COMPOSITIO MATHEMATICA

HANS FREUDENTHAL

Zwei Bemerkungen zur Homologietheorie

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 315-318

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__315_0>

Zwei Bemerkungen zur Homologietheorie

von

Hans Freudenthal

Amsterdam

Die beiden folgenden Bemerkungen stehen in keinem inneren Zusammenhang. Die erste enthält einen sehr einfachen Beweis dafür, daß die J. W. Alexandersche Produktbildung zwischen oberen Bettischen Gruppen eines Polytops P von der gewählten festen Eckenanordnung nicht abhängt. Ich hatte bereits darauf hingewiesen [1]), daß hinter der festen Eckenanordnung eine feste simpliziale Verschiebung $\mathfrak{o}$ der baryzentrischen Unterteilung P' von P in P selbst steckt, $\mathfrak{o}P' \subset P$. Diese Tatsache nutze ich hier zu einem ganz einfachen Beweis für die Einflußlosigkeit der speziellen Eckenanordnung aus; jedenfalls dürfte mein Beweis einfacher als die von J. W. Alexander [2]), H. Whitney [3]) und E. Čech [4]) sein [4a]).

Die zweite Bemerkung behandelt eine merkwürdige Dualität zwischen Unterteilungen und simplizialen Verschiebungen in Pseudomannigfaltigkeiten.

---

[1]) Alexanderscher und Gordonscher Ring und ihre Isomorphie [Annals of Math. (2) **38** (1937), 647—655], Fußnote [5]). — Wir zitieren diese Arbeit wiederholt mit AG; bzgl. aller nicht explicite erklärten Bezeichnungen sei auf AG verwiesen.

[2]) On the connectivity ring of an abstract space [Annals of Math. (2) **37** (1936), 698—708], Theorem III.

[3]) On products in a complex [Proc. Nat. Acad. Sc. USA **23** (1937), 285—291], Theorem 4. — Unsere Beweismethode läßt sich ohne Mühe auf die Čech-Whitneysche Produktbildung zwischen unteren und oberen Bettischen Gruppen (z.B. Whitney, a.a.O.) übertragen.

[4]) Multiplications on a complex [Annals of Math. (2) **37** (1936), 681—697], 685.

[4a]) Die Arbeit „Diskrete Räume" [Rec. Math. Moscou **2** (**41**), 501—519] von P. Alexandroff, von der mir soeben (27. Dez. 1937) ein Sonderabdruck zugeht, enthält ebenfalls (§ 4.3) einen einfachen Beweis für die Einflußlosigkeit der Eckenanordnung. Nach oberflächlicher Prüfung scheint er mit mit meinem identisch oder wenigstens sehr nahe verwandt zu sein.

I.

$\mathfrak{f}$ sei eine simpliziale Abbildung des Polytops P (Simplexe t) in das Polytop Q (Simplexe u). $\mathfrak{f}$ erzeugt einen Homomorphismus der oberen Bettischen Gruppen von Q in die von P, der dadurch erklärt werden kann, daß man $u^\varrho \mathfrak{f}$ für jedes u^ϱ gleich der Summe der Urbild-t^ϱ von u^ϱ setzt. [4b])

In P und Q seien feste Eckenanordnungen gegeben und $\mathfrak{f}$ erhalte die Anordnung. Die Ecken eines Simplexes mögen stets gemäß der gegebenen Anordnung aufgeschrieben sein. Das Alexandersche Produkt zweier (oberer) Simplexe (in P oder Q) ist dann definiert durch

$$\begin{aligned}[a_0 \dots a_\varrho] \cdot [b_\varrho \dots b_{\varrho+\sigma}] &= [a_0 \dots a_\varrho b_{\varrho+1} \dots b_{\varrho+\sigma}] \quad \text{für } a_\varrho = b_\varrho, \\ &= 0 \quad \text{für } a_\varrho \neq b_\varrho.\end{aligned}$$

Man bemerkt ohne weiteres [5]):

$$(1) \qquad (t^\varrho \cdot t^\sigma)\mathfrak{f} = t^\varrho \mathfrak{f} \cdot t^\sigma \mathfrak{f}.$$

Für Q nehmen wir nun die baryzentrische Unterteilung P' von P. Ecken von P' sind diejenigen Eckenmengen $(a_0 \dots a_\varrho)$ von P, die nichtverschwindende Simplexe $[a_0 \dots a_\varrho]$ von P erzeugen. Simplexe von P' werden erzeugt durch diejenigen Eckenmengen von P', die aufsteigenden Folgen von Eckenmengen von P entsprechen.

Die Ecken von P liegen in einer bestimmten Anordnung vor. Die von P' wollen wir — was leicht möglich ist — so anordnen, daß für je zwei verschiedene Ecken von P', die bzw. durch die Eckenmengen $(a_0 \dots a_\varrho)$ und $(b_0 \dots b_\sigma)$ von P dargestellt seien, gelten möge:

(2) Ist $(a_0 \dots a_\varrho)$ Teilmenge von $(b_0 \dots b_\sigma)$, so komme $(a_0 \dots a_\varrho)$ *vor* $(b_0 \dots b_\sigma)$.

(3) Ist a_ϱ bzw. b_σ in P die höchste unter den Ecken $a_0, \dots, a_\varrho$ bzw. $b_0, \dots, b_\sigma$, und kommt in P a_ϱ *vor* b_σ, so komme in P' $(a_0 \dots a_\varrho)$ *vor* $(b_0 \dots b_\sigma)$.

Wegen (3) ist die simpliziale Abbildung $\mathfrak{d}P' \subset P$, die einer durch $(a_0 \dots a_\varrho)$ dargestellten Ecke von P' die (in P) höchste unter den Ecken $a_0, \dots, a_\varrho$ zuordnet, eine die Ordnung erhaltende Abbildung. Die Bettischen Gruppen von P und P' sind bekanntlich einander isomorph, und zwar läßt diese Isomorphie

---

[4b]) AG, 2a, S. 648.

[5]) AG, 10, S. 652.

sich durch $\mathfrak{o}$ vermitteln (bei den oberen Bettischen Gruppen durch nachgestelltes $\mathfrak{o}$). Formel (1) lehrt, daß es auch für das Alexandersche Produkt zwischen den oberen Bettischen Gruppen gleichgültig ist, ob man es in P oder in P' berechne.

Ich zeige nun, daß (bereits für die Simplexe) das Alexandersche Produkt in P' unabhängig von der zufälligen Eckenanordnung in P ist. Für die Berechnung des Alexanderschen Produktes spielt die gegenseitige Anordnung zweier Ecken von P' höchstens dann eine Rolle, wenn diese beiden Ecken als Ecken desselben Simplexes auftreten können. Von zwei Eckenmengen aus P, die in P' als Ecken desselben Simplexes auftreten können, muß notwendig die eine eine Teilmenge der andern sein; deren gegenseitige Anordnung ist aber bereits durch (2) unabhängig von der in P gegebenen Anordnung festgelegt.

Damit ist der Unabhängigkeitsbeweis erbracht. — Es ist übrigens merkwürdig, daß das Alexandersche Produkt (von Simplexen) in P gebildet die Anschauung wenig befriedigt, in P' dagegen anschaulich sehr nahe dem cartesischen Produkt steht.

II.

P sei eine d-dimensionale orientierte geschlossene Pseudomannigfaltigkeit (Simplexe t), Q eine Unterteilung (Zerschlagung) $\mathfrak{z}P$ von P (Simplexe u). $u^\varrho \mathfrak{z}$ ist *das* t^ϱ, in dessen Unterteilung u^ϱ mit dem Koeffizienten $+1$ auftritt (bzw. wenn so eins nicht existiert, 0).[6] $\mathfrak{d}$ sei der Dualitätsoperator[7]), P' und Q' seien die baryzentrischen Unterteilung von P und Q.

Die Unterteilung $\mathfrak{z}$ induziert eine simpliziale Abbildung der baryzentrischen Unterteilung Q' von Q in die baryzentrische Unterteilung P' von P, $\mathfrak{f}Q' \subset P'$, mit

$$\mathfrak{f}\mathfrak{d}u^\varrho = \mathfrak{d}(u^\varrho \mathfrak{z}). \tag{1}$$

$\mathfrak{f}$ wird so definiert: b' sei eine Ecke von Q' und a' der Schwerpunkt des Simplexes *kleinster* Dimension von P, in dem b' liegt; dann sei $f(b') = a'$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{f}$ die verlangten Eigenschaften besitzt.

Die durch die Menge $(a_0 \ldots a_\varrho)$ von P bestimmte Ecke von P' nennen wir zur Abkürzung $a_{0\ldots\varrho}$; analog verfahren wir bei Q'.

$$\mathfrak{d}[a_0 \ldots a_\varrho] = \Sigma \pm [a_{0\ldots\varrho} a_{0\ldots\varrho\,\varrho+1} \cdots a_{0\ldots\varrho\,\varrho+1\ldots d}] \tag{2}$$

---

[6]) AG, 2b, S. 648.

[7]) AG, S. 651, Z. 9.

(als Vorzeichen wähle man das, mit dem $[a_0 a_1 \ldots a_d]$ im Grundzyklus von P auftritt). Analog ist der Operator $\mathfrak{d}$ in Q definiert (Grundzyklus von Q ist *der*, der durch Unterteilung des Grundzyklus von P entsteht).

Sei $\mathfrak{f}(b_{0\ldots\varrho}) = a_{0\ldots\sigma}$. Das Simplex kleinster Dimension von P, dem $b_{0\ldots\varrho}$ angehört ist dann σ-dimensional. Ist $\varrho < \sigma$, so hat man einerseits $[b_0 b_1 \ldots b_\varrho]\,\mathfrak{z} = 0$; andererseits ist das $\mathfrak{f}$-Bild eines Simplexes

$$[b_{0\ldots\varrho} b_{0\ldots\varrho\,\varrho+1} \cdots b_{0\ldots\varrho\,\varrho+1\ldots d}]$$

von $\mathfrak{d}[b_0 \ldots b_\varrho]$ ein Simplex mit mindestens zwei gleichen Ecken (denn die Folge seiner Ecken wird dargestellt durch eine aufsteigende Folge von Eckenmengen von P, die mit $\sigma > \varrho$ Ecken beginnt und mit d Ecken endigt). Für $\varrho < \sigma$ ist (1) damit bewiesen, denn beide Seiten haben sich zu 0 ergeben.

Man beachte nun: Ist u^α ein Unterteilungssimplex von t^α ($u^\alpha \mathfrak{z} = t^\alpha$), so vermittelt $u^{\alpha+1}\mathfrak{z} = t^{\alpha+1}$ eine eineindeutige Beziehung zwischen den u^α enthaltenden $u^{\alpha+1}$ und den t^α enthaltenden $t^{\alpha+1}$ (denn der nachgestellte Randoperator ist mit $\mathfrak{z}$ vertauschbar); $\mathfrak{f}$ ordnet dann die zugehörigen Schwerpunkte einander eineindeutig zu. Schrittweise Anwendung dieser Tatsache für $\alpha = \varrho$, $\varrho + 1, \ldots, d - 1$ zeigt, daß $\mathfrak{f}$ die Simplexe von $\mathfrak{d}u^\varrho$ eineindeutig abbildet auf die von $\mathfrak{d}t^\varrho (= \mathfrak{d}(u^\varrho \mathfrak{z}))$. Wegen der Festsetzung hinsichtlich des Grundzyklus' von Q ist damit die Formel (1) bewiesen.

(Eingegangen den 23. September 1937.)