COMPOSITIO MATHEMATICA

A. VAN HEEMERT

Topologische Gruppen und unzerlegbare Kontinua

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 319-326
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__319_0>

Topologische Gruppen und unzerlegbare Kontinua

von

A. van Heemert

Hilversum

In dieser Note [1]) rekapitulieren wir erst einiges über die R_n-adische Entwicklung von topologischen Räumen und Gruppen und beweisen einen später benötigten Hilfssatz. Sodann wenden wir dies an, indem wir die Frage nach den kommutativen kompakten zusammenhängenden topologischen Gruppen (wir nennen sie kurz k-Gruppen), die unzerlegbares Kontinuum sind, beantworten. Es ergibt sich dabei, daß die einzigen derartigen k-Gruppen diejenigen sind, die *ein*dimensional und nicht lokal-zusammenhängend sind; es sind die *ein*dimensionalen Solenoiden. Daß die Bedingung „nicht lokal-zusammenhängend" notwendig ist, folgt übrigens schon daraus, daß in einem unzerlegbaren Kontinuum jedes Teilkontinuum auch „Kondensationskontinuum" ist [2]).

Bei der Beantwortung dieser Frage, spielt der Begriff des universellen Überlagerungsraumes eine wesentliche Rolle. In dieser Hinsicht wird noch ein teilweise allgemeinerer Satz bewiesen.

Die Zerlegbarkeit einer k-Gruppe, die direktes Produkt von k-Gruppen ist, ist übrigens evident, weil sich schon das topologische Produkt von zwei willkürlichen Kontinua leicht zerlegen läßt. Wenn nämlich A und B Kontinua sind, weiter $A = C + D$, wo C und D abgeschlossene echte Teilmengen von A sind, so gibt $(C \times B + A \times b) + (D \times B + A \times b)$ eine Zerlegung des topologischen Produktes $A \times B$ an, wenn noch b willkürlich aus B ist.

1. Liegt eine Folge R_1, R_2, ... von topologischen Räumen [3]) vor und eine Folge von stetigen Abbildungen $f_n^{n+1} R_{n+1} \subset R_n$

---

[1]) Durch mehrere mündliche Bemerkungen von Herrn H. Freudenthal wurde diese Arbeit wesentlich gefördert.

[2]) Vergl. S. Janiszewski & C. Kuratowski, Sur les continus indécomposables [Fund. Math. 1 (1920), 210—222].

[3]) Wir verstehen hier darunter immer Räume, die den Hausdorffschen Umgebungsaxiomen nebst zweitem Abzählbarkeitsaxiom genügen.

($n = 1, 2, \ldots$), so bilden die Aggregate $a_1, a_2, \ldots$, wo $a_i \in R_i$ und $f_i^{i+1} a_{i+1} = a_i$, eine Menge, die sich zu einem topologischen Raume R, dem R_n-adischen Limes der Folge so topologisieren läßt, daß die Konvergenz in diesem Raume äquivalent ist mit „koordinatenweiser" Konvergenz. Sind die R_n topologische Gruppen, so sollen die Abbildungen f_n^{n+1} noch homomorph sein. Diese Bedingung ist somit inbegriffen, wenn von einer R_n-adischen Entwicklung mittels topologischen Gruppen geredet wird; der R_n-adische Limes der Folge ist dann leicht als topologische Gruppe zu erklären. Wenn die f_n^{n+1} Abbildungen „auf" sind, so wird von auf-R_n-adischer Entwicklung gesprochen.

Die von den f_i^{i+1}, $i = 1, 2, \ldots$, induzierten Abbildungen von R_m auf R_n, $m > n$, und von R auf R_n werden mit f_n^m bzw. f_n bezeichnet [4].

Man folgert leicht: Wenn die R_n kompakt sind, so ist R kompakt [5].

Es gilt aber weiter folgender

Hilfssatz: Sind die R_n kompakt und zusammenhängend, und bilden sie eine auf-R_n-adische Entwicklung von R, so ist R zusammenhängend.

Beweis: Wäre R nicht zusammenhängend, so gäbe es zwei echte abgeschlossene und disjunkte Teilmengen P und Q, so daß $R = P + Q$. Sei $f_n P = P_n$ und $f_n Q = Q_n$; dann sind P_n und Q_n kompakt und $R_n = P_n + Q_n$, also ist der Durchschnitt $P_n Q_n$ kompakt und nicht leer. Nehmen wir jetzt eine Folge von Punkten $p^1, p^2, \ldots$ aus P und $q^1, q^2, \ldots$ aus Q, so daß von p^n und q^n die n-ten Koordinaten zusammen- und somit in $P_n Q_n$ fallen, so ist jeder Häufungspunkt der ersten Reihe auch einer der zweiten. Aus der Kompaktheit der $P_n Q_n$ folgert man aber einfach die Existenz eines solchen Häufungspunktes mittels des Diagonalverfahrens. Damit ist ein Widerspruch erreicht.

Nebenbei werde hier noch bemerkt, daß sich der Satz auch beweisen ließe, wenn es sich nur um eine R_n-adische Entwicklung handelte [6]. Die Bedingung der Kompaktheit kann man aber nicht ohne weiteres eliminieren, wie folgendes Beispiel zeigt. Es

---

[4]) Zu diesen Begriffsbildungen: H. FREUDENTHAL [Comp. Math. **4** (1937)], 145.

[5]) H. FREUDENTHAL, l.c. p. 154.

[6]) Durch Anwendung des bekannten Satzes, daß der Durchschnitt einer absteigenden Folge von Kontinua in einem metrisierbaren Raume ein einziger Punkt oder aber wieder ein Kontinuum ist, auf die $f_n^m R_m \subset R_n$ ($m = n+1, n+2, \ldots$).

sei R_i die Menge der Punkte einer Euklidischen Ebene, welche die unten angegebenen Polarkoordinaten besitzen:

$$r = 1, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi;$$

$$0 \leqq r \begin{cases} \leqq 1 & \text{für } n > i \\ \leqq \frac{1}{2} & \text{,, } n \leqq i \end{cases}, \quad \varphi = \frac{\pi}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Die Abbildungen f_i^{i+1} seien definiert durch:

$$\left.\begin{array}{llll} f_i^{i+1}(\varphi, r) = (\varphi, r) & \text{für } \varphi \neq \dfrac{\pi}{i+1} & \text{oder } r = 1 \\ f_i^{i+1}(\varphi, r) = (\varphi, 2r) & \text{,, } \varphi = \dfrac{\pi}{i+1}, & r \neq 1 \end{array}\right\} i = 1, 2, \ldots$$

Der durch diese auf-R_n-adische Entwicklung erzeugte Raum ist nicht zusammenhängend, wie sich leicht aus obengenanntem Konvergenzkriterium ergibt.

2. Es sei V^m die Additionsgruppe der vom Punkte $(0, 0, \ldots, 0)$ ausgehenden Vektoren in einem m-dimensionalen euklidischen Raume. Die Faktorgruppe T^m von V^m nach dem diskreten Normalteiler N^m aller Elemente von V^m mit ganzzahligen Komponenten heißt dann eine Torusgruppe. Um die Faktorgruppe $\widetilde{T}^m$ von T^m nach einem abgeschlossenen Normalteiler E von T^m zu bilden, kann man so verfahren: Man betrachtet das Urbild E' von E bei der Abbildung $V^m \to V^m/N^m$, d.h. somit das Urbild von E in der universellen Überlagerungsgruppe von T^m. E' ist ein abgeschlossener Normalteiler von V^m und es gilt $\widetilde{T}^m = T^m/E \cong V^m/E'$ [7]). Es wird E' erzeugt durch eine lineare Untergruppe L und durch eine diskrete Untergruppe D von V^m und es gibt in E' genau m linear unabhängigen Elemente. Die Dimension von E' ist gleich der von E, die Dimension von $\widetilde{T}^m$ ist somit $m - p$, wenn p derjenige von E war.

Um von einer Teilmenge $\widetilde{U}$ von $\widetilde{T}^m$ auf ihr Urbild U in T^m zurückzugehen, kann man so verfahren: Man geht erst auf ihr Urbild U' in der universellen Überlagerungsgruppe V^m/L von $\widetilde{T}^m$ zurück, von U' nimmt man das Urbild U'' in V^m bei der Abbildung $V^m \to V^m/L$, schließlich ist dann U das Bild von U'' bei der Abbildung $V^m \to V^m/N^m$.

Jetzt definiert man für eine beliebige Torusgruppe T^l der

[7]) Vergl. hierzu die Ausführungen von H. Freudenthal [Annals of Math. (2) 37 (1936)], p. 50. Das Zeichen $\cong$ bedeutet „topologisch isomorph".

Dimension l ($l = 1, 2, \ldots$) folgenden Typus von speziellen abgeschlossenen (und somit kompakten) Teilmengen: z-Menge von T^l heiße jede abgeschlossene und zusammenhängende echte Teilmenge von T^l, deren Urbild in der universellen Überlagerungsgruppe von T^l zusammenhängend ist. Offenbar muß dann $l \neq 1$ sein; ist aber $l \neq 1$, so kann man einfach derartige Mengen angeben.

Ist nun $\tilde{U}$ eine z-Menge in $\tilde{T}^m$ so ist U, ihr Urbild in T^m, eine z-Menge in T^m. U ist nämlich abgeschlossen, weiter ist das Urbild U' von U in V^m/L zusammenhängend, somit ist, wie man sich ohne Mühe klar macht, auch U'' und damit U zusammenhängend.

3. Es werde eine m-dimensionale Solenoide S^m ($m = 1, 2, \ldots, \infty$) definiert als eine auf-R_n-adisch von Torusgruppen $T_n^{m_n}$ ($n = 1, 2, \ldots$) der Dimension m_n erzeugte Gruppe, wo für endliches m die m_n fast alle gleich m sind, für $m = \infty$ die m_n über alle Grenzen wachsen [8]). Die Abbildung $f_n^{n+1} T_{n+1}^{m_{n+1}} = T_n^{m_n}$ ist ein stetiger Homomorphismus und, wie einfach zu beweisen ist, dieser Homomorphismus ist gebietstreu; wegen dieser Eigenschaft ist sie somit durch Faktorgruppenbildung nach einem abgeschlossenen Normalteiler zu erhalten [9]).

Als Grenzfälle treten hier die m-dimensionalen Torusgruppen auf ($m = 1, 2, \ldots, \infty$); wir bezeichnen sie als „ausgeartete" Solenoiden; man erhält diese Grenzfälle für endliche m wenn fast alle Abbildungen $T_{n+1}^{m_{n+1}} \to T_n^{m_n}$ topologische Isomorphismen, für $m = \infty$ z.B., wenn diese Abbildungen für fast alle n entstehen durch Faktorgruppenbildung nach einem Normalteiler $E_{n+1} \subset T_{n+1}^{m_{n+1}}$, dessen Urbild in der universellen Überlagerungsgruppe von $T_{n+1}^{m_{n+1}}$ eine zusammenhängende Untergruppe ist.

Es sei nun erst $m \neq 1$, d.h. in der Entwicklung $T_1^{m_1}, T_2^{m_2}, \ldots$ sind fast alle $m_i \neq 1$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dann annehmen daß schon $m_1 \neq 1$ und somit alle $m_i \neq 1$ ($i = 1, 2, \ldots$). Wir nehmen dann in $T_1^{m_1}$ zwei z-Mengen A_1 und B_1 so daß $A_1 + B_1 = T_1^{m_1}$ (man sieht leicht wie das möglich ist) und gehen schrittweise auf ihre Urbilder A_2 und B_2, A_3 und $B_3, \ldots$ in bzw. $T_2^{m_2}, T_3^{m_3}, \ldots$ zurück. Die Folgen

---

[8]) Sie wurde für $m = 1$ zuerst definiert durch D. van Dantzig [Fund. Math. **15** (1930), 102—125]. Die hier für beliebige m gegebene Definition, findet man in ungefähr derselben Form bei H. Freudenthal [Comp. Math. **4** (1937), 232].

[9]) Eine Abbildung heißt gebietstreu, wenn das Bild einer offenen Menge wieder offen ist. Vergl. hierzu die Ausführungen von H. Freudenthal [Annals of Math. (2) **37** (1936), 46—56]; man vergleiche besonders 7 und 10 jener Arbeit.

$A_1, A_2, \ldots$ und $B_1, B_2, \ldots$ erzeugen gemäß unserem Hilfssatze auf-R_n-adisch die echten Teilkontinua A und B von S^m und es ist $A + B = S^m$. Damit ist die Zerlegbarkeit von S^m für $m \neq 1$ bewiesen.

Da eine z-Menge in einer l-dimensionalen Torusgruppe T^l nur für $l \neq 1$ definiert ist, läßt sich dieser Prozess offenbar nicht anwenden auf eine S^1. Eine S^1 ist, insofern nicht der Grenzfall einer kontinuierlichen zyklischen Gruppe vorliegt, unzerlegbares Kontinuum. Um dies zu erkennen, schließen wir so: Es liege eine Zerlegung vor, $S^1 = P + Q$, P und Q echte Teilkontinua von S^1. Es ist möglich, i so groß zu wählen, daß $P_i = f_i P$ und $Q_i = f_i Q$ beide wenigstens einen Punkt von T^1_i nicht enthalten. Betrachten wir dann T^1_{i+1} als Additionsgruppe mod 1 der reellen Zahlen x, $0 \leqq x < 1$, so bildet P_{i+1} eine abgeschlossene Strecke, deren Länge kleiner als $\frac{1}{2}$ ist; dasselbe gilt aber von Q_{i+1}, und damit ist ein Widerspruch erreicht [10]).

4. Eine kompakte und zusammenhängende topologische Gruppe läßt sich bekanntlich auf-R_n-adisch als Limesgruppe kompakter und zusammenhängender Liescher Gruppen darstellen [11]). Wir betrachten hier nur den Fall daß die Gruppen kommutativ sind. Dann sind die erzeugenden Gruppen somit Liesche k-Gruppen d.h. es sind Torusgruppen [12]).

Jede k-Gruppe ist also eine Solenoide.

Damit eine k-Gruppe G unzerlegbares Kontinuum sei, ist somit notwendig, daß die Dimension gleich 1 sei. Eine hinreichende Bedingung ist wegen obiger Ausführungen, daß G eine eindimensionale nichtausgeartete Solenoide sei.

Satz I. *Die eindimensionalen nicht-ausgearteten Solenoiden sind die einzigen k-Gruppen, die unzerlegbare Kontinua sind.*

Man kann in dieser Charakterisierung noch die explizite Bezugnahme auf die Solenoide eliminieren. Ein unzerlegbares Kontinuum ist nämlich in keinem Punkte lokal-zusammenhängend, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde. Anderer-

---

[10]) Bei D. van Dantzig l.c. wird die Unzerlegbarkeit einer S^1 nicht explizit erwähnt. Daß S^1 unzerlegbares Kontinuum ist, wurde ohne Beweis zuerst bemerkt bei H. Freudenthal, l.c. [8]).

[11]) Vergl. H. Freudenthal [Annals of Math. (2) **37** (1936), 57—77], insbes. Hauptsatz II.

[12]) Vergl. L. Pontrjagin [Annals of Math. (2) **35** (1934), 361—389], insbes. Theorem 6 oder E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs [Mémorial sc. Math. XLII], insbes. p. 36.

seits ist z.B. eine endlichdimensionale Solenoide, wenn sie nicht ausgeartet ist, nicht lokal-zusammenhängend (das ist hier, wo es sich um eine Gruppe handelt, äquivalent mit „in keinem Punkte lokal-zusammenhängend"). In einer endlichdimensionalen nicht-ausgearteten Solenoide ist nämlich jede hinreichend kleine Umgebung eines willkürlichen Punktes nicht zusammenhängend, wie man sich einfach klar macht. Daher gilt das

Korollar I. *Eine k-Gruppe ist dann und nur dann unzerlegbares Kontinuum, wenn sie eindimensional und nicht lokal-zusammenhängend ist.*

5. Die vorhergehenden Betrachtungen machen weitgehend Gebrauch von dem Begriffe des universellen Überlagerungsraumes. In dieser Hinsicht kann man sie teilweise verallgemeinern zu folgendem

Satz II. *Sei $R_1, R_2, \ldots$ eine den Raum R als R_n-adischen Limes erzeugende Folge von lokal-euklidischen kompakten und zusammenhängenden Räumen; weiter seien die Abbildungen f_n^{n+1} im Kleinen topologisch. Es ist dann R gewiß nicht unzerlegbares Kontinuum, sobald seine Dimension $\geqq 2$ ist.*

Beweis: Wir können uns beschränken auf den Fall, daß die f_n^{n+1} Abbildungen „auf" sind (vergl. [6])). Es ist dann für $n=1, 2, \ldots$ R_{n+1} eine Überlagerung von R_n, wie leicht zu folgern ist aus der Kompaktheit von R_{n+1} und R_n [13]). Dann ist aber auch der universelle Überlagerungsraum R_u von R_n dem von R_{n+1} homöomorph und wenn $a \in R_u$ über $a_{n+1} \in R_{n+1}$ und $a_n \in R_n$ liegt, so ist $f_n^{n+1} a_{n+1} = a_n$ [14]).

Sei die Dimension der R_i $(i = 1, 2, \ldots)$ gleich $m > 1$. Lassen wir dann eine mit einer m-dimensionalen Kugel homöomorphe Umgebung U_1 eines willkürlichen Punktes $p \in R_1$ aus R_1 weg, so ist, wenn U_1 klein genug gewählt wird, $A_1 = R_1 - U_1$ noch zusammenhängend, also ein Kontinuum. Das Urbild A_u von A_1 in R_u ist nun auch noch zusammenhängend, wie man leicht bestätigt, wenn man R_u betrachtet als Raum der Klassen von

---

[13]) Zu dem Begriffe der Überlagerung vergl.: H. Seifert & W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie [Leipzig und Berlin 1934]. Die drei dort gegebenen Bedingungen, damit R_{n+1} eine Überlagerung von R_n sei, sind hier erfüllt. Aus der Kompaktheit von R_{n+1} folgt nämlich, daß zu jedem Punkte von R_n endlichviele Urbilder in R_{n+1} gehören; daraus schließt man daß zu jedem Punkte von R_n gleichviele Urbilder gehören. Es ist dann leicht die „ausgezeichneten Umgebungen" in R_n und R_{n+1} so anzugeben, daß die genannten Bedingungen erfüllt sind.

[14]) Vergl. l.c. [13]), S. 194.

untereinander homotopen Wegen die in R_1 von einem festen Anfangspunkte $p \in R_1$ aus verlaufen. Ein Punkt aus A_u ist dann darzustellen durch einen nicht in U_1 endenden Weg in R_1. Ein solcher Weg w ist dann so homotop zu deformieren in einen Weg w', daß w und w' außerhalb U_1 zusammenfallen, w' aber mit U_1 keinen Punkt gemein hat (hier wird die Voraussetzung über die Dimension verwendet). Haben wir dann zwei Punkte aus R_u, und werden sie durch die Wege w_1 und w_2 aus R_1 vorgestellt, die wir jetzt als disjunkt mit U_1 voraussetzen dürfen, dann kann man offenbar w_1 innerhalb A_1 in w_2 deformieren (der Anfangspunkt p wird dabei festgehalten). Somit sind je zwei Punkte von A_u durch einen Weg in A_u zu verbinden, und daher ist A_u bekanntlich zusammenhängend. Deshalb ist auch das Urbild von A_1 bei der Abbildung f_1^2 ein Kontinuum. Geht man dann wie oben schrittweise auf die Urbilder $A_2, A_3, \ldots$ von A_1 in bzw. $R_2, R_3, \ldots$ zurück, so ist A_n $(n = 2, 3, \ldots)$ kompakt und als stetiges Bild der zusammenhängenden Menge $A_u \subset R_u$ zusammenhängend. Die Folge $A_1, A_2, \ldots$ erzeugt somit ein echtes Teilkontinuum A von R. Nimmt man an Stelle von U_1 eine andere derartige, aber mit U_1 disjunkte Umgebung V_1 und setzt $R_1 - V_1 = B_1$, so erzeugt die ähnlich wie oben definierte Folge $B_1, B_2, \ldots$ ein echtes Teilkontinuum B von R. Aus $A_1 + B_1 = R_1$, $A_2 + B_2 = R_2, \ldots$ folgt dann unmittelbar $A + B = R$.[15])

6. Zum Schluß beweisen wir, daß der in Satz II gemeinte Raum R auch die Dimension m hat, wenn die Dimension der R_i gleich m ist; damit ist dann, wenigstens für endliche m, die Bezeichnung „m-dimensionale" Solenoide gerechtfertigt. Durch Induktion schließt man leicht auf folgende Tatsache: Wenn der Raum A auf-R_n-adisch erzeugt wird durch Räume A_n, $n = 1, 2, \ldots$ und A_n für jedes n Summe ist von endlich vielen disjunkten sämtlich mit A_1 homöomorphen Teilmengen $A_n^1, \ldots, A_n^{k_n}$, weiter die f_n^{n+1} so definiert sind, daß dabei eine gewisse Anzahl der $A_{n+1}^1, \ldots, A_{n+1}^{k_{n+1}}$, jedes für sich, topologisch auf eines der $A_n^1, \ldots, A_n^{k_n}$ abgebildet wird, so ist $\dim A_n = \dim A$. Wenden wir dies an auf einer hinreichend kleinen Umgebung U eines Punktes $p \in R$! Man wählt diese Umgebung so klein, daß das Urbild von $U_1 = f_1 U$

---

[15]) Es ist mit diesem Beweise natürlich auch den Fall der endlichdimensionalen Solenoide erledigt. Der Beweis in 3 schließt aber den Fall der unendlichdimensionalen Solenoide ein.

in R_u aus (höchstens abzählbar vielen) disjunkten und mit U_1 homöomorphen Mengen besteht. Daß dies möglich ist, sieht man wieder leicht ein durch Betrachtung der Wege auf R_1. Es genügt, U so klein zu wählen, daß U_1 homöomorph einer n-dimensionalen Kugel wird. Hat man U dann wie angegeben gewählt, so ist $\dim U_1 = \dim U$ und deshalb $\dim R_1 = \dim R$. Man sieht übrigens unmittelbar, daß R auch in jedem Punkte m-dimensional ist.

Ebenso einfach ist zu beweisen, daß S^∞ ∞-dimensional ist, denn jede Umgebung eines jeden Punktes von S^∞ enthält eine ∞-dimensionale Teilmenge.

(Eingegangen den 13. Oktober 1937.)