COMPOSITIO MATHEMATICA

ROBERT REMAK

Über die Minkowskische Reduktion der definiten quadratischen Formen

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 368-391
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__368_0>

Über die Minkowskische Reduktion der definiten quadratischen Formen

von

Robert Remak

Berlin

Einleitung.

Zerlegt man eine eigentlich definite quadratische Form von n Veränderlichen in eine Summe von n Quadraten von Linearformen und betrachtet man die Linearformen als rechtwinklige Koordinaten im n-dimensionalen Raume, so stellt die quadratische Form das Quadrat der Entfernung eines Raumpunktes vom Nullpunkt des Koordinatensystems dar. Läßt man für die Veränderlichen nur ganzzahlige Werte zu, so erhält man ein (im allgemeinen schiefwinkliges) n-dimensionales Punktgitter, das den Nullpunkt als Gitterpunkt enthält.

Als nächstliegendes Reduktionsverfahren erscheint das folgende: man wähle einen dem Nullpunkt O nächsten Gitterpunkt P_1, nehme die Gerade OP_1 aus, suche unter den übrigen Gitterpunkten wieder einen dem Nullpunkt nächsten P_2, nehme die Ebene OP_1P_2 aus und so fort. Hat man bereits $m-1$ Vektoren OP_1, $OP_2, \ldots, OP_{m-1}$ bestimmt, so nehme man die $(m-1)$-dimensionale Hyperebene $OP_1P_2 \ldots P_{m-1}$ aus und suche unter den übrigen Gitterpunkten einen nächsten Gitterpunkt P_m. So fahre man fort, bis man n unabhängige Vektoren gefunden hat. Das Verfahren hat aber für $n \geqq 5$ den Nachteil, daß die so gewonnenen Vektoren kein Elementarparallelepiped mehr zu erzeugen brauchen, sondern manchmal nur ein Teilgitter liefern. [1]) Das Verfahren möge deshalb „Pseudoreduktion nach sukzessiven Minima" heißen.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ seien fortan ganze rationale Zahlen.

Wenn

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

---

[1]) Siehe l.c. Anm. [3]), 511.

die eigentlich definite quadratische Form ist, so lautet die Bedingung der Pseudoreduktion nach sukzessiven Minima

$$a_{mm} = \operatorname{Min} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

unter der Bedingung, daß $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ nicht sämtlich 0 sind.

Eine eigentlich definite quadratische Form heißt nach Minkowski [2]) reduziert, wenn (1) gilt unter der schärferen Bedingung, daß der größte gemeinsame Teiler

$$(x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = 1. \tag{2}$$

Der Zweck der Minkowskischen Bedingung ist folgender. Es sollen nur solche Gitterpunkte für P_m zur Konkurrenz zugelassen werden, für die der Vektor OP_m zusammen mit den bereits nach Minkowski bestimmten Vektoren $OP_1, OP_2, \ldots, OP_{m-1}$ ein Elementarparallelepiped des m-dimensionalen, in der m-dimensionalen Hyperebene $OP_1P_2 \ldots P_m$ liegenden Punktgitters bestimmt.

Dividiert man das Volumen eines beliebigen Parallelepipeds durch das Produkt der von einer Ecke ausgehenden Kanten oder, was dasselbe besagt, durch das Volumen des Quaders (rechtwinkligen Parallelepipeds) mit den gleichen Kanten, so erhält man einen echten Bruch, der nur von der Gestalt einer Ecke des Parallelepipeds abhängig ist, den „Eckensinus" der Ecke. Nur für das Quader wird der Eckensinus gleich 1. Der Eckensinus läßt sich in gleicher Weise in n Dimensionen definieren.

Ist

$$D = |a_{ik}|$$

die Determinante der quadratischen Form, so ist D gleich dem Quadrate des Volumens des Elementarparallelepipeds.

Eine der wichtigsten Abschätzungen bei allen Reduktionen ist es, für das Quadrat des Eckensinus des Elementarparallelepipeds im Punktgitter der reduzierten Form, d.h. für

$$\frac{D}{a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}}$$

eine positive, nur von n abhängige untere Schranke zu finden. Die Abschätzungen werden bei der Minkowskischen Reduktion ungünstig, da die nach (1) nächsten Gitterpunkte gerade verboten

---

[2]) Minkowski, Diskontinuitätsbereich für arithmetische Aequivalenz [Journ. f. Math. **129** (1905), (220—274). Wiederabgedruckt: Gesammelte Abhandl. II, 53—100].

sein können, weil sie die Minkowskische Bedingung (2) nicht erfüllen. Die unteren Schranken sind bei Minkowski noch so klein, daß er auf ihre explizite Ausrechnung verzichtet.

Mit einer Verbesserung der Abschätzungen beschäftigen sich u.a. die Herren L. Bieberbach und I. Schur [3]).

Wenn

$$\frac{D}{a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}} \geqq \bar{\lambda}_n,$$

worin $\bar{\lambda}_n$ die, für größere n unbekannte, wahre Schranke bedeute, so beweisen die beiden Verfasser:

$$\bar{\lambda}_n \geqq \left(\frac{48}{125}\right)^{\frac{1}{6}(n^3-n)}. \text{[4])} \tag{3}$$

Führt man in der nach Minkowski reduzierten Form die Staffelzerlegung aus,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma_{l=1}^n \left(q_l \left(\Sigma_{i=1}^n \beta_{li} x_i\right)^2\right),$$

worin

$$\beta_{ll} = 1, \quad \beta_{li} = 0 \text{ für } i < l,$$

so beweisen die beiden Verfasser:

$$|\beta_{li}| \leqq \frac{1}{2} \cdot l! \cdot \bar{\lambda}_l^{-1}. \text{[5])}$$

Die gegenwärtige Arbeit beschäftigt sich mit der weiteren Verbesserung dieser Abschätzungen. An den von den beiden genannten Verfassern gegebenen Beweisen für die Hauptsätze der Minkowskischen Reduktionstheorie ändert sich nichts.

Ich werde im ersten Kapitel dieser Arbeit zeigen: es ist für $n \geqq 5$

$$\frac{D}{a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}} \geqq \lambda_n = \gamma_n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)}; \tag{4}$$

für $n \leqq 4$

$$\lambda_n = \gamma_n.$$

Hierin ist γ_n eine Konstante, für die

$$\frac{D}{a_{11}^n} \geqq \gamma_n.$$

---

[3]) Über die Minkowskische Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen [Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch., phys.-math. Klasse, **1928**, 510—535]. Berichtigung hierzu [**1929**, 508].

[4]) l.c. Anm. [3]), 531.

[5]) l.c. Anm. [3]), 518.

Nach Herrn Blichfeldt ist:[6])

$$\gamma_n = \frac{\pi^n}{2^n \cdot \left(\Gamma\left(2+\frac{n}{2}\right)\right)^2}. \tag{5}$$

Benutzt man nur das ältere Hermitesche Ergebnis

$$\gamma_n \geqq \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}n(n-1)}, \tag{6}$$

so kann man zeigen:

$$\lambda_n \geqq \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

Ich ersetze also den kubischen Exponenten der Herren L. Bieberbach und I. Schur in (3) durch einen quadratischen Exponenten.

Ferner zeige ich

$$|\beta_{tm}| \leqq \lambda_t^{-\frac{1}{2}},$$

worin λ_t durch (4) definiert ist.

Beim Beweise ziehe ich, nachdem $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{m-1,\, m-1}$ nach Minkowski bestimmt sind, auch das Minimum a'_{mm} heran, das man erhält, wenn man beim m-ten Schritt nur die Bedingungen der Pseudoreduktion nach sukzessiven Minima berücksichtigt; es ist also

$$a'_{mm} = f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \operatorname{Min} f$$

unter der Bedingung, daß $x'_m, x'_{m+1}, \ldots, x'_n$ nicht sämtlich 0 sind. Es sei der größte gemeinsame Teiler

$$(x'_m, x'_{m+1}, \ldots, x'_n) = v_m.$$

v_m heiße die m-te „Verschränkungszahl“ [7]). Es ist

$$a'_{mm} \leqq a_{mm}.$$

Wenn

$$v_m = 1, \tag{7}$$

---

[6]) Transact. Amer. Math. Soc. **15** (1914), 227—235. Remak [Math. Zeitschr. **26** (1927), 694—699]. Blichfeldt [Math. Annalen **101** (1929), 605—608].

[7]) Als Rechtfertigung des Namens möge die folgende geometrische Betrachtung dienen: Betrachtet man das von einem 5-dimensionalen Würfel von der Kantenlänge 1 erzeugte Punktgitter, das durch die Würfelmittelpunkte ergänzt ist, (es ist dies die geometrische Deutung des in der zitierten Arbeit der Herren L. Bieberbach und I. Schur, S. 511 in Anmerkung 1 gegebenen Beispiels) und legt man um jeden Gitterpunkt eine Kugel vom Radius $\frac{1}{2}$, so zerfallen die Kugeln in 2 Systeme einander von außen berührender Kugeln, die in einander verschränkt liegen, ohne einander zu berühren.

wird a'_{mm} nach Minkowski zulässig, also

$$a'_{mm} = a_{mm}. \tag{8}$$

Wenn a_{mm} oberhalb einer von seinen Vorgängern abhängigen Schranke liegt, sind (7) und (8) stets erfüllt.

Für $n \leqq 3$ ist stets $v_m = 1$; es fällt die Pseudoreduktion nach sukzessiven Minima mit der Minkowskischen Reduktion zusammen und ist noch eine wahre Reduktion. Das gilt auch noch für $n = 4$ bis auf einen Spezialfall, in dem $v_m = 1$ bei zweckmäßiger Wahl des vierten Vektors und $v_m = 2$ bei unzweckmäßiger Wahl. [8])

Die Verschränkungszahl v_m schätze ich durch

$$v_m \leqq \lambda_m^{-\frac{1}{2}}$$

ab.

Im zweiten Kapitel berichte ich über eine von mir ausgeführte numerische Rechnung. Ich stellte mir die Frage „welches ist der größte echte Bruch c, für den sich

$$\lambda_n \geqq c^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

für alle $n \geqq 2$ zeigen läßt?" und fand

$$c = 0{,}74195. \tag{9}$$

Der Exponent $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist der klassische Hermitesche Exponent aus (6). Als Hilfsmittel benutze ich aber nicht (6), sondern den besseren Blichfeldtschen Wert (5) für γ_n. Da der Wert (9) nur wenig kleiner ist als $\frac{3}{4} = 0{,}75$, so ist unter der Benutzung der modernen Blichfeldtschen Schranke für γ_n die Schranke für das Minkowskische λ_n nahe an die alte, heute überholte Hermitesche Schranke für γ_n herangerückt. Für große n übertrifft sogar die Schranke (4) für λ_n die Schranke (6) für γ_n, da $\frac{4}{5} = 0{,}8$ ist und $\log \gamma_n$ von geringerer Größenordnung als const $\cdot \frac{1}{2}n(n-1)$.

Erstes Kapitel.

Es sei

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k$$

eine eigentlich definite quadratische Form in n Veränderlichen. Es sei in f die Staffelzerlegung ausgeführt

---

[8]) Es handelt sich um das in Anm. [7]) beschriebene Punktgitter mit der Abänderung, daß die Dimensionszahl hier nicht 5 sondern 4 ist.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma_{l=1}^n \left(\Sigma_{i=1}^n b_{li} x_i\right)^2,$$

worin

$$b_{li} = 0 \text{ für } i < l.$$

Es ist

$$a_{ik} = \Sigma_{l=1}^n b_{li} b_{lk}. \tag{10}$$

In (10) sind nur die Glieder von 0 verschieden, für die

$$l \leqq i \text{ und } l \leqq k.$$

Es sei die Matrix

$$A = (a_{ik}); \quad B = (b_{ik}),$$

dann ist nach (10)

$$A = B'B;$$

also ist die Determinante

$$D = |A| = |B|^2 = (b_{11} b_{22} \cdots b_{nn})^2 = b_{11}^2 b_{22}^2 \cdots b_{nn}^2.$$

Setzt man

$$b_{ll}^2 = q_l, \tag{11}$$

so wird

$$D = q_1 q_2 \cdots q_n. \tag{12}$$

Da $D \neq 0$, so sind sämtliche $b_{ll} \neq 0$, also sämtliche $q_l > 0$.

Setzt man

$$b_{lk} = b_{ll} \cdot \beta_{lk} \tag{13}$$

und

$$\zeta_l = x_l + \beta_{l,\, l+1} x_{l+1} + \ldots + \beta_{ln} x_n, \tag{14}$$

so wird

$$f = q_1 \zeta_1^2 + q_2 \zeta_2^2 + \ldots + q_n \zeta_n^2. \tag{15}$$

Es sei m ein fester Index; $1 \leqq m \leqq n$. Man setze

$$\begin{aligned} q_1 \zeta_1^2 + q_2 \zeta_2^2 + \ldots + q_{m-1}^2 \zeta_{m-1}^2 &= g_{m-1}, \\ q_m \zeta_m^2 + q_{m+1} \zeta_{m+1}^2 + \ldots + q_n \zeta_n^2 &= h_m; \end{aligned} \tag{16}$$

dann ist f in die beiden Formen zerlegt

$$f = g_{m-1} + h_m.$$

Es ist insbesondere

$$\begin{aligned} g_0 &= 0; \quad h_1 = f; \\ g_n &= f; \quad h_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Unter den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ werden fortan ganze rationale Zahlen verstanden. Sind

$$(17) \qquad x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$$

ganzzahlig gegeben, so kann man $x_{m-1}, x_{m-2}, \ldots, x_1$ sukzessive ganzzahlig so bestimmen, daß

$$|\zeta_{m-1}| \leqq \frac{1}{2}; \ |\zeta_{m-2}| \leqq \frac{1}{2}; \ldots; \ |\zeta_1| \leqq \frac{1}{2}.$$

Es wird dann nach (16)

$$g_{m-1} \leqq \frac{1}{4} q_1 + \frac{1}{4} q_2 + \cdots + \frac{1}{4} q_{m-1} = \frac{1}{4} k_{m-1},$$

worin k_{m-1} als Abkürzung für die Summe der q_ν eingeführt ist. Es ist also auch

$$(18) \qquad \operatorname{Min} g_{m-1} \leqq \frac{1}{4} k_{m-1},$$

worin das Minimum über alle ganzzahligen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ bei Festhaltung des speziellen Wertsystems (17) zu nehmen ist.

Eine quadratische Form f heißt nach Minkowski reduziert, wenn für jedes m des Intervalls $1 \leqq m \leqq n$

$$(19) \qquad a_{mm} = \operatorname{Min} f$$

unter der Bedingung, daß der größte gemeinsame Teiler

$$(20) \qquad (x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = 1 .$$

Man bezeichne ein Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zur Abkürzung mit X, eine Menge von X mit $\mathfrak{X}$; es sei

$$f(X_0) = \operatorname{Min}_{X \in \mathfrak{X}} f(X) .$$

Gehört X_0 auch dem Teilbereich $\mathfrak{Y}$ von $\mathfrak{X}$ an,

$$X_0 \in \mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X},$$

so ist auch

$$(21) \qquad f(X_0) = \operatorname{Min}_{X \in \mathfrak{Y}} f(X) .$$

Faßt man die Zugehörigkeit von X zur Menge $\mathfrak{X}$ als eine spezielle Bedingung auf, der die x_ν unterworfen werden, so besagt (21): man darf zu den Bedingungen für ein Minimum eine spezielle Bedingung hinzufügen, die an der Stelle des Minimums ohnedies erfüllt ist, ohne daß sich das Minimum ändert. Dies Prinzip will ich das Spezialisierungsprinzip für Minima nennen.

Man setze

$$a_{mm} = q_m + r_m .$$

Es ist

$$a_{mm} = f(0, \ldots, 0, x_m = 1, 0, \ldots, 0)$$

und

$$q_m = h_m\,(0, \ldots, 0, x_m = 1, 0, \ldots, 0),$$

also

$$(22)\quad r_m = a_m - q_m = g_{m-1}\,(0, \ldots, 0, x_m = 1, 0, \ldots, 0) = \textstyle\sum_{l=1}^{m-1} b_{lm}^2 .$$

Schreibt man nach dem Spezialisierungsprinzip für das Minimum a_{mm} die ohnedies angenommenen Werte $x_m = 1, x_{m+1} = 0, \ldots, x_m = 0$ vor, so erhält man nach (18) und (22)

$$(23)\qquad r_m = \operatorname{Min} g_{m-1} = \textstyle\sum_{l=1}^{m-1} b_{lm}^2 \leqq \frac{1}{4} k_{m-1} .$$

Wäre r_m kein Minimum, so ließe sich r_m, also auch $a_{mm} = q_m + r_m$ bei festem q_m verkleinern, was nicht der Fall sein darf.

Es sei

$$1 \leqq t \leqq m-2 .$$

Schreibt man die ohnedies angenommenen Werte

$$(24)\quad x_{t+1} = 0, \ldots, x_{m-1} = 0,\ x_m = 1,\ x_{m+1} = 0, \ldots, x_r = 0$$

vor, so ergibt sich aus der Definition von a_{mm} und der Anwendung von (18) auf g_t

$$(25)\quad \textstyle\sum_{l=1}^{t} b_{lm}^2 = g_t\,(0, \ldots, 0, x_m = 1, 0, \ldots, 0) = \operatorname{Min} g_t \leqq \frac{1}{4} k_t .$$

Hierin ist das Minimum unter Festhaltung der Werte (24) zu verstehen.

Es sei

$$(26)\qquad a'_{mm} = \operatorname{Min} f$$

unter der Bedingung, daß $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ nicht sämtlich 0 sein sollen. Es ist

$$(27)\qquad a'_{m+1,\,m+1} \geqq a'_{mm} ,$$

weil die für $a'_{m+1,\,m+1}$ zur Konkurrenz zugelassenen Wertsysteme der x_ν eine Teilmenge der für a'_{mm} zur Konkurrenz zugelassenen Wertsysteme bilden. Es sei

$$(28)\qquad a'_{mm} = f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) .$$

Es sei der größte gemeinsame Teiler

$$(29)\qquad (x'_m, x'_{m+1}, \ldots, x'_n) = v_m .$$

v_m heiße die m-te „Verschränkungszahl". Es sei

$$(30)\qquad x'_\mu = v_m \cdot x''_\mu \text{ für } m \leqq \mu \leqq n ;$$

also ist

$$(31)\qquad (x''_m, x''_{m+1}, \ldots, x''_n) = 1 .$$

Es sei

$$(32)\qquad \begin{aligned} q''_m &= h_m(x''_m, x''_{m+1}, \ldots, x''_n), \\ q'_m &= h_m(x'_m, x'_{m+1}, \ldots, x'_n) = v_m^2 \cdot q''_m, \\ r'_m &= g_{m-1}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) ; \end{aligned}$$

dann ist

$$(33)\qquad a'_{mm} = q'_m + r'_m = v_m^2 \cdot q''_m + r'_m \leqq v_m^2 \cdot q''_m + \frac{1}{4} k_{m-1} .$$

Es sei

$$(34)\qquad a''_{mm} = \operatorname{Min} f$$

unter der Bedingung $x_\mu = x''_\mu$ für $m \leqq \mu \leqq n$; dann ist

$$(35)\qquad a''_{mm} = f(x''_1, \ldots, x''_m, \ldots, x''_n) = q''_m + r''_m \leqq q''_m + \frac{1}{4} k_{m-1} ,$$

worin

$$(36)\qquad r''_m = g_{m-1}(x''_1, \ldots, x''_m, \ldots, x''_n) \leqq \frac{1}{4} k_{m-1} .$$

Es ist

$$a'_{mm} \leqq a_{mm} ,$$

da die Bedingung (20) für a_{mm} die speziellere ist. Andrerseits ist wegen (31) der Wert a''_{mm} bei der Aufsuchung von a_{mm} zur Konkurrenz zuzulassen; also ist

$$a_{mm} \leqq a''_{mm};$$

mithin

$$(37)\qquad a'_{mm} \leqq a_{mm} \leqq a''_{mm} .$$

Es sollen zwei Hauptfälle unterschieden werden:

Hauptfall A:

$$v_m = 1 ,$$

dann ist

$$q'_m = q''_m ,$$

also bestimmt sich

$$r'_m = r''_m ,$$

also

$$a'_{mm} = a''_{mm};$$

also nach (37)

$$a'_{mm} = a_{mm}. \tag{38}$$

Hauptfall B:

$$v_m \geqq 2,$$

dann ist nach (37), (33), (35)

$$\begin{cases} v_m^2 \cdot q''_m \leqq v_m^2 \cdot q''_m + r'_m = a'_{mm} \leqq a_{mm} \leqq a''_{mm} = \\ = q''_m + r''_m \leqq q''_m + \frac{1}{4} k_{m-1}; \end{cases} \tag{39}$$

folglich

$$(v_m^2 - 1) \cdot q''_m \leqq \frac{1}{4} k_{m-1}, \tag{40}$$

$$q''_m \leqq \frac{k_{m-1}}{4 \cdot (v_m^2 - 1)} \leqq \frac{1}{12} k_{m-1}. \tag{41}$$

Andrerseits ist nach (39)

$$q''_m \geqq a_{mm} - \frac{1}{4} k_{m-1}, \tag{42}$$

also ist nach (41) und (42)

$$\frac{1}{12} k_{m-1} \geqq q''_m \geqq a_{mm} - \frac{1}{4} k_{m-1}; \tag{43}$$

also

$$\frac{1}{12} k_{m-1} + \frac{1}{4} k_{m-1} = \frac{1}{3} k_{m-1} \geqq a_{mm}. \tag{44}$$

Wenn (44) nicht erfüllt ist, d.h. wenn

$$a_{mm} > \frac{1}{3} k_{m-1}, \tag{45}$$

so kann Hauptfall B nicht eintreten, es tritt also Hauptfall A ein. Wenn

$$a_{mm} = \frac{1}{3} k_{m-1} \tag{46}$$

und Hauptfall B gilt, d.h. $v_m \geqq 2$, so steht in (44), (43), (42), (41), (40) überall das Gleichheitszeichen; also

$$q''_m = \frac{1}{12} k_{m-1}; \qquad v_m = 2.$$

Es ist also in (39)

$$v_m^2 \cdot q_m'' = 4 \cdot \frac{1}{12} k_{m-1} = \frac{1}{3} k_{m-1},$$

$$q_m'' + \frac{1}{4} k_{m-1} = \frac{1}{12} k_{m-1} + \frac{1}{4} k_{m-1} = \frac{1}{3} k_{m-1};$$

mithin nach (39)

$$r_m' = 0,$$

$$\frac{1}{3} k_{m-1} = v_m^2 \cdot q_m'' = a_{mm}' = a_{mm} = a_{mm}'' = \frac{1}{3} k_{m-1}. \tag{47}$$

Es ist also

$$r_m'' = a_{mm}'' - q_m'' = \frac{1}{3} k_{m-1} - \frac{1}{12} k_{m-1} = \frac{1}{4} k_{m-1}.$$

Wenn

$$a_{mm} \geqq \frac{1}{3} k_{m-1}, \tag{48}$$

so ist stets

$$a_{mm}' = a_{mm}; \tag{49}$$

denn entweder es gilt (45), dann liegt Hauptfall A vor, und es gilt (49) wegen (38), oder es gilt (46), dann kann ebenfalls (49) nach Hauptfall A erfüllt sein, oder aber es gilt (46) und Hauptfall B, dann gilt (49) nach (47).

Es soll gezeigt werden, daß für $m \leqq 4$ stets (48) gilt. Es ist

$$a_{m+1,\, m+1} \geqq a_{mm}, \tag{50}$$

weil die Bedingung (20) spezieller wird, wenn man m durch $m+1$ ersetzt. Est ist unter Benutzung von (50)

$$\left\{\begin{aligned} a_{mm} &= \frac{3}{3} a_{mm} \geqq \frac{1}{3}(m-1)\, a_{mm} \geqq \\ &\geqq \frac{1}{3}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{m-1,\, m-1}) \geqq \\ &\geqq \frac{1}{3}(q_1 + q_2 + \cdots + q_{m-1}) = \frac{1}{3} k_{m-1}. \end{aligned}\right. \tag{51}$$

Für $m \leqq 3$ ist $3 > m - 1$; also gilt in (51) das Ungleichheitszeichen; mithin gilt nach (45) stets Hauptfall A. Für $m = 4$ kann Hauptfall B eintreten, wenn in (51) überall das Gleichheitszeichen gilt. Dann ist

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = q_1 = q_2 = q_3;$$

also

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0.$$

Es soll eine obere Schranke für $\frac{a_{mm}}{a'_{mm}}$ gefunden werden. Wenn (48) gilt, so ist nach (49)

$$\frac{a_{mm}}{a'_{mm}} = 1\,. \tag{52}$$

Es sei also

$$a_{mm} < \frac{1}{3} k_{m-1}\,. \tag{53}$$

Es sei p der größte Index $< m$, für den (53) nicht erfüllt ist, für den also (48) gilt:

$$a_{pp} \geqq \frac{1}{3} k_{p-1}\,. \tag{54}$$

Es soll für $p \leqq \mu \leqq m$ gezeigt werden, daß

$$\frac{a_{\mu\mu}}{a'_{mm}} \leqq \left(\frac{5}{4}\right)^{\mu-p} \tag{55}$$

und

$$\frac{k_{\mu-1}}{a'_{mm}} \leqq 4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\mu-p} - 1\,. \tag{56}$$

(55) ist im Hauptfall A für μ immer erfüllt, da dann

$$\frac{a_{\mu\mu}}{a'_{mm}} = \frac{a'_{\mu\mu}}{a'_{mm}} \leqq 1 \leqq \left(\frac{5}{4}\right)^{\mu-p}.$$

Insbesondere ist (55) im Falle $\mu = p$ immer erfüllt, da nach (49)

$$a_{pp} = a'_{pp}\,. \tag{57}$$

(56) lautet für $\mu = p$

$$\frac{k_{p-1}}{a'_{mm}} \leqq 4 - 1 = 3\,.$$

Es ist aber nach (27), (57), (54)

$$\frac{k_{p-1}}{a'_{mm}} \leqq \frac{k_{p-1}}{a'_{pp}} = \frac{k_{p-1}}{a_{pp}} \leqq 3\,;$$

also sind (55) und (56) für $\mu = p$ erfüllt.

Wenn für einen Index μ Hauptfall B vorliegt, also $v_\mu \geqq 2$, so ist nach (39)

$$\tag{58} \left\{ \begin{aligned} &\frac{a_{\mu\mu}}{a'_{mm}} \leqq \frac{a''_{\mu\mu}}{a'_{mm}} \leqq \frac{q''_\mu + \frac{1}{4}k_{\mu-1}}{a'_{mm}} \leqq \frac{q''_\mu + \dfrac{r'_\mu}{v_\mu^2} + \dfrac{1}{4}k_{\mu-1}}{a'_{mm}} = \frac{\dfrac{v_\mu^2 q''_\mu + r'_\mu}{v_\mu^2} + \dfrac{1}{4}k_{\mu-1}}{a'_{mm}} = \\ &\qquad = \frac{\dfrac{a'_{\mu\mu}}{v_\mu^2} + \dfrac{1}{4}k_{\mu-1}}{a'_{mm}} \leqq \frac{\dfrac{1}{4}a'_{mm} + \dfrac{1}{4}k_{\mu-1}}{a'_{mm}} = \frac{1}{4} + \frac{k_{\mu-1}}{4a'_{mm}}\,. \end{aligned} \right.$$

Der Beweis von (55) und (56) wird durch Induktion geführt. Die beiden Ungleichungen seien für ein μ bereits bewiesen und sollen für $\mu+1$ bewiesen werden.

Es ist nach den für μ schon bewiesenen Ungleichungen (55) und (56)

$$(59)\quad \begin{cases} \dfrac{k_\mu}{a'_{mm}} = \dfrac{q_\mu + k_{\mu-1}}{a'_{mm}} \leqq \dfrac{a_{\mu\mu} + k_{\mu-1}}{a'_{mm}} \leqq \left(\dfrac{5}{4}\right)^{\mu-p} + 4\cdot\left(\dfrac{5}{4}\right)^{\mu-p} - 1 = \\ \qquad = 5\cdot\left(\dfrac{5}{4}\right)^{\mu-p} - 1 = 4\cdot\left(\dfrac{5}{4}\right)^{\mu+1-p} - 1\,. \end{cases}$$

Damit ist (56) für $\mu+1$ bewiesen.

Es ist, wenn für $\mu+1$ der Hauptfall B vorliegt, nach (58) und (59)

$$\frac{a_{\mu+1,\mu+1}}{a'_{mm}} \leqq \frac{1}{4} + \frac{k_\mu}{4a'_{mm}} \leqq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\left(4\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{\mu+1-p} - 1\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^{\mu+1-p}.$$

Damit ist (55) auch im Hauptfall B für $\mu+1$ bewiesen. Da (55) und (56) für $\mu = p$ bewiesen sind, gelten sie allgemein für alle μ des Intervalls $p < \mu \leqq m$.

Insbesondere ist

$$(60)\qquad \frac{a_{mm}}{a'_{mm}} \leqq \left(\frac{5}{4}\right)^{m-p};$$

$$(61)\qquad \frac{k_{m-1}}{a'_{mm}} \leqq 4\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{m-p} - 1\,.$$

Nach (51) und (54) ist $p \geqq 4$; also ist nach (60) und (61) für $m \geqq 5$

$$(62)\qquad \frac{a_{mm}}{a'_{mm}} \leqq \left(\frac{5}{4}\right)^{m-4};$$

$$(63)\qquad \frac{k_{m-1}}{a'_{mm}} \leqq 4\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{m-4} - 1\,.$$

Für $m \leqq 4$ gilt (52)

$$\frac{a_{mm}}{a'_{mm}} = 1\,.$$

Es soll λ_n so gefunden werden, daß

$$\frac{D}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}} \geqq \lambda_n\,.$$

Man setze

$$(64)\qquad \frac{D}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}} = \frac{q_1 q_2 \cdots q_n}{a'_{11}a'_{22}\cdots a'_{nn}} \cdot \frac{a'_{11}a'_{22}\cdots a'_{nn}}{a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}}\,.$$

Um den ersten Faktor auf der rechten Seite von (64) abzuschätzen, betrachten wir die Hilfsform:

$$(65) \qquad f^* = \frac{q_1}{a'_{11}}\zeta_1^2 + \frac{q_2}{a'_{22}}\zeta_2^2 + \ldots + \frac{q_n}{a'_{nn}}\zeta_n^2 .$$

Die q_μ werden gegenüber f in (15) abgeändert, die ζ_μ bleiben ungeändert. (65) ist also wegen (14) die Staffeldarstellung von f^*. Es ist die Determinante von f^* analog Gleichung (12)

$$(66) \qquad D^* = \frac{q_1}{a'_{11}} \cdot \frac{q_2}{a'_{22}} \cdot \ldots \cdot \frac{q_n}{a'_{nn}} .$$

Es soll gezeigt werden, daß für jedes ganzzahlige Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$, in dem nicht sämtliche $x_\mu = 0$,

$$f^* \geqq 1 .$$

Es sei m der größte Index, für den

$$x_m \neq 0 ,$$

so daß

$$x_\mu = 0 \text{ für } \mu > m .$$

Dann ist nach (14)

$$(67) \qquad \zeta_\mu = 0 \text{ für } \mu > m ;$$

also ist wegen (67), (27), (26)

$$f^* = \Sigma_{\mu=1}^{n} \frac{q_\mu}{a'_{\mu\mu}} \cdot \zeta_\mu^2 = \Sigma_{\mu=1}^{m} \frac{q_\mu}{a'_{\mu\mu}} \zeta_\mu^2 \geqq \frac{1}{a'_{mm}} \cdot \Sigma_{\mu=1}^{m} q_\mu \zeta_\mu^2 =$$
$$= \frac{1}{a'_{mm}} \cdot \Sigma_{\mu=1}^{n} q_\mu \zeta_\mu^2 = \frac{f}{a'_{mm}} \geqq 1 .$$

Es ist

$$f^*(1, 0, 0, \ldots, 0) = \frac{q_1}{a_{11}} \cdot 1^2 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 1;$$

mithin

$$(68) \qquad \operatorname{Min} f^* = 1$$

für alle ganzzahligen Werte x_μ, die nicht sämtlich 0 sind.

Wenn D die Determinante einer eigentlich definiten quadratischen Form in n Veränderlichen ist und M ihr Minimum für alle ganzzahligen Werte der Veränderlichen, die nicht sämtlich 0 sind, so ist nach Herrn Blichfeldt [9])

$$(69) \qquad D \geqq \gamma_n \cdot M^n .$$

[9]) Siehe Anm. [6]).

Hierin ist

$$\gamma_n = \frac{\pi^n}{2^n \cdot \left(\Gamma(2+\frac{n}{2})\right)^2}. \tag{70}$$

Für die quadratische Form f^* ergibt sich nach (66), (68) und (69)

$$D^* = \frac{q_1 q_2 \cdots q_n}{a'_{11} a'_{22} \cdots a'_{nn}} \geqq \gamma_n \,. \tag{71}$$

Setzt man dies in (64) ein und benutzt man zur Abschätzung des zweiten Faktors (62) und (52), so erhält man für $n \geqq 5$

$$\frac{D}{a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}} \geqq \lambda_n = \gamma_n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\sum_{m=5}^{n}(m-4)} = \gamma_n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)}. \tag{72}$$

Für $n \leqq 4$ ist wegen (52)

$$\frac{D}{a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}} \geqq \gamma_n, \tag{73}$$

Will man nicht das Blichfeldtsche Ergebnis (70), sondern nur das einfacher zu beweisende Hermitesche Ergebnis

$$\gamma_n \geqq \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \tag{74}$$

benutzen, so erhält man für $n \geqq 5$

$$\begin{cases} \dfrac{D}{a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}} \geqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)} > \\ \qquad > \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}n(n-1)} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}n(n-1)}. \end{cases} \tag{75}$$

(75) gilt wegen (73) und (74) bereits für $n \geqq 2$.

Es soll nun mehr β_{tm} abgeschätzt werden.

Es ist nach (13), (11), (23) und (25) für irgend zwei Indices $m > t$

$$\begin{cases} \beta_{tm}^2 = \dfrac{b_{tm}^2}{b_{tt}^2} = \dfrac{b_{tm}^2}{q_t} \leqq \dfrac{\sum_{l=1}^{t} b_{lm}^2}{q_t} \leqq \dfrac{k_t}{4q_t} = \\ \qquad = \dfrac{k_{t-1}+q_t}{4q_t} = \dfrac{k_{t-1}}{4q_t} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{k_{t-1}}{4a'_{tt}} \cdot \dfrac{a'_{tt}}{q_t} + \dfrac{1}{4}. \end{cases} \tag{76}$$

Setzt man

$$P_1 = \Pi_{\lambda=1}^{t} \frac{a'_{\lambda\lambda}}{q_\lambda}, \tag{77}$$

$$P_2 = \Pi_{\lambda=1}^{t-1} \frac{a_{\lambda\lambda}}{a'_{\lambda\lambda}}, \tag{78}$$

$$P_3 = \Pi_{\lambda=1}^{t-1} \frac{q_\lambda}{a_{\lambda\lambda}}, \tag{79}$$

so ist

$$P_1 P_2 P_3 = \frac{a'_{tt}}{q_t}. \tag{80}$$

Es gilt (68) auch für diejenige Form f_t^*, die aus f^* entsteht, wenn man $x_{t+1} = 0$, $x_{t+2} = 0, \ldots, x_n = 0$ setzt. Also ist nach (71) die Determinante dieser Form

$$D_t^* = P_1^{-1} \geqq \gamma_t, \tag{81}$$

mithin

$$P_1 \leqq \gamma_t^{-1}. \tag{82}$$

Es zei zunächst

$$t \geqq 5,$$

dann ist nach (62)

$$P_2 \leqq \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}(t-4)(t-5)}. \tag{83}$$

Da $q_\lambda \leqq a_{\lambda\lambda}$, so ist

$$P_3 \leqq 1. \tag{84}$$

Unter Benutzung von (76) bis (84), (63) und (72) erhält man

$$\tag{85} \left\{ \begin{aligned} \beta_{tm}^2 &\leqq \frac{k_{t-1}}{4a'_{tt}} \cdot P_1 P_2 P_3 + \frac{1}{4} \\ &\leqq \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{t-4} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}(t-4)(t-5)} \cdot \gamma_t^{-1} + \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}(t-3)(t-4)} \cdot \gamma_t^{-1} - \frac{1}{4} \cdot \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}(t-4)(t-5)} \cdot \gamma_t^{-1} - 1\right) \\ &< \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}(t-3)(t-4)} \cdot \gamma_t^{-1} = \lambda_t^{-1}. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist benutzt, daß $(t-4)(t-5) \geqq 0$ und daß $\gamma_t < 1$, also

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}(t-4)(t-5)} \cdot \gamma_t^{-1} - 1 \geqq 1 \cdot \gamma_t^{-1} - 1 > 1 - 1 = 0.$$

Unter Benutzung von (70) und (72) erhält man für $t \geqq 5$

$$|\beta_{tm}| < \lambda_t^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{4}(t-3)(t-4)} \cdot \Gamma\left(2 + \frac{t}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{t}{2}}.$$

Wenn

$$t \leqq 4,$$

wird nach (52)

$$\frac{a_{\lambda\lambda}}{a'_{\lambda\lambda}} = 1,$$

also

(86) $$P_2 = 1.$$

Ferner ist

$$\frac{k_{t-1}}{4a'_{tt}} \leqq \frac{a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{t-1,\,t-1}}{4a_{tt}} \leqq \frac{t-1}{4};$$

also nach dem Anfang von (85)

(87) $$\beta_{tm}^2 \leqq \frac{k_{t-1}}{4a'_{tt}} \cdot P_1 P_2 P_3 + \frac{1}{4} \leqq \frac{t-1}{4} \cdot \gamma_t^{-1} + \frac{1}{4}.$$

Da $\gamma_t < 1$ und für $t \leqq 4$ wegen (73) gilt $\gamma_t = \lambda_t$, so ist

$$\beta_{tm}^2 < \frac{t-1}{4} \cdot \gamma_t^{-1} + \frac{\gamma_t^{-1}}{4} = \frac{t}{4} \gamma_t^{-1} \leqq \gamma_t^{-1} = \lambda_t^{-1}.$$

Es gilt somit die Abschätzung

$$\beta_{tm}^2 \leqq \lambda_t^{-1}$$

auch für $t \leqq 4$.

Für $t \leqq 4$ kann man für γ_t die bekannten genauen Werte benutzen.

$$\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = \frac{3}{4},\ \gamma_3 = \frac{1}{2},\ \gamma_4 = \frac{1}{4}.$$

Man erhält aus (87)

$$\beta_{1m}^2 \leqq \frac{0}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \qquad\qquad = \frac{1}{4},$$

$$\beta_{2m}^2 \leqq \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

$$\beta_{3m}^2 \leqq \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{1} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

$$\beta_{4m}^2 \leqq \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} + \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}.$$

Ersetzt man für $t \geqq 5$ in P_2 den Index $t-1$ durch t, so erhält man analog (83)

(88) $$\overline{P}_2 = \Pi_{\lambda=1}^{t} \frac{a_{\lambda\lambda}}{a'_{\lambda\lambda}} \leqq \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}(t-3)(t-4)}.$$

Unter Benutzung von (82), (88) und (84) erhält man

(89) $$\frac{a_{tt}}{q_t} = P_1 \overline{P}_2 P_3 \leqq \gamma_t^{-1} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}(t-3)(t-4)} = \lambda_t^{-1}.$$

Für $t \leqq 4$ ist analog (86)

$$\overline{P}_2 = 1,$$

also

$$\frac{a_{tt}}{q_t} = P_1 \bar{P}_2 P_3 \leqq \gamma_t^{-1}.$$

Um zu einer Abschätzung für v_m zu gelangen, betrachte ich die Hilfsform in m Veränderlichen, worin $1 \leqq m \leqq n$,

$$\hat{f}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{90}$$

Hierin sei

$$x_\mu = \hat{x}_\mu + \hat{x}_m x''_\mu \quad \text{für } 1 \leqq \mu < m, \tag{91}$$

$$x_\mu = \hat{x}_m x''_\mu \quad \text{für } m \leqq \mu \leqq n. \tag{92}$$

Dabei sind die $x''_1, x''_2, \ldots, x''_n$ feste ganze Zahlen, die durch (26), (28) bis (32), (34) bis (36) definiert seien. Es soll gezeigt werden, daß $\hat{f}$ eine nach Minkowski reduzierte Form ist.

Es sind die Bedingungen (19) und (20) für $\hat{f}$ zu verifizieren. Es sei $1 \leqq l \leqq m$ und es sei

$$(\hat{x}_l, \hat{x}_{l+1}, \ldots, \hat{x}_m) = 1. \tag{93}$$

Dann ist zu zeigen, daß

$$\hat{f}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_l, \ldots, \hat{x}_m) \geqq \hat{a}_{ll}.$$

Es sei zunächst

$$l < m;$$

dann ist

$$\begin{cases} \hat{a}_{ll} = \hat{f}(0, 0, \ldots, 0, \hat{x}_l = 1, 0, \ldots, \hat{x}_m = 0) \\ = f(0, 0, \ldots, 0, x_l = 1, 0, \ldots, x_n = 0) = a_{ll}. \end{cases} \tag{94}$$

Dann ist wegen (93), (91), (92)

$$\begin{cases} 1 = \sum_{\mu=l}^{m} y \hat{x}_\mu = \sum_{\mu=l}^{m-1} y(x_\mu - \hat{x}_m x''_\mu) + y \hat{x}_m \\ = \sum_{\mu=l}^{m-1} y x_\mu + y \hat{x}_m. \end{cases} \tag{95}$$

Hierin steht y für irgend welche ganze rationale Zahlkoeffizienten, deren genauere Bezeichnung kein Interesse hat. Wegen (92) und (31) ist

$$(x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = \hat{x}_m;$$

also

$$\hat{x}_m = \sum_{\mu=m}^{n} y x_\mu.$$

Dies in (95) eingesetzt ergibt

$$1 = \Sigma_{\mu=l}^{m-1} y x_\mu + \Sigma_{\mu=m}^{n} y x_\mu = \Sigma_{\mu=l}^{n} y x_\mu ,$$

also ist

$$(x_l, x_{l+1}, \ldots, x_n) = 1 ,$$

mithin nach (19), (20)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq a_{ll} ,$$

also ist wegen (90) und (94)

$$\hat{f}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m) \geqq \hat{a}_{ll} .$$

Damit sind die Minkowskischen Reduktionsbedingungen für $l < m$ verifiziert.

Es sei jetzt

$$l = m .$$

Es ist wegen (35)

$$(96) \qquad \begin{cases} \hat{a}_{mm} = \hat{f}(0, 0, \ldots, 0, \hat{x}_m = 1) \\ \qquad = f(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'', \ldots, x_n'') = a_{mm}'' . \end{cases}$$

Die Bedingung (93) lautet jetzt

$$\hat{x}_m = 1 .$$

Da für $1 \leqq \mu \leqq m-1$ der Wert $\hat{x}_\mu$ noch beliebig ist, so ist auch x_μ beliebig. Es sind also für die Aufsuchung von $\hat{a}_{mm}$ zur Konkurrenz dieselben Werte von f zugelassen wie in (34). Deren Minimum war aber a_{mm}''. Also erfüllt auch $\hat{a}_{mm} = a_{mm}''$ die Reduktionsbedingungen; es ist also $\hat{f}$ nach Minkowski reduziert.

Es ist für $1 \leqq l \leqq m-1$ nach (14), (91), (92)

$$\begin{aligned} \zeta_l &= x_l + \Sigma_{\mu=\lambda+1}^{n} \beta_{l\mu} x_\mu \\ &= \hat{x}_l + \Sigma_{\mu=l+1}^{m-1} \beta_{l\mu} \hat{x}_\mu + \hat{\beta}_{lm} \hat{x}_m , \end{aligned}$$

worin $\hat{\beta}_{lm} \hat{x}_\mu$ die sämtlichen auftretenden Glieder mit $\hat{x}_m$ zusammenfaßt. Setzt man für $1 \leqq l \leqq m-1$

$$\hat{q}_l = q_l , \quad \hat{\zeta}_l = \zeta_l$$

und wegen (32)

$$(97) \qquad \begin{cases} \hat{q}_m = h_m(x_m'', x_{m+1}'', \ldots, x_n'') = q_m'' , \\ \hat{\zeta}_m = \hat{x}_m , \end{cases}$$

so wird analog (15)

$$\hat{f} = \hat{q}_1 \hat{\zeta}_1^2 + \cdots + \hat{q}_m \hat{\zeta}_m^2$$

die Staffelzerlegung von $\hat{f}$.

Man kann sich auch leicht davon überzeugen, daß a'_{mm} für $\hat{f}$ die gleiche Rolle spielt wie für f, wovon ich jedoch im folgenden keinen Gebrauch machen werde.

Es lassen sich die gewonnenen Hauptresultate auch auf $\hat{f}$ anwenden. Man erhält nach (89)

$$\frac{\hat{a}_{mm}}{\hat{q}_m} \leqq \lambda_m^{-1},$$

also für die Form f wegen (96) und (97)

$$\frac{a''_{mm}}{q''_m} \leqq \lambda_m^{-1}.$$

Also ist nach (33) und (37)

$$v_m^2 \leqq \frac{v_m^2 \cdot q''_m + r'_m}{q''_m} = \frac{a'_{mm}}{q''_m} \leqq \frac{a''_{mm}}{q''_m} \leqq \lambda_m^{-1},$$

mithin

$$v_m \leqq \lambda_m^{-\frac{1}{2}}.$$

Damit ist v_m abgeschätzt.

Zweites Kapitel.

Ich will im Anschluß an (75) untersuchen, welches der größte Wert c ist, für den für alle $n \geqq 2$

$$\lambda_n \geqq c^{\frac{1}{2}n(n-1)}. \tag{98}$$

Hierbei ist der klassische Hermitesche Exponent $\frac{1}{2}n(n-1)$ vorgeschrieben. Es ist nach (75)

$$c \geqq \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Es soll jedoch (72) und (70) benutzt werden.

Da $\log \gamma_n$ nach (70) von der Größenordnung $n \log n$ ist, $\log\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)}\right)$ von der Größenordnung $\mathrm{const} \cdot n^2$, so ist leicht zu sehen, daß für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$

$$c = \frac{4}{5} - \varepsilon = 0{,}8 - \varepsilon$$

genügt für alle $n \geqq N(\varepsilon)$. Es fragt sich also, welche c zulässig sind, wenn (98) ausnahmslos für $n \geqq 2$ gelten soll.

Für $n = 2$ ist der genaue Wert

$$\lambda_2 = \gamma_2 = \frac{3}{4} = 0{,}75\,.$$

Ferner ist $\frac{1}{2}n(n-1) = 1$. Also ist

$$c \leqq 0{,}75.$$

Setzt man

$$c_n = \lambda_n^{\frac{2}{n(n-1)}},$$

so ergibt eine Ausrechnung mit Hilfe siebenstelliger Logarithmen die folgende Tabelle. Bei der Ausrechnung ist benutzt, daß

$$\Gamma(x) = (x-1)\cdot\Gamma(x-1),$$

$$\Gamma(1) = 1,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$$

(99)

n	c_n
11	0,742 850
12	0,742 341
13	0,742 052
14	0,741 959
15	0,742 002
16	0,742 156
17	0,742 397

Hierin ist nur die letzte Stelle unsicher. Die Tabelle (99) zeigt ein Minimum für $n = 14$. Wegen der Unsicherheit der letzten Stelle werde

(100) $$c = 0{,}74195$$

gesetzt. Es soll gezeigt werden, daß

(101) $$c^{\frac{1}{2}n(n-1)} < \lambda_n.$$

für alle $n \geqq 2$.

Für $n \leqq 4$ ist nach Hermite

(102) $$c^{\frac{1}{2}n(n-1)} < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \leqq \gamma_n = \lambda_n.$$

Es sei also im Folgenden $n \geqq 5$. Man setze

$$c^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \lambda_n^{-1} = \varrho_n.$$

Es soll für $n \geqq 5$ geseigt werden, daß

$$Q_n < 1.$$

Bei der folgenden Quotientenbildung müssen, ebenso wie bei der Ausrechnung, die Reihe der geraden und die Reihe der ungeraden n für sich behandelt werden. Es ist nach (70) und (72)

$$Q_n = \left(c \cdot \frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \left(\Gamma\left(2+\frac{n}{2}\right)\right)^2 \cdot \frac{2^n}{\pi^n} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{3n-6};$$

$$R_n = \frac{Q_n}{Q_{n-2}} = \left(c \cdot \frac{5}{4}\right)^{2n-3} \cdot \left(1+\frac{n}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3;$$

$$S_n = \frac{R_n}{R_{n-2}} = \left(c \cdot \frac{5}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1+\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\right)^2 = \left(c \cdot \frac{5}{4}\right)^4 \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right)^2.$$

Setzt man

$$S_n = S_n'^2,$$

so wird

$$S_n' = \left(c \cdot \frac{5}{4}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right).$$

Setzt man

$$\left(c \cdot \frac{5}{4}\right)^{-2} = 1 + \frac{2}{a},$$

so ergibt die Ausrechnung

$$a = 12{,}30012.$$

Es ist

$$S_n' = \left(1+\frac{2}{a}\right)^{-1} \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right),$$

also wird

$$(103) \qquad \begin{cases} S_n' > 1 & \text{für } n \leqq 12, \\ S_n' < 1 & \text{für } n \geqq 13. \end{cases}$$

Man setze $R_n = R_n'^2$, also $S_n' = \dfrac{R_n'}{R_{n-2}'}$.

Die geraden R_n' bilden mithin eine Reihe, die bis zu einem Maximum steigt und dann fortgesetzt abnimmt; die ungeraden R_n' bilden eine ebensolche Reihe. Es ist nach (103)

$$R_{11}' > R_9', \qquad R_{11}' > R_{13}',$$
$$R_{12}' > R_{10}', \qquad R_{12}' > R_{14}'.$$

Das Maximum für die ungeraden R_n' ist also R_{11}'; für die geraden R_n' ist es R_{12}'. Für log R_n' ergibt sich folgende Tabelle

n	$\log R'_n$	
7	9,9864279	− 10
8	9,9994700	− 10
9	0,0081473	
10	0,0132205	
11	0,0152672	
12	0,0147364	
13	0,0119843	
14	0,0072976	
15	0,0009111	
16	9,9930193	− 10
17	9,9837850	− 10.

Die Maximalwerte R'_{11} und R'_{12} sind größer als 1. R'_7 und R'_8 sind kleiner als 1. Dazwischen wächst R'_n monoton für die geraden n und monoton für die ungeraden n, überschreitet also für die Reihe der geraden n und für die Reihe der ungeraden n an irgend einer Stelle die 1. Auf diese Stelle kommt es für den Beweis nicht an. Die Ausrechnung von R'_9 und R'_{10} ist für den Beweis nicht unbedingt erforderlich. Ebenso brauchte man R'_{13} nicht zu berechnen.

R'_n nimmt für $n > 11$ und $n > 12$ ständig ab und überschreitet den Wert 1 zum zweiten Male. Die Kenntnis dieser Stellen ist für den Beweis wesentlich. Es ist

$$(104)\qquad \begin{cases} R'_{14} > 1, & R'_{16} < 1, \\ R'_{15} > 1, & R'_{17} < 1. \end{cases}$$

Setzt man $Q_n = Q_n'^2$, also $R'_n = \frac{Q'_n}{Q'_{n-2}}$ so nimmt für ungerades $n \geqq 5$ der Quotient Q'_n zunächst ab bis zu irgend einem Minimum. (Es ist dies Q'_7, was wir aber für den Beweis nicht zu wissen brauchen.) Dann steigt Q'_n bis zu einem Maximum. Nach (104) ist

$$Q'_{15} > Q'_{13}, \quad Q'_{15} > Q'_{17}.$$

Also liegt das Maximum für ungerades n bei Q'_{15}; von da ab nimmt Q'_n für ungerades n ständig ab.

Für gerades $n \geqq 6$ nimmt Q'_n zunächst ab bis zu irgend einem Minimum. (Es ist dies Q'_8, was wir aber für den Beweis nicht zu wissen brauchen.) Dann steigt Q'_n bis zu einem Maximum. Nach (104) ist

$$Q'_{14} > Q'_{12}, \quad Q'_{14} > Q'_{16}.$$

Also liegt das Maximum für gerades n bei Q'_{14}. Von da ab nimmt Q'_n für gerades n ständig ab.

Die Ungleichung $Q'_n < 1$ ist also für alle ungeraden $n \geqq 5$ bewiesen, wenn sie durch Rechnung für $n = 5$ und $n = 15$ verifiziert wird; sie ist für alle geraden $n \geqq 6$ bewiesen, wenn sie durch Rechnung für $n = 6$ und $n = 14$ verifiziert wird. Man erhält aber

für ungerades n

n	$\log Q'_n$	
5	9,9756726	$-$ 10
15	9,9984103	$-$ 10,

für gerades n

n	$\log Q'_n$	
6	9,9650260	$-$ 10
14	9,9997505	$-$ 10.

Der Fehler beträgt weniger als 400 Einheiten der siebenten Dezimale. Es sind also alle vier Logarithmen kleiner als 0. Also ist

$$Q'_n < 1 \text{ für } n = 5,\ 15;\ 6,\ 14.$$

Damit ist für den Wert (100) die Ungleichung (101) für alle $n \geqq 5$, also in Verbindung mit (102) für alle $n \geqq 2$ bewiesen.

(Eingegangen den 3. November 1937.)