z\varepsilon\frac{|w|}{P^*}-1} \tag{17}$$

mit passend gewähltem ε, $|\varepsilon|=1$, richtig ist. *Jede* (16) *erfüllende Verteilung ist in* $\mathfrak{C}_\alpha$ *eine mögliche w-Mindestverteilung.*

Die durch (16) gegebene Beschränkung der w werden wir gestaltlich diskutieren. Schon hier sieht man, daß (im Einklang mit (9*)) für $P^*<\alpha$ die möglichen $|w|$ auch nach unten beschränkt sind. Ein besonderes Interesse verdient aber die aus (16) ableitbare Ungleichung:

$$|\alpha|\leqq \mathrm{A}^*(P^*,|S|^*)=\begin{cases}\dfrac{1}{P^*}\dfrac{P^{*2}+\eta^{*2}}{1+\eta^{*2}} & \text{für } |S^*|\leqq 2\dfrac{1-P^{*2}}{1+P^{*2}},\\[2ex] \dfrac{|S^*|\,P^*}{1-P^{*2}} & \phantom{\text{für }}|S^*|\geqq 2\dfrac{1-P^{*2}}{1+P^{*2}}\end{cases}$$

$$\frac{2\eta^*}{1+\eta^{*2}}=\frac{|S^*|\,P^*}{1-P^{*2}};\quad 0\leqq\eta^*\leqq 1, \tag{18}$$

deren rechte Seite nur von den Größen P^* und $|S^*|$ der gegebenen Verteilung, *nicht aber von* w abhängt.

Es sind also in $\mathfrak{C}_{|\alpha|}$ *nicht beliebige Mindestverteilungen* (*auch nicht für irgend ein passendes* w) *möglich. Andererseits aber ist jede Verteilung, die* (18) *genügt, eine w-Mindestverteilung für passendes* w *in* $\mathfrak{C}_{|\alpha|}$.

Man beachte, daß $\mathrm{A}^*<1$ wird, sobald mehr als ein ζ_k gegeben ist. [12a])

Durch Variation der $\alpha\geqq 0$ in (16) erhält man schließlich auch *die genaue Abgrenzung von* w *für die Klasse* $\mathfrak{C}_+$:

Wird die Normierung (8) *vorausgesetzt, so liegt* w *in dem Kreisbogenbereiche* $P^*\mathfrak{B}_\varrho$ (siehe 1.1) *mit*

$$\frac{1-\varrho^2}{\varrho}=S^*. \tag{19}$$

---

[11]) Vgl. Dieudonné, 97, Formel (13).

[12]) Es ist $\mathrm{A}^*\geqq P^*$ und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn $|S^*|\,P^*=0$ ist. Für $|S^*|=\dfrac{1-P^{*2}}{P^*}$, d.h. im Falle *eines* ζ_k, ist $\mathrm{A}^*=1$; sonst ist $\mathrm{A}^*<1$.

[12a]) Für den Fall zweier ζ_k siehe Carathéodory 2, Problem 1.

Zusatz bei der Korrektur: Der Beweis bei Herrn Carathéodory ist ohne weiteres auf den allgemeinen Fall (18) übertragbar.

1. 3: Im *dritten Paragraphen* wird zunächst die Majoranten-relation

$$(20)\qquad \frac{f(z)-w}{f(z)\bar{w}-1}\cdot\frac{\gamma^{-1}}{P^*(z)}\prec\frac{z-\dfrac{|w|}{P^*}}{z\dfrac{|w|}{P^*}-1}$$

diskutiert. Sie liefert innerhalb $\mathfrak{C}$ die scharfen Abgrenzungen für $f(z)$ bei gegebener w-Mindestverteilung und insbesondere an mindestens p-fachen w-Stellen ζ von $f(z)$ Abgrenzungen für $f^{(p)}(\zeta)$. Das in diese eingehende $w=f(\zeta)$ kann dann noch durch die in 1.2 genannten Abgrenzungen innerhalb der Klassen $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{C}_+$ nachträglich eliminiert werden.

Besonderes Interesse verdient der Fall $p=1$, wobei die eine Stelle ζ als Verteilung vorgegeben sei:

Man findet zunächst das in sich bemerkenswerte Ergebnis

$$(21)\qquad \Re\left(\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)\geqq 0 \quad \text{für} \quad |f(\zeta)|\geqq|\zeta|^2,$$

und hieraus folgt durch Abgrenzung von $|f(\zeta)|$ innerhalb $\mathfrak{C}_{|\alpha|}$ der folgende Satz von Dieudonné: [13])

Jede Funktion aus $\mathfrak{C}_{|\alpha|}$ *ist für* $\frac{2|z|}{1+|z|^2}\leqq|\alpha|$ *sternförmig in Bezug auf* $w=0$. *Dieser Kreis ist der größte seiner Art.*

Grenzt man $|f(\zeta)|$ weiter innerhalb $\mathfrak{C}$ ab, so bekommt man die ebenfalls von Herrn Dieudonné [14]) zuerst angegebenen Ungleichungen in $\mathfrak{C}$:

$$(22)\qquad |f'(\zeta)|\leqq\begin{cases}1 \\ \dfrac{1}{4|\zeta|}\,\dfrac{(1+|\zeta|^2)^2}{1-|\zeta|^2}\end{cases}\text{für}\quad\begin{cases}|\zeta|\leqq\sqrt{2}-1 \\ |\zeta|\geqq\sqrt{2}-1.\end{cases}$$

Innerhalb $\mathfrak{C}_+$ lassen sich diese Ungleichungen bei gegebenem arc $f(\zeta)$ noch verbessern.

Ferner läßt sich die erste Ungleichung (22) an einer p-fachen w-Stelle zu

$$(23)\quad |f^{(p)}(\zeta)|\leqq p!\,\frac{1-|\zeta|^{2p}}{(1-|\zeta|^2)^p}\ \text{für}\ |\zeta|^{2p+1}+3|\zeta|^{2p}+|\zeta|\leqq 1$$

---

[13]) Dieudonné, 104.

[14]) Dieudonné, 106.

verallgemeinern. Es gilt ferner an einer mindestens p-fachen w-Stelle

$$(24)\qquad f^{(p)}(\zeta) \neq 0 \quad \text{für} \quad |\zeta|^{p+1} < |f(\zeta)|,$$

d.h. ein solches ζ ist eine genau p-fache w-Stelle. Grenzt man hier $|f(\zeta)|$ innerhalb $\mathfrak{E}_{|\alpha|}$ ab, so ergibt sich:

Jede Funktion aus $\mathfrak{E}_{|\alpha|}$ *kann für*

$$(25)\qquad \frac{(p+1)|z|^p}{1+|z|^2+\ldots\ldots+|z|^{2p}} < |\alpha|$$

ihre Werte höchstens p-fach annehmen.

Dies ist ein Spezialfall des folgenden *Satzes von Dieudonné:*[15]) *Eine Funktion aus* $\mathfrak{E}_{|\alpha|}$ *kann für die z aus* (25) *keinen Wert mehr als p-mal annehmen. Der Kreis* (25) *ist der beste dieser Art.*

Wir geben einen neuen Beweis für diesen Satz.[16])

Zu einer interessanten Verschärfung des Schwarzschen Lemmas gelangt man, wenn die Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{E}$ *eine vorgegebene Mindestverteilung* (für irgend ein w) besitzt, d.h. *wenn sie an den Stellen* ζ_k *der Verteilung gleiche Werte annimmt.* Dann gilt nämlich mit $\mathbf{A}^*$ aus (18)

$$(*)\qquad |f(z)| \leqq |z| \frac{|z|+\mathbf{A}^*}{|z|\,\mathbf{A}^*+1}.$$

Freilich ist diese Ungleichung im allgemeinen keine Bestaussage. *Wohl aber ist sie für eine zweigliedrige Verteilung, wenn die Bedingung* $|S| \geqq 2\dfrac{1-P^2}{1+P^2}$ *erfüllt ist, mit* $\mathbf{A}^* = \dfrac{|S|\cdot P}{1-P^2}$ *scharf.* Insbesondere findet man so den folgenden Satz:

Für die Funktion $f(z)$ *aus* $\mathfrak{E}$ *sei* $f'(\zeta) = 0$. *Dann gilt*

$$(**)\qquad |f(z)| \leqq |z| \frac{|z| + \dfrac{2|\zeta|}{1+|\zeta|^2}}{|z|\dfrac{2|\zeta|}{1+|\zeta|^2}+1}.$$

Diese Abschätzung ist scharf.

Auch die Abgrenzung der höheren Ableitungen einer Funktion aus $\mathfrak{E}$ (in Verallgemeinerung von (22)) ist im Prinzip mit den „Methoden des Schwarzschen Lemmas" möglich, führt aber schnell zu beträchtlichen Schwierigkeiten.

---

[15]) Dieudonné, 102.

[16]) vgl. Landau 3.

Wir beweisen nur die ebenfalls für die Klasse $\mathfrak{E}$ scharfen Ungleichungen

$$(26)\qquad |f''(\zeta)| \leqq \begin{cases} \dfrac{2}{(1-|\zeta|^2)^2} & \text{für } |\zeta| \leqq \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{8|\zeta|^2+2|\zeta|-1}{4|\zeta|^2(1-|\zeta|^2)^2} & \text{für } \frac{1}{2} \leqq |\zeta| \leqq \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}) \\[2ex] \dfrac{(1+8|\zeta|^2)^2}{32|\zeta|^3(1-|\zeta|^2)^2} & \text{für } \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}) \leqq |\zeta| < 1. \end{cases}$$

Es sei ferner $\varphi(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion mit $|\varphi(z)| < 1$ (aber nicht notwendig $\varphi(0) = 0$). Dann gilt mit $\mathbf{A}^*$ aus (18)

$$(27)\qquad |\varphi'(\zeta)| \leqq \frac{1-|\varphi(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}\,\mathbf{A}^*({}_\zeta P^*, |{}_\zeta S^*|)\,.$$

Dabei sind die ${}_\zeta P^*$, ${}_\zeta S^*$ mit den von 0 verschiedenen

$$(28)\qquad \tau_k = \frac{\zeta_k-\zeta}{\zeta_k\bar{\zeta}-1}$$

einer Mindestverteilung (ζ_k) von $\varphi(z)$ zu bilden. Man beachte, daß die rechte Seite *nicht von dem w der Verteilung* abhängt. Für mehr als ein $\zeta_k \neq \zeta$ erhält man so eine bemerkenswerte Verschärfung [12a]) der bekannten Lindelöfschen Abschätzung $|\varphi'(\zeta)| \leqq \frac{1-|\varphi(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2}$ [17]). Schließlich geben wir einen neuen einfachen Beweis der von Herrn Szász [18]) auf anderem Wege bewiesenen Ungleichung

$$(29)\qquad |\varphi''(\zeta)| \leqq \frac{(8+|\zeta|^2)^2}{32\cdot(1-|\zeta|^2)^2}\,.$$

2. Man kann unschwer die Methoden dieser Arbeit auf *eine etwas allgemeinere Funktionenklasse*, nämlich die Klasse **E** der für $|z| < 1$ meromorphen Funktionen $\varphi(z)$ übertragen, die um $z = 0$ eine Entwicklung

$$(30)\qquad \varphi(z) = \alpha z^\varkappa + \beta z^{\varkappa+1} + \ldots\,; \quad \varkappa \text{ ganz},$$

---

[17]) Lindelöf; Carathéodory 1, 23; Bieberbach, 123.

[18]) Szász 1., 2.; Herr Szász benutzt eine auf Herrn Landau 2. zurückgehende Methode, mit der er auch die scharfen Abschätzungen für $|\varphi^{(2k+1)}(\zeta)|$ gewinnt. Unsere elementare Beweismethode dürfte dies kaum leisten.

besitzen und der Beschränkung

$$\overline{\lim_{|z|\to 1}}\,|\varphi(z)| \leqq 1 \tag{31}$$

genügen. $\mathbf{E}^{\varkappa}$ bezeichne die Unterklasse dieser $\varphi(z)$ mit festem $\varkappa$, während $\mathbf{E}^{\varkappa}_{|\alpha|}$, $\mathbf{E}^{\varkappa}_{\alpha}$ und $\mathbf{E}^{\varkappa}_{+}$ die bei der Klasse $\mathfrak{E}$ entsprechende Bedeutung haben.

Sind in der Tat zunächst

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\varrho \tag{32}$$

die wegen (31) höchstens endlich vielen Pole $\neq 0$ von $\varphi(z)$ in $|z| < 1$, so gehört

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^{\varkappa-1}} P_\infty(z)\,;\;\; P_\infty(z) = \prod_{k=1}^{\varrho} \frac{z-\xi_k}{z\bar{\xi}_k - 1}\lambda_k^{-1}\,;\;\; \xi_k = |\xi_k|\lambda_k, \tag{33}$$

zu $\mathfrak{E}$ und, wenn $\alpha \geqq 0$ ist, genauer zu $\mathfrak{E}_{\alpha P_\infty}$. Man kann also zunächst die 0-Verteilungen von $\varphi(z)$ studieren.

Ist aber $0 < |w| < 1$, so gehört

$$\varphi_w(z) = \frac{\varphi(z) - w}{\varphi(z)\bar{w} - 1} \tag{34}$$

wieder zu $\mathbf{E}$. Man sieht nach dem eben Gesagten, daß man jetzt nicht nur die w-Verteilung sondern noch die $w^* = \frac{1}{\bar{w}}$-Stellen $\xi_k \neq 0$ braucht und zwar *sämtliche*. Man beachte, daß es wegen (31) höchstens endlich viele und, im Falle eines vorhandenen Poles, mindestens ein solches ξ gibt. Für die Abgrenzung von w sind jetzt die Größen

$$\Pi_w = \frac{P_w}{P_{w^*}}\,;\;\; \Sigma_w = S_w - S_w^*\,;\;\; \Pi_w(z) = \frac{P_w(z)}{P_{w^*}(z)} \tag{35}$$

maßgebend.

Es sei $\alpha \neq 0$. Die Klasse $\mathbf{E}^{\varkappa}$ deckt für $\varkappa \neq 0$ den Fall, daß $\varphi(z)$ in $z = 0$ seinen Wert 0 $(\varkappa > 0)$ oder ∞ $(\varkappa < 0)$ $|\varkappa|$-fach annimmt. Im Falle $\varkappa = 0$ ist $\varphi(0) = \alpha$. Wird dieser Wert p-fach angenommen, so gehört $\frac{\varphi(z) - \alpha}{\varphi(z)\bar{\alpha} - 1}$ bzw. $\frac{\varphi(z)\bar{\alpha} - 1}{\varphi(z) - \alpha}$ zu $\mathbf{E}^{p}$ bzw. $\mathbf{E}^{-p}$, je nachdem ob $|\alpha| < 1$ oder $|\alpha| > 1$ ist. Man braucht also in diesem Falle statt der Pole die $\alpha^* = \frac{1}{\bar{\alpha}}$-Stellen bzw. die α-Stellen $\neq 0$ von $\varphi(z)$ in $|z| < 1$. Den Fall $|\alpha| = 1$ behandelt man am besten durch Grenzübergang.

Man beachte, *daß für die regulären $\varphi(z)$ die Fälle $\varkappa > 1$ eine feinere Diskussion unserer früheren Klasse $\mathfrak{E}_0$ gestatten.* Im übrigen werden wir auf die Klasse **E** nur gelegentlich in Fußnoten eingehen.

3. Es sei noch auf einige naheliegende *Verallgemeinerungen* unserer Betrachtungen kurz hingewiesen, ohne daß diese Arbeit sie näher behandelt.

So kann z.B., wenn in der Entwicklung (1) *die ersten k Koeffizienten vorgegeben* sind, die Theorie der Verteilungen in der Klasse $\mathfrak{E}$ entsprechend verfeinert werden. Für diese Koeffizienten kennt man nämlich die die Klasse $\mathfrak{E}$ kennzeichnenden Bedingungen.[19]) Von diesen wurden im obigen nur die beiden ersten herangezogen. So beruhen die beiden Jensenschen Ungleichungen (9*) und (15*) im wesentlichen auf der Cauchyschen Ungleichung $|\alpha| \leqq 1$, während (16) auf der bekannten Landauschen Ungleichung [20])

$$|\beta| \leqq 1 - |\alpha|^2 \tag{36}$$

fußt. In entsprechender Weise können die ersten $k+1$ Koeffizientenrelationen der Reihe (1) für das Studium der genannten Verallgemeinerung nutzbar gemacht werden. Natürlich werden die Verhältnisse aber bald praktisch unübersichtlich.

Auch die Majorantenrelationen können entsprechend ausgestaltet werden. Ist z.B. noch β bekannt, so tritt für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$ in Verschärfung von (10) noch

$$\frac{1}{z}\,\frac{\dfrac{f(z)}{zP_0^*(z)} - \dfrac{\alpha}{P_0^*}}{1 - \dfrac{f(z)}{zP_0^*(z)}\,\dfrac{\alpha}{P_0^*}} < \frac{z+\tau^*}{z\bar{\tau}^*+1}; \quad \tau^* = \frac{\dfrac{\beta}{\alpha} + S_0^*}{\dfrac{P_0^*}{\alpha} - \dfrac{\alpha}{P_0^*}}, \tag{37}$$

hinzu. *Diese Relation ist besonders in Hinblick auf die Funktion* $f_w(z)$ *aus* (14), *bei der ja die beiden ersten Entwicklungskoeffizienten bekannt sind, von Bedeutung für die w-Mindestverteilungen innerhalb* $\mathfrak{E}_\alpha$. Man beachte, daß sich die Majorantenrelation (20) nur auf die Klasse $\mathfrak{E}$ bezog.

4. Das von uns behandelte Problem der w-Mindestverteilungen ist in der folgenden allgemeinen Fragestellung enthalten:

Gegeben sei die Folge $(\zeta_\varkappa \neq 0)$. *Welche Werte* $w_\varkappa = f(\zeta_\varkappa)$ *sind innerhalb* $\mathfrak{E}_\alpha$ *bzw.* $\mathfrak{E}_+$ *möglich?*

---

[19]) Schur.

[20]) Landau 1; Bieberbach, 140; (36) ist die 2. Schursche Ungleichung; das Gleichheitszeichen gilt nur für $f(z) = z\dfrac{z\varepsilon - \alpha}{z\varepsilon\bar{\alpha} - 1}$, $|\varepsilon| = 1$.

Die Antwort auf diese Fragestellung ist nun wohlbekannt [21]) und damit *im Prinzip auch das hier behandelte Problem der Mindestverteilungen gelöst.* Aber die allgemeine Lösung gestattet nicht, die viel einfacheren Verhältnisse, die eben durch unsere Zusatzforderung $w_\varkappa \equiv w$ entstehen, zu diskutieren. *Daher ist praktisch unser Problem in der allgemeinen Lösung nicht mitbeantwortet.*

Es sei etwa zunächst $0 \neq \zeta_1 \neq \zeta_2$, und es sollen für die Funktionen $f(z)$ aus $\mathfrak{C}_\alpha$ die für $w_1 = f(\zeta_1)$, $w_2 = f(\zeta_2)$ möglichen Werte abgegrenzt werden. Man kann etwa so vorgehen:

Nach (10) mit $P_0^* = 1$ und für $z = \zeta_1$ links ist zunächst [22])

$$\text{(a)} \qquad \frac{w_1}{\zeta_1} \prec \left.\frac{z-\alpha}{z\alpha-1}\right|_{|z|=|\zeta_1|}.$$

Ferner gehört mit $f_{w_1}(z)$ aus (14) die Funktion

$$\text{(b)} \qquad f^{(1)}(z) = f_{w_1}(z)\frac{z\bar{\zeta}_1-1}{z-\zeta_1}\eta_1; \qquad \zeta_1 = |\zeta_1|\eta_1$$

zu $\mathfrak{C}_{\left|\frac{w_1}{\zeta_1}\right|}$, und es ist

$$\text{(c)} \qquad f^{(1)}(\zeta_2) = \frac{w_2-w_1}{w_2\bar{w}_1-1}\,\frac{\zeta_2(\zeta_2\bar{\zeta}_1-1)}{\zeta_2-\zeta_1}\cdot\frac{\eta_1}{\gamma_1} = w_2^{(1)}; \quad w_1 = |w_1|\gamma_1.$$

Also ist wieder nach (10)

$$\text{(d)} \qquad \frac{w_2^{(1)}}{\zeta_2} \prec \left.\frac{z-\left|\frac{w_1}{\zeta_1}\right|}{z\left|\frac{w_1}{\zeta_1}\right|-1}\right|_{|z|=|\zeta_2|}.$$

Diese Abgrenzung enthält freilich α noch nicht. Nun kennt man aber für $f_{w_1}(z)$ und also auch für $f^{(1)}(z)$ die beiden ersten Koeffizienten ihrer Entwicklung um $z = 0$. Daher kann man nach dem in 3 Gesagten eine weitere Majorantenrelation heranziehen, die für $z = \zeta_2$ die gesuchte Abgrenzung von $w_2^{(1)}$ also auch von w_1, w_2 in $\mathfrak{C}_\alpha$ liefert.

Ist noch eine dritte Stelle ζ_3 gegeben, so hat man für die Funktion $f^{(1)}(z)$ die zwei Werte $w_2^{(1)} = f^{(1)}(\zeta_2)$ und $w_3^{(1)} = f^{(1)}(\zeta_3)$ abzugrenzen. Beachtet man noch, daß man für die analog zu bildende Funktion

$$\text{(e)} \qquad f^{(2)}(z) = f^{(1)}_{w_2^{(1)}}(z)\frac{z\bar{\zeta}_2-1}{z-\zeta_2}\eta_2; \quad \zeta_2 = |\zeta_2|\eta_2$$

---

[21]) Pick; Nevanlinna.

[22]) $w \prec F(z)|_{|z|=r}$ soll bedeuten, daß w dem Wertevorrat von $F(z)$ für $|z| \leqq r$ angehört.

jetzt die drei ersten Koeffizienten der Entwicklung um $z = 0$ kennt, so sieht man, wie das Verfahren unter Heranziehung der nächst höheren Majorantenrelation zu iterieren ist.

Für k Werte $w_\varkappa = f(\zeta_\varkappa)$ benötigt man analog die zu den ersten k Koeffizienten einer Entwicklung (1) gehörigen Majorantenrelationen.[23])

Die Iterierung des Verfahrens liefert schließlich die Lösung des allgemeinen Problems, nämlich die Konstruktion von zu vorgegebenen Folgen $(\zeta_\varkappa \neq 0)$ möglichen Wertefolgen $(w_\varkappa)$. Hat man bereits zulässige Wertepaare $(\zeta_1, w_1), \ldots, (\zeta_k, w_k)$ ausgewählt, so erhält man für die in ζ_{k+1} möglichen Werte w_{k+1} *eine von den genannten Wertezuordnungen,* ζ_{k+1} *und* α *abhängige Kreisscheibe als Abgrenzung* [21]); dies geht aus der Form der Majorantenrelationen unmittelbar hervor.

Man erkennt ferner leicht: *Wählt man für* w_k *einen Extremalwert seiner Abgrenzung, so schrumpft die zu* w_{k+1} *gehörige Kreisscheibe in einen Punkt zusammen, und* w_{k+1} *sowie alle folgenden* $w_\varkappa$ *sind eindeutig bestimmt.* $f(z)$ *wird eine rationale Funktion* $(k+1)$*-ten Grades.* Schließlich ist nach dem Blaschkeschen Satze [24]) im Falle $\Pi|\zeta_k| = 0$ die zu jeder zulässigen Wertefolge gehörige Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{E}_\alpha$ eindeutig bestimmt.

Wie man auch bei dieser allgemeinen Fragestellung die Kenntnis weiterer Koeffizienten aus (1) verschärfend heranziehen kann, bedarf wohl keiner weiteren Auseinandersetzung.

Bei unseren Mindestverteilungen wird durch die Zusatzforderung $w_\varkappa \equiv w$ die obige Konstruktionsvorschrift ersichtlich gestört. Auch braucht die Abgrenzung für dieses w *keineswegs mehr eine Kreisscheibe* zu werden. So gibt schon die Ungleichung (16) bei einer zweigliedrigen Mindestverteilung im allgemeinen keine Kreisabgrenzung für w. *Noch wichtiger aber ist, daß selbst die Folge* (ζ_k), *wie wir nach* (18) *wissen, jetzt nicht mehr willkürlich vorgeschrieben werden kann.*

Die Behandlung mehrerer Gleichverteilungen zugleich ist ein Spezialfall der Konstruktion von Wertefolgen. Aber schon bei zwei Mindestverteilungen fällt die Vereinfachung, die unser Problem durchzudiskutieren gestattete, fort, und die Verhältnisse dürften ziemlich schwierig zu übersehen sein.

---

[23]) Statt dessen kann man auch die ersten $(k+1)$ Koeffizientenungleichungen der Entwicklung (1) heranziehen.

[24]) Blaschke.

I. Teil. Mindestverteilungen.

§ 1.

0-*Mindestverteilungen.*

1. *Die Ungleichung* (7).[25])

Es sei (ζ_k) eine Folge wie in (4), und P, S haben die Bedeutung aus (5). *Dann gilt*

$$|S| \leqq \frac{1-P^2}{P}, \tag{7}$$

und das Gleichheitszeichen ist, für $0 < P < 1$, *nur im Falle genau eines* ζ *richtig.*

In diesem letzteren Falle ist nichts zu beweisen. Wir nehmen an, daß die Ungleichung für n Werte $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ richtig ist, und fügen noch ein ζ hinzu. Dann wird zunächst

$$\left|S+\frac{1-|\zeta|^2}{\zeta}\right| \leqq |S| + \frac{1-|\zeta|^2}{|\zeta|} \leqq \frac{1-P^2}{P} + \frac{1-|\zeta|^2}{|\zeta|} = \frac{(|\zeta|+P)(1-|\zeta|P)}{|\zeta|P}. \tag{a}$$

Nun ist wegen $|\zeta| < 1,\ P < 1$

$$|\zeta| + P < 1 + |\zeta| P, \tag{b}$$

also

$$\left|S + \frac{1-|\zeta|^2}{\zeta}\right| < \frac{1-|\zeta|^2 P^2}{|\zeta| P}, \tag{c}$$

womit (7) für $n+1$ Werte ζ_k bewiesen ist, und zwar mit dem Kleiner-Zeichen. Unser Beweis zeigt, daß für $0 < P < 1$ auch im Falle unendlich vieler ζ_k das Gleichheitszeichen in (7) nicht möglich ist.

2. *Die Jensensche Ungleichung.*[6])

Es mögen jetzt die ζ_k aus (4) eine 0-Mindestverteilung einer Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{E}_\alpha$ bilden. *Es ist also* $\alpha \geqq 0$ *vorausgesetzt.*

Im Falle endlich vieler ζ_k beachte man, daß die Funktion $P_0^*(z)$ aus (6) für $|z| \leqq 1$ regulär und auf $|z| = 1$ vom Betrage 1 ist. Daher ist $\frac{f(z)}{zP_0^*(z)}$ für $|z| < 1$ regulär und dem Betrage nach höchstens 1. Für $z = 0$ folgt sofort die *Jensensche Ungleichung*[26])

$$\alpha \leqq P_0^*, \tag{9*}$$

---

[25]) Auch die Anwendung der Ungleichung (36) auf die Funktion $zP(z)$ aus (6) liefert einen Beweis.

[26]) Für die Funktionen $\varphi(z)$ aus $\mathrm{E}_\alpha^\varkappa$ gilt entsprechend $\alpha \leqq \Pi_0^*$, und das Gleichheitszeichen ist nur für $\varphi(z) = z^\varkappa \Pi_0^*(z)$ richtig.

und das Gleichheitszeichen gilt in $\mathfrak{C}_\alpha$ *nur für* $f(z) = zP_0^*(z)$.

Im Falle unendlich vieler ζ_k folgt zunächst (9*), indem man von endlich vielen der ζ_k her zur Grenze geht.

Auch die Behauptung über das Gleichheitszeichen bleibt richtig: *Im Falle* $P_0^* > 0$ *genügt es zu zeigen, daß die Funktion* $P_0^*(z)$ *für* $|z| < 1$ *regulär ist und dort genau an den Stellen* ζ_k *verschwindet.* Denn durch Grenzübergang von endlich vielen der ζ_k her sieht man dann, daß der Betrag der für $|z| < 1$ regulären Funktion $\frac{f(z)}{zP_0^*(z)}$ dort höchstens 1 ist. Nun ist

$$\text{(a)} \qquad P_0^*(z) = P_0^* \prod \frac{\frac{z}{\zeta_k} - 1}{z\bar{\zeta}_k - 1} = P_0^* \prod \left(1 + \frac{z}{z\bar{\zeta}_k - 1} \, \frac{1 - |\zeta_k|^2}{\zeta_k}\right).$$

Für $|z| \leqq r < 1$ ist weiter, unter Anwendung von (7),

$$\text{(b)} \qquad \sum \left| \frac{z}{z\zeta_k - 1} \, \frac{1 - |\zeta_k|^2}{\zeta_k} \right| \leqq \frac{r}{1-r} \sum \frac{1 - |\zeta_k|^2}{|\zeta_k|} \leqq \frac{r}{1-r} \, \frac{1 - P_0^{*2}}{P_0^*},$$

woraus die Behauptungen über $P_0^*(z)$ nach bekannten Kriterien über unendliche Produkte [27]) unmittelbar folgen.

Im Falle $P_0^* = 0$ *muß* $f(z) \equiv 0$ *sein.* (*Satz von Blaschke* [24]).)

Wäre in der Tat in der Entwicklung (1) von $f(z)$ zuerst der Koeffizient $\alpha_\varkappa$ von $z^\varkappa$, $\varkappa \geqq 1$, von 0 verschieden, so würde aus (9*), angewandt auf $\frac{f(z)}{z^{\varkappa-1}}$, der Widerspruch $|\alpha_\varkappa| \leqq P_0^* = 0$ folgen.

Übrigens ist in diesem Falle leicht einzusehen, daß auch $P_0^*(z) \equiv 0$ ist.

Wir setzen im Folgenden stets $P_0^* > 0$ *voraus.*

3. *Die Majorantenrelation* (10).

Es sei $\alpha \geqq 0$. Die Funktion $\frac{f(z)}{zP_0^*(z)}$ ist für $|z| < 1$ regulär, dem Betrage nach höchstens 1 und hat für $z = 0$ den Wert $\frac{\alpha}{P_0^*}$. Die als „Lindelöfsches Prinzip" [28]) bekannte Transformation des Schwarzschen Lemmas ergibt alsbald die Majorantenrelation

$$\text{(10)} \qquad \frac{f(z)}{zP_0^*(z)} \prec \frac{z - \frac{\alpha}{P_0^*}}{z\frac{\alpha}{P_0^*} - 1}.$$

---

[27]) vergl. Knopp, Kap. VII, 224—237.

[28]) Lindelöf.

Für festes z aus $|z| < 1$ liegt also $\frac{f(z)}{zP_0^*(z)}$ in dem von $\frac{t - \frac{\alpha}{P_0^*}}{t\frac{\alpha}{P_0^*} - 1}$ für $t = |z|$ beschriebenen Kreise $\mathfrak{K}_{|z|}\left(\frac{\alpha}{P_0^*}\right)$, auf dem Rande nur bei den Extremalfunktionen

$$(38) \qquad f(z) = zP_0^*(z)\frac{z\varepsilon - \frac{\alpha}{P_0^*}}{z\varepsilon\frac{\alpha}{P_0^*} - 1}; \qquad |\varepsilon| = 1.$$

Man beachte, daß für $P_0^* = \alpha$ der Kreis in den Punkt 1 ausartet, so daß $f(z) = zP_0^*(z)$ wird (vergl. 2)[29]).

Insbesondere gelten die Abschätzungen

$$(39) \qquad \frac{\frac{\alpha}{P_0^*} - |z|}{1 - |z|\frac{\alpha}{P_0^*}} \leqq \left|\frac{f(z)}{zP_0^*(z)}\right| \leqq \frac{\frac{\alpha}{P_0^*} + |z|}{1 + |z|\frac{\alpha}{P_0^*}},$$

deren untere freilich nur für $|z| < \frac{\alpha}{P_0^*}$ sinnvoll ist. Für diese z sind also die ζ_k die einzigen Nullstellen von $f(z)$.

An den Stellen ζ_k erhält man aus (10) Abgrenzungen für die Ableitungen $f^{(p)}(\zeta_k)$, wobei p die Vielfachheit von ζ_k in der Mindestverteilung ist. Ist insbesondere $\zeta \neq 0$ *eine mindestens p-fache Nullstelle* von $f(z)$, und wählt man die Mindestverteilung $\zeta_k \equiv \zeta$, $1 \leqq k \leqq p$, so wird (39) zu

---

[29]) Für die Klasse $E_\alpha^\varkappa$ gilt $\frac{\varphi(z)}{z^\varkappa \Pi_0^*(z)} \prec \frac{z - \frac{\alpha}{\Pi_0^*}}{z\frac{\alpha}{\Pi_0^*} - 1}$ mit den Extremalfunktionen $\varphi(z) = z^\varkappa \Pi_0^*(z)\frac{z\varepsilon - \frac{\alpha}{\Pi_0^*}}{z\varepsilon\frac{\alpha}{\Pi_0^*} - 1}$, $|\varepsilon| = 1$. Man beachte insbesondere die Abgrenzungen an den Polen und Nullstellen von $\varphi(z)$. Es ist ferner beachtenswert, daß diese Extremalfunktionen in gewissen Fällen *schlicht* sein können, nämlich wenn sie für $|z| < 1$ höchstens eine Nullstelle und höchstens einen Pol haben. Sie sind dann entweder lineare Transformationen des Einheitskreises auf sich bzw. auf sein Äußeres, oder sie bilden ihn auf die längs eines Einheitskreisbogens geschlitzte Zahlenkugel ab. Die obige Majorantenrelation gibt dann also *auch für die schlichten* $\varphi(z)$ *aus* E *scharfe Abgrenzungen.*

$$(40) \qquad \frac{\alpha - |\zeta|^{p+1}}{|\zeta|^{p-1} - \alpha} \leqq \frac{|f^{(p)}(\zeta)|}{p!} (1 - |\zeta|^2)^p \leqq \frac{\alpha + |\zeta|^{p+1}}{|\zeta|^{p-1} + \alpha}.$$

Für $|\zeta|^{p+1} < \alpha$ ist also ζ eine genau p-fache Nullstelle.

4. *Variation der* $\alpha \geqq 0$.

Für die Klasse $\mathfrak{C}_+$ liegt $\frac{f(z)}{zP_0^*(z)}$ jedenfalls in der Vereinigungsmenge aller Kreise $\mathfrak{K}_{|z|}(\mathrm{A})$, $0 \leqq \mathrm{A} \leqq 1$, und die elementare Berechnung[30]) der Enveloppe dieser Kreisschar ergibt als Vereinigungsmenge eben den Kreisbogenbereich $\mathfrak{B}_{|z|}$ aus 1.1 der Einleitung.

Als Spezialfall ergibt sich wieder die Abgrenzung von $f^{(p)}(\zeta_k)$ an einer p-fachen Stelle ζ_k innerhalb $\mathfrak{C}_+$. Und insbesondere folgt *an einer mindestens p-fachen Nullstelle* $\zeta \neq 0$, wegen $\alpha \leqq |\zeta|^p$ die Ungleichung[31])

$$(11) \qquad \frac{|f^{(p)}(\zeta)|}{p!} \leqq \frac{|\zeta|}{(1 - |\zeta|^2)^p}.$$

5. *Abgrenzung allgemeiner Ableitungen an Nullstellen.*

Man betrachte für $0 < |\zeta| < 1$ die Funktion

$$(\mathrm{a}) \qquad f(z) = f\left(\frac{t - \zeta}{t\bar{\zeta} - 1}\right) = g(t) = f(\zeta) + A_1 t + A_2 t^2 + \dots,$$

welche für $|t| < 1$ höchstens den Betrag 1 hat. Der Koeffizient A_k setzt sich linear[31*]) aus den Ableitungen $f^{(\varkappa)}(\zeta)$, $1 \leqq \varkappa \leqq k$, zusammen; z.B. ist

$$(\mathrm{b}) \quad A_1 = -(1 - |\zeta|^2) f'(\zeta); \; A_2 = \frac{f''(\zeta)(1 - |\zeta|^2)^2}{2} - \bar{\zeta}(1 - |\zeta|^2) f'(\zeta).$$

Es sei nun ζ eine Nullstelle der Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{C}_\alpha$. Dann gehört $g(t)$ zu $\mathfrak{C}$, und es ist weiter

$$(\mathrm{c}) \qquad g(\zeta) = 0; \qquad g'(\zeta) = -\frac{\alpha}{1 - |\zeta|^2}.$$

Nun kann man bei gegebenen $A_\varkappa$, $1 \leqq \varkappa \leqq k$, aus den nach 3 der Einleitung zu gewinnenden Majorantenrelationen (mit $t = \zeta$)

---

30) Rogosinski 2, 222.

31) Genauer liegt in $\mathfrak{C}_+$ diese Ableitung $\frac{f^{(p)}(\zeta)}{p!}$ in $(-\eta)^{-p} \frac{\zeta}{(1 - |\zeta|^2)^p} \mathfrak{B}_{|\zeta|}$, $\zeta = |\zeta|\eta$.

31*) $f^{(k)}(\zeta)$ setzt sich *linear* aus den $A_\varkappa$, $1 \leqq \varkappa \leqq k$, zusammen. Hierauf beruht die Methode von Szász, 1; 2, die Ableitungen einer für $|z| < 1$ beschränkten Funktion $\varphi(z)$ abzuschätzen.

die Größe $g'(\zeta)$ abgrenzen. Sie liegt für jedes $\varkappa$ in von $A_1, A_2, \ldots, A_\varkappa$ und ζ abhängigen Kreisen. Da hier umgekehrt $g'(\zeta)$ gegeben ist, erhält man Lagebeschränkungen für diese Kreise, die implizit Abgrenzungen der $A_\varkappa$ und damit weiter der $f^{(\varkappa)}(\zeta)$ für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$ ergeben.

Man sieht, daß man hier im Prinzip ein Verfahren hat, die scharfen Abgrenzungen für alle Ableitungen $f^{(k)}(\zeta)$ an Nullstellen von $f(z)$ innerhalb $\mathfrak{E}_\alpha$ zu bestimmen. Praktisch freilich werden die Verhältnisse schnell unübersichtlich.

Wir wollen hier nur die Herleitung scharfer Abschätzungen für $|f'(\zeta)|$ und $|f''(\zeta)|$ nach oben an einer Nullstelle $\zeta \neq 0$ für die nicht normierte Klasse $\mathfrak{E}$ bringen.

Zunächst ist nach (9*) $|A_1| \leqq |\zeta|$, d.i.[32])

$$(11a) \qquad |f'(\zeta)| \leqq \frac{|\zeta|}{1-|\zeta|^2}; \qquad f(\zeta) = 0,$$

der Spezialfall $p = 1$ von (11). Das Gleichheitszeichen ist nur für $f(z) = \varepsilon z \frac{z-\zeta}{z\bar{\zeta}-1}$, $|\varepsilon| = 1$, richtig.

Es gilt weiter die Majorantenrelation

$$(d) \qquad \frac{g(t)}{t\frac{t-\zeta}{t\bar{\zeta}-1}} \prec \frac{t-A}{t\bar{A}-1}; \quad A = \frac{A_1}{|\zeta|}; \quad |A_1| < 1.$$

Die daraus folgende Ungleichung [33]) zwischen den Ableitungen beider Seiten in $t = 0$ lautet

$$(e) \qquad \frac{1}{|\zeta|}\left|A_2 + A_1\frac{1-|\zeta|^2}{\zeta}\right| \leqq 1 - |A|^2;$$

$$\left|f''(\zeta)\frac{(1-|\zeta|^2)^2}{2} + A\right| \leqq |\zeta|\,(1-|A|^2),$$

woraus

$$(f) \qquad |f''(\zeta)|\frac{(1-|\zeta|^2)^2}{2} \leqq |\zeta|\,(1-|A|^2) + |A|$$

---

32) Genauer ist $|A_1| \leqq |\zeta|\,{}_\zeta P_0^*$, wo ${}_\zeta P_0^*$ aus den $\tau_k = \frac{\zeta_k - \zeta}{\zeta_k\bar{\zeta}-1}$, $\zeta_k \neq \zeta$, einer 0-Mindestverteilung (ζ_k) von $f(z)$ zu bilden ist. Man hat dann die schärfere Abschätzung $|f'(\zeta)| \leqq \frac{|\zeta|}{1-|\zeta|^2}\,{}_\zeta P_0^*$.

33) Aus $f(z) \prec F(z)$ folgt $|f'(0)| \leqq |F'(0)|$ mit dem Gleichheitszeichen für $f(z) = F(\varepsilon z)$, $|\varepsilon| = 1$; vergl. etwa Rogosinski 1, 2.

folgt. Das Maximum der rechten Seite liegt bei $|A| = \frac{1}{2|\zeta|}$. Wegen $|A| \leqq 1$ gilt daher

$$(12)\qquad \begin{array}{ll} \text{(a)}\quad |f''(\zeta)| \leqq \dfrac{2}{(1-|\zeta|^2)^2} & \text{für } |\zeta| \leqq \frac{1}{2} \\ \text{(b)}\quad |f''(\zeta)| \leqq \dfrac{1+4|\zeta|^2}{2|\zeta|\,(1-|\zeta|^2)^2} & \text{für } |\zeta| \geqq \frac{1}{2} \end{array} \quad ; \quad f(\zeta) = 0 .$$

Es sei etwa $\zeta > 0$. Dann gilt das Gleichheitszeichen in (a) nur bei den Funktionen $f(z) = \varepsilon z \frac{z-\zeta}{z\zeta-1}$ und das in (b) nur bei den Funktionen $f(z) = \varepsilon z \frac{z-\zeta}{z\zeta-1} \cdot \dfrac{\frac{z-\zeta}{z\zeta-1} - \frac{1}{2\zeta}}{\frac{z-\zeta}{z\zeta-1}\,\frac{1}{2\zeta} - 1}$, $|\varepsilon| = 1$.

In der Tat sind die Extremalfunktionen jedenfalls von der Form[33]) $g(t) = t \frac{t-\zeta}{t\zeta-1} \frac{t\varepsilon - A}{t\varepsilon\bar{A}-1}$, $|A| = 1$ oder $|A| = \frac{1}{2\zeta}$, und eine elementare Rechnung bestätigt die Behauptung.

6. *Abgrenzung von β:* [34])

Wegen

$$\text{(a)}\quad \frac{f(z)}{zP_0^*(z)} = \frac{\alpha}{P_0^*} + \frac{\alpha}{P_0^*}\left\{\frac{\beta}{\alpha} + S_0^*\right\} z + \ldots ;$$

$$\frac{z - \dfrac{\alpha}{P_0^*}}{z\dfrac{\alpha}{P_0^*} - 1} = \frac{\alpha}{P_0^*} - \left\{1 - \left(\frac{\alpha}{P_0^*}\right)^2\right\} z + \ldots$$

folgt aus der Majorantenrelation (10) die Ungleichung[33])

$$(41)\qquad \left|\frac{\beta}{\alpha} + S_0^*\right| \leqq \frac{P_0^*}{\alpha} - \frac{\alpha}{P_0^*},$$

oder, wenn $\mathbf{A} = \frac{\alpha}{P_0^*}$, $0 \leqq \mathbf{A} \leqq 1$, $\mathbf{B} = \frac{\beta}{P_0^*}$ gesetzt wird,

$$(41\text{a})\qquad |\mathbf{B} + \mathbf{A}S_0^*| \leqq 1 - \mathbf{A}^2.$$

B *liegt also in dem Kreise* $\mathfrak{K}_{\mathbf{A}}$, *der* $-\mathbf{A}S_0^*$ *zum Mittelpunkte und* $1 - \mathbf{A}^2$ *zum Radius hat. Dies ist die scharfe Abgrenzung von* β *bei festem* α *und gegebener* 0-*Mindestverteilung.*

---

[34]) Für die Klasse E sind P_0^*, S_0^* durch Π_0^*, Σ_0^* zu ersetzen.

Lassen wir jetzt die $0 \leqq \alpha \leqq P_0^*$ varieren, so liegt $\mathbf{B}$ in der Vereinigungsmenge V aller Kreise $\mathfrak{K}_{\mathbf{A}}$, $0 \leqq \mathbf{A} \leqq 1$.

Es werde $S^* \geqq 0$ *normiert.* Für $S_0^* = 0$ (symmetrische Verteilung!) ist V der Kreis $|\mathbf{B}| \leqq 1$, d.i.

$$|\beta| \leqq P_0^*; \quad S_0^* = 0. \tag{42}$$

Sonst setze man $\mathbf{B} = x + iy$. Dann besteht V zunächst aus den Punkten

$$x \geqq 0; \quad |\mathbf{B}| \leqq 1 \tag{43a}$$

der rechten Halbenebene. Für $x < 0$ ist V von der Enveloppe der Kreise $\mathfrak{K}_{\mathbf{A}}$ berandet. Diese ergibt sich aus

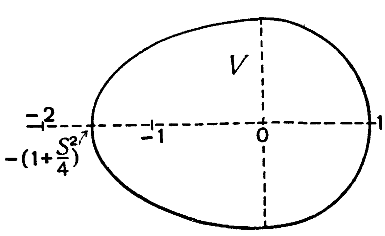
$$(x + \mathbf{A}S_0^*)^2 + y^2 = (1 - \mathbf{A}^2)^2 \tag{b}$$

in der Parameterdarstellung

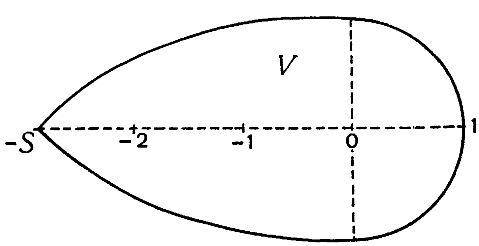
$$x = -\frac{\mathbf{A}}{S_0^*}\left[2(1-\mathbf{A}^2) + S_0^{*2}\right]; \quad y^2 = (1-\mathbf{A}^2)^2\left(1 - \frac{4\mathbf{A}^2}{S_0^{*2}}\right). \tag{43b}$$

Bei der Diskussion von (43b) sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. $S_0^* \leqq 2$. $\mathbf{A}$ läuft in (43b) von 0 bis $\frac{S_0^*}{2}$, $|x|$ wächst von 0 bis $1 + \frac{S_0^{*2}}{4}$ und $|y|$ fällt von 1 bis 0. V besitzt keine Spitze. (Figur 2a.)



Figur 2a.



Figur 2b.

II. $S_0^* > 2$. $\mathbf{A}$ läuft in (43b) von 0 bis 1, $|x|$ wächst von 0 bis S_0^* und $|y|$ fällt von 1 bis 0. V besitzt in $x = -S_0^*$, $y = 0$ eine Spitze. (Figur 2b.)

Damit ist in jedem Falle β *innerhalb* $\mathfrak{E}_+$ *bei gegebener* 0-*Mindestverteilung scharf abgegrenzt.*

Insbesondere gelten, stets mit der Normierung $\alpha \geqq 0$, $S_0^* \geqq 0$ die Ungleichungen

$$|\Im(\beta)| \leqq P_0^* \tag{44}$$

und

$$(45)\qquad -P_0^*\left(1+\frac{S_0^{*2}}{4}\right) \leqq \Re(\beta) \leqq P_0^* \quad \text{für} \quad S_0^* \leqq 2,$$

$$-P_0^* S_0^* \qquad \leqq \Re(\beta) \leqq P_0^* \quad \text{für} \quad S_0^* \geqq 2.$$

Ferner ist nach (41a)

$$(\mathrm{c})\qquad |\mathbf{B}| \leqq (1-\mathbf{A}^2) + \mathbf{A}S_0^*.$$

Da die rechte Seite bei $\mathbf{A} = \frac{S_0^*}{2}$ ihr Maximum hat und $\mathbf{A} \leqq 1$ sein muß, erhält man die Ungleichungen (13) der Einleitung. Es sei etwa $\zeta \neq 0$ eine Nullstelle von $f(z)$. (13) ergibt

$$(13\mathrm{a})\qquad \begin{aligned} |\beta| &\leqq 1-|\zeta|^2 && \text{für} \quad |\zeta| \leqq \sqrt{2}-1 \\ |\beta| &\leqq \frac{(1+|\zeta|^2)^2}{4|\zeta|} && \text{für} \quad |\zeta| \geqq \sqrt{2}-1, \end{aligned}$$

so daß man, ähnlich wie bei der Jensenschen Formel, *auch aus der bloßen Kenntnis von β die möglichen Nullstellen von $f(z)$ in $\mathfrak{E}$ scharf abgrenzen kann.*

§ 2.

Allgemeine Mindestverteilungen.

1. *Die Jensensche Ungleichung*:

Es sei $0 < |w| < 1$ und (ζ_k) eine w-Mindestverteilung von $f(z)$, so daß (ζ_k) zugleich eine 0-Mindestverteilung für die Funktion

$$(14)\qquad f_w(z) = z\frac{f(z)-w}{f(z)\overline{w}-1}\gamma^{-1} = |w|z - \alpha\gamma^{-1}(1-|w|^2)z^2 + \ldots;\quad w = |w|\gamma$$

aus $\mathfrak{E}_{|w|}$ ist. (9*) ergibt die neue Jensensche Ungleichung [35])

---

[35]) Für die Klasse $\mathbf{E}_\alpha^\varkappa$ ist

$$(\mathrm{a})\qquad \frac{\varphi(z)-w}{\varphi(z)\overline{w}-1}\gamma^{-1} = |w| - \alpha\gamma^{-1}(1-|w|^2)z^\varkappa + \ldots;\qquad \varkappa > 0$$

$$(\mathrm{b})\qquad \left.\frac{\varphi(z)-w}{\varphi(z)\overline{w}-1}\right|_{z=0} = \frac{\alpha-w}{\alpha\overline{w}-1};\qquad \varkappa = 0$$

$$(\mathrm{c})\qquad \frac{\varphi(z)-w}{\varphi(z)\overline{w}-1}\gamma^{-1} = \frac{1}{|w|} + \frac{\gamma}{\alpha}(1-|w|^2)z^{|\varkappa|} + \ldots;\qquad \varkappa < 0.$$

Daher ist $|w| \leqq \Pi_w^*$ für $\varkappa > 0$, $\left|\frac{\alpha-w}{\alpha\overline{w}-1}\right| \leqq \Pi_w^*$ für $\varkappa = 0$, $|w| \geqq \frac{1}{\Pi_w^*}$ für $\varkappa < 0$. Für $\varkappa = 0$, $\alpha = 1$ ist also $\Pi_w^* \geqq 1$, für $\varkappa = 0$, $\alpha > 1$ und ebenso stets für $\varkappa < 0$ ist $\Pi_w^* > 1$.

(15*) [36]
$$|w| \leqq P_w^*.$$

Das Gleichheitszeichen ist nur für die Funktion $\frac{f(z)-w}{f(z)\bar{w}-1} = \gamma P_w^*(z)$ richtig, und der Vergleich der Entwicklungen (6) und (14) zeigt, daß die dadurch bestimmte Funktion $f(z)$, wenn etwa $S \geqq 0$ [37]) normiert ist, nur im Falle $w > 0$ oder $S = 0$ zu $\mathfrak{E}_+$ gehört. Für andere w und S ist also *die Ungleichung* (15*) *innerhalb* $\mathfrak{E}_+$ *nicht scharf.*

2. *Die Ungleichung* (16):

Wendet man die Ungleichung (41) auf $f_w(z)$ an, so ergibt sich

$$\left|\alpha\frac{1-|w|^2}{w} - S_w^*\right| \leqq \frac{P_w^*}{|w|} - \frac{|w|}{P_w^*}, \tag{16}$$

und hier ist das Gleichheitszeichen nur bei den Funktionen

$$\frac{f(z)-w}{f(z)\bar{w}-1} = \gamma P_w^*(z)\frac{z\varepsilon - \frac{|w|}{P_w^*}}{z\varepsilon\frac{|w|}{P_w^*} - 1} \tag{17}$$

mit passendem ε, $|\varepsilon| = 1$, richtig. [38])

Allgemein ist bei gegebener Verteilung jeder (16) *genügende Wert* w *bei einer passenden Funktion in* $\mathfrak{E}_\alpha$ *realisierbar.* [39])

Es sei nunmehr *die Normierung* $S \geqq 0$ *vorausgesetzt und* $\alpha \geqq 0$.

Der durch (16) bestimmte Variabilitätsbereich für w ist durch eine biquadratische Kurve $\Gamma^*(\alpha)$ begrenzt. Setzt man $w = xe^{i\varphi}$,

---

[36]) Es ist also $P_w^* > 0$.

[37]) Wir schreiben, wo keine Verwechslung möglich ist, für P_w^*, S_w^* kurz P und S.

[38]) Für die Klassen $\mathrm{E}_\alpha^\varkappa$ ist

$$\left|\alpha\frac{1-|w|^2}{w} - \Sigma_w^*\right| \leqq \frac{\Pi_w^*}{|w|} - \frac{|w|}{\Pi_w^*}, \qquad \varkappa = 1 \tag{a}$$

$$\left|\frac{1-|w|^2}{\alpha\bar{w}} + \Sigma_w^*\right| \leqq |w|\,\Pi_w^* - \frac{1}{|w|\,\Pi_w^*}, \qquad \varkappa = -1, \tag{b}$$

während für $|\varkappa| > 1$ diese Ungleichungen jedenfalls mit $\alpha = 0$ bzw. $\frac{1}{\alpha} = 0$ gelten. Nur für $|\varkappa| = 1$ sind diese Abgrenzungen scharf. Für $\varkappa = 0$ braucht man zu einer analogen Abgrenzung die Kenntnis von β.

[39]) Für die Klasse aller einer festen Majorantenrelation $f(z) \prec F(z)$ genügenden Funktionen $f(z)$ sind die aus dieser Relation folgenden Abgrenzungen scharf mit den Extremalfunktionen $f(z) = F(\varepsilon z)$, $|\varepsilon| = 1$; und sie können auch sonst nicht verbessert werden, wie die Funktionen $f(z) = F(tz)$, $|t| < 1$, zeigen.

so ist diese durch

$$\text{(a)} \quad F^*(x, \varphi) \equiv x^4 \left[\alpha - \frac{1}{P^2}\right] + 2x^3 \alpha S \cos\varphi + \\ + x^2[S^2 + 2(1-\alpha^2)] - 2x\alpha S \cos\varphi + (\alpha^2 - P^2) = 0$$

erklärt. Dabei ist nach (15*) $0 < x \leqq P$. Es ist ferner

$$\text{(b)} \quad F^*(0, \varphi) = \alpha^2 - P^2; \quad F^*(P, \varphi) = \left|\alpha(1-P^2) - Pe^{i\varphi}S\right|^2; \\ F^*(\infty, \varphi) = -\infty.$$

Hieraus und aus der Cartesischen Zeichenregel folgt nun leicht:

I: $\alpha < P$. (a) besitzt für jedes φ genau eine Wurzel $X^*(\varphi)$ mit $0 < X^* \leqq P$, und (16) besagt $|w| \leqq X^*(\varphi)$. Da ferner $F^*(x, \varphi)$, welches in $\cos\varphi$ linear ist, bei festem $x \geqq 0$ mit wachsendem $|\varphi| \leqq \pi$ nicht abnimmt, so folgt weiter, daß $X^*(\varphi)$ *mit wachsendem* $|\varphi| \leqq \pi$ *nicht zunimmt*[40]). *Es ist also jedenfalls* $|w| \leqq X^*(0)$.

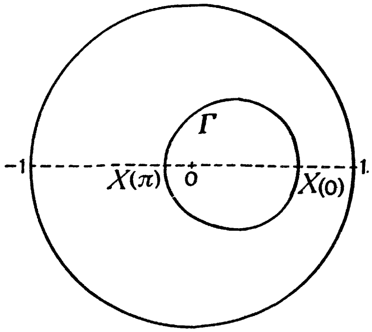


Fig. 3a.

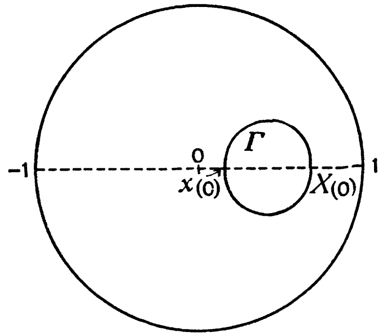


Fig. 3b.

II: $\alpha \geqq P$. Für $\cos\varphi \leqq 0$ besitzt (a) keine Wurzeln $0 < x \leqq P$. Für $\cos\varphi \geqq 0$ existieren entweder keine oder zwei (ev. zusammenfallende) Wurzeln $0 \leqq x^*(\varphi) \leqq X^*(\varphi) \leqq P$, und (16) besagt $x^*(\varphi) \leqq |w| \leqq X^*(\varphi)$. *Mit wachsenden* $|\varphi| \leqq \pi$ *nimmt* $x^*(\varphi)$ *nicht ab und* $X^*(\varphi)$ *nicht zu.*[41]) *Jedenfalls gilt also* $x^*(0) \leqq |w| \leqq X^*(0)$.

Wir fassen zusammen:

I: *Wenn* $\alpha < P_w^*$ *ist, schließt* $\Gamma^*(\alpha)$ *den* 0-*Punkt ein und wird von jedem Strahl durch diesen in genau einem Punkte getroffen. Der Abstand dieses Punktes von* 0 *nimmt mit wachsendem* $|\varphi| \leqq \pi$ *nicht zu.*[40])

II: *Wenn* $\alpha \geqq P_w^*$ *ist, so liegt* $\Gamma^*(\alpha)$ *ganz in der rechten Halbebene und schneidet jeden Strahl durch den Nullpunkt daselbst in höchstens*

[40]) Wenn $\alpha S > 0$ ist, nimmt $X^*(\varphi)$ ab.

zwei Punkten. Mit wachsenden $|\varphi| \leqq \pi$ *nimmt der Abstand des zu* 0 *näheren Schnittpunktes von* 0 *nicht ab und der des weiteren nicht zu.* $\Gamma^*(\alpha)$ *hat „sichelförmige" Gestalt*[41]). (Figuren 3.)

Für $\alpha = P_w^*$ wird $\Gamma^*(\alpha)$ eine Kurve 3. Ordnung, die durch den Nullpunkt geht, aber sonst ganz in der rechten Halbebene liegt.[41]) In eine Kurve zweiter Ordnung und zwar *in einen Kreis artet* $\Gamma^*(\alpha)$, wie eine elementare Diskussion zeigt, *nur in den Fällen* $\alpha = 0$ *oder* $S_w^* = 0$ (*symmetrische Verteilung*) *oder* $S_w^* = \frac{1-P_w^{*2}}{P_w^*}$ (*genau ein* $\zeta > 0$ *gegeben!*) *aus.* In diesem letzteren Falle ist dies natürlich der Kreis $\zeta\mathfrak{K}_\zeta(\alpha)$ aus § 1, 3.

Wir werden noch sehen, daß $\Gamma^*(\alpha)$ für $\alpha = \mathbf{A}^*$ aus (18) in einen Punkt ausartet. (§ 2, 4.)

3. *Variation der* $\alpha \geqq 0$.

Es sei jetzt $P > 0$ und $S \geqq 0$ fest gegeben. Mit $w = |w|e^{i\varphi}$ schreibt sich (16) in der Form

$$\text{(a)}\quad \alpha^2\left(\frac{1-|w|^2}{|w|}\right)^2 + S^2 - 2\alpha\cos\varphi\,\frac{1-|w|^2}{|w|}S \equiv$$
$$\equiv \left(\alpha\frac{1-|w|^2}{|w|} - S\cos\varphi\right)^2 + S^2\sin^2\varphi \leqq \left(\frac{P}{|w|} - \frac{|w|}{P}\right)^2.$$

Variiert man hier die $\alpha \geqq 0$, so folgt aus der ersten Schreibweise

$$\text{(b)}\qquad S \leqq \frac{P}{|w|} - \frac{|w|}{P};\quad \cos\varphi \leqq 0,$$

und aus der zweiten

$$\text{(c)}\qquad S\,|\sin\varphi| \leqq \frac{P}{|w|} - \frac{|w|}{P};\quad \cos\varphi \geqq 0\,.$$

Das Gleichheitszeichen in (b) wird für $\alpha = 0$, das in (c) für $\alpha = \frac{|w|}{1-|w|^2}S\cos\varphi$ erreicht. Dieses letztere α ist wegen (7) sicher $\leqq \frac{P}{1-P^2}\,S \leqq 1$. Die Ungleichungen (b) und (c) ergeben gerade den in Formel (19) der Einleitung genannten Kreisbogenbereich für w.

---

[41]) Wenn $S = 0$ ist, wird notwendig $\alpha = \mathbf{A}^* = P$ und $\Gamma^*(\alpha)$ artet in den Punkt 0 aus. Sonst nimmt $X^*(\varphi)$ ab und $x^*(\varphi)$ (außer im Falle $\alpha = P$, wo $x^*(\varphi) \equiv 0$ ist) zu. *Für* $\alpha > P$ *ist* $x^*(\varphi) > 0$, *und* $\Gamma^*(\alpha)$ *schließt* 0 *aus.*

4. *Die Ungleichung* (18):

Die Ungleichungen

(a) $$|w| \leqq X^*(0) \quad \text{bzw.} \quad x^*(0) \leqq |w| \leqq X^*(0)$$

aus 2 sind gleichbedeutend mit der aus (16) unmittelbar folgenden Abschätzung

(46) $$L^*(|w|) \equiv \alpha \frac{1-|w|^2}{|w|} - \left(\frac{P}{|w|} - \frac{|w|}{P}\right) \leqq$$
$$\leqq S \leqq \alpha \frac{1-|w|^2}{|w|} + \left(\frac{P}{|w|} - \frac{|w|}{P}\right) \equiv R^*(|w|)\,.$$

a. $R^*(x)$ nimmt in $(0, P)$ ab. Wenn also $R^*(P) \leqq S$, d.i. $\alpha \leqq \frac{SP}{1-P^2}$ ist, so liefert die Gleichung $R^*(x) = S$ die Wurzel $X^*(0)$.

b. Es ist

(b) $$L^*(0) = \left.\begin{matrix} -\infty \\ 0 \\ +\infty \end{matrix}\right\} \text{für} \begin{cases} \alpha < P \\ \alpha = P; \\ \alpha > P \end{cases} \qquad L^*(P) = \alpha \frac{1-P^2}{P};$$
$$L^{*\prime}(x) = \frac{1}{x^2}\left\{-\alpha(1+x^2) + P + \frac{x^2}{P}\right\}.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

I. $\alpha \leqq P$. $L^*(x)$ wächst in $(0, P)$. Wenn also $L^*(P) \geqq S$, d.i. $\alpha \geqq \frac{SP}{1-P^2}$ ist, so liefert $L^*(x) = S$ die Wurzel $X^*(0)$.

II: $\alpha > P$.

Die Funktion $L^*(x)$ hat für positive x ihr Minimum an der durch

(c) $$\alpha = \frac{1}{P} \frac{P^2+\xi^2}{1+\xi^2}$$

bestimmten Stelle ξ. *Damit also überhaupt w-Werte existieren, d.h. damit die Mindestverteilung überhaupt für passendes w in $\mathfrak{E}_\alpha$ realisierbar ist, muß zunächst $L^*(\xi) \leqq S$, d.i.*

(d) $$\frac{1}{P}\frac{P^2+\xi^2}{1+\xi^2} \cdot \frac{1-\xi^2}{\xi} - \left(\frac{P}{\xi} - \frac{\xi}{P}\right) \leqq S,$$
$$\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} - \frac{P^2-\xi^2}{P^2+\xi^2} \leqq \frac{\xi SP}{P^2+\xi^2}; \quad \frac{2\xi}{1+\xi^2} \leqq \frac{SP}{1-P^2}; \quad 0 \leqq \xi \leqq 1$$

sein.

A: *Es sei* $\xi \leqq P$, *d.i.* $\alpha \leqq \frac{2P}{1+P^2}$.

α: Wenn $L^*(P) < S$, d.i. $\alpha < \frac{SP}{1-P^2}$ ist, so liefert $L^*(x) = S$ die Wurzel $x^*(0)$.

β: Wenn $L^*(P) \geqq S$, d.i. $\alpha \geqq \frac{SP}{1-P^2}$ ist, so liefert $L^*(x) = S$ beide Wurzeln $x^*(0)$ und $X^*(0)$. Es ist notwendig $S \leqq 2 \cdot \frac{1-P^2}{1+P^2}$. In jedem Falle ist *die Bedingung* (d) nach dem über die Ungleichung (16) Gesagten *auch hinreichend für die Realisierbarkeit der Mindestverteilung.*

B: *Es sei* $\xi > P$, *d.i.* $\alpha > \frac{2P}{1+P^2}$.

Die Funktion $L^*(x)$ nimmt in $(0, P)$ monoton ab. *Notwendig und hinreichend für die Realisierbarkeit der Mindestverteilung ist also, daß* $L^*(P) \leqq S$ *d.i.* $\alpha \leqq \frac{SP}{1-P^2}$ *wird.* Die Gleichung $L^*(x) = S$ liefert dann die Wurzel $x^*(0)$.

Unsere Diskussion zeigt, wie in allen Fällen die Größen $x^*(0)$ *und* $X^*(0)$ *zu bestimmen sind.*

Ferner folgt aus (c) und (d) die Ungleichung

$$\alpha \leqq \frac{1}{P}\frac{P^2+\eta^{*2}}{1+\eta^{*2}}; \quad \frac{2\eta^*}{1+\eta^{*2}} = \frac{SP}{1-P^2}; \quad 0 \leqq \eta^* \leqq 1. \tag{18a}$$

Ist nun $\eta^* \leqq P$, d.i. $S \leqq 2 \cdot \frac{1-P^2}{1+P^2}$, so liegt der Fall A vor, und die Ungleichung (18a) ist nicht zu verschärfen.[42]) Für $\alpha = \frac{1}{P}\frac{P^2+\eta^{*2}}{1+\eta^{*2}}$ ist $\xi = \eta^*$, $L^*(\xi) = S$. Es liegt der Fall β vor, und es ist $x^*(0) = \eta^* = X^*(0)$. Die Mindestverteilung ist nur mit $|w| = \eta^*$ und also nach Fußnote[41]) sogar nur mit $w = \eta^*$ zu realisieren.

Ist aber $\eta^* > P$, d.i. $S > 2\frac{1-P^2}{1+P^2}$, so sind nur die Fälle A. α und B möglich. Es muß also

$$\alpha \leqq \frac{SP}{1-P^2} \tag{18b}$$

sein. Diese Ungleichung ist dann nicht zu verschärfen[43]). Für

---

[42]) Es ist jedenfalls $\eta^* \geqq 0$, also $\frac{1}{P}\frac{P^2+\eta^{*2}}{1+\eta^{*2}} \geqq P$.

[43]) Es ist $\frac{SP}{1-P^2} > \frac{2P}{1+P^2} > P$.

$\alpha = \frac{SP}{1-P^2}$ ist notwendig $x^*(0) = P = X^*(0)$, und die Mindestverteilung ist nur mit $w = P$ zu realisieren.

Damit ist die Notwendigkeit und das Hinreichen der Ungleichungen (18) für Realisierbarkeit von Mindestverteilungen in $\mathfrak{E}_\alpha$ bewiesen.

Zugleich ist gezeigt, daß für $\alpha = \mathrm{A}^*$ *aus* (18) *die Mindestverteilung nur mit* $w = \eta^*$ $\left(\textit{für } S \leqq 2\frac{1-P^2}{1+P^2}\right)$ *bzw. mit* $w = P$ $\left(\textit{für } S \geqq 2\frac{1-P^2}{1+P^2}\right)$ *realisierbar ist.*

Die Kurve $\Gamma^*(\mathrm{A}^*)$ aus 2 schrumpft also in den Punkt η^* bzw. P zusammen.

Die zu $\alpha = \mathrm{A}^*$ *gehörigen Extremalfunktionen aus* $\mathfrak{E}_+$ *sind nach* (17)[44])

$$\text{(47a)} \qquad \frac{f(z)-\eta^*}{f(z)\eta^*-1} = P^*(z)\frac{z-\dfrac{\eta^*}{P^*}}{z\dfrac{\eta^*}{P^*}-1}; \quad S^* \leqq 2\frac{1-P^{*2}}{1+P^{*2}}$$

bzw.

$$\text{(47b)} \qquad \frac{f(z)-P^*}{f(z)P^*-1} = P^*(z); \qquad S^* \geqq 2\frac{1-P^{*2}}{1+P^{*2}}.$$

§ 3.

Weitere Abgrenzungen bei Mindestverteilungen.

1. *Die Majorantenrelation* (20):

Wendet man die Relation (10) auf die Funktion $f_w(z)$ aus (14) an, so ergibt sich die neue Majorantenrelation

$$\text{(20)} \qquad \frac{f(z)-w}{f(z)\bar{w}-1}\,\frac{\gamma^{-1}}{P_w^*(z)} \prec \frac{z-\dfrac{|w|}{P_w^*}}{z\dfrac{|w|}{P_w^*}-1}$$

mit den Extremalfunktionen

$$\text{(17)} \qquad \frac{f(z)-w}{f(z)\bar{w}-1} = \gamma P_w^*(z)\frac{z\varepsilon-\dfrac{|w|}{P_w^*}}{z\varepsilon\dfrac{|w|}{P_w^*}-1}, \qquad |\varepsilon| = 1$$

aus $\mathfrak{E}$.

---

[44]) Es muß $\gamma = \varepsilon = 1$ sein. Man beachte, daß im Falle (47b) die ζ_k eine Vollverteilung der Extremalfunktion bilden.

Für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$ muß überdies w der Ungleichung (16) genügen, und nach § 2, 2 gehören im Falle des Gleichheitszeichens in (16) die obigen Extremalfunktionen bei geeignetem ε zu $\mathfrak{E}_\alpha$. Entsprechendes gilt für die Klasse $\mathfrak{E}_+$.

Die Majorantenrelation (20) ergibt *Kreisabgrenzungen für $f(z)$ bei gegebener w-Mindestverteilung innerhalb* $\mathfrak{E}$. Für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$ ist diese Abgrenzung nur scharf, wenn w auf der Kurve $\Gamma^*(\alpha)$ aus § 2, 2 (bei der Normierung $S \geqq 0$) liegt[45]). Mit der Vereinigungsmenge dieser Kreise, wenn w innerhalb $\Gamma^*(\alpha)$ variiert, würde man also Abgrenzungen von $f(z)$ bei gegebener Mindestverteilung (und zwar für irgend ein w) innerhalb $\mathfrak{E}_\alpha$ erhalten. Doch wird diese Vereinigungsmenge wohl recht unübersichtlich.

2. *p-fache w-Stellen*:

An den Stellen ζ_k erhält man aus (20) Abgrenzungen für $f^{(p)}(\zeta)$, wenn p die Vielfachheit von ζ_k in der Mindestverteilung ist. Es sei etwa $\zeta \neq 0$ *eine mindestens p-fache w-Stelle* von $f(z)$. Wählt man die Mindestverteilung $\zeta_k \equiv \zeta$, $1 \leqq k \leqq p$, so erhält man eine Abgrenzung für

$$\text{(a)} \qquad \frac{\eta}{\gamma}\,\frac{f^{(p)}(\zeta)}{p!}\,\frac{(|\zeta|^2-1)^p}{|w|^2-1}; \qquad w = |w|\gamma, \qquad \zeta = |\zeta|\eta,$$

und insbesondere gilt

$$\text{(48)} \qquad \frac{|w|-|\zeta|^{p+1}}{|\zeta|^{p-1}-|w|} \leqq |\zeta|\,\frac{|f^{(p)}(\zeta)|}{p!}\,\frac{(1-|\zeta|^2)^p}{1-|w|^2} \leqq \frac{|w|+|\zeta|^{p+1}}{|w|+|\zeta|^{p-1}}.$$

Durch Variation von w kann man hieraus von w freie Abgrenzungen für $f^{(p)}(\zeta)$ gewinnen. Variiert man die w innerhalb $\Gamma^*(\alpha)$, so bekommt man (unter der Normierung $S \geqq 0$) Abgrenzungen von $f^{(p)}(\zeta)$ innerhalb $\mathfrak{E}_\alpha$.

Die rechte Seite von (48) besagt[46])

$$\text{(48a)} \qquad |\zeta|\,\frac{|f^{(p)}(\zeta)|}{p!}\,(1-|\zeta|^2)^p \leqq (1-|w|^2)\,\frac{|w|+|\zeta|^{p+1}}{|w|+|\zeta|^{p-1}}.$$

Die Funktion $g(x) = (1-x^2)\dfrac{x+|\zeta|^{p+1}}{x+|\zeta|^{p-1}}$ besitzt in $(0, 1)$ das

[45]) Für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$ muß man die Relation (37) auf $f_w(z)$ anwenden.

[46]) Für $w = 0$ ergibt sich (11). Für $p = 1$ ergibt sich *als Verschärfung der Lindelöfschen Ungleichung* [17]) *für die Klasse* $\mathfrak{E}$: $|f'(\zeta)| \leqq \dfrac{(1-|f(\zeta)|)(|f(\zeta)|+|\zeta|^2)}{|\zeta|(1-|\zeta|^2)}$.

durch

$$\text{(b)} \qquad h(\xi) = \frac{2\xi(\xi+|\zeta|^{p+1})(\xi+|\zeta|^{p-1})}{1-\xi^2} = |\zeta|^{p-1}(1-|\zeta|^2)$$

bestimmte Maximum ξ.

Nun ist nach (15*) $|w| \leqq |\zeta|^p$. Ist also $\xi \geqq |\zeta|^p$, d.i.

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} &h(\zeta^p) \leqq |\zeta|^{p-1}(1-|\zeta|^2); \\ &2|\zeta|^p(|\zeta|^p + |\zeta|^{p+1})(|\zeta|^p+|\zeta|^{p-1}) \leqq \\ &\qquad\qquad \leqq |\zeta|^{p-1}(1-|\zeta|^2)(1-|\zeta|^{2p}), \\ &2|\zeta|^{2p}(1+|\zeta|) \leqq (1-|\zeta|)(1-|\zeta|^{2p}), \\ &|\zeta|^{2p+1} + 3|\zeta|^{2p} + |\zeta| \leqq 1, \end{aligned}$$

so ist $g(|w|) \leqq g(|\zeta^p|)$. Aus (48a) folgt also

$$\text{(23a)} \qquad \frac{|f^{(p)}(\zeta)|}{p!} \leqq \frac{1-|\zeta|^{2p}}{(1-|\zeta|^2)^p} \quad \text{für } |\zeta|^{2p+1} + 3|\zeta|^{2p} + |\zeta| \leqq 1.$$

Für $\xi \leqq |\zeta|^p$ aber ist

$$\text{(23b)} \qquad \frac{|f^{(p)}(\zeta)|}{p!} \leqq \frac{g(\xi);}{|\zeta|(1-|\zeta|^2)^p}; \quad |\zeta|^p \geqq \xi, \ \xi \text{ aus (b).}$$

Das Gleichheitszeichen wird von den Funktionen (17) mit $P^*(z) = \left(\frac{z-\zeta}{z\bar{\zeta}-1}\eta^{-1}\right)^p$ und $|w| = |\zeta|^p$ bzw. $|w| = \xi$ erreicht.

Insbesondere findet man für $p = 1$, also an *jeder* Stelle ζ, da dann $\xi = \frac{1-|\zeta|^2}{2}$ wird, die beiden Dieudonnéschen Ungleichungen (22) der Einleitung.

Es sei jetzt $\zeta > 0$, also $S = p\frac{1-\zeta^2}{\zeta} > 0$ normiert. Mit den Bezeichnungen aus § 2, 2 ist $|w| \leqq X^*(0)$ die beste Abschätzung in $\mathfrak{E}_{|\alpha|}$, während für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$ bei gegebenem $\varphi = \operatorname{arc} w$ sogar $|w| \leqq X^*(\varphi)$ gilt.

Je nachdem nun $X^* \leqq \xi$ oder $X^* \geqq \xi$ ist, erhält man aus (48a) mit $|w| = X^*(0)$ [oder $|w| = X^*(\varphi)$] bzw. mit $|w| = \xi$ scharfe Abschätzungen für $|f^{(p)}(\zeta)|$ in $\mathfrak{E}_{|\alpha|}$ [oder bei gegebenem φ in $\mathfrak{E}_\alpha$].

Ähnliches gilt *für die Klasse* $\mathfrak{E}_+$. Wir wollen hier als Beispiel den Fall $p = 1$ diskutieren:

Nach § 2, 3 (b) ist für $\cos\varphi \leqq 0$

$$\text{(d)} \qquad \frac{1-\zeta^2}{\zeta} \leqq \frac{\zeta}{|w|} - \frac{|w|}{\zeta}; \qquad \text{d.i. } |w| \leqq \zeta^2.$$

Solange also $\zeta^2 \leqq \xi = \frac{1-\zeta^2}{2}$, d.i. $\zeta \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, gilt (vergl. [46]))

(49a) $$|f'(\zeta)| \leqq 2\zeta\,; \quad 0 < \zeta \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}\,; \quad \cos\varphi \leqq 0.$$

Für $\cos\varphi \geqq 0$ ist

(e) $$\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,|\sin\varphi| \leqq \frac{\zeta}{|w|} - \frac{|w|}{\zeta}.$$

Solange also $\frac{\zeta}{\xi} - \frac{\xi}{\zeta} \leqq \frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,|\sin\varphi|$, d.i.

(f) $$\frac{2\zeta}{1-\zeta^2} - \frac{1-\zeta^2}{2\zeta} \leqq \frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,|\sin\varphi|\,; \quad \left(\frac{2\zeta}{1-\zeta^2}\right)^2 \leqq 1 + 2\,|\sin\varphi|$$

bleibt, wird

(49b) $$|f'(\zeta)| \leqq \frac{g(x)}{\zeta(1-\zeta^2)}\,; \quad \frac{\zeta}{x} - \frac{x}{\zeta} = \frac{1-\zeta^2}{\zeta}\,|\sin\varphi|\,; \quad \cos\varphi \geqq 0.$$

Für größere ζ ist jeweils die zweite Dieudonnésche Ungleichung (22) auch in $\mathfrak{C}_+$ scharf.

3. *Die Sätze von Dieudonné:* [47])

A. Aus der Ungleichung (48) ergibt sich, daß an einer mindestens p-fachen w-Stelle

(24) $$f^{(p)}(\zeta) \neq 0 \quad \text{für} \quad |f(\zeta)| > |\zeta|^{p+1}$$

ist, d.h. *dann ist ζ eine genau p-fache w-Stelle von $f(z)$.*

Es werde wieder die normierte Verteilung $\zeta_k \equiv \zeta > 0$, $1 \leqq k \leqq p$, gewählt. Ist dann $\alpha > \frac{2\zeta^p}{1+\zeta^{2p}} = \frac{2P}{1+P^2}$, so ist, da nach § 2, 4; II, B $L^*(x)$ in $(0, P)$ monoton fällt und $L^*(|w|) \leqq S$ sein muß, die Ungleichung (24) sicher erfüllt, wenn

(a) $$L^*(\zeta^{p+1}) = \alpha\,\frac{1-\zeta^{2(p+1)}}{\zeta^{p+1}} - \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta\right) > p\,\frac{1-\zeta^2}{\zeta} = S,$$

d.i.

(b) $$\alpha > \frac{(p+1)\zeta^p}{1 + \zeta^2 + \ldots + \zeta^{2p}}$$

gilt.

Nun besitzt das Polynom

---

[47]) Dieudonné, 92—112.

(c) $h(\zeta) = (p+1)(1+\zeta^{2p}) - 2(1+\zeta^2+\ldots+\zeta^{2p}) =$
$= (p-1)(1+\zeta^{2p}) - 2(\zeta^2+\ldots+\zeta^{2(p-1)})$

für $p > 1$ als einzige [48]) positive Wurzel die Doppelwurzel $\zeta = 1$. Wegen $h(0) = p - 1$ ist also $h(\zeta)$ in (0, 1) positiv, d.h. es ist für $p \,(\geqq)\, 1$

(d) $$\frac{(p+1)\zeta^p}{1+\zeta^2+\ldots+\zeta^{2p}} \,(\geqq)\, \frac{2\zeta^p}{1+\zeta^{2p}},$$

so daß (b) die Voraussetzung $\alpha > \frac{2\zeta^p}{1+\zeta^{2p}}$ zur Folge hat. Damit ist, nach Aufhebung der Normierung $\zeta > 0$, der in der Einleitung genannte *Spezialfall des Dieudonnéschen Satzes* [15]) bewiesen:

Die Funktionen aus $\mathfrak{E}_\alpha$ *nehmen für*

(25) $$\frac{(p+1)|z|^p}{1+|z|^2+\ldots+|z|^{2p}} < \alpha$$

ihre Werte höchstens p-fach an.

Der Beweis zeigt noch, *daß der Kreis* (25) *nicht verbessert werden kann.* Genau eine Extremalfunktion (17), nämlich die Funktion $f(z)$ aus

(50) $$\frac{f(z)-\zeta^{p+1}}{f(z)\zeta^{p+1}-1} = \left(\frac{z-\zeta}{z\zeta-1}\right)^{p+1}; \quad \frac{(p+1)\zeta^p}{1+\zeta^2+\ldots+\zeta^{2p}} = \alpha,$$

besitzt *in* $\zeta > 0$ eine $(p+1)$-fache ζ^{p+1}-Stelle.

B. Der Majorantenrelation (17) zufolge liegt für $|\zeta| \leqq \frac{|w|}{P}$ der Ausdruck 2(a) nicht in der linken Halbebene. Für $p = 1$ besagt dies

(21) $$\Re\left(\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right) \geqq 0 \quad \text{für} \quad |f(\zeta)| \geqq |\zeta|^2.$$

Dieses letztere ist aber nach (b) für $\alpha \geqq \frac{2|\zeta|}{1+|\zeta|^2}$ richtig. So erhalten wir den weiteren *Satz von Dieudonné* [13]):

Die Funktionen aus $\mathfrak{E}_\alpha$ *sind für* $\frac{2|z|}{1+|z|^2} \leqq \alpha$ *sternförmig* [49]) *in Bezug auf* $w = 0$. *Die Schranke ist scharf.*

---

[48]) Nach der Cartesischen Regel besitzt $h(\zeta)$ höchstens zwei positive Wurzeln.

[49]) $\Re\frac{zf'(z)}{f(z)} \geqq 0$ ist kennzeichnend für diese Sternförmigkeit; vgl. Bieberbach, 93.

C. *Der allgemeine Satz von Dieudonné* [15]), dessen Spezialfall wir in A bewiesen, lautet:

Die Funktionen aus $\mathfrak{E}_\alpha$ *nehmen für die* z *aus* (25) *jeden Wert höchstens* p*-mal an. Der Kreis* (25) *kann nicht verbessert werden.*

Wir betrachten bei festem p und r alle Mindestverteilungen

$$\text{(e)} \qquad \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{p+1}; \quad |\zeta_k| \leqq r < 1; \quad 1 \leqq k \leqq p+1$$

aus $\mathfrak{E}_\alpha$.

Der Dieudonnésche Satz ist äquivalent der folgenden Aussage: *Für die Gesamtheit der Mindestverteilungen* (e) *aus* $\mathfrak{E}$ *ist*

$$\text{(51)} \qquad \mathrm{A}^*(P, |S|) \leqq \frac{(p+1)r^p}{1+r^2+\ldots+r^{2p}},$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für $\zeta_k \equiv \zeta, |\zeta| = r, 1 \leqq k \leqq p+1.$

In der Tat folgt aus (51) und (18)

$$\text{(f)} \qquad \alpha \leqq \frac{(p+1)r^p}{1+r^2+\ldots+r^{2p}},$$

so daß eine Verteilung (e) für die ζ_k aus (25) nicht möglich ist. Die Extremalfunktionen (50) zeigen ferner, daß der Kreis (25) nicht zu verbessern ist.

Um nun (51) zu beweisen, beachte man, daß die Größe $\mathrm{A}^*(P, |S|)$ aus (18) bei festem P mit $|S|$ wächst. Nun nimmt $|S|$ nicht ab, wenn wir zunächst alle ζ_k aus (e) unter Beibehaltung der $|\zeta_k|$ positiv machen; sie bleiben, wie bei jeder Variation, die bei festem P das $|S|$ nicht abnehmen läßt, eine mögliche Mindestverteilung in $\mathfrak{E}_\alpha$.

Es seien also alle $\zeta_k > 0$. Ist nun etwa $\zeta_\varkappa < \zeta_\lambda$ und kommt $\zeta_\varkappa$ genau n-mal (in e) vor, $n < p+1$, so ersetzen wir $\zeta_\varkappa$ durch $\frac{\zeta_\varkappa}{t}$ und ζ_λ durch $t^n\zeta_\lambda$, $\frac{\zeta_\varkappa}{\zeta_\lambda} \leqq t^{n+1} \leqq 1$. Die Größenordnung der beiden ζ wird dabei nicht gestört, und P bleibt ungeändert. S nimmt wegen

$$\text{(g)} \quad S'(t) = \frac{d}{dt}\left[n\,\frac{1-\left(\frac{\zeta_\varkappa}{t}\right)^2}{\frac{\zeta_\varkappa}{t}} + \frac{1-(t^n\zeta_\lambda)^2}{t^n\zeta_\lambda}\right] =$$

$$= n(t^{n+1}\zeta_\lambda - \zeta_\varkappa)\left(\frac{1}{t^{n+1}\zeta_\varkappa\zeta_\lambda} - \frac{1}{t^2}\right) \geqq 0$$

nicht ab. Durch wiederholte Anwendung dieser Variation $\left(\text{mit } t^{n+1} = \frac{\zeta_\varkappa}{\zeta_\lambda}\right)$ erreicht man ersichtlich, daß alle $\zeta_k = \xi \leqq r$ werden.[50]) Für diese letztere Verteilung ist aber, unter Beachtung von (d),

$$\text{(h)}\quad \frac{SP}{1-P^2}=\frac{(p+1)(1-\xi^2)}{\xi}\cdot\frac{\xi^{p+1}}{1-\xi^{2(p+1)}}=$$

$$=\frac{(p+1)\xi^p}{1+\xi^2+\ldots+\xi^{2p}}\geqq\frac{2\xi^p}{1+\xi^{2p}}>\frac{2\xi^{p+1}}{1+\xi^{2(p+1)}}=\frac{2P}{1+P^2};\ S>2\frac{1-P^2}{1+P^2},$$

so daß also wegen (18) das zugehörige

$$\text{(i)}\qquad \mathbf{A}^*\left(\xi^{p+1},\ (p+1)\frac{1-\xi^2}{\xi}\right)=\frac{(p+1)\xi^p}{1+\xi^2+\ldots+\xi^{2p}}$$

und schließlich allgemein

$$\text{(j)}\quad \mathbf{A}^*(P;|S|)\leqq\frac{(p+1)\xi^p}{1+\xi^2+\ldots+\xi^{2p}}=$$

$$=\frac{p+1}{\left(\frac{1}{\xi^p}+\xi^p\right)+\left(\frac{1}{\xi^{p-2}}+\xi^{p-2}\right)+\ldots}\leqq\frac{(p+1)r^p}{1+r^2+\ldots+r^{2p}}$$

wird. Das Gleichheitszeichen ist hier nur für $\zeta_k\equiv\zeta$, $|\zeta|=r$, $1\leqq k\leqq p+1$ richtig. Damit ist der Dieudonnésche Satz bewiesen.[16])

4. *Funktionen mit gegebener Mindestverteilung.*

Nach (39) mit $P_0^*=1$ folgt für jede Funktion aus $\mathfrak{E}_\alpha$

$$\text{(a)}\qquad |f(z)|\leqq|z|\frac{|z|+\alpha}{|z|\alpha+1},$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für $f(z)=z\dfrac{z\varepsilon-\alpha}{z\varepsilon\alpha-1}$, $|\varepsilon|=1$. Die rechte Seite von (a) ist gerade das $X^*(0)$ (aus § 2, 2) für eine nur aus z bestehende Mindestverteilung. Nach dem in 2 Gesagten kann man also mittels (a) die Abschätzungen (22) für $|f'(z)|$ innerhalb $\mathfrak{E}_\alpha$ verschärfen.

Es möge nun eine beliebige Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{E}$ *an den Stellen einer gegebenen Mindestverteilung* (irgendwelche) *gleiche Werte annehmen.* Dann ist nach (18) jedenfalls $|\alpha|\leqq\mathbf{A}^*(P,|S|)$, und also folgt aus (a)

$$\text{(52)}\qquad |f(z)|\leqq|z|\frac{|z|+\mathbf{A}^*}{|z|\,\mathbf{A}^*+1}.$$

Sobald also die gegebene Verteilung mehr als zwei (ev. zusammen-

[50]) Hier könnte man nach dem Spezialfall des Satzes sofort

$$\alpha\leqq\frac{(p+1)\xi^p}{1+\xi^2+\ldots.+\xi^{2p}}\leqq\frac{(p+1)r^p}{1+r^2+\ldots.+r^{2p}}$$

schließen.

fallende) Stellen ζ_k umfaßt, erhalten wir in (52) *eine bemerkenswerte Verschärfung des Schwarzschen Lemmas.*

Freilich wird die Abschätzung (52) *im allgemeinen nicht scharf*[51]) sein. In der Tat nehmen ja die Extremalfunktionen $f(z) = z\dfrac{z\varepsilon - \mathbf{A}^*}{z\varepsilon \mathbf{A}^* - 1}$ von (52) (in $\mathfrak{E}_+$) jeden ihrer Werte genau zweimal an, so daß, wenn (52) scharf sein soll, die gegebene Mindestverteilung jedenfalls höchstens zweigliedrig sein wird.

Ist nun ζ_1, ζ_2 die gegebene Verteilung, so zeigen uns die Formeln (47), daß die Extremalfunktionen der Ungleichung $\alpha \leqq \mathbf{A}^*$ genau im Falle (47b), d.i. für $|S| \geqq 2\dfrac{1-P^2}{1+P^2}$, die obige Form haben.

Wir finden so den folgenden Satz:

Die Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{E}$ nehme an den Stellen ζ_1 und ζ_2 ($\neq 0$) gleiche Werte an. Ist dann

$$(53)\quad |S| \geqq 2\frac{1-P^2}{1+P^2};\ \text{d.i.}\ \left|\frac{1-|\zeta_1|^2}{\zeta_1} + \frac{1-|\zeta_2|^2}{\zeta_2}\right| \geqq 2\frac{1-|\zeta_1\zeta_2|^2}{1+|\zeta_1\zeta_2|^2},$$

so gilt

$$(54)\quad |f(z)| \leqq |z|\frac{|z| + \mathbf{A}^*}{|z|\mathbf{A}^* + 1};\quad \mathbf{A}^* = \frac{|S|P}{1-P^2} = \frac{\left|\zeta_2(1-|\zeta_1|^2) + \zeta_1(1-|\zeta_2|^2)\right|}{1-|\zeta_1\zeta_2|^2}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt in $\mathfrak{E}_+$ nur für die Funktionen $f(z) = z\dfrac{z\varepsilon - \mathbf{A}^*}{z\varepsilon\mathbf{A}^* - 1}$ mit passendem ε, $|\varepsilon| = 1$.

Insbesondere ist die Voraussetzung (53) erfüllt, wenn $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$ ist, und nach (54) ist dann $\mathbf{A}^* = \dfrac{2|\zeta|}{1+|\zeta|^2}$.

Daher gilt noch der folgende *Satz*:

Für die Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{E}$ sei $f'(\zeta) = 0$. Dann gilt

$$(55)\qquad |f(z)| \leqq |z|\frac{|z| + \dfrac{2|\zeta|}{1+|\zeta|^2}}{|z|\dfrac{2|\zeta|}{1+|\zeta|^2} + 1},$$

und das Gleichheitszeichen ist in $\mathfrak{E}_+$ nur für die Funktionen

$$f(z) = z\frac{z\eta^{-1} - \dfrac{2|\zeta|}{1+|\zeta|^2}}{z\eta^{-1}\dfrac{2|\zeta|}{1+|\zeta|^2} - 1},\quad \zeta = |\zeta|\eta \ \textit{richtig.}^{52)}$$

---

51) Die interessante Frage nach den scharfen Abgrenzungen für $f(z)$ im allgemeinen Falle scheint wesentlich schwieriger zu sein.

52) In ζ selbst gilt natürlich schärfer $|f(\zeta)| \leqq |\zeta|^2$ (nach (15*)).

Dieser Satz ist natürlich auch eine einfache, aber besonders interessante Folge aus (a) und der Dieudonnéschen Ungleichung

$$|\alpha| \leqq \frac{2|\zeta|}{1+|\zeta|^2}.$$

Schließlich gestattet nach 2 die Abschätzung (52) eine Verschärfung der Ungleichungen (22) für $|f'(z)|$. *Unter der Voraussetzung* (53) *sind diese Verschärfungen bei einer zweigliedrigen Verteilung Bestaussagen.*

5. *Abgrenzungen allgemeiner Ableitungen.*

I. *Es sei* $f(\zeta) = w$. Wenn $t = \frac{z-\zeta}{z\bar{\zeta}-1}$ gesetzt wird und $g(t)$ die Funktion aus § 1, 5 bedeutet, so betrachten wir die Funktion

$$\text{(a)} \qquad h(t) = \frac{g(t)-w}{g(t)\bar{w}-1} = B_1 t + B_2 t^2 + \ldots$$

aus $\mathfrak{E}$. Der Koeffizient B_k setzt sich (aber für $w \neq 0$ nicht mehr linear) aus den Koeffizienten $A_\varkappa$, $1 \leqq \varkappa \leqq k$, von $g(t)$ und also aus den Ableitungen $f^{(\varkappa)}(\zeta)$, $1 \leqq \varkappa \leqq k$, zusammen. Außerdem ist er bei festem ζ noch von $w = f(\zeta)$ abhängig. Z.B. ist

$$\text{(b)} \qquad B_1 = -\frac{A_1}{1-|w|^2} = \frac{1-|\zeta|^2}{1-|w|^2} f'(\zeta)$$

und

$$\text{(c)} \qquad B_2 = -\frac{\bar{w}}{(1-|w|^2)^2} A_1^2 - \frac{A_2}{1-|w|^2} =$$

$$= -\frac{f''(\zeta)\,(1-|\zeta|^2)^2}{2\,(1-|w|^2)} + \bar{\zeta} B_1 - \bar{w} B_1^2.$$

Ferner ist

$$\text{(d)} \qquad h(\zeta) = w; \quad h'(\zeta) = \frac{\alpha(1-|w|^2)}{(1-|\zeta|^2)}.$$

Man kann nun wiederum, entsprechend dem in § 1, 5 Gesagten, scharfe Abgrenzungen für $f^{(k)}(\zeta)$ in $\mathfrak{E}_\alpha$ gewinnen, und zwar solche, die noch $w = f(\zeta)$ enthalten. Schließlich hat man dann noch w durch Abgrenzung innerhalb $\mathfrak{E}_\alpha$ zu eliminieren. Praktisch freilich wird diese theoretisch mögliche Abgrenzung von $f^{(k)}(\zeta)$ sehr schnell undurchführbar.

A. Betrachten wir zunächst die für $|z| < 1$ regulären Funktionen $\varphi(z)$ mit $|\varphi(z)| \leqq 1$ daselbst. Mit $\varphi(z)$ statt $f(z)$ lassen wir also zunächst die Bedingungen (d) außer Acht.

Zunächst folgt aus $|B_1| \leqq 1$ die Lindelöfsche Ungleichung [17])

$$(27a) \qquad |\varphi'(\zeta)| \leqq \frac{1-|\varphi(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2} \leqq \frac{1}{1-|\zeta|^2},$$

in der das Gleichheitszeichen nur für

$$(e) \qquad \varphi(z) = g(t) = \frac{\varepsilon t - w}{\varepsilon t \bar{w} - 1}; \quad |\varepsilon| = 1; \quad t = \frac{z-\zeta}{z\bar{\zeta}-1}; \quad w = \varphi(\zeta),$$

(bzw. mit $w = 0$) gilt. Es ist aber nach (18) genauer

$$(27) \qquad |\varphi'(\zeta)| \leqq \frac{1-|\varphi(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2} \mathrm{A}^*({}_\zeta P^*, |{}_\zeta S^*|),$$

wobei $\mathrm{A}^*({}_\zeta P, {}_\zeta|S|)$ mit den $\tau_k = \frac{\zeta_k - \zeta}{\zeta_k \bar{\zeta} - 1}$, $\zeta_k \neq \zeta$, irgend einer Mindestverteilung (ζ_k) [53]) von $\varphi(z)$ zu bilden ist. Die Extremalfunktionen dieser Ungleichung, welche sobald mindestens zwei $\zeta_k \neq \zeta$ gegeben sind, schärfer als (27a) ist [54]), sind nach § 2, 4 (Formeln (47)) leicht anzugeben.

Nach (36) ist ferner $|B_2| \leqq 1 - |B_1|^2$, also

$$(f) \qquad \frac{|\varphi''(\zeta)|\,(1-|\zeta|^2)^2}{2\,(1-|w|^2)} \leqq |\zeta|\,|B_1| + |w|\,|B_1|^2 + 1 - |B_1|^2.$$

Das Maximum der rechten Seite liegt bei $|B_1^*| = \frac{|\zeta|}{2(1-|w|)}$. Je nachdem also $|B_1^*| \leqq 1$ oder nicht ist, wird diese rechte Seite für $|B_1| = |B_1^*|$ oder $|B_1| = 1$ am größten. Wir finden so die beiden Ungleichungen

$$(56) \qquad \begin{aligned} &(a) \quad \frac{|\varphi''(\zeta)|}{2}(1-|\zeta|^2)^2 \leqq (1-|w|^2) + \frac{|\zeta|^2}{4}(1+|w|); \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |\zeta| \leqq 2(1-|w|) \\ &(b) \quad \frac{|\varphi''(\zeta)|}{2}(1-|\zeta|^2)^2 \leqq (1-|w|^2)\,(|\zeta| + |w|); \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |\zeta| \geqq 2(1-|w|). \end{aligned}$$

Das Maximum der rechten Seite von (a) liegt bei $|w^*| = \frac{|\zeta|^2}{8}$.

---

[53]) $\zeta_k = 0$ ist hier gestattet.

[54]) Vgl. Carathéodory 2. Es sei $\varphi'(\zeta_1) = 0$. Dann gilt $|\varphi'(\zeta)| \leqq \frac{1-|\varphi(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^2} \cdot \frac{2|\tau_1|}{1+|\tau_1|^2}$, $\tau_1 = \frac{\zeta_1 - \zeta}{\zeta_1\bar{\zeta} - 1}$. Ist insbesondere $\varphi'(0) = 0$, so wird also $|\varphi'(\zeta)| \leqq \frac{1-|\varphi(\zeta)|^2}{1-|\zeta|^4} \cdot 2|\zeta|$.

Es ist auch $|w^*| \leqq |\zeta|$ und $|\zeta| \leqq 2\left(1 - \frac{|\zeta|^2}{8}\right) = 2(1-|w^*|)$. Daher ist in diesem Falle

$$(29) \qquad |\varphi''(\zeta)| \leqq \frac{(8+|\zeta|^2)^2}{32(1-|\zeta|^2)^2}.$$

Die rechte Seite von (b) nimmt im Intervall $\left(1 - \frac{|\zeta|}{2}, |\zeta|\right)$ monoton ab. In diesem Falle wird also diese rechte Seite am größten, wenn $|w| = 1 - \frac{|\zeta|}{2}$ ist. Daher gilt nach dem Vorigen auch in diesem Falle die Abschätzung (29). Diese Ungleichung wurde zuerst von Herrn Szász [18]) auf anderem Wege gegeben. Auf die einfache Bestimmung der Extremalfunktionen, die jedenfalls von der Gestalt $h(t) = t\frac{t\varepsilon - B_1}{t\varepsilon \bar{B}_1 - 1}$ mit passendem B_1, w und $|\varepsilon| = 1$ sind, verzichten wir. Bei gegebener Mindestverteilung könnte man noch die Ungleichung $|B_1| \leqq \mathbf{A}^*$ verschärfend heranziehen.

B. Es sei jetzt $f(z)$ aus $\mathfrak{E}$, so daß $h(\zeta) = w$ wird. Aus (16) folgt

$$(\mathrm{g}) \qquad \left| B_1 \frac{1-|w|^2}{w} - \frac{1-\zeta^2}{\zeta} \right| \leqq \left|\frac{\zeta}{w}\right| - \left|\frac{w}{\zeta}\right|$$

und hieraus

$$(\mathrm{h}) \qquad |f'(\zeta)|\,(1-|\zeta|^2)\,|\zeta| \leqq (1-|w|)\,(|w|+|\zeta|^2),$$

woraus sich dann (vergl. die Rechnung nach (48a) mit $p = 1$) die Dieudonnéschen Ungleichungen (22) für $|f'(\zeta)|$ ergeben.

Um $|f''(\zeta)|$ abzuschätzen, hätte man die aus (37) mit $t = \zeta$, $P_0^* = 1$, $S_0^* = 0$ folgende Majorantenrelation

$$(\mathrm{i}) \qquad \frac{\lambda^{-1}}{\zeta} \frac{\frac{w}{\zeta} - B_1}{1 - \frac{w}{\zeta}\bar{B}_1} < \frac{t+\tau}{t\bar{\tau}+1}\Bigg|_{|t|=|\zeta|}; \qquad \tau = \frac{\lambda^{-1} B_2}{1-|B_1|^2}; \qquad B_1 = |B_1|\,\lambda$$

heranzuziehen und aus ihr $|\tau|$ und damit $|f''(\zeta)|$ durch $|w|$ und $|B_1|$ abzugrenzen. Jedoch wird diese Rechnung bereits sehr umständlich. Wir wenden daher die in II zu schildernde Methode an.

II. Die Funktionen $f(z)$ aus $\mathfrak{E}$ sind von der Form $z\varphi(z)$, wo $\varphi(z)$ in $|z| < 1$ regulär und daselbst $|\varphi(z)| \leqq 1$ ist. Ist $f(\zeta) = w$, so ist $\varphi(\zeta) = \frac{w}{\zeta}$. Es ist ferner

$$(\mathrm{j}) \qquad f'(z) = \varphi(z) + z\varphi'(z); \quad f^{(k)}(z) = z\varphi^{(k)}(z) + k\varphi^{(k-1)}(z).$$

Da sich die $\varphi^{(k)}(\zeta)$ nach § 1, 5 linear durch die Koeffizienten $A_\varkappa$, $1 \leqq \varkappa \leqq k$, der Funktion $g(t) = \varphi\left(\frac{t-\zeta}{t\bar{\zeta}-1}\right)$ ausdrücken, so drückt sich auch $f^{(k)}(\zeta)$ *linear* durch diese $A_\varkappa$ und $A_0 = \frac{w}{\zeta}$ aus[55]). Mittels der Koeffizientenrelationen zwischen den $A_\varkappa$ kann man nun prinzipiell die $|f^{(k)}(\zeta)|$ abschätzen.

Es ist z.B. $f'(\zeta) = \frac{w}{\zeta} + \zeta\varphi'(\zeta)$ und also nach (27a)

$$\text{(k)} \qquad |f'(\zeta)| \leqq \left|\frac{w}{\zeta}\right| + |\zeta| \frac{1-\left|\frac{w}{\zeta}\right|^2}{1-|\zeta|^2},$$

was mit (h) übereinstimmt. Dies ist wohl der kürzeste Zugang zu den Dieudonnéschen Formeln (22).

Wir wollen noch die scharfe Abschätzung von $|f''(\zeta)|$ in $\mathfrak{E}$ bestimmen:

Nach (j) und § 1, 5 (Formel (b)) ist

$$\text{(l)} \quad \frac{f''(\zeta)}{2}(1-|\zeta|^2)^2 = (1-|\zeta|^2)^2\varphi'(\zeta) + \zeta \cdot \frac{\varphi''(\zeta)}{2}(1-|\zeta|^2)^2 = \zeta A_2 - A_1.$$

Hier hätten wir zunächst die dritte, zwischen $A_0 = \frac{w}{\zeta}$, A_1, A_2 bestehende Koeffizientenrelation zur Elimination von A_2 heranzuziehen. Wir ersetzen dies durch Heranziehung der B_k für $\varphi(z)$.

Nach (l) und (b), (c) ist

$$\text{(m)} \qquad \frac{f''(\zeta)}{2}\,\frac{(1-|\zeta|^2)^2}{\left(1-\left|\frac{w}{\zeta}\right|^2\right)} = B_1 + \zeta\overline{\left(\frac{w}{\zeta}\right)}\,B_1^2 - \zeta B_2$$

und also

$$\text{(n)} \qquad \frac{|f''(\zeta)|}{2}\,\frac{(1-|\zeta|^2)^2}{\left(1-\left|\frac{w}{\zeta}\right|^2\right)} \leqq |B_1| + |w|\,|B_1|^2 + |\zeta|\,|B_2|.$$

Die rechte Seite hat ihr Maximum für $|B_1^*| = \frac{1}{2(|\zeta|-|w|)}$. Je nachdem also $|B_1^*| \leqq 1$ oder nicht ist, wird sie für $|B_1| = |B_1^*|$ oder aber $|B_1| = 1$ am größten. Man findet so:

---

[55]) Man kann also zur Abschätzung von $|f^{(k)}(\zeta)|$ wieder die Szászsche Methode[18]) heranziehen. Es ist aber zu beachten, daß diese Methode *nur die jedenfalls für alle z geltende* der in verschiedenen Ringen des $|z| < 1$ verschieden lautenden scharfen Ungleichungen liefert. Z.B. kann man nur die zweite Dieudonnésche Formel (22) auf diese Weise gewinnen.

$$(57)\quad \begin{aligned} &(a)\quad \frac{|f''(\zeta)|}{2}(1-|\zeta|^2)^2 \leqq (1+|w|)\left(1-\left|\frac{w}{\zeta}\right|^2\right); \quad |w| \geqq |\zeta| - \frac{1}{2} \\ &(b)\quad \frac{|f''(\zeta)|}{2}(1-|\zeta|^2)^2 \leqq \frac{|\zeta|+|w|}{4|\zeta|^2} + \frac{|\zeta|^2-|w|^2}{|\zeta|}; \quad |w| \leqq |\zeta| - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite von (a) fällt in $(0, |\zeta|)$. Je nachdem also $|\zeta| \leqq \frac{1}{2}$ $\left(\text{dan ist sicher } |w| \geqq |\zeta| - \frac{1}{2}\right)$ ist oder nicht, wird sie für $|w| = 0$ oder $|w| = |\zeta| - \frac{1}{2}$ am größten.

Man findet so:

$$(26)\quad \begin{aligned} &(a)\quad |f''(\zeta)| \leqq \frac{2}{(1-|\zeta|^2)^2}; \qquad |\zeta| \leqq \frac{1}{2} \\ &(b)\quad |f''(\zeta)| \leqq \frac{8|\zeta|^2+2|\zeta|-1}{4|\zeta|^2(1-|\zeta|^2)^2}; \quad |\zeta| \geqq \frac{1}{2}, \quad |w| \geqq |\zeta| - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Im Falle der Formel (57 (b)) ist sicher $|\zeta| \geqq \frac{1}{2}$. Die rechte Seite dieser Formel hat für $|w^*| = \frac{1}{8|\zeta|}$ ihr Maximum. Je nachdem also $\frac{1}{8|\zeta|} \geqq |\zeta| - \frac{1}{2}$ ist oder nicht, wird sie für $|w| = |\zeta| - \frac{1}{2}$ oder $|w| = \frac{1}{8|\zeta|}$ am größten. Im ersten Falle, also für $\frac{1}{2} \leqq |\zeta| \leqq \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$, findet man wieder (26 (b)), während im zweiten

$$(26c)\quad |f''(\zeta)| \leqq \frac{(1+8|\zeta|^2)^2}{32|\zeta|^3(1-|\zeta|^2)^2}; \quad \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}) \leqq |\zeta| < 1$$

gilt. Damit sind die Formeln (26) der Einleitung bewiesen.

Der Beweis zeigt, daß diese Ungleichungen scharf sind. Auf die Angabe der Extremalfunktionen sei verzichtet.

(Eingegangen den 14. Dezember 1936.)

Literaturverzeichnis zum I. Teil.

L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie [Leipzig 1927], Bd. I.

W. Blaschke, Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen [Berichte Leipzig **67** (1915), 194—200].

C. Carathéodory, 1. Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildungen [Schwarz-Festschrift, Berlin 1914, 19—41].
2. Über beschränkte Funktionen, die in einem Paar von vorgeschriebenen Punkten gleiche Werte annehmen [Monatsh. f. Math. u. Phys. **43** (1936), 225—241].

C. Carathéodory & L. Fejér, Remarques sur le théorème de M. Jensen [C. R. **145** (1907), 163—165].

J. Dieudonné, Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynomes et aux fonctions bornées d'une variable complexe, Thèse [Ann. Ecole norm. (3) **48** (1931), 247—358].

J. L. W. V. Jensen, 1. Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions [Acta Math. **22** (1899), 359—364].
2. Investigation of a class of fundamental inequalities in the theory of analytic functions [Ann. of Math. **21** (1919), 1—30].

K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen [Berlin 1931, 3. Auflage].

E. Landau, 1. Über den Picardschen Satz [Vierteljahresber. Naturf. Ges. Zürich **51** (1906), 252—283].
2. Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe [Arch. d. Math. u. Phys. **24** (1915), 250—260].
3. Über einen Satz von Herrn Dieudonné [Math. Zeitschr. **37** (1933), 22—27].

E. Lindelöf, Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel [Acta Soc. Scient. Fennic. **35** (1909), no. 7].

R. Nevanlinna, Über beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen [Annal. Acad. Scient. Fennic. **13** (1920), no. 1].

G. Pick, Über die Beschränkung analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt wird [Math. Annal. **77** (1916), 7—23].

W. Rogosinski, 1. Über den Wertevorrat einer analytischen Funktion [Schrift. d. Königsberger Gel. Ges. **8** (1931), 1—31].
2. Zum Majorantenprinzip der Funktionentheorie [Math. Zeitschr. **37** (1933), 210—236].

I. Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, I. [Journ. f. reine u. angew. Math. **147** (1917), 205—232].

H. A. Schwarz, Zur Theorie der Abbildung, Ges. Abhandlg. II [Berlin 1890], 108 ff.

O. Szász, 1. Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe [Math. Zeitschr. **1** (1918), 163—183].
2. Ungleichheitsbeziehungen für die Ableitungen einer Potenzreihe, die im Innern des Einheitskreises beschränkt bleibt [Math. Zeitschr. **8** (1920), 303—309].