WERNER ROGOSINSKI

Über beschränkte Potenzreihen II

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 442-476
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__442_0>

Über beschränkte Potenzreihen II

von

Werner Rogosinski
Berlin

Dieser zweite Teil der vorliegenden Arbeit (der erste [1]) wird im folgenden mit I zitiert [2])) setzt die Untersuchungen über die Klasse $\mathfrak{E}$ der für $|z| < 1$ regulären Funktionen

(1) $$f(z) = \alpha z + \beta z^2 + \ldots, \qquad |f(z)| < 1,$$

fort. Wir übernehmen dabei die Bezeichnungen aus I.

Dort handelte es sich im Wesentlichen um die Diskussion von Mindestverteilungen bei den Funktionen $f(z)$, während nunmehr die *Vollverteilungen* betrachtet werden.

Die endliche (ev. leere) oder unendliche Folge (ζ_k) mit

(2) $$0 < |\zeta_k| \leqq |\zeta_{k+1}| < 1$$

heißt eine *w-Vollverteilung der Funktion* $f(z)$, wenn sie die *Gesamtheit* der von 0 verschiedenen w-Stellen von $f(z)$, jede mit ihrer Vielfachheit gezählt, wiedergibt. Eine leere Vollverteilung soll natürlich bedeuten, daß $f(z)$ den Wert w für $0 < |z| < 1$ nicht annimmt.

Die Hauptfrage ist wieder: *Welche Werte w können zu einer gegebenen Vollverteilung gehören?*

Wir erinnern an die Bezeichnungen

(3) $$P = \prod_k |\zeta_k|, \quad S = \sum_k \frac{1-|\zeta_k|^2}{\zeta_k}, \quad P(z) = \prod_k \frac{z-\zeta_k}{z\bar{\zeta}_k - 1}\,\eta_k^{-1}, \quad \zeta_k = |\zeta_k|\,\eta_k,$$

die durch Anhängung des Index w mitunter als zu w-Verteilungen gehörig gekennzeichnet werden.

Alle bewiesenen Abgrenzungen sind, soweit nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird, Bestaussagen.

---

[1]) Diese Zeitschrift **5** (1937), 67—106.

[2]) *Das Verzeichnis der neu zitierten Literatur befindet sich am Ende der Arbeit; Literatur aus I wird nach dem dortigen Verzeichnis zitiert.*

1.1: Im *ersten Paragraphen* werden die 0-*Vollverteilungen* behandelt. Hier gilt zunächst für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$ ($\alpha \geqq 0$ fest) wieder die *Jensensche Ungleichung* (I, (9*)) [3])

$$\alpha \underset{(=)}{\leq} P_0 \tag{4}$$

mit dem Gleichheitszeichen für $f(z) = zP_0(z)$. An die Stelle von I, (10) tritt aber für $\alpha > 0$ [4]) die neue Majorantenrelation

$$\frac{f(z)}{zP_0(z)} \prec \left(\frac{\alpha}{P_0}\right)^{\frac{1+z}{1-z}} \tag{5}$$

mit den Extremalfunktionen $f(z) = zP_0(z)\left(\frac{\alpha}{P_0}\right)^{\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}}$, $|\varepsilon| = 1$.

Auch für Vollverteilungen beantwortet die Jensensche Ungleichung unser Problem der 0-Verteilungen vollständig; jede Verteilung mit $\alpha \underset{(=)}{\leq} P_0 \leqq 1$ *ist in der Klasse* $\mathfrak{E}_\alpha$ *als 0-Vollverteilung realisierbar.* Für die Klasse $\mathfrak{E}_+$ (Normierung $f'(0) \geqq 0$) unterliegt die Verteilung nur der Einschränkung $0 < P_0 \leqq 1$. Die Majorantenrelation (5) liefert für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$ scharfe Abgrenzungen der Funktionswerte $f(z)$ *bei festem* z (nicht nur $|z|$!) und gegebener 0-Vollverteilung; an einer p-fachen 0-Stelle ζ der Verteilung erhält man Abgrenzungen für $f^{(p)}(\zeta)$.

Insbesondere ergeben sich die Ungleichungen [5])

$$\begin{gathered}\left(\frac{\alpha}{P_0}\right)^{\frac{1+|z|}{1-|z|}} \leqq \left|\frac{f(z)}{zP_0(z)}\right| \leqq \left(\frac{\alpha}{P_0}\right)^{\frac{1-|z|}{1+|z|}}, \\ \left|\operatorname{arc}\frac{f(z)}{zP_0(z)}\right| \leqq \frac{2|z|}{1-|z|^2}\log\frac{P_0}{\alpha}.\end{gathered} \tag{6}$$

Durch Variation der $\alpha \geqq 0$ erhält man den folgenden Satz für die Klasse $\mathfrak{E}_+$ (vergl. I, 1, Figur 1):

Für die Funktionen $f(z)$ *aus* $\mathfrak{E}_+$ *mit* $f'(0) > 0$ *liegt die Größe* $t = \frac{f(z)}{zP_0(z)}$ *in dem von zwei logarithmischen Spiralen (auf der*

---

[3]) JENSEN I, 1; Für $\alpha = 0$ ist $P_0 > 0$, weil aus $P_0 = 0$ bekanntlich $f(z) \equiv 0$ folgt, so daß die Folge (2) nicht alle 0-Stellen enthalten kann (vergl. I, § 1.2).

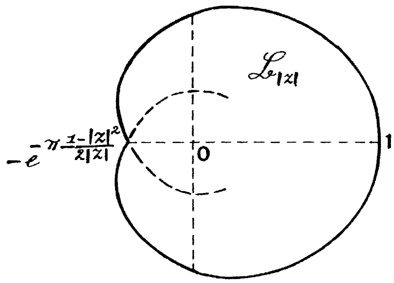
[4]) Für $\alpha = 0$ darf man nicht etwa α gegen 0 gehen lassen; man kann nur $\frac{f(z)}{zP_0(z)} \prec z$ schließen. *Es ist sinnvoll, bei 0-Vollverteilungen die genaue Vielfachheit* $\varkappa$ *der 0-Stelle in* $z = 0$ *anzugeben*; dann gilt $\left|\frac{f(z)}{z^\varkappa P_0(z)}\right| \leqq 1$. Man kann genauer die Klassen $E^\varkappa$ heranziehen.

[5]) Für $P_0 = 1$ siehe KOEBE, insbes. § 3.

Fläche von $\log t$) *begrenzten Bereiche* (Figur 1)[6])

$$\mathfrak{B}_{|z|} \qquad |t| \leqq e^{-|\varphi|\frac{1-|z|^2}{2|z|}}\;;\quad \varphi = \operatorname{arc} t.$$

Die Berandung von $\mathfrak{B}$ wird bei geeigneten Extremalfunktionen zu (5) erreicht. *Man beachte, welch starke Verzerrung nach* 0 *hin die Normierung* $f'(0) > 0$ *für* $\varphi \neq 0$ *bewirkt.*



Figur 1.

Ein besonderes Interesse verdient bei den obigen Ergebnissen der Fall $P_0 = 1$, d.i. $f(z) \neq 0$ *für* $0 < |z| < 1$; *dann ist* $t = \frac{f(z)}{z}$.

Ein Wert w *heißt ein zur Stelle* ζ *gehöriger Schlichtwert von* $f(z)$, *wenn er nur in* ζ, *und zwar einfach, angenommen wird.* Der Fall $P_0 = 1$, $f'(0) \neq 0$ besagt also, daß 0 ein zu $\zeta = 0$ gehöriger Schlichtwert ist.

Ist $w = 0$ *Schlichtwert, so erweist sich noch die Abbildung durch* $f(z)$ *für die* z *mit*

$$\frac{2|z|}{(1-|z|)^2} \leqq \log\frac{1}{|\alpha|} \tag{7}$$

als sternförmig in Bezug auf $w = 0$. *Und dies ist die größte Kreisscheibe dieser Art.*

Schließlich wird die genaue Abgrenzung des zweiten Koeffizienten β der Entwicklung (1) sowohl für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$ als auch für $\mathfrak{E}_+$ bei gegebener 0-Vollverteilung durchgeführt. Für die Funktionen der nichtnormierten Klasse $\mathfrak{E}$ *mit* $f'(0) \neq 0$[7]) ergibt sich insbesondere das folgende *Gegenstück zur Jensenschen Formel:*[8])

$$(8)\qquad \begin{aligned} |\beta| &\leqq \frac{2}{e} P_0 e^{\frac{|S_0|}{2}} && \text{für } |S_0| \leqq 2, \\ |\beta| &\leqq P_0 |S_0| && \text{für } |S_0| \geqq 2. \end{aligned}$$

Die zweite dieser Ungleichungen stimmt mit der zweiten Ungleichung I, (13) bei Mindestverteilungen überein.

---

[6]) Für eine schlichte Begrenzung von t genügt $|\varphi| \leqq \pi$.

[7]) Für $\alpha = f'(0) = 0$ ist $|\beta| \leqq P_0$.

[8]) Für $P_0 = 1$, also $S_0 = 0$, wird $|\beta| \leqq \frac{2}{e}$; siehe Levin.

Unter Beachtung von $|S| \leqq \frac{1-P^2}{P}$ (I, (7)) *ergibt sich hieraus weiter*[9])

$$(9)\qquad \begin{aligned} |\beta| &\leqq 1 - P_0^2 && \text{für } P_0 \leqq \sqrt{2}-1, \\ |\beta| &\leqq \frac{2}{e} P_0 \, e^{\frac{1-P_0^2}{2P_0}} && \text{für } P_0 \geqq \sqrt{2}-1. \end{aligned}$$

1.2: Der *zweite Paragraph* bringt die w-Vollverteilungen für die allgemeinen w mit $0 < |w| < 1$. Der Übergang von $f(z)$ zu der Funktion

$$(10)\quad f_w(z) = z\frac{f(z)-w}{f(z)\overline{w}-1}\gamma^{-1} = |w|\,z - \alpha\gamma^{-1}(1-|w|^2)z^2 + \ldots;\quad w = |w|\,\gamma,$$

aus $\mathfrak{S}_+$ führt wieder diesen Fall auf den der 0-Vollverteilungen zurück, wobei aber α jetzt erst im zweiten Koeffizienten von (10) auftritt.

Zunächst erhält man wieder die Jensensche Ungleichung in der Gestalt

$$(11)\qquad |w| \leqq P_w,$$

wie in I, (15*). Das Gleichheitszeichen ist innerhalb $\mathfrak{S}_+$ nur im Falle $\frac{f(z)-w}{f(z)\overline{w}-1} = \gamma P(z)$ richtig. Diese Extremalfunktion ist aber, wie in I, § 2.1 auseinandergesetzt wurde, bei der Verteilungsnormierung $S > 0$ nur im Falle $w > 0$ zu $\mathfrak{S}_+$ gehörig. (11) *beantwortet also das Problem der* w-*Vollverteilung nicht endgültig innerhalb* $\mathfrak{S}_+$.

Das Problem der w-*Vollverteilungen innerhalb* $\mathfrak{S}_\alpha$ *wird dagegen vollständig durch die Ungleichung*

$$(12)\qquad \left|\alpha\frac{1-|w|^2}{w} - S_w\right| \leqq 2\log\frac{P_w}{|w|}$$

beantwortet. Das Gleichheitszeichen ist hier nur bei den Extremalfunktionen

$$(13)\qquad \frac{f(z)-w}{f(z)\overline{w}-1} = \gamma P_w(z)\left(\frac{|w|}{P_w}\right)^{\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}},\quad w = |w|\,\gamma,$$

---

[9]) *Nachtrag zu* I, (13): Für Mindestverteilungen gilt entsprechend

$$\text{I, (13*)}\qquad \begin{aligned} |\beta| &\leqq 1 - P_0^{*2} && \text{für } P_0^* \leqq \sqrt{2}-1, \\ |\beta| &\leqq \frac{\left(1+P_0^{*2}\right)^2}{4P_0^*} && \text{für } P_0^* \geqq \sqrt{2}-1. \end{aligned}$$

mit passend gewähltem ε, $|\varepsilon| = 1$, richtig. *Jede* (12) *erfüllende Verteilung ist in* $\mathfrak{E}_\alpha$ *eine mögliche* w*-Vollverteilung.*

Die durch (12) gegebene Beschränkung der w werden wir gestaltlich genauer diskutieren; insbesondere erhält man, wenn $\alpha > 0$ ist, stets auch eine untere Abschätzung für $|w|$.

Hier verdienen eine Reihe Spezialfälle besondere Erwähnung:

A. Für $\alpha = 0$ ergibt (12) die Ungleichung

$$|w| \leqq P e^{-\frac{1}{2}|S|}. \tag{14}$$

B. Im Falle $S = 0$ sprechen wir von einer „*symmetrischen*" Verteilung. (12) ergibt die Kreisringbeschränkung

$$|w| e^{\alpha \frac{1-|w|^2}{2|w|}} \leqq P \tag{15}$$

für w. Hierher gehört insbesondere der zuerst von Landau [10]) betrachtete Fall $P = 1$, d.i. $f(z) \neq w$ in $0 < |z| < 1$. Der Kreisring (15) ist jetzt von den Kreisen $|w| = 1$ und $|w| = L(\alpha)$ mit

$$L e^{\alpha \frac{1-L^2}{2L}} = 1 \tag{16}$$

begrenzt. Es ergibt sich der folgende *Satz von Landau:* [10])

Die Funktionen aus $\mathfrak{E}_\alpha$ *nehmen mindestens die Werte der Kreisscheibe* $|w| < L(\alpha)$ *an. Dieser Kreis ist nicht zu verbessern.*

C. Es sei $w \neq 0$ ein zu ζ gehöriger *Schlichtwert* von $f(z)$. Dann ist $P = |\zeta|$, $S = \dfrac{1-|\zeta|^2}{\zeta}$, und also ergibt (12) die Abgrenzung

$$\left| \alpha \frac{1-|w|^2}{w} - \frac{1-|\zeta|^2}{\zeta} \right| \leqq 2 \log \left| \frac{\zeta}{w} \right|. \tag{17}$$

Insbesondere ergeben sich als beiderseitige Abschätzungen für $|w|$:

$$|w| e^{\alpha \frac{1-|w|^2}{2|w|}} \leqq |\zeta| e^{\frac{1-|\zeta|^2}{2|\zeta|}}\ ; \quad |w| e^{-\alpha \frac{1-|w|^2}{2|w|}} \leqq |\zeta| e^{-\frac{1-|\zeta|^2}{2|\zeta|}}. \tag{18}$$

Ein besonderes Interesse verdient die aus (12) *ableitbare Ungleichung*:

$$|\alpha| \leqq \mathbf{A}(P, |S|) = \begin{cases} \dfrac{2\eta}{1+\eta^2} & \text{für} \quad |S| \leqq 2\dfrac{1-P^2}{1+P^2} \\[2ex] \dfrac{|S|P}{1-P^2} & \phantom{\text{für}} \quad |S| \geqq 2\dfrac{1-P^2}{1+P^2} \end{cases}, \tag{19}$$

$$\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2} - \log\frac{P}{\eta} = \frac{|S|}{2}, \quad 0 < \eta \leqq P,$$

---

[10]) LANDAU, Satz 6; siehe auch ROGOSINSKI I, 1, Satz IV.

deren rechte Seite nur von den Größen P und $|S|$ der gegebenen Verteilung, nicht aber von w abhängt. Man beachte, daß die zweite Ungleichung (19) mit der entsprechenden zweiten Ungleichung I, (18) für Mindestverteilungen übereinstimmt.

Es sind also in $\mathfrak{E}_{|\alpha|}$ nicht beliebige Vollverteilungen (auch nicht für irgend ein passendes w) möglich. Andererseits aber ist jede Verteilung, die (19) *genügt, eine w-Vollverteilung für passendes w innerhalb $\mathfrak{E}_{|\alpha|}$.*

A ist < 1, sobald mehr als ein ζ gegeben ist. Man beachte, daß z.B. *symmetrische Vollverteilungen* ($S = 0$) *in $\mathfrak{E}_{|\alpha|}$ genau dann möglich sind, wenn*

$$|\alpha| \leqq \frac{2\eta_0}{1+\eta_0^2}; \quad \frac{1-\eta_0^2}{1+\eta_0^2} - \log\frac{P}{\eta_0} = 0, \; 0 < \eta_0 \leqq P \tag{20}$$

ist.

Variiert man die $\alpha \geqq 0$ in (12), so ergeben sich *die genauen Abgrenzungen für w innerhalb der Klasse $\mathfrak{E}_+$.* Bei der *Verteilungsnormierung* $S \geqq 0$ findet man

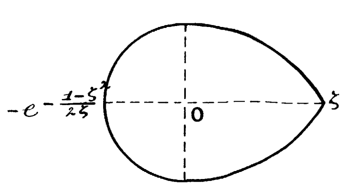
$$\begin{array}{lcl} |w| \leqq Pe^{-\frac{1}{2}S} & & \cos\varphi \leqq 0 \\ & \text{für} & \qquad ; \quad \varphi = \operatorname{arc} w. \\ |w| \leqq Pe^{-\frac{1}{2}S|\sin\varphi|} & & \cos\varphi \geqq 0 \end{array} \tag{21}$$

Diese „birnenförmige" Abgrenzung entspricht dem Bereiche aus I, (19) bei Mindestverteilungen.

Insbesondere ergibt sich an Schlichtstellen $\zeta > 0$ die scharfe Abgrenzung

$$\begin{array}{lcl} |f(\zeta)| \leqq \zeta e^{-\frac{1-\zeta^2}{2\zeta}} & & \cos\varphi \leqq 0 \\ & \textit{für} & \qquad ; \quad \varphi = \operatorname{arc} f(\zeta), \\ |f(\zeta)| \leqq \zeta e^{-\frac{1-\zeta^2}{2\zeta}|\sin\varphi|} & & \cos\varphi \geqq 0 \end{array} \tag{22}$$

innerhalb $\mathfrak{E}_+$. Man beachte, wie stark die Verzerrung nach 0 *hin für nicht positive Schlichtwerte der positiven Achse innerhalb $\mathfrak{E}_+$ ausfällt.* (Figur 2.)

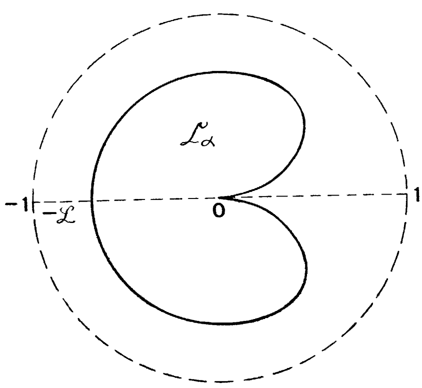


Figur 2.

Variiert man bei festen $\alpha \geqq 0$, $S \geqq 0$, die Größe P, so zeigt sich, das w jedenfalls in dem zu $P = t$, $\frac{1-t^2}{t} = S$ gehörigen Schlichtwertbereiche (17) liegen muß. Insbesondere ergibt sich für $S = 0$, also $t = 1$, *daß in Verallgemeinerung des oben formulierten Landauschen Satzes die Werte der Kreisscheibe $|w| < L(\alpha)$*

in $\mathfrak{C}_\alpha$ nicht symmetrisch angenommen werden können. Auch dies ist eine ***Bestaussage.***

Variiert man ferner bei festem $\alpha \geqq 0$ sowohl die P als die (durch $S \geqq 0$ normierten) S, *so zeigt sich die Existenz einer nur von α abhängigen Kurve $\mathfrak{C}_\alpha$, so daß die Werte jeder Funktion aus $\mathfrak{C}_\alpha$ bei dieser Verteilungsnormierung nicht innerhalb $\mathfrak{C}_\alpha$ liegen können.* $\mathfrak{C}_\alpha$ besteht in der linken Halbebene (und noch ein Stück in die rechte hinein) genau aus dem Landauschen Kreise $|w| = L(\alpha)$, während sie in der rechten Halbebene symmetrisch zur reellen Achse und diese in $w = 0$ berührend zu diesem letzteren Punkte heranführt. (Figur 3.)



Figur 3.

Schließlich seien noch bei festen α und P die Ungleichungen

$$(23)\qquad |S| \geqq \sigma(|\alpha|, P) = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 \leqq |\alpha| \leqq \dfrac{2\eta_0}{1+\eta_0^2};\ \eta_0 \text{ aus } (20), \\ \widehat{S} \text{ für } \dfrac{2\eta_0}{1+\eta_0^2} \leqq |\alpha| \leqq \dfrac{2P}{1+P^2}, \\ |\alpha| \dfrac{1-P^2}{P} \text{ für } \dfrac{2P}{1+P^2} \leqq |\alpha|, \end{cases}$$

$$\frac{\widehat{S}}{2} = \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} - \log\frac{P}{\xi};\quad |\alpha| = \frac{2\xi}{1+\xi^2},\quad \eta_0 \leqq \xi \leqq P$$

erwähnt.

1.3: Im *dritten* ***Paragraphen*** wird die Majorantenrelation

$$(24)\qquad \frac{f(z)-w}{f(z)\bar{w}-1}\cdot\frac{\gamma^{-1}}{P(z)} \prec \left(\frac{|w|}{P}\right)^{\frac{1+z}{1-z}};\quad w = |w|\gamma,$$

mit den Extremalfunktionen (13) diskutiert. Sie liefert innerhalb $\mathfrak{C}$ die scharfen Abgrenzungen für $f(z)$ bei gegebener w-Vollverteilung und insbesondere an p-fachen w-Stellen ζ der Verteilung Abgrenzungen für $f^{(p)}(\zeta)$.

So ergeben sich z.B. *an Schlichtstellen* ζ die Abschätzungen

$$(25)\qquad \left(\left|\frac{w}{\zeta}\right|\right)^{\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}} \leqq |f'(\zeta)|\,\frac{1-|\zeta|^2}{1-|w|^2} \leqq \left(\left|\frac{w}{\zeta}\right|\right)^{\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|}},\quad w = f(\zeta),$$

und hieraus weiter durch Variation von $|w|$

$$(26)\quad |f'(\zeta)| \leqq \begin{cases} 1 & \text{für } |\zeta| \leqq \sqrt{2}-1 \\ \dfrac{2}{(3+|\zeta|)(1-|\zeta|)}\left(\dfrac{1-|\zeta|}{|\zeta|^2(3+|\zeta|)}\right)^{\frac{1}{2}\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|}} & \text{für } |\zeta| \geqq \sqrt{2}-1. \end{cases}$$

Die erste Ungleichung (26) gilt übrigens für *beliebige* Stellen (Dieudonné[11]); I. (22)), die zweite ist *nur* für Schlichtstellen richtig und scharf.

1.4: Im letzten Paragraphen ist r, $0 < r < 1$, gegeben, und wir betrachten die Vollverteilungen mit $|\zeta_k| \geqq r$. Es soll also $f(z) \neq w$ für $|z| < r$ sein. Wir bestimmen die untere Grenze $L_r(\alpha)$ dieser Werte $|w|$ für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$. $L_1(\alpha)$ wäre der Landausche Radius (16).

Das folgende Ergebnis *verallgemeinert den Landauschen Satz* aus 1.2:

Es sei $\alpha > 0$, $0 < r < 1$. Man bestimme, was eindeutig möglich ist, die natürliche Zahl n und die Größe ζ mit $r < \zeta \leqq 1$ aus der Gleichung

$$(27)\qquad \alpha = \frac{r^n\zeta}{1-r^{2n}\zeta^2}\left(n\frac{1-r^2}{r} + \frac{1-\zeta^2}{\zeta}\right).$$

Dann nimmt jede Funktion aus $\mathfrak{E}_\alpha$ für $|z| < r$ mindestens die Werte w der Kreisscheibe

$$(28)\qquad |w| < r^n\zeta = L_r(\alpha)$$

an. Dies ist die größte solche Kreisscheibe.

Die Extremalfunktionen sind rational vom $(n+1)$-ten Grade. Die Größe $L_r(\alpha)$ hat ersichtlich noch eine andere Bedeutung. *Spricht man von einem zur Primitivstelle t gehörigen Primitivwerte*[12]) *$w = f(t)$, wenn $f(z) \neq w$ für $|z| < |t|$ ist, so ist $L_r(\alpha)$ die untere Grenze der auf $|z| = r$ möglichen Beträge der Primitivwerte innerhalb $\mathfrak{E}_\alpha$.*

2: Alle Ergebnisse lassen sich, wie in I, ohne weiteres übertragen auf die *allgemeinere Klasse* **E** der für $|z| < 1$ meromorphen Funktionen $\varphi(z)$, die um $z = 0$ eine Entwicklung

$$(29)\qquad \varphi(z) = \alpha z^\varkappa + \beta z^{\varkappa+1} + \ldots; \quad \varkappa \text{ ganz}, \ \alpha \neq 0,$$

[11]) Dieudonné I, 106.

[12]) Über die Bedeutung von Primitivstellen für das Majorantenprinzip vergl. Rogosinski 2.

besitzen und für die

$$(30)\qquad \overline{\lim_{|z|\to 1}}\, |\varphi(z)| \leqq 1$$

ist. An die Stelle der P, S und $P(z)$ treten wieder, wie in I, die Größen

$$(31)\qquad \Pi_w = \frac{P_w}{P_{w^*}};\quad \Sigma_w = S_w - S_{w^*};\quad \Pi_w(z) = \frac{P_w(z)}{P_{w^*}(z)};\quad w^* = \frac{1}{w},$$

die aus den w- und den w^*-Verteilungen (bzw. 0- und Polstellen) zu bilden sind.

Wir geben gelegentlich in Fußnoten diese Ergebnisse an.

3. Wenn in der Entwicklung (1) *die ersten k Koeffizienten vorgegeben* sind, so kann die Theorie der Vollverteilungen entsprechend verfeinert werden.

Geht man in den Majorantenrelationen (5) bzw. (24) zum log über, so wird man nämlich auf Funktionen negativen Realteils geführt. Für diese kennt man nach Carathéodory [13]) den genauen Koeffizientenkörper. Von den bestimmenden Ungleichungen dieses Körpers wurde für (8) bzw. in (12) nur die erste herangezogen.

Ebenso können die Majorantenrelationen selbst entsprechend verfeinert werden. Ist z.B. noch β gegeben, so tritt neben (5) bei Nullverteilungen noch die genauere Relation

$$(32)\qquad \frac{1}{z}\,\frac{\log\left(\dfrac{f(z)}{zP_0(z)}\,\dfrac{P_0}{\alpha}\right)}{\log\left(\dfrac{f(z)}{zP_0(z)}\,\dfrac{\alpha}{P_0}\right)} \prec \frac{z-\tau}{z\bar{\tau}-1};\quad \tau = \frac{\dfrac{\beta}{\alpha}+S_0}{2\log\dfrac{\alpha}{P_0}}.$$

Diese Relation ist besonders in Hinblick auf $f_w(z)$ aus (10) von Interesse. Denn erst ihre Anwendung auf $f_w(z)$ liefert die zur w-Vollverteilung gehörige Majorantenrelation in $\mathfrak{F}_\alpha$.

Die Relation (24) galt ja nur für die allgemeine Klasse $\mathfrak{F}$.

§ 1. 0-Vollverteilungen.

1. *Die Jensensche Ungleichung* [3]).

Die Folge (ζ_k) aus (2) bilde die 0-Vollverteilung einer Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{F}_\alpha$ $(\alpha \geqq 0)$. Nach I, § 1.2 ist dann die Funktion $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{zP_0(z)}$ für $|z| < 1$ regulär und dem Betrage nach höchstens 1. Für

[13]) Carathéodory.

$z = 0$ folgt sofort die *Jensensche Ungleichung*[14])

$$\alpha \underset{(=)}{\leqq} P_0\,, \tag{4}$$

und das Gleichheitszeichen gilt in $\mathfrak{E}_\alpha$ *nur für* $f(z) = zP_0(z)$. Es muß aber stets, auch für $\alpha = 0$,

$$P_0 > 0 \tag{a}$$

sein, da für $P_0 = 0$ sicher $f(z) \equiv 0$, also die ζ_k nicht alle Nullstellen von $f(z)$ wären (I, § 1.2).

2. *Die Majorantenrelation* (5).

Es sei $\alpha > 0$[4]). Die Funktion $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{zP_0(z)}$ ist für $|z| < 1$ regulär, und dort gilt

$$|\varphi(z)| \leqq 1\,; \qquad \varphi(z) \neq 0\,. \tag{a}$$

Daher ist auch $\Phi(z) = \log\varphi(z)$ ($\Phi(0)$ reell) für $|z| < 1$ regulär, und dort ist $\Re\Phi(z) \leqq 0$. Es gilt also genauer die Majorantenrelation

$$\Phi(z) \prec \Phi(0)\frac{1+z}{1-z} = \log\frac{\alpha}{P_0}\cdot\frac{1+z}{1-z} \tag{b}$$

oder auch[15])

$$\frac{f(z)}{zP_0(z)} \prec \left(\frac{\alpha}{P_0}\right)^{\frac{1+z}{1-z}}. \tag{5}$$

Die Extremalfunktionen sind

$$f(z) = zP_0(z)\left(\frac{\alpha}{P_0}\right)^{\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}}, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{33}$$

Nur im Falle $\alpha = P_0$, also $f(z) = zP_0(z)$, sind diese Extremalfunktionen mit denen bei Mindestverteilungen (I, (38)) identisch.

(5) liefert die genaue Abgrenzung von $f(z)$ innerhalb $\mathfrak{E}_\alpha$ auf der Riemannschen Fläche von $\left(\dfrac{\alpha}{P_0}\right)^{\frac{1+z}{1-z}}$ und insbesondere die

---

[14]) In E_α gilt $\alpha \leqq \Pi_0$.

[15]) In $\mathrm{E}_\alpha^\varkappa$ ($\alpha>0$) gilt $\dfrac{\varphi(z)}{z^\varkappa \Pi_0(z)} \prec \left(\dfrac{\alpha}{\Pi_0}\right)^{\frac{1+z}{1-z}}$ mit den Extremalfunktionen

$$\varphi(z) = z^\varkappa \Pi_0(z)\left(\frac{\alpha}{\Pi_0}\right)^{\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}}, \qquad |\varepsilon| = 1.$$

Ungleichungen (6) der Einleitung. An p-fachen 0-Stellen ζ der Verteilung erhält man Abgrenzungen für $f^{(p)}(\zeta)$, die bei Kenntnis aller Nullstellen von $f(z)$ schärfer sind als die in I, § 1.3 gegebenen.

3. *Der Fall des Schlichtwertes.*

Es sei $P_0 = 1$ also die Folge (ζ_k) leer und $f(z) \neq 0$ für $0 < |z| < 1$. Man beachte die Relationen (5) und (6) in diesem einfachsten Falle! Außerdem kann aus 2, (b) geschlossen werden [16]), daß

$$\text{(a)} \qquad z\Phi'(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1$$

in der konvexen Hülle des Bildes liegt, das die Funktion

$$\text{(b)} \qquad t \log \alpha \left(\frac{1+t}{1-t}\right)' = \frac{2t \log \alpha}{(1-t)^2}$$

von dem Kreise $|t| = |z|$ entwirft. Insbesondere gilt also

$$\text{(c)} \qquad \left| z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leqq \log\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{2|z|}{(1-|z|)^2},$$

und daher ist

$$\text{(d)} \qquad \Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geqq 0 \text{ für } \frac{2|z|}{(1-|z|)^2} \leqq \frac{1}{\log\frac{1}{\alpha}}.$$

Damit ist die Behauptung in (7) der Einleitung bewiesen. Daß der Kreis (7) nicht verbessert werden kann, zeigen die Extremalfunktionen (33) mit $P_0 = 1$.

Anmerkung über Primitivwerte:

Wenn $P_0 = 1$ ist, so gilt nach (6)

$$\text{(e)} \qquad |f(z)| \geqq |z| \alpha^{\frac{1+|z|}{1-|z|}}.$$

Die rechte Seite hat ihr Maximum für

$$\text{(f)} \qquad 1 + \log \alpha \cdot \frac{2|z|}{(1-|z|)^2} = 0.$$

Daher ist für die $\frac{2|z|}{(1-|z|)^2} \leqq \frac{1}{\log\frac{1}{\alpha}}$, d.i. die z aus (7), *die Abschätzung* (e) *auch für Primitivwerte im Falle des Schlichtwertes* 0 *nicht zu verbessern.*

---

16) Rogosinski 1, S. 106.

4. *Variation der* $\alpha > 0$.

Nach 2, (b) liegt $W = \Phi(z)$ in dem Kreise der linken Halbebene über

(a) $$\log\frac{\alpha}{P_0}\cdot\frac{1+|z|}{1-|z|},\quad \log\frac{\alpha}{P_0}\,\frac{1-|z|}{1+|z|}$$

als Durchmesser. Dieser Kreis erscheint von 0 aus unter dem von $\frac{\alpha}{P_0}$ unabhängigen Winkel 2ϑ aus

(b) $$\sin\vartheta = \frac{2|z|}{1+|z|^2}.$$

Variiert man also die $0 < \alpha \leqq P_0$, so liegt W jedenfalls in dem Winkelraume

(c) $$|\sin\Theta| \leqq \frac{2|z|}{1+|z|^2};\quad |\operatorname{tg}\Theta| \leqq \frac{2|z|}{1-|z|^2};\quad \Theta = \operatorname{arc}(-W),$$

und es ist daher (wegen $\Re(W) \leqq 0$)

(d) $$-|\Im(W)| \geqq \Re(W)\,|\operatorname{tg}\Theta| \geqq \Re(W)\frac{2|z|}{1-|z|^2}.$$

Mit $t = e^W$ wird also

(e) $$|t| \leqq e^{-|\varphi|\frac{1-|z|^2}{2|z|}};\quad \varphi = \operatorname{arc} t.$$

Damit ist die Abgrenzung $\mathfrak{B}_{|z|}$ der Einleitung *für die Funktionen aus* $\mathfrak{E}_+$ *mit* $f'(0) > 0$ nachgewiesen [17]). Das Gleichheitszeichen wird bei geeigneten Funktionen (33) erreicht.

Man beachte wieder insbesondere den Schlichtwertfall $P_0 = 1$, wo man Abgrenzungen für $\frac{f(z)}{z}$ erhält.

5. *Abgrenzung von* β [18]).

Es sei $\alpha > 0$ [19]). Dann ist

(a) $$\Phi(z) = \log\frac{f(z)}{zP_0(z)} = \log\frac{\alpha}{P_0} + \left(\frac{\beta}{\alpha} + S_0\right)z + \cdots.$$

Wegen $\Re(\Phi(z)) \leqq 0$ beherrscht man nach Carathéodory [13]) den genauen Koeffizientenkörper von $\Phi(z)$ und damit von $f(z)$ bei gegebener 0-Vollverteilung. *Insbesondere ergibt*

(34) $$\left|\frac{\beta}{\alpha} + S_0\right| \leqq 2\log\frac{P_0}{\alpha}$$

---

[17]) Für die Klasse $\mathbf{E}_+^{\varkappa}$ mit $\alpha > 0$ ist $t = \frac{f(z)}{z^{\varkappa}\Pi_0(z)}$ zu setzen.

[18]) Für die Klasse $\mathbf{E}$ ist P_0, S_0 durch Π_0, Σ_0 zu ersetzen.

[19]) Für $\alpha = 0$ ist $|\beta| \leqq P_0$.

die genaue Abgrenzung von β innerhalb $\mathfrak{E}_\alpha$ bei gegebener **0**-*Vollverteilung. Die Extremalfunktionen sind wieder durch* (33) *gegeben.*

Schreibt man (34) in der Form

$$\text{(b)} \qquad |\mathbf{B} + \mathbf{A}S| \leqq 2\mathbf{A} \log \frac{1}{\mathbf{A}}; \quad \mathbf{A} = \frac{\alpha}{P}, \ \mathbf{B} = \frac{\beta}{P},$$

so liegt also $\mathbf{B}$ in dem Kreise um $-\mathbf{A}S$ als Mittelpunkt mit dem Radius $2\mathbf{A} \log \frac{1}{\mathbf{A}}$.

Es sei jetzt $S_0 \geqq 0$ *normiert,* und wir lassen die $\alpha > 0$ variieren. $\mathbf{B}$ liegt also in der Vereinigungsmenge V aller dieser Kreise mit $0 < \mathbf{A} \leqq 1$.

Für $S = 0$ (also im Falle der symmetrischen Vollverteilung) ist, da $\mathbf{A} \log \frac{1}{\mathbf{A}}$ sein Maximum für $\mathbf{A} = \frac{1}{e}$ erreicht, V der Kreis $|\mathbf{B}| \leqq \frac{2}{e}$, also

$$\text{(35)} \qquad |\beta| \leqq \frac{2}{e} P_0 \text{ für } S_0 = 0.$$

Man beachte insbesondere den Fall des Schlichtwertes **0** ($P_0 = 1$, $S_0 = 0$)[8])! Für $S > 0$ ist V von der Enveloppe der oben genannten Kreise berandet. Setzt man $\mathbf{B} = x + iy$, so ergibt sich diese aus

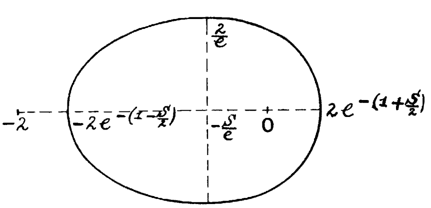
$$\text{(c)} \qquad (x + \mathbf{A}S)^2 + y^2 = 4\mathbf{A}^2 \log^2 \frac{1}{\mathbf{A}}$$

in der Parameterdarstellung

$$\text{(d)} \qquad \begin{aligned} xS &= -\mathbf{A}S^2 + 4\mathbf{A} \log \frac{1}{\mathbf{A}} \left(\log \frac{1}{\mathbf{A}} - 1 \right), \\ y^2 &= 4\mathbf{A}^2 \log^2 \frac{1}{\mathbf{A}} \left[1 - \frac{4}{S^2} \left(\log \frac{1}{\mathbf{A}} - 1 \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Bei der Diskussion von (d) sind zwei Fälle zu unterscheiden:

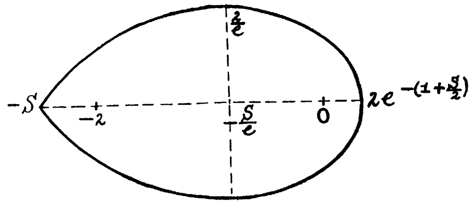
I. $S_0 \leqq 2$. $\mathbf{A}$ läuft in (d) von $e^{-\left(1+\frac{S_0}{2}\right)}$ bis $e^{-\left(1-\frac{S_0}{2}\right)}$; x fällt mo-



Figur 4a.

noton von $2e^{-\left(1+\frac{S_0}{2}\right)}$ bis $-2e^{-\left(1-\frac{S_0}{2}\right)}$; $|y|$ wächst zuerst von **0** bis $\frac{2}{e}$ $\left(\mathbf{A} = \frac{1}{e},\ x = -\frac{S}{e}\right)$ und fällt dann bis **0**. V besitzt keine Spitze. (Figur 4a.)

II. $S_0 > 2$. A läuft in (d) von $e^{-\left(1+\frac{S_0}{2}\right)}$ bis 1; x fällt von $2e^{-\left(1+\frac{S_0}{2}\right)}$ bis $-S_0$, während $|y|$ sich wie unter I verhält. V besitzt eine Spitze in $-S_0$. (Figur 4b.)



Figur 4b.

Insbesondere gelten also, *immer unter den Voraussetzungen* $\alpha > 0$, $S_0 \geqq 0$, die Ungleichungen

$$(36) \qquad |\Im(\beta)| \leqq \frac{2}{e} P_0$$

und

$$(37) \qquad \begin{aligned} -2P_0 e^{-\left(1-\frac{S_0}{2}\right)} &\leqq \Re(\beta) \leqq 2P_0 e^{-\left(1+\frac{S_0}{2}\right)} \\ -P_0 S_0 \qquad &\leqq \Re(\beta) \leqq 2P_0 e^{-\left(1+\frac{S_0}{2}\right)} \end{aligned} \quad \text{für} \quad \begin{aligned} S_0 &\leqq 2\,, \\ S_0 &\geqq 2\,. \end{aligned}$$

Es sei jetzt $P_0 \leqq \sqrt{2} - 1$, also $2P_0 \leqq 1 - P_0^2$. Dann folgt aus (37) unter Beachtung von $S \leqq \frac{1-P^2}{P}$ (I, (7))

$$(\text{e}) \qquad \begin{aligned} -(1-P_0^2) \leqq -2P_0 &\leqq \Re(\beta) \leqq \frac{2P_0}{e} \\ -(1-P_0^2) \qquad &\leqq \Re(\beta) \leqq \frac{2P_0}{e^2} < \frac{2P_0}{e} \end{aligned} \quad \text{für} \quad \begin{aligned} S_0 &\leqq 2\,, \\ S_0 &\geqq 2\,. \end{aligned}$$

Wenn aber $P_0 \geqq \sqrt{2} - 1$ ist, so ist sicher $S_0 \leqq 2$, und (37) ergibt

$$(\text{f}) \qquad -\frac{2}{e} P_0 e^{\frac{1-P_0^2}{2P_0}} \leqq \Re(\beta) \leqq \frac{2P_0}{e}.$$

Damit sind für $\alpha > 0$, $S \geqq 0$ *die Ungleichungen* [20])

$$(38) \qquad \begin{aligned} -(1-P_0^2) \quad &\leqq \Re(\beta) \leqq \frac{2P_0}{e} \\ -\frac{2}{e} P_0 e^{\frac{1-P_0^2}{2P_0}} &\leqq \Re(\beta) \leqq \frac{2P_0}{e} \end{aligned} \quad \textit{für} \quad \begin{aligned} P_0 &\leqq \sqrt{2} - 1\,, \\ P_0 &\geqq \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

---

[20]) Ein entsprechender Zusatz zu I, (45) ist für Mindestverteilungen möglich, vergl. [9]).

bewiesen. Aus (b) folgt ferner

$$\text{(g)} \qquad |\mathbf{B}| \leqq \mathbf{A}\left(|S| + 2\log\frac{1}{\mathbf{A}}\right).$$

Die rechte Seite erreicht für

$$\text{(h)} \qquad \log\frac{1}{\mathbf{A}} = 1 - \frac{|S|}{2}; \quad \mathbf{A} = e^{\frac{|S|}{2}-1}$$

ihr Maximum. Man hat nun zu unterscheiden, ob dieses $\mathbf{A} \leqq 1$ ist oder nicht, und erhält so die Ungleichungen (8) der Einleitung, aus denen dann (wie eben (38) aus (37)) noch die Ungleichungen (9) leicht folgen. Alle diese Ungleichungen sind innerhalb der Klassen $\mathfrak{E}_+$ bzw. $\mathfrak{E}$ mit $f'(0) \neq 0$ scharf.

§ 2. Allgemeine Vollverteilungen.

1. *Die Jensensche Ungleichung.*

Es sei $0 < |w| < 1$, und die ζ_k mögen eine Vollverteilung der w-Stellen von $f(z)$ aus $|z| < 1$ bilden. Sie sind dann auch eine 0-Vollverteilung der Funktion $f_w(z)$ aus (10). Nach (4) gilt also zunächst wieder, wie in I, (15*) [21]),

$$\text{(11)} \qquad |w| \leqq P_w$$

mit den Extremalfunktionen $\frac{f(z)-w}{f(z)\overline{w}-1} = \gamma P(z); \; w = |w|\,\gamma.$

Aus den in I, § 2.1 auseinandergesetzten Gründen beantwortet die Ungleichung (11) zwar unser Problem der w-Vollverteilung innerhalb $\mathfrak{E}$, nicht aber innerhalb $\mathfrak{E}_+$ vollständig. Denn nur im Falle $S = 0$ oder (bei der Normierung $S > 0$) im Falle $w > 0$ gehören die obigen Extremalfunktionen zu $\mathfrak{E}_+$.

2. *Die Ungleichung* (12).

Es sei $\alpha \geqq 0$. Die Anwendung von (34) auf $f_w(z)$ ergibt unmittelbar [22])

$$\text{(12)} \qquad \left|\alpha\frac{1-|w|^2}{w} - S\right| \leqq 2\log\frac{P}{|w|},$$

---

[21]) In $\mathrm{E}_\alpha^\varkappa$ ist $|w| \leqq \Pi$ für $\varkappa > 0$, $\left|\frac{\alpha - w}{\alpha\overline{w}-1}\right| \leqq \Pi$ für $\varkappa = 0$, $|w| \geqq \frac{1}{\Pi}$ für $\varkappa < 0$; vergl. I, Fußnote [35]).

[22]) In $\mathrm{E}_\alpha^\varkappa$ ist $\left|\alpha\frac{1-|w|^2}{w} - \Sigma\right| \leqq 2\log\frac{\Pi}{|w|}$ für $\varkappa = 1$, $\left|\frac{1-|w|^2}{\alpha\overline{w}} + \Sigma\right| \leqq 2\log|w|\Pi$ für $\varkappa = -1$. Für $|\varkappa| > 1$ ist hierin $\alpha = 0$ bzw. $\frac{1}{\alpha} = 0$ zu setzen; vergl. I, Fußnote [38]).

und das Gleichheitszeichen ist nur bei den Extremalfunktionen

$$(13)\qquad \frac{f(z)-w}{f(z)\overline{w}-1}=\gamma P(z)\left(\frac{|w|}{P}\right)^{\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}};\quad w=|w|\gamma,$$

mit geeignetem ε, $|\varepsilon|=1$, möglich.

Die Ungleichung (12) *gibt die genaue Abgrenzung von w bei gegebener Vollverteilung innerhalb* $\mathfrak{E}_\alpha$. *Umgekehrt ist jedes* (12) *genügende w innerhalb* $\mathfrak{E}_\alpha$ *mit der gegebenen Vollverteilung realisierbar*, wie die Funktionen (13) mit $|\varepsilon|\leqq 1$ zeigen. Nur im Falle $|w|=P$, und dann ist (bei der Normierung $S\geqq 0$) sicher $w=P$ und $S=\alpha\frac{1-P^2}{P}$, stimmen die Extremalfunktionen (13) mit den entsprechenden aus I, (17) überein.

3. *Der Fall* $\alpha=0$.

Für $\alpha=0$ ergibt (12) die Kreisbeschränkung

$$(14)\qquad |w|\leqq Pe^{-\frac{|S|}{2}}.$$

Ist also z.B. *w ein zu ζ gehöriger Schlichtwert*, so gilt in diesem Falle die starke Beschränkung

$$(39)\qquad |f(\zeta)|\leqq|\zeta|e^{-\frac{1-|\zeta|^2}{2|\zeta|}}.$$

4. *Der Fall der symmetrischen Verteilung.*

Für $S=0$, $\alpha\geqq 0$, wird (12) zu

$$(15)\qquad \alpha\frac{1-|w|^2}{|w|}\leqq 2\log\frac{P}{|w|};\quad |w|e^{\alpha\frac{1-|w|^2}{2|w|}}\leqq P.$$

Die Funktion

$$(\mathrm{a})\qquad L(x)=\alpha\frac{1-x^2}{x}-2\log\frac{P}{x};\quad \alpha>0,$$

mit $L(0)=+\infty$, $L(P)=\alpha\frac{1-P^2}{P}$ erreicht ihr Minimum an der aus

$$(\mathrm{b})\qquad \frac{2\xi}{1+\xi^2}=\alpha,\quad 0<\xi\leqq 1,$$

bestimmten Stelle ξ. Notwendig und hinreichend für die Existenz eines (15) erfüllenden w, d.h. für die Realisierbarkeit der symmetrischen Verteilung innerhalb $\mathfrak{E}_\alpha$, ist daher $L(\xi)\leqq 0$, d.i.

$$(\mathrm{c})\qquad g(\xi)=\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}-\log\frac{P}{\xi}\leqq 0.$$

Da nun $g(\xi)$ als Funktion von ξ in $(0, P)$ von $-\infty$ bis $\frac{1-P^2}{1+P^2}$ wächst, so muß weiter $\xi \leqq \eta_0$,

$$\text{(d)} \qquad \frac{1-\eta_0^2}{1+\eta_0^2} - \log\frac{P}{\eta_0} = 0$$

sein. Es ergibt sich so schließlich:

Notwendig und hinreichend für die Realisierbarkeit einer symmetrischen Vollverteilung $(S = 0)$ *innerhalb* $\mathfrak{E}_\alpha$ *ist das Erfülltsein der Ungleichung*

$$(20) \qquad \alpha \leqq \frac{2\eta_0}{1+\eta_0^2}; \quad \frac{1-\eta_0^2}{1+\eta_0^2} - \log\frac{P}{\eta_0} = 0, \quad 0 < \eta_0 \leqq P.$$

Der Variabilitätsbereich (15) *der zugehörigen* w*-Werte ist ein Kreisring mit* 0 *als Mittelpunkt, der im Falle* $\alpha = \frac{2\eta_0}{1+\eta_0^2}$ *in die Kreislinie* $|w| = \eta_0$ *ausartet.*

Auf den besonders interessanten, von Landau [10]) behandelten Spezialfall $S = 0$, $P = 1$, d.i. $f(z) \neq w$ in $|z| < 1$, haben wir schon in der Einleitung aufmerksam gemacht. Hier wird $\eta_0 = 1$, so daß eine Beschränkung von α (natürlich) nicht eintritt. Man erhält den Landauschen Satz der Einleitung, dessen Extremalfunktionen durch

$$\text{(13a)} \qquad \frac{f(z)-w}{f(z)\overline{w}-1} = \gamma |w|^{\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}}; \quad w = L(\alpha)\gamma$$

mit geeignetem ε, $|\varepsilon| = 1$, gegeben sind.

Da $L(x)$ aus (a) für festes x aus $(0, 1)$ mit α wächst, wächst die untere Wurzel von $L(x)$ mit α, während die obere abnimmt.

Die Kreisringe (15) *ziehen sich also, wenn* α *von* 0 *bis* $\frac{2\eta_0}{1+\eta_0^2}$ *wächst, von dem Kreise* $|w| \leqq P$ $(\alpha = 0)$ *ausgehend in die Kreislinie* $|w| = \eta_0$, *die sie alle enthalten, zusammen.*

Da $L(x)$ für festes x mit wachsendem $P > 0$ abnimmt, nimmt die untere Wurzel ab, während die obere zunimmt. Die Kreisringe (15) liegen daher sämtlich außerhalb des Landauschen Kreises $|w| < L(\alpha)$; d.h.

Die Funktionen aus $\mathfrak{E}_\alpha$ *nehmen die Werte* w *der Landauschen Kreisscheibe* $|w| < L(\alpha)$ *unsymmetrisch (d.h. mit* $S \neq 0$*) an. Auch bei dieser Aussage ist die Kreisscheibe nicht zu verbessern.*

5. *Die Kurven* $\Gamma(\alpha)$.

Es sei $\alpha > 0$, $S > 0$. Der Variabilitätsbereich $V(\alpha)$ von $w = xe^{i\varphi}$ bei gegebener Vollverteilung ist durch eine „Kurve" $\Gamma(\alpha)$ begrenzt, die sich wegen (12) aus

$$\text{(a)}\qquad G(x) \equiv \left(\alpha\frac{1-x^2}{x} - S\cos\varphi\right)^2 + S^2\sin^2\varphi - 4\log^2\frac{P}{x} = 0,$$
$$0 < x \leqq P,$$

bestimmt. Nun ist

$$\text{(b)}\qquad \begin{aligned} H(x) &\equiv xG'(x) = 2\left(S\cos\varphi - \alpha\frac{1-x^2}{x}\right)\alpha\frac{1+x^2}{x} + 8\log\frac{P}{x}, \\ I(x) &\equiv x^3H'(x) = 2\alpha^2(1+x^2)^2 + \\ &\qquad + 2\big(S\cos\varphi\, x - \alpha(1-x^2)\big)(x^2-1)\,\alpha - 8x^2. \end{aligned}$$

Schließen wir den Fall $\alpha = 1$, $f(z) \equiv z$ aus, so besitzt das Polynom $I(x)$ wegen

$$\text{(c)}\qquad I(-\infty) = +\infty,\quad I(-1) = 8(\alpha^2-1),\quad I(0) = 4\alpha^2,$$
$$I(1) = 8(\alpha^2-1),\quad I(\infty) = \infty$$

genau eine Wurzel in $(0, 1)$. $H(x)$ wächst also dort zuerst und fällt dann, besitzt daher in $(0, 1)$ höchstens zwei Wurzeln. $G(x)$ besitzt also in $(0, 1)$ höchstens zwei Extrema. Wegen

$$\text{(d)}\qquad G(P) \geqq 0,\quad G(0) = \infty$$

folgt nun, daß $G(x)$ entweder keine oder zwei (ev. zusammenfallende) Wurzeln $x(\varphi) \leqq X(\varphi)$ in $(0, P) >$ besitzt. Für $G(P) > 0$ ist dies ohne weiteres klar. Im Falle $G(P) = 0$ ist nach (a) jedenfalls $\varphi = 0$, $\alpha\,\dfrac{1-x^2}{x} = S$, also $H(P) = 0$, woraus die Behauptung ersichtlich wird.

$G(x)$ ist ferner linear in $\cos\varphi$, und man sieht, *daß die untere Wurzel $x(\varphi)$ mit wachsendem $|\varphi| \leqq \pi$ wächst, die obere $X(\varphi)$ aber abnimmt. Die Existenz von $x(0)$ und $X(0)$ ist daher notwendig und hinreichend für die Realisierbarkeit der Vollverteilung (mit irgend einem w) innerhalb $\mathfrak{E}_\alpha$ überhaupt, und es gilt für alle realisierbaren w*

$$\text{(e)}\qquad x(0) \leqq x(\varphi) \leqq x \leqq X(\varphi) \leqq X(0);\quad w = xe^{i\varphi}.$$

Für $\varphi = \pi$ wird (a) zu

$$\text{(f)}\qquad \alpha\frac{1-x^2}{x} - 2\log\frac{P}{x} = -S,$$

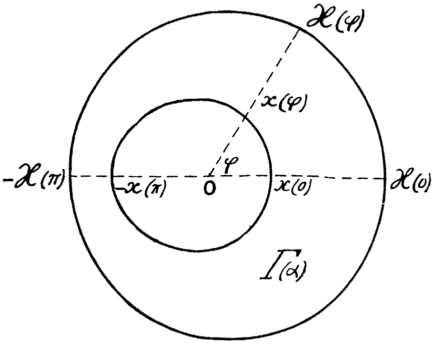
und also existieren nach 4 die Wurzeln $x(\pi)$, $X(\pi)$ nur für

$$(40)\qquad \alpha \leqq \frac{2\mu}{1+\mu^2};\quad \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} - \log\frac{P}{\mu} = -\frac{S}{2},\quad 0 < \mu \leqq P,$$

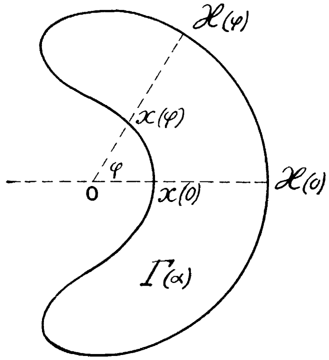
wobei im Falle des Gleichheitszeichens $x(\pi) = X(\pi) = \mu$ wird.

Wir finden so, *wenn* $\alpha > 0$, $S > 0$ *ist*, über die Gestalt von $\Gamma(\alpha)$:

I. $0 < \alpha \leqq \frac{2\mu}{1+\mu^2}$, *$\mu$ aus* (40). $\Gamma(\alpha)$ *schließt „kreisringförmig" den* 0-*Punkt ein. Auf dem äußeren Bogen nimmt der Abstand von* 0 *mit wachsendem* $|\varphi| \leqq \pi$ *ab, auf dem inneren zu. Im Falle des Gleichheitszeichens berühren sich die beiden Bögen im Punkte* $-\mu$ (Figur 5a).



Figur 5a.



Figur 5b.

II. $\alpha > \frac{2\mu}{1+\mu^2}$. $\Gamma(\alpha)$ *ist „sichelförmig" und schließt* 0 *aus. Die Strahlen durch* 0 *werden in höchstens zwei Punkten geschnitten. Mit wachsenden* $|\varphi| \leqq \pi$ *nimmt der Abstand des zu* 0 *näheren Schnittpunktes von* 0 *zu und der des weiteren ab.* (Figur 5b.)

Man beachte noch, daß der Bereich $V(\alpha)$ ganz im Inneren des zur gleichen Folge (ζ_k) als Mindestverteilung gehörigen Variabilitätsbereiches $V^*(\alpha)$ aus I liegen muß. Nur im Falle $S = \alpha\frac{1-P^2}{P}$ haben diese Bereiche den Punkt P gemeinsam.

6. *Der Fall des Schlichtwertes; die Kurve* $\mathfrak{C}_\alpha$.

$\zeta > 0$ sei eine Schlichtstelle von $f(z)$ mit dem Schlichtwerte $w = f(\zeta)$; es ist also $P = \zeta$ und $S = \frac{1-\zeta^2}{\zeta}$.

Die Größe μ aus (40) ist hier mittels

$$\text{(a)} \qquad \mu e^{\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}} = \zeta e^{-\frac{1-\zeta^2}{2\zeta}}, \quad 0 < \mu \leqq \zeta,$$

bestimmt, *und nur für kleine* α, *nämlich für* $\alpha \leqq \frac{2\mu}{1+\mu^2}$, *sind z.B. negative Schlichtwerte in* ζ *möglich.*

Die Ungleichungen (17) und (18) der Einleitung folgen unmittelbar aus (12). Die erste Ungleichung (18) schätzt $|w|$ nach unten, die zweite nach oben ab.

Es sei $\alpha > 0$. Die Kurve $\Gamma(\alpha)$ ist, wenn $w = xe^{i\varphi}$ gesetzt wird, nach 5. (a) durch

$$\text{(b)}\quad \begin{aligned} G(x) &\equiv \alpha^2\left(\frac{1-x^2}{x}\right)^2 - 2\alpha\frac{1-x^2}{x}\cdot\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\cos\varphi + \left(\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\right)^2 - 4\log^2\frac{\zeta}{x} \\ &\equiv \left(\alpha\frac{1-x^2}{x}\cos\varphi - \frac{1-\zeta^2}{\zeta}\right)^2 + \alpha^2\left(\frac{1-x^2}{x}\right)^2\sin^2\varphi - 4\log^2\frac{\zeta}{x} = 0 \end{aligned}$$

bestimmt.

Wir wollen die ζ im Intervall $0 < \zeta < 1$ variieren lassen. Wie der (Landausche) Grenzfall $\zeta = 1$ zeigt, kann nach oben nur $x < 1$ geschlossen werden.

Für $\cos\varphi \leqq 0$ folgt aus der ersten Schreibweise (b)

$$\text{(c)}\qquad \alpha\frac{1-x^2}{x} \leqq 2\log\frac{\zeta}{x} < 2\log\frac{1}{x}$$

also

$$\text{(d)}\qquad x > L(\alpha);\ \cos\varphi \leqq 0,$$

wo $L(\alpha)$ der Landausche Radius (16) ist.

In der linken Halbebene können also innerhalb $\mathfrak{C}_\alpha$ die zu einer Stelle $\zeta > 0$ gehörigen Schlichtwerte nur außerhalb des Landauschen Kreises $|w| = L(\alpha)$ liegen.

Für $\cos\varphi > 0$ folgt aus der zweiten Schreibweise (b)

$$\text{(e)}\qquad \alpha\frac{1-x^2}{x}|\sin\varphi| \leqq 2\log\frac{\zeta}{x} < 2\log\frac{1}{x},$$

also

$$\text{(f)}\qquad x > L(\alpha|\sin\varphi|);\ \cos\varphi > 0.$$

Damit ist die Existenz einer nur von α abhängigen Kurve $\mathfrak{C}_\alpha$ bewiesen, so daß die zu einem $\zeta > 0$ gehörigen Schlichtwerte außerhalb $\mathfrak{C}_\alpha$ liegen müssen.

In der linken Halbebene besteht die „wahre" Kurve $\mathfrak{C}_\alpha$ aus dem Landauschen Kreise $x = L(\alpha)$ (Grenzfall $\zeta = 1$). Dagegen ist die Abschätzung (f) in der rechten Halbebene nicht scharf. Dort wäre natürlich $\mathfrak{C}_\alpha$ als Enveloppe der Schlichtwertbereiche (17) bei variablem ζ zu bestimmen. Diese ergibt sich durch Elimination von ζ aus $G(x) = 0$ und

$$\text{(g)}\qquad \frac{\partial G}{\partial\zeta} = 2\frac{1+\zeta^2}{\zeta^2}\left(\alpha\frac{1-x^2}{x}\cos\varphi - \frac{1-\zeta^2}{\zeta}\right) - \frac{8}{\zeta}\log\frac{\zeta}{x} = 0.$$

Diese Bestimmung ist aber wenig übersichtlich.

Das genannte System ist gleichwertig mit

$$\text{(h)} \qquad \begin{aligned} &\alpha\frac{1-x^2}{x}\,|\sin\varphi| = 2\log\frac{\zeta}{x}\cdot\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2},\\ &\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\left(\alpha\frac{1-x^2}{x}\cos\varphi - \frac{1-\zeta^2}{\zeta}\right) = 2\alpha\frac{1-x^2}{x}\,|\sin\varphi|\,. \end{aligned}$$

Die zweite, in $\frac{1-\zeta^2}{\zeta}$ quadratische Gleichung, besitzt nur dann Lösungen ζ, wenn

$$\text{(i)} \qquad \alpha\frac{1-x^2}{x} \geqq \frac{8\,|\sin\varphi|}{\cos^2\varphi}$$

ist. Nun wird im Grenzfalle $\zeta = 1$ die untere Wurzel $x(\varphi, \zeta) = L(\alpha)$. Da für $\varphi \neq 0$

$$\text{(j)} \quad \frac{\partial G(L)}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=1} = 4\left\{\alpha\frac{1-L^2}{L}\cos\varphi - 2\log\frac{1}{L}\right\} < 4\left\{\alpha\frac{1-L^2}{L} - 2\log\frac{1}{L}\right\} = 0$$

ist, wächst bei festem φ die untere Wurzel $x(\varphi, \zeta)$ zuerst, wenn ζ von 1 her abnimmt. Ist nun

$$\text{(k)} \qquad \alpha\frac{1-L^2}{L} = 2\log\frac{1}{L} \leqq 8\frac{|\sin\varphi|}{\cos^2\varphi},$$

so wird erst recht zuerst für die $\zeta < 1$ an den unteren Wurzeln

$$\text{(l)} \qquad \alpha\frac{1-x^2}{x} < \frac{8\,|\sin\varphi|}{\cos^2\varphi}$$

gelten. Nach (i) bleibt dann also überhaupt für alle $\zeta < 1$ an den unteren Wurzeln $\frac{\partial G}{\partial\zeta} < 0$. Es gilt daher

$$\text{(41)} \qquad x \geqq L(\alpha) \text{ für } L(\alpha) \geqq e^{-4\frac{|\sin\varphi|}{\cos^2\varphi}}.$$

Der Landausche Kreis $x = L(\alpha)$ *bleibt also noch ein Stück in die rechte Halbebene hinein die wahre Kurve* $\mathfrak{C}_\alpha$. Freilich ist (41) keineswegs die genaue Bestimmung dieses Sachverhaltes.

Der Grensfall $\zeta = 0$ zeigt, daß auf der positiven reellen Achse nur $x \geqq 0$ geschlossen werden kann. (Figur 3.)

7. *Variation der* $\alpha \geqq 0$.

Aus 5 (a) folgt jedenfalls

$$\text{(a)} \qquad S^2\sin^2\varphi \leqq 4\log^2\frac{P}{x},$$

und für $\cos\varphi \geqq 0$ ist der Fall des Gleichheitszeichens mit

$$\text{(b)} \qquad 0 \leqq \alpha = S \cos \varphi \frac{x}{1-x^2} \left(\leqq S \cdot \frac{P}{1-P^2} \leqq 1 \right)$$

innerhalb $\mathfrak{E}_+$ (bei $S \geqq 0$) realisierbar.

Wenn $\cos \varphi \leqq 0$ ist, schreiben wir

$$\text{(c)} \quad G(x) \equiv \alpha^2 \left(\frac{1-x^2}{x} \right)^2 - 2\alpha \frac{1-x^2}{x} S \cos \varphi + S^2 - 4 \log^2 \frac{P}{x} = 0.$$

und es folgt dann

$$\text{(d)} \qquad S^2 \leqq 4 \log^2 \frac{P}{x},$$

wo das Gleichheitszeichen innerhalb $\mathfrak{E}_+$ für $\alpha = 0$ realisierbar ist.

Damit sind die Ungleichungen (21) und insbesondere (22) der Einleitung bewiesen. Für $S > 0$ liegt dieser Variabilitätsbereich der w bei gegebener Vollverteilung (von der Spitze $w = P$ abgesehen) ganz im Inneren des entsprechenden Bereiches I. (19) bei Mindestverteilungen.

8. *Bestimmung von $x(0)$ und $X(0)$; die Ungleichungen* (19). Es sei $\alpha > 0$, $S > 0$. Nach 5 ist die Existenz von $x(0)$ und $X(0)$ notwendig und hinreichend für die Realisierbarkeit der gegebenen Vollverteilung innerhalb $\mathfrak{E}_\alpha$. Diese Größen bestimmen sich nach der aus (12) unmittelbar folgenden Ungleichung

$$(42) \quad L(|w|) \equiv \alpha \frac{1-|w|^2}{|w|} - 2 \log \frac{P}{|w|} \leqq S \leqq \alpha \frac{1-|w|^2}{|w|} + 2 \log \frac{P}{|w|} \equiv R(|w|).$$

a: $R(x)$ nimmt in $(0, P)$ von $+\infty$ bis $\alpha \frac{1-P^2}{P}$ monoton ab. Wenn also $R(P) \leqq S$, d.i. $\alpha \leqq \frac{SP}{1-P^2}$ ist, so liefert $R(x) = S$ die Wurzel $X(0)$. Im Falle des Gleichheitszeichens ist $X(0) = P$.

b: Nach 4 fällt $L(x)$ in $(0, \xi)$, wo $\alpha = \frac{2\xi}{1+\xi^2}$ ist, um dann zu wachsen. Ferner ist $L(0) = \infty$, $L(P) = \alpha \frac{1-P^2}{P}$.

Jedenfalls muß also zur Realisierung der Vollverteilung $L(\xi) \leqq S$, d.i.

$$\text{(a)} \qquad g(\xi) \equiv \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} - \log \frac{P}{\xi} \leqq \frac{S}{2}$$

und also, da $g(\xi)$ mit $\xi > 0$ wächst, sicher

$$\text{(b)} \qquad \alpha = \frac{2\xi}{1+\xi^2} \leqq \frac{2\eta}{1+\eta^2}; \quad \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2} - \log \frac{P}{\eta} = \frac{S}{2}$$

sein.

A: Es sei $\xi \leqq P$, d.i. $\alpha \leqq \frac{2P}{1+P^2}$.

α: Wenn $\alpha < \frac{SP}{1-P^2}$, d.i. $L(P) < S$ ist, so ergibt $L(x) = S$ die Wurzel $x(0)$.

β: Wenn $\alpha \geqq \frac{SP}{1-P^2}$ ist, so muß notwendig $S \leqq 2\frac{1-P^2}{1+P^2}$ sein. Und dann ergibt $L(x) = S$ beide Wurzeln $x(0)$ und $X(0)$.

B: Es sei $\xi > P$, d.i. $\alpha > \frac{2P}{1+P^2}$.

Zur Realisierung der Vollverteilung muß $L(P) \leqq S$, d.i. $\alpha \leqq \frac{SP}{1-P^2}$ sein. $L(x) = S$ ergibt die Wurzel $x(0)$.

So haben wir in jedem realisierbaren Falle die Bestimmung von $x(0)$ und $X(0)$ angegeben.

Für $\eta \leqq P$, d.i. $S \leqq 2\frac{1-P^2}{1+P^2}$, liegt der Fall A vor, und die Ungleichung (b) ist nicht zu verbessern. Im Falle des Gleichheitszeichens in (b) ist notwendig $|w| = x = \eta$ und nach 5 (wegen $\alpha > 0$, $S > 0$) sogar nur $w = \eta$ möglich.

Für $\eta > P$, d.i. $S > 2\frac{1-P^2}{1+P^2}$, sind nur die Fälle A, α und B möglich, und es ist also dann

$$\alpha \leqq \frac{SP}{1-P^2}. \tag{c}$$

Im Falle des Gleichheitszeichens ist notwendig $w = P$.

Damit sind die Ungleichungen (19) der Einleitung bewiesen und zugleich gezeigt, daß sie für die Realisierung der Vollverteilung mit passendem w innerhalb $\mathfrak{E}_\alpha$ notwendig und hinreichend sind.

Darüber hinaus sehen wir, daß im Falle $\alpha = \mathbf{A}(P, S)$ *nur die Werte* $|w| = \eta$ *bzw.* $|w| = P$, *und wenn* $S > 0$ *ist, sogar nur die Werte* $w = \eta$ *bzw.* $w = P$ *realisierbar sind. Die Kurven* $\Gamma(\alpha)$ *schrumpfen also dann auf Punkte zusammen.*

Die zu (19) gehörigen Extremalfunktionen sind (für $\alpha > 0$, $S > 0$) durch

$$\begin{aligned} \frac{f(z)-\eta}{f(z)\eta-1} &= P(z)\left(\frac{\eta}{P}\right)^{\frac{1+z}{1-z}} && \text{für } S \leqq 2\,\frac{1-P^2}{1+P^2}, \\ \frac{f(z)-P}{f(z)P-1} &= P(z) && \text{für } S \geqq 2\,\frac{1-P^2}{1+P^2} \end{aligned} \tag{43}$$

gegeben. Für $\alpha = 0$ oder $S = 0$ sind sie entsprechend nach (13) zu bilden.

9. *Verhalten von $\Gamma(\alpha)$ bei Variation der α.*

Nach 5 (a) ist

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial G}{\partial \alpha} = 2\frac{1-x^2}{x}\left(\alpha\frac{1-x^2}{x} - S\cos\varphi\right),$$

also $\frac{\partial G}{\partial \alpha} > 0$ für $\alpha > 0$, $\cos\varphi \leqq 0$.

In der linken Halbebene wächst daher die untere Wurzel $x(\varphi)$ mit α, während die obere $X(\varphi)$ abnimmt. *Dort ziehen sich also mit wachsendem α die Kurven $\Gamma(\alpha)$, ausgehend von dem „punktierten" Kreise $x = P$ $(\alpha = 0)$, zusammen, wobei sie, wenn $S > 0$ ist, für $\alpha = \frac{2\mu}{1+\mu^2}$ aus (40) von der Kreisringgestalt in die Sichelgestalt übergehen und wobei dann das zu den „Sichelenden" gehörige $|\varphi|$ abnimmt.*

Daß sich die Sichelenden, die sich aus $G(x) = 0$, $G'(x) = 0$ bestimmen, mit wachsendem α schließlich auch in der rechten Halbebene zurückziehen, geht daraus hervor, daß dort nach 5(b)

$$\text{(b)} \qquad \left(\alpha\frac{1-x^2}{x} - S\cos\varphi\right)\alpha\frac{1+x^2}{x} = 4\log\frac{P}{x},$$

also nach (a) wieder $\frac{\partial G}{\partial \alpha} > 0$ ist.

Für $\alpha = \mathbf{A}(P, S)$ und $S > 0$ schließlich ist $\Gamma(\alpha)$ auf den Punkt Min (η, P) zusammengeschrumpft.

10. *Variation der P.*

Es sei $\alpha \geqq 0$, $S \geqq 0$ fest gegeben. Wegen

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial G}{\partial P} = -\frac{8}{P}\log\frac{P}{x} \leqq 0$$

dehnen sich die von den Kurven $\Gamma(\alpha)$ berandeten Bereiche $V(\alpha)$ mit wachsendem P aus.

Setzt man $S = \frac{1-t^2}{t}$, so muß wegen $S \leqq \frac{1-P^2}{P}$ jedenfalls $P \leqq t$ sein. *Wir finden so, daß für festes $\alpha \geqq 0$ und $S = \frac{1-t^2}{t}$ $(0 < t \leqq 1)$ w in dem zugehörigen Schlichtwertbereiche* (17) *liegen muß.*

Für $\alpha = 0$ wird z.B.

$$\text{(44)} \qquad |w| \leqq t\, e^{-\frac{S}{2}}; \quad \alpha = 0,\ S = \frac{1-t^2}{t}.$$

Für $S = 0$ ist $t = 1$, und also gilt

$$\text{(45)} \qquad |w| \geqq L(\alpha); \quad \alpha > 0,\ S = 0.$$

11. *Variation der P und $S \geqq 0$.*

Es sei $\alpha > 0$ fest gegeben, und wir variieren die $0 < P \leqq 1$ und $0 \leqq S \leqq \frac{1-P^2}{P}$. Nach 10 liegt dann w in der Vereinigungsmenge aller Schlichtwertbereiche (17) und also nach 6 nicht innerhalb der Kurve $\mathfrak{C}_\alpha$. Damit ist die diesbezügliche Behauptung der Einleitung bewiesen. Man beachte, daß die Normierungen $\alpha > 0$ und $S \geqq 0$ vorausgesetzt sind.

12. *Die Ungleichungen* (23).

$\alpha \geqq 0$ und P seien fest gegeben. Zunächst gilt nach I (7)

$$\text{(a)} \qquad |S| \leqq \frac{1-P^2}{P}.$$

Wir setzen $\alpha = \frac{2\xi}{1+\xi^2}$, $0 \leqq \xi \leqq 1$.

A. Es sei $\alpha \leqq \frac{2P}{1+P^2}$, also $\xi \leqq P$.

Wenn $|S| \leqq 2\frac{1-P^2}{1+P^2}$ ist, so ist nach (19) sogar $\alpha \leqq \frac{2\eta}{1+\eta^2}$, η aus (19), $0 \leqq \xi \leqq \eta \leqq P$. Also wird nach 4

$$\text{(b)} \qquad \frac{|S|}{2} = \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2} - \log\frac{P}{\eta} \geqq \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} - \log\frac{P}{\xi} = \frac{\overset{\frown}{S}}{2}.$$

Wenn $|S| > 2\frac{1-P^2}{1+P^2}$ ist, so wird $\eta \geqq P$, also erst recht $\xi \leqq \eta$, und (b) bleibt gültig.

Die Größe $\overset{\frown}{S}$ aus (b) ist genau für die $\alpha > \frac{2\eta_0}{1+\eta_0^2}$, η_0 aus (20), positiv.

B. Es sei $\alpha > \frac{2P}{1+P^2}$. Nach (19) ist sicherlich $|S| \geqq 2\frac{1-P^2}{1+P^2}$ und also sogar $|S| \geqq \alpha\frac{1-P^2}{P}$.

Damit sind die Ungleichungen (23) der Einleitung bewiesen.

13. *Variation der $S \geqq 0$.*

Es sei $\alpha \geqq 0$ und P fest gegeben, während die $S \geqq 0$ durch die möglichen Werte (23) variieren sollen.

Wir schreiben $G(x)$ aus 5(a) in der Form

$$\text{(a)} \quad G(x) \equiv \left(\alpha\frac{1-x^2}{x}\cos\varphi - S\right)^2 + \left(\alpha\frac{1-x^2}{x}\sin\varphi\right)^2 - 4\log^2\frac{P}{x}.$$

Für $\cos\varphi \leqq 0$ ist $\frac{\partial G}{\partial S} \geqq 0$, so daß mit abnehmendem S bei festem φ die untere Wurzel $x_S(\varphi)$ von $G(x)=0$ nicht wächst, die obere Wurzel $X_S(\varphi)$ nicht abnimmt.

Ist also $\alpha \leqq \frac{2\eta_0}{1+\eta_0^2}$, *so ist nach* (23) *in der linken Halbebene*

$$\text{(b)}\qquad x_0(\varphi) \leqq |w| \leqq X_0(\varphi); \quad \alpha\frac{1-|w|^2}{|w|} \leqq 2\log\frac{P}{|w|},$$

d.h. w liegt in dem zur symmetrischen Verteilung $S=0$ gehörigen Kreisringe (15) *in der linken Halbebene.*

Dagegen sind für $\alpha > \frac{2\eta_0}{1+\eta_0^2}$ *überhaupt keine Werte w in der linken Halbebene möglich,* da dies für $S=\widehat{S}$ bzw. $S=\alpha\frac{1-P^2}{P}$ (nach unserer Bemerkung über das Gleichheitszeichen in (19)) der Fall ist.

In der rechten Halbebene $\cos\varphi > 0$ sind die Verhältnisse weniger einfach. Aus (a) folgt

$$\text{(c)}\qquad \alpha\frac{1-x^2}{x}|\sin\varphi| \leqq 2\log\frac{P}{x},$$

d.h. die möglichen w-Werte der rechten Halbebene liegen jedenfalls nicht außerhalb der „Kurve"

$$\mathfrak{c}_1\qquad \alpha\frac{1-x^2}{x}|\sin\varphi| = 2\log\frac{P}{x}.$$

Diese Kurve existiert nach 4. genau für die φ mit

$$\text{(d)}\qquad \alpha|\sin\varphi| \leqq \frac{2\eta_0}{1+\eta_0^2}.$$

(Man beachte, im Einklang mit oben, den Fall $\alpha > \frac{2\eta_0}{1+\eta_0^2}$!) Das Gleichheitszeichen in (c) ist nur möglich, wenn zugleich

$$\text{(e)}\qquad \alpha\frac{1-x^2}{x}|\sin\varphi| = 2\log\frac{P}{x}, \quad \alpha\frac{1-x^2}{x}\cos\varphi = S$$

wird, und dann ist dort, d.h. auf $\mathfrak{c}_1$, $\frac{\partial G}{\partial S}=0$. $\mathfrak{c}_1$ ist der Ort der Wurzeln von $G(x)=0$, in denen $\frac{\partial G}{\partial S}=0$ wird.

Nun muß aber $S \leqq \frac{1-P^2}{P}$ sein; daher kann $\mathfrak{c}_1$ nur dann scharfe Abgrenzung für w sein, wenn auf $\mathfrak{c}_1$

$$\text{(f)}\qquad \alpha\frac{1-x^2}{x}\cos\varphi \leqq \frac{1-P^2}{P},$$

also

$$\text{(g)} \qquad x \geqq P e^{-\operatorname{tg}\varphi \frac{1-P^2}{2P}}$$

ist. Wenn dies erfüllt ist, so ist $\mathfrak{c}_1$ die scharfe Abgrenzung. Denn die für S notwendige untere Grenze $\sigma(\alpha, P)$ aus (23) kann auf $\mathfrak{c}_1$ von den zugehörigen S-Werten (e) nicht unterschritten werden, weil ja das Erfülltsein von (e) jedenfalls die Realisierbarkeit der Verteilung bedeutet.

Daher ist die Kurve $\mathfrak{c}_1$ die genaue Abgrenzung für w in der rechten Halbebene, solange sie außerhalb der (*von α unabhängigen*) *Kurve*

$$\mathfrak{c}_2 \qquad x = P e^{-\operatorname{tg}\varphi \frac{1-P^2}{2P}}$$

verläuft.

Wenn $\mathfrak{c}_1$ die Kurve $\mathfrak{c}_2$ trifft, wird für $\varphi \neq 0$ das zugehörige $S = \frac{1-P^2}{P}$, und *es folgt, daß für diejenigen φ, wo $\mathfrak{c}_1$ innerhalb $\mathfrak{c}_2$ verläuft, die genaue Abgrenzung für w von der zu $S = \frac{1-P^2}{P}$, $\zeta = P$ gehörigen Schlichtwertkurve* (17) *geliefert wird.*

Für $\varphi = 0$ trifft $\mathfrak{c}_1$ die positive Achse in $x = 0$ und $x = P$, $\mathfrak{c}_2$ aber in $x = P$. *Nach oben kann also nur $|w| \leqq P$* $\Big($*mit dem Gleichheitszeichen für $S = \alpha\frac{1-P^2}{P}$*$\Big)$ *geschlossen werden, während die untere durch $\mathfrak{c}_1$ gegebene triviale Abgrenzung $|w| \geqq 0$ auf der positiven Achse durch*

$$\text{(46)} \qquad |w| \geqq x_{\frac{1-P^2}{P}}(0); \qquad |w|\, e^{\alpha\frac{1-|w|^2}{2|w|}} \leqq P e^{-\frac{1-P^2}{2P}}$$

ersetzt werden kann.

Diese Abschätzung (46) *gilt dann überhaupt für alle w, wie aus* 5(e) *folgt.*

Ebenso ist für kleine φ die untere Abgrenzung der w immer durch die Schlichtwertkurve $\left(S = \frac{1-P^2}{P}\right)$ gegeben.

§ 3. Die Majorantenrelation (24).

1. *Die Majorantenrelation.*

Wendet man die Relation (5) auf die Funktion $f_w(z)$ aus (10) an, so ergibt sich die neue Majorantenrelation

$$\text{(24)} \qquad \frac{f_w(z)}{z P_w(z)} \prec \left(\frac{|w|}{P_w}\right)^{\frac{1+z}{1-z}}$$

mit den Extremalfunktionen (13).

Diese von α unabhängige Relation ergibt die scharfen Abgrenzungen für $f(z)$ bei gegebener w-Vollverteilung innerhalb $\mathfrak{E}$. An einer p-fachen w-Stelle ζ der Vollverteilung erhält man insbesondere scharfe Abgrenzungen für $f^{(p)}(\zeta)$.

Für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$ muß w überdies der Ungleichung (12) genügen, und nach § 2,2 gehören im Falle des Gleichheitszeichens in (12) die obigen Extremalfunktionen bei geeignetem ε zu $\mathfrak{E}_\alpha$. Liegt also w auf der Kurve $\Gamma(\alpha)$ aus § 2,5, so ist die obige Abgrenzung von $f(z)$ auch für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$ (mit $S \geqq 0$) scharf, sonst aber nicht. Entsprechendes gilt für die Klasse $\mathfrak{E}_+$.

Um auch für diese Klassen scharfe Abgrenzungen zu erhalten, hätte man die Relation (32) der Einleitung auf die Funktion $f_w(z)$ anzuwenden.

2. *Der Fall $f(z) \neq w$.*

Es ist $P(z) \equiv 1$, und (24) geht in die Relation

$$\frac{f(z)-w}{f(z)\overline{w}-1} < \gamma |w|^{\frac{1+z}{1-z}}, \quad w = |w|\gamma, \tag{47}$$

über. Hieraus folgt insbesondere

$$|w|^{\frac{1+|z|}{1-|z|}} \leqq \left|\frac{f(z)-w}{f(z)\overline{w}-1}\right| \leqq |w|^{\frac{1-|z|}{1+|z|}}; \quad \left|\operatorname{arc}\frac{1}{w}\,\frac{f(z)-w}{f(z)\overline{w}-1}\right| \leqq \frac{2|z|}{1-|z|^2}\log\frac{1}{|w|}. \tag{48}$$

3. *Der Fall des Schlichtwertes.*

w sei ein zu $\zeta > 0$ gehöriger Schlichtwert. (24) wird zu

$$\frac{f(z)-w}{f(z)\overline{w}-1}\cdot\frac{z\zeta-1}{z-\zeta} < \gamma\left(\frac{|w|}{\zeta}\right)^{\frac{1+z}{1-z}}, \quad w = |w|\gamma. \tag{49}$$

Für $z = \zeta$ folgt insbesondere die Ungleichung

$$\left(\frac{|w|}{\zeta}\right)^{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}} \leqq |f'(\zeta)|\frac{1-\zeta^2}{1-|w|^2} \leqq \left(\frac{|w|}{\zeta}\right)^{\frac{1-\zeta}{1+\zeta}} \tag{25}$$

der Einleitung. Für die Funktion

$$g(x) = \log\,(1-x^2) + \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\log x \tag{a}$$

ist

$$g'(x)\cdot x(1-x^2) = -2x^2 + \frac{1+\zeta}{1-\zeta}(1-x^2) = g^*(x^2); \tag{b}$$

$$g^*(\zeta^2) = -2\zeta^2 + (1+\zeta)^2 > 0.$$

Also wächst $g(x)$ in $(0, \zeta >)$. Daher kann bei gegebenem $\alpha > 0$

und festem $\varphi = \operatorname{arc} w$ $\left(\text{mit den Bezeichnungen aus § 2,5; es ist } P = \zeta,\ S = \frac{1-\zeta^2}{\zeta}\right)$ die untere Abschätzung (25) unabhängig von $|w|$ zu

$$\frac{1-x^2(\varphi)}{1-\zeta^2}\left(\frac{x(\varphi)}{\zeta}\right)^{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}} \leqq |f'(\zeta)| \tag{50}$$

ergänzt werden. *Und insbesondere gilt unabhängig von φ in $\mathfrak{E}_\alpha$*

$$\frac{1-x^2(0)}{1-\zeta^2}\left(\frac{x(0)}{\zeta}\right)^{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}} \leqq |f'(\zeta)|. \tag{51}$$

$x(0)$ ist dabei durch das Gleichheitszeichen in der ersten Ungleichung (18) *bestimmt.*

Für die Funktion

$$h(x) = \log(1-x^2) + \frac{1-\zeta}{1+\zeta}\log x \tag{c}$$

ist

$$h'(x)\cdot x(1-x^2) = -2x^2 + \frac{1-\zeta}{1+\zeta}(1-x^2) = h^*(x^2); \tag{d}$$

$$h^*(\zeta^2) = -2\zeta^2 + (1-\zeta)^2.$$

Das Maximum von $h(x)$ liegt bei $x = \xi$,

$$\frac{2\xi^2}{1-\xi^2} = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}; \quad \xi^2 = \frac{1-\zeta}{3+\zeta}. \tag{e}$$

Es ist daher bei gegebenem $\alpha > 0$ und festem $\varphi = \operatorname{arc} w$

$$|f'(\zeta)| \leqq \frac{1-\xi^2}{1-\zeta^2}\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^{\frac{1-\zeta}{1+\zeta}}; \quad \xi^2 = \frac{1-\zeta}{3+\zeta}, \tag{f}$$

d.i.

$$|f'(\zeta)| \leqq \frac{2}{(3+\zeta)(1-\zeta)}\left(\frac{1-\zeta}{\zeta^2(3+\zeta)}\right)^{\frac{1}{2}\frac{1-\zeta}{1+\zeta}}, \tag{26b}$$

und diese Ungleichung ist bei festem φ, wenn $X(\varphi) \geqq \xi$ ist, nicht zu verbessern. Ferner ist unabhängig von φ diese Ungleichung für die Klasse $\mathfrak{E}_\alpha$ scharf, wenn $X(0) \geqq \xi$ ist, d.h. nach (18) für die ζ mit

$$\xi e^{-\alpha\frac{1-\xi^2}{2\xi}} \geqq \zeta e^{-\frac{1-\zeta^2}{2\zeta}}; \quad \xi^2 = \frac{1-\zeta}{3+\zeta}. \tag{g}$$

Da schließlich unabhängig von α nur $X(0) \leqq \zeta$ geschlossen werden kann, so ist die Ungleichung (26b) in der allgemeinen Klasse $\mathfrak{G}$ für die

$$\text{(h)}\quad \zeta \geqq \xi;\quad \zeta^2 \geqq \frac{1-\zeta}{3+\zeta};\quad \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} \geqq \frac{1-\zeta}{2(1+\zeta)};$$

$$\sqrt{2}\cdot\zeta \geqq 1-\zeta;\quad \zeta \geqq \sqrt{2}-1$$

nicht zu verbessern. Dagegen gilt genauer

$$(52)\qquad |f'(\zeta)| \leqq \frac{1-X^2(\varphi)}{1-\zeta^2}\left(\frac{X(\varphi)}{\zeta}\right)^{\frac{1-\zeta}{1+\zeta}} \text{ für } X(\varphi) < \xi$$

und in $\mathfrak{G}_\alpha$ *unabhängig von* φ

$$(53)\qquad |f'(\zeta)| \leqq \frac{1-X^2(0)}{1-\zeta^2}\left(\frac{X(0)}{\zeta}\right)^{\frac{1-\zeta}{1+\zeta}} \textit{ für } X(0) < \xi,$$

d.i. für die ζ*, die* (g) *nicht genügen*

In der Klasse $\mathfrak{G}$ kann schließlich für die $\zeta \leqq \xi$, d.i. für die $\zeta \leqq \sqrt{2}-1$ aus $X(0) \leqq \zeta$ und (53) auf

$$(26\text{a})\qquad |f'(\zeta)| \leqq 1$$

d.i. die erste Dieudonnésche Ungleichung I (22) geschlossen werden. Damit sind auch die Ungleichungen (26) der Einleitung bewiesen.

§ 4. Abschätzung der Primitivwerte.

1. Es sei $0 < r < 1$ und $f(z) \neq w$ in $|z| < r$. Wir suchen die untere Grenze $L_r(\alpha)$ der möglichen Werte $|w|$ innerhalb $\mathfrak{G}_\alpha$ zu bestimmen. Es sei $\alpha > 0$ vorausgesetzt. In der Grenze $r = 1$ ist $L_1(\alpha)$ die Landausche Größe $L(\alpha)$ aus (16).

$L_r(\alpha)$ ist zugleich die untere Grenze der auf $|z| = r$ möglichen Primitivwerte einer Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{G}_\alpha$.

Für kleine r *kann man* $L_r(\alpha)$ *leicht angeben.* Nach I (39) (mit $P_0^* = 1$) ist nämlich für $|z| = r < \alpha$

$$(\text{a})\qquad |f(z)| \geqq r\frac{\alpha-r}{1-\alpha r},$$

also jedenfalls

$$(\text{b})\qquad L_r(\alpha) \geqq r\frac{\alpha-r}{1-\alpha r};\quad r < \alpha.$$

Die rechte Seite von (b) wächst aber für $\frac{2r}{1+r^2} < \alpha$, und dann ist auch $r < \alpha$. Daher ist für die zu (a) gehörige Extremalfunktion

$f(z) = z\frac{\alpha - z}{1 - \alpha z}$ aus $\mathfrak{E}_\alpha$ für diese r der Wert $r\frac{\alpha - r}{1 - \alpha r}$ ein zu $z = r$ gehöriger Primitivwert, und es folgt somit

$$(54) \qquad L_r(\alpha) = r\frac{\alpha - r}{1 - \alpha r} \qquad \text{für } \frac{2r}{1+r^2} \leqq \alpha .$$

2. Es sei jetzt allgemein $f(z)$ aus $\mathfrak{E}_\alpha$ und $f(z) \neq w$ für $|z| < r$. Die Folge (ζ_k) mit

$$(a) \qquad r \leqq |\zeta_k| < 1$$

sei eine (ev. leere) w-Vollverteilung von $f(z)$.

Sind P und S die zugehörigen Verteilungsgrößen, so ist nach § 2, 8 die durch (19) erklärte Ungleichung $\alpha \leqq \mathbf{A}(P, |S|)$ notwendig und hinreichend für die Realisierbarkeit der Vollverteilung mit passendem w innerhalb $\mathfrak{E}_\alpha$. Für diese zugehörigen w gilt die Abschätzung $|w| \geqq x(0)$, wo nach § 2, 9 $x(0)$ die untere Wurzel der Gleichung

$$(42) \qquad L(x) \equiv \alpha\frac{1 - x^2}{x} - 2\log\frac{P}{x} = |S|$$

ist.

Es handelt sich darum, diese Wurzel $x(0)$ *durch Variation der Vollverteilung* (a) *innerhalb* $\mathfrak{E}_\alpha$ *möglichst klein zu machen.*

3. Es sei $P < 1$. *Wir machen zunächst alle* ζ_k *unter Beibehaltung ihrer Beträge positiv.* P ändert sich nicht, während $|S|$ nicht abnimmt und S positiv wird. (19) bleibt erfüllt, da sowohl η als damit auch $\mathbf{A}(P, |S|)$ mit $|S|$ wächst. Andererseits hat nach § 2,4 wegen der dort bewiesenen Eigenschaften von $L(x)$ die Wurzel $x(0)$ bei dieser Variation nicht zugenommen.

4. Es sei etwa $r < \zeta_\varkappa \leqq \zeta_\lambda < 1$. *Wir ersetzen* $\zeta_\varkappa$ *durch* $t\zeta_\varkappa$ *und* ζ_λ *durch* $\frac{\zeta_\lambda}{t}$, *Max* $\left(\zeta_\lambda, \frac{r}{\zeta_\varkappa}\right) \leqq t \leqq 1$. P bleibt bei dieser Variation ungeändert, während S wegen

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1-(t\zeta_\varkappa)^2}{t\zeta_\varkappa} + \frac{1-\left(\frac{\zeta_\lambda}{t}\right)^2}{\frac{\zeta_\lambda}{t}}\right\}$$

$$(a) \qquad = -\frac{1+t^2\zeta_\varkappa^2}{t^2\zeta_\varkappa^2}\zeta_\varkappa + \frac{\zeta_\lambda}{t^2}\frac{1+\left(\frac{\zeta_\lambda}{t}\right)^2}{\left(\frac{\zeta_\lambda}{t}\right)^2} = \frac{1}{t^2}\left(\zeta_\lambda - \frac{1}{\zeta_\varkappa}\right) + \left(\frac{1}{\zeta_\lambda} - \zeta_\varkappa\right)$$

$$= (1 - \zeta_\varkappa\zeta_\lambda)\left(\frac{1}{\zeta_\lambda} - \frac{1}{t^2\zeta_\varkappa}\right) \leqq 0$$

mit abnehmendem t wächst.

Durch diese Variation kann man entweder $\zeta_\varkappa$ nach r oder ζ_λ nach 1 (d.h. zum Verschwinden) bringen. Wie unter 3 bleibt (19) erfüllt und die Wurzel $x(0)$ nimmt ab.

Durch wiederholte, ev. abzählbarofte Wiederholung dieser Variation kann man erreichen, daß alle ζ_k mit Ausnahme von höchstens einem ζ nach r fallen. Dabei bleibt die Anzahl n dieser nach r gebrachten ζ_k beschränkt. Denn wegen (19) und $\eta \leqq P$ ist dann jedenfalls

$$\text{(b)} \qquad \alpha \leqq \operatorname{Max}\left\{\frac{2r^n\zeta}{1+r^{2n}\zeta^2},\ \frac{r^n\zeta}{1-r^{2n}\zeta^2}\left(n\frac{1-r^2}{r}+\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\right)\right\}; \quad r<\zeta\leqq 1,$$

und die rechte Seite strebt mit $n \to \infty$ gegen 0.

5. Wir dürfen also zur unteren Abschätzung von $x(0)$ eine Vollverteilung von $n \geqq 0$ Stellen $\zeta_k = r$ und einer Stelle $r < \zeta \leqq 1$ annehmen. Dann ist

$$\text{(a)} \qquad P = r^n\zeta; \quad S = n\frac{1-r^2}{r}+\frac{1-\zeta^2}{\zeta}.$$

Wir betrachten zunächst die Funktion

$$\text{(b)} \quad \frac{S\cdot P}{1-P^2} = g(\zeta) = \frac{r^n\zeta}{1-r^{2n}\zeta^2}\left\{n\frac{1-r^2}{r}+\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\right\}; \; n\geqq 1,\ r\leqq\zeta\leqq 1.$$

Es ist

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} &= \frac{1}{\zeta}+\frac{2\zeta r^{2n}}{1-r^{2n}\zeta^2}-\frac{\dfrac{1+\zeta^2}{\zeta^2}}{n\dfrac{1-r^2}{r}+\dfrac{1-\zeta^2}{\zeta}},\\ \zeta\frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} &= \frac{1+r^{2n}\zeta^2}{1-r^{2n}\zeta^2}-\frac{\dfrac{1+\zeta^2}{\zeta}}{n\dfrac{1-r^2}{r}+\dfrac{1-\zeta^2}{\zeta}}. \end{aligned}$$

Für die quadratische Funktion

$$\text{(d)} \qquad \begin{aligned} h(\zeta) &= \left(n\frac{1-r^2}{r}+\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\right)(1+r^{2n}\zeta^2)-\frac{1+\zeta^2}{\zeta}(1-r^{2n}\zeta^2)\\ &= n\frac{1-r^2}{r}(1+r^{2n}\zeta^2)-2\zeta(1-r^{2n}) \end{aligned}$$

ist $h(0) = n\dfrac{1-r^2}{r}$, also $h(0) > 0$, wenn $n \geqq 1$. Ferner ist

$$\text{(e)} \qquad \begin{aligned} h(1) &= n\frac{1-r^2}{r}(1+r^{2n})-2(1-r^{2n})\\ &= \frac{1-r^2}{r}\{n(1+r^{2n})-2r(1+r^2+r^4+\ldots+r^{2(n-1)})\} > 0, \end{aligned}$$

da das in der Klammer stehende Polynom in r nach der Cartesischen Regel höchstens zwei positive Wurzeln besitzt und $r = 1$ eine Doppelwurzel, also die einzige positive Wurzel ist. Das Minimum ζ^* von $h(\zeta)$ bestimmt sich aus

$$\text{(f)} \qquad h'(\zeta^*) = 2\left\{n\frac{1-r^2}{r}r^{2n}\zeta^* - (1-r^{2n})\right\} = 0,$$

und es ist

$$\text{(g)} \qquad \begin{aligned} h(\zeta^*) &= n\frac{1-r^2}{r}\left(1+\frac{1-r^{2n}}{n\frac{1-r^2}{r}}\zeta^*\right) - 2\zeta^*(1-r^{2n}) \\ &= n\frac{1-r^2}{r} - \zeta^*(1-r^{2n}) \\ &= \frac{1-r^2}{r}\{n-\zeta^*(r+r^3+\ldots+r^{2n-1})\} \geqq n\frac{1-r^2}{r}\{1-\zeta^*\}. \end{aligned}$$

Wenn also $\zeta^* < 1$ ist, so ist $h(\zeta^*) > 0$, und in jedem Falle ist daher $h(\zeta) > 0$ in $\langle 0, 1\rangle$ und also auch

$$\text{(h)} \qquad g'(\zeta) > 0 \text{ für } n \geqq 1,\ r \leqq \zeta \leqq 1.$$

Der Ausdruck $\frac{SP}{1-P^2}$ *wächst also mit* ζ.
Für $n = 0$, $\zeta < 1$ ist $\frac{SP}{1-P^2} \equiv 1$.

6. Für die Verteilung in 5 ist für $n \geqq 0$ nach 5 (c) und (h)

$$\text{(a)} \qquad S\cdot\frac{1+P^2}{1-P^2} = \left(n\frac{1-r^2}{r}+\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\right)\frac{1+r^{2n}\zeta^2}{1-r^{2n}\zeta^2} \geqq \frac{1+\zeta^2}{\zeta} \geqq 2.$$

Nach (19) wird also die Verteilungsbedingung zu

$$\text{(b)} \qquad \alpha \leqq \frac{SP}{1-P^2} = \frac{r^n\zeta}{1-r^{2n}\zeta^2}\left(n\frac{1-r^2}{r}+\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\right).$$

Ist nun für unsere Verteilung noch $\alpha < \frac{SP}{1-P^2}$, *so lasse man das* ζ, $r < \zeta \leqq 1$, *dieser Verteilung gegen* r *abnehmen, wobei es also im Falle* $\zeta = 1$ *neu von rechts her auftaucht.*

Die Größe S nimmt zu und P nimmt ab, aber wegen

$$\text{(c)} \qquad \left(\frac{1-\zeta^2}{\zeta}+2\log\zeta\right)' = -\frac{1+\zeta^2}{\zeta^2}+\frac{2}{\zeta} = -\left(\frac{1-\zeta}{\zeta}\right)^2 \leqq 0$$

nimmt die untere Wurzel $x(0)$ von $L(x) = S$ nach (42) und § 2,4 ab. Da nun nach 5 der Ausdruck $\frac{SP}{1-P^2}$ mit ζ abnimmt, *so* *ist diese Variation genau so lange möglich, bis schließlich ev. nach mehrfacher Wiederholung*

$$\alpha = \frac{SP}{1-P^2} = \frac{r^n\zeta}{1-r^{2n}\zeta^2}\left(n\frac{1-r^2}{r}+\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\right); \quad n \geqq 1,\ r < \zeta \leqq 1, \tag{27}$$

wird.

Durch die Festsetzung $n \geqq 1,\ r < \zeta \leqq 1$ ist die zu (27) gehörige Vollverteilung eindeutig bestimmt. Denn die rechte Seite fällt nach 5 mit ζ und das Wertepaar $n,\ \zeta = r$ ergibt das Gleiche wie $n+1,\ \zeta = 1$. Für $n = 1,\ \zeta = 1$ ist die rechte Seite gleich 1, und sie wird mit wachsendem n beliebig klein. (27) *ergibt also für* $\alpha > 0$ *genau ein Lösungspaar* $n,\ \zeta$. Das zugehörige x_0 ist die gesuchte Größe $L_r(\alpha)$.

Nach § 2,8 ist nun gerade

$$x(0) = L_r(\alpha) = P = r^n\zeta, \tag{28}$$

und die zugehörige Extremalfunktion ist wegen 6 (a) nach (43) durch

$$\frac{F(z)-r^n\zeta}{F(z)r^n\zeta-1} = \left(\frac{z-r}{zr-1}\right)^n\left(\frac{z-\zeta}{z\zeta-1}\right) \tag{55}$$

eindeutig bestimmt. Damit sind die Behauptungen der Einleitung über $L_r(\alpha)$ bewiesen.

7. Für $n = 1$ wird nach 6 (27) zunächst

$$\alpha = \frac{r\zeta}{1-r^2\zeta^2}\left(\frac{1-r^2}{r}+\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\right) > \frac{r^2}{1-r^4}\cdot 2\,\frac{1-r^2}{r} = \frac{2r}{1+r^2} \tag{a}$$

und $L_r(\alpha) = r\zeta$. Also ist für diese r

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(\zeta+r)(1-r\zeta)}{1-r^2\zeta^2} = \frac{\frac{\zeta r}{r}+r}{1+r\zeta}; \quad \alpha r = \frac{L+r^2}{1+L}, \\ L_r(\alpha) &= r\,\frac{\alpha-r}{1-r\alpha}, \end{aligned} \tag{b}$$

was mit (54) übereinstimmt.

Allgemein wird die Extremalfunktion rational vom $(n+1)$*-ten Grade für die* r *des Intervalls*

$$(n+1)\,\frac{r^n}{1-r^{2(n+1)}}\,(1-r^2) < \alpha \leqq n\,\frac{r^{n-1}}{1-r^{2n}}\,(1-r^2) \tag{56}$$

sein.

(Eingegangen den 3. Juli 1937)

Literaturverzeichnis zum II. Teil.

C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen [Math. Ann. **64** (1907), 95—115].

P. Koebe, Über das Schwarzsche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie [Math. Zeitschr. **6** (1920), 52—84].

E. Landau, Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten [Math. Zeitschr. **30** (1929), 608—634].

V. Levin, Aufgabe 163 [Jahresber. Deutsch. Math. Vereinig. **43** (1933), 113].

W. Rogosinski, 1. Über positive harmonische Entwicklungen und typischreelle Potenzreihen [Math. Zeitschr. **35** (1932), 93—121].

2. Über den Wertevorrat einer analytischen Funktion, von der zwei Werte vorgegeben sind [Compos. Math. **3** (1936), 199—226].

3. Über beschränkte Potenzreihen I [Compos. Math. **5** (1937), 67—106].