COMPOSITIO MATHEMATICA

HEINZ SCHILT

Über die isolierten Nullstellen der Flächenkrümmung und einige Verbiegbarkeitssätze

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 239-283
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__239_0>

Über die isolierten Nullstellen der Flächenkrümmung und einige Verbiegbarkeitssätze

von

Heinz Schilt

Biel

Einleitung.

1. Ist O ein regulärer Punkt einer stetig gekrümmten Fläche im Raum und ist in seiner Umgebung die Krümmung überall negativ, so ist er ein „Sattelpunkt", das heißt, in einer wohl leicht verständlichen Ausdrucksweise: denkt man sich seine Tangentialebene als horizontal, so laufen in ihm eine Anzahl Täler und ebensoviele Bergrücken zusammen. Ist die Krümmung in O selbst ebenfalls negativ, so ist diese Anzahl bekanntlich zwei; O ist dann ein „gewöhnlicher" Sattelpunkt. Ist aber die Krümmung in O gleich 0, so kann es vorkommen, daß O ein Sattelpunkt „höherer Ordnung" ist, d.h. daß die Anzahl der in ihn mündenden Täler und Bergrücken größer als zwei ist; die um 1 verminderte Anzahl der Täler ergibt die „Ordnung" des Sattelpunktes.

Die Aufgabe, die dieser Arbeit ursprünglich allein zugrunde lag, bestand in der nähern Untersuchung des Verhaltens einer Fläche in der Nähe eines Sattels beliebiger Ordnung und insbesondere in der Beantwortung der folgenden Frage: Ist die „Ordnung", die ja ein für die Anschauung sehr wesentliches Unterscheidungsmerkmal zwischen den Gestalten verschiedener, mit Sattelpunkten behafteter Flächenstücke darstellt, eine *Biegungsinvariante* der Flächen?

2. Der erste Teil der Arbeit dient hauptsächlich dazu, den Begriff der „Ordnung" s eines Sattelpunktes streng zu definieren und von verschiedenen Seiten zu beleuchten. Es wird gezeigt, daß sich jeder isolierten Nullstelle der Krümmung auf einem sonst negativ gekrümmten Flächenstück, von dem lediglich zweimal stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt wird, eine endliche Zahl $s \geqq 1$ zuordnen läßt, die auf jede der drei folgenden Weisen charakterisiert werden kann: 1) es laufen — bei horizontaler

Tangentialebene — in O genau $s+1$ „Täler" und ebensoviele „Bergrücken" zusammen; 2) das sphärische Bild einer Umgebung von O sieht aus wie die Riemannsche Fläche von $\sqrt[s]{z}$ in der Umgebung des Windungspunktes $z=0$; 3) beim einmaligen positiven Umlaufen von O machen sowohl die Richtungen jedes der beiden Felder von Asymptotenrichtungen als auch die Richtungen jedes der beiden Felder der Hauptkrümmungsrichtungen die Drehung $(1-s)\pi$.

Diese Tatsachen ergeben sich (im 2. Abschnitt des 1. Teils) leicht aus Sätzen topologischer Natur, die im 1. Abschnitt zusammengestellt sind; diese Sätze gehören größtenteils in den Kreis der bekannten Untersuchungen von Bendixson über das Verhalten der Lösungskurven einer Differentialgleichung in der Nähe einer Singularität; zum Teil wird hierüber nur ohne Beweis berichtet. Daneben spielt eine besondere Rolle ein topologischer Satz von Cohn-Vossen, der hier neu bewiesen wird.

Die Sätze des 1. Abschnittes führen übrigens außer zu den obengenannten Eigenschaften negativ gekrümmter Flächen auch zu zwei Sätzen über positiv gekrümmte Flächen, die trotz ihrer anschaulichen Plausibilität bisher nicht formuliert und bewiesen worden zu sein scheinen (Satz IV und V).

Der 3. Abschnitt des 1. Teils dient hauptsächlich der Diskussion von Beispielen.

3. Im Anschluß an die oben genannte dritte Definition der Sattelordnung s ist es sehr leicht zu zeigen, daß s eine „Biegungsinvariante" ist; dabei legen wir die folgende Definition zu Grunde, die der anschaulichen Vorstellung des „Verbiegens" entspricht:

Definition. Es sei $\mathfrak{x}(u,v)$ eine für einen Bereich B der u-v-Parameterebene erklärte und zweimal stetig differenzierbare Fläche. Unter einer „*stetigen Verbiegung*" dieser Fläche versteht man eine in B und für das Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ der Veränderlichen t erklärte Flächenschar $\mathfrak{x}(u,v;t)$ mit den Eigenschaften: $\mathfrak{x}$ sowie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach u und v sind stetig in den drei Variablen u, v, t; $\mathfrak{x}(u,v;0)=\mathfrak{x}(u,v)$ ist die gegebene Fläche; die Abbildungen, die durch die Parameter u, v zwischen den zu verschiedenen Werten von t gehörigen Flächen bewirkt werden, sind sämtlich *längentreu*, also *Isometrieen.*

Beim Zugrundelegen dieser üblichen Definition gilt nun der

Sats IX: Die Sattelordnung s ist invariant bei stetiger Verbiegung.

Dieser Satz war, wenn man an die starke Verschiedenheit des

Aussehens von Flächen mit verschiedenen Sattelordnungen denkt, zu erwarten. Es liegt ziemlich nahe, nunmehr auch die Gültigkeit des folgenden Satzes zu erwarten: „Die Sattelordnung s ist invariant gegenüber beliebigen isometrischen Abbildungen einer Fläche auf eine andere"; mit andern Worten: „die Sattelordnung s ist eine innere Eigenschaft der Differentialgeometrie, d.h. die Zahl s ist durch die erste Fundamentalform der Fläche bestimmt". Ein solcher Satz gilt jedoch *nicht.*

Dies wird im 1. Abschnitt des 2. Teiles gezeigt.

4. Mit Hilfe einer Methode von Darboux und auf Grund des klassischen Existenztheorems für partielle Differentialgleichungen wird nämlich sehr einfach der folgende Satz bewiesen: Ist F eine (analytische) Fläche und O ein Punkt auf ihr, so gibt es zu einer Umgebung von O eine isometrische Fläche F', auf welcher der entsprechende Punkt O' *nicht Flachpunkt* ist. Da man aber anderseits leicht sieht, daß in einem Punkt, der nicht Flachpunkt ist, die Sattelordnung s stets nur gleich 1 sein kann, ist damit gezeigt: zu jeder Fläche mit einem Sattelpunkt von einer beliebigen Ordnung gibt es immer eine isometrische Fläche, auf welcher der entsprechende Punkt nur die Ordnung 1 hat.

Somit ist die Sattelordnung s zwar eine Invariante der *stetigen Verbiegungen,* jedoch keine Invariante der *isometrischen Abbildungen.* Damit ist die am Schluß von Nr. 1 gestellte Frage beantwortet; man sieht aber, daß diese Frage einer Präzision bedurfte.

5. Zugleich sind wir damit zu einer Erkenntnis gelangt, die nicht nur für unsere Untersuchung der Sattelpunkte, sondern auch für die Klärung der Grundbegriffe der Flächentheorie wichtig ist: es gibt Paare von Flächenstücken F, F', die zwar isometrisch sind, sich aber nicht stetig ineinander verbiegen lassen, und zwar läßt sich, da die Sattelordnung offenbar invariant bei Spiegelungen ist, auch nicht die eine in ein Spiegelbild der anderen stetig verbiegen. Es besteht also für Flächen ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Begriff der „Isometrie" und dem der „stetigen Verbiegbarkeit ineinander". Dies scheint hier zum ersten Mal bewiesen worden zu sein. [1]) Bisher war meines Wissens über die beiden genannten Begriffe das Folgende bekannt.

---

[1]) Ein kurzer Bericht über diesen Teil der Arbeit findet sich in den Verhandlungen der Schweiz. Naturforsch. Gesellschaft (117. Jahresversammlung 28.—30. Aug. 1936, Solothurn; S. 244) als Auszug aus einem Vortrag, den ich in Solothurn an der Tagung der S. N. G. hielt.

A. Voss [2]) hat zuerst darauf hingewiesen, daß zwischen dem Sinn der Aussage „F ist mit F' isometrisch" und dem Sinn der Aussage „F läßt sich stetig in F' verbiegen" ein Unterschied besteht. E. E. Levi [3]) hat dann gezeigt, daß es wirklich Flächenpaare gibt, die isometrisch sind, sich aber nicht stetig ineinander verbiegen lassen: eine positiv gekrümmte Fläche und ihr Spiegelbild [4]). Zugleich hat aber Levi die folgenden beiden interessanten Sätze entdeckt: I.) Sind F und F' isometrische Flächen, und ist ihre Krümmung entweder überall positiv oder überall negativ, so ist F stetig entweder in F' oder in das Spiegelbild von F' verbiegbar. II.) Ist die Krümmung überall negativ, so ist F immer stetig in F' verbiegbar, mit andern Worten: so ist die Fläche F auch stetig in ihr Spiegelbild verbiegbar. Sieht man von der feinern Unterscheidung zwischen positiver und negativer Krümmung ab, so kann man sagen: zwei isometrische Flächen, deren Krümmung nirgends verschwindet, lassen sich immer durch stetige Verbiegung und allfälliges Hinzufügen einer Spiegelung ineinander überführen. [5]) [6])

Im Anschluß an diesen Levischen Satz findet sich bei Bianchi [7]) die Bemerkung: „Somit hat die von Voss vorgeschlagene, anfangs wohl begründete Unterscheidung zwischen Isometrie und Verbiegbarkeit fortan keine Existenzberechtigung." Diese Bemerkung ist aber, wie aus unserem oben formulierten Ergebnis hervorgeht, nur dann richtig, wenn man Flächen, auf denen die Krümmung in einzelnen Punkten verschwindet, von der Betrachtung ausschließt — wozu aber kein Grund besteht. —

6. Für die oben zitierten Sätze I und II von Levi werden im

---

[2]) Math. Ann. **46** (1880), S. 129.

[3]) Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili [Atti Accad. Torino **43** (1907—1908), 292—302].

[4]) Dies ist fast selbstverständlich: denn auf einer positiv gekrümmten Fläche läßt sich eine „positive" Normale auszeichnen, nämlich diejenige, welche nach derjenigen Seite der Tangentialebene zeigt, auf der die Fläche nicht liegt; zusammen mit einer festen Orientierung des Raumes bestimmt die positive Normale eine Orientierung der Fläche, welche invariant bei stetiger Verbiegung, jedoch der ebenso ausgezeichneten Orientierung des Spiegelbildes entgegengesetzt ist.

[5]) Natürlich handelt es sich hier immer nur um Eigenschaften „im Kleinen"; die Behauptung der stetigen Verbiegbarkeit ineinander bezieht sich daher immer nur auf kleine (aber endliche) Umgebungen einander entsprechender Punkte.

[6]) Daß man zwei Flächen, deren Krümmung identisch 0 ist, immer stetig ineinander verbiegen kann, war natürlich längst bekannt.

[7]) Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie (deutsch von M. Lukat) 2. Aufl. [Leipzig-Berlin 1910], S. 178.

2. Abschnitt des 2. Teils dieser Arbeit ausführliche Beweise dargestellt; sie arbeiten konsequent mit der schon erwähnten Methode von Darboux, die auch im 1. Abschnitt des 2. Teiles zum Ziele geführt hat. Übrigens wird der Satz I etwas verallgemeinert.

7. Nachdem festgestellt worden ist, daß es zu einer Fläche F, die einen Sattelpunkt O der Ordnung $s > 1$ enthält, isometrische Flächen F' gibt, auf denen die entsprechenden Punkte O' Sattelordnungen besitzen, die $\neq s$, nämlich $= 1$, sind, liegt es nahe zu fragen, ob die Ordnungen s' der O entsprechenden Sattelpunkte O' auf den mit F isometrischen Flächen F' überhaupt irgendwelchen Beschränkungen unterliegen. Leicht zu sehen ist, daß diese Ordnungen s' durch die innere Differentialgeometrie der Fläche nach oben beschränkt sind (Nr. 20). Jedoch wird im 3. Teil noch gezeigt, daß es gewisse Flächen mit folgender Eigenschaft gibt: sie enthalten einen Sattelpunkt einer beliebig hohen Ordnung s, und es gibt zwar wie immer isometrische Flächen, auf denen die entsprechenden Punkte die Ordnung 1 haben; jedoch gibt es keine isometrischen Flächen, auf denen die Sattelordnung einen zwischen 1 und s gelegenen Wert hätte. Dies wird, wie gesagt, nur für gewisse Flächen festgestellt; ob sich aber hierin ein allgemeines Gesetz äußert, ist mir nicht bekannt.

Einteilung der Untersuchung.

Erster Teil:

Die Umgebung einer isolierten Nullstelle der Krümmung einer Fläche im Raum.

Abschnitt 1. Topologische Vorbereitungen.

1. *Niveaulinien.* Wir betrachten den durch $x^2 + y^2 \leqq r^2$ gegebenen Bereich A der (x, y)-Ebene; seinen Randkreis $x^2+y^2=r^2$ nennen wir k, sein Mittelpunkt $x = y = 0$ heiße O. In A sei eine Funktion $z(x, y)$ gegeben, die zweimal stetig differenzierbar ist; es sei $z(0, 0)=0$. Der Gradient (z_x, z_y) verschwinde in O und nur dort. Wir interessieren uns für den Verlauf der Niveaulinien $z(x, y) = \text{const}$ in A. Diese sind die Integralkurven des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y),$$

wobei

$$(2) \qquad X(x, y) = -z_y(x, y), \quad Y(x, y) = z_x(x, y)$$

ist. Auf Grund unserer Voraussetzungen über $z(x, y)$ sind $X(x, y)$ und $Y(x, y)$ in A einmal stetig differenzierbar; daher können wir die klassischen Sätze von I. Bendixson über den Verlauf der Integralkurven eines Systems (1) in der Nähe einer singulären Stelle anwenden.[8])

2. Es sei P_0 ein von O verschiedener Punkt des Innern von A; durch P_0 geht genau eine Integralkurve c von (1); wir verfolgen c zunächst in *einer* ihrer beiden Richtungen, also, wenn P_0 zum Parameterwert t_0 gehört, entweder für $t > t_0$ oder für $t < t_0$. Dann sind nach Bendixson (a.a.O. S. 7, 8 u. 11) die folgenden vier Fälle und nur diese möglich:

1) c erreicht den Rand k;
2) c strebt gegen O;

---

[8]) I. Bendixson, Sur les courbes définies par des équations différentielles [Acta Math. 24 (1901), 1—88].

3) c kehrt einmal nach P_0 zurück und ist eine einfach geschlossene Kurve;

4) c nähert sich asymptotisch einer geschlossenen Integralkurve c' von (1), die nicht durch O läuft.

Wir behaupten: *Bei unseren Voraussetzungen, d.h. unter den Bedingungen* (2), *ist der Fall* 4 *unmöglich.*

Beweis: P' sei ein von O verschiedener Punkt, und z habe in ihm den Wert p'; c' sei die durch P' gehende Niveaulinie. Da der Gradient von z in P' sowie in der Umgebung von P' nicht verschwindet, ist in der Umgebung von P' auf jeder von c' verschiedenen Niveaulinie $z \neq p'$. Jedenfalls ist es ausgeschlossen, daß P' Häufungspunkt einer Folge von Punkten $P_1, P_2, \ldots$ ist, welche alle auf einer von c' verschiedenen Niveaulinie c liegen; denn wegen der Stetigkeit von z müßte der Wert p auf c gleich p' sein, und dies ist, wie wir eben sahen, unmöglich. Aber gerade diese somit ausgeschlossene Lage träfe für jeden Punkt P' der unter 4 genannten Linie c' ein.

Es kommen also in der Tat nur die Fälle 1, 2, 3 in Frage.

3. Jetzt verfolgen wir die Linie c in ihren *beiden* Richtungen; dann ergeben die Kombinationen der Fälle 1, 2, 3 die folgenden vier Möglichkeiten:

I) c erreicht in beiden Richtungen den Rand k;

II) c erreicht in einer Richtung den Rand k und strebt in der andern gegen O;

III) c ist einfach geschlossen;

IV) c strebt in beiden Richtungen gegen O.

Wir behaupten: *der Fall IV kann unter den Bedingungen* (2) *nie vorkommen.*

Beweis: Träte IV ein, so wäre die Linie $\bar{c}$, die aus c entsteht, wenn man den Punkt O hinzunimmt, einfach geschlossen. Auf $\bar{c}$ wäre z immer gleich null. Daher würde die Funktion z in einem Punkt des Innengebietes von $\bar{c}$, also in einem von O verschiedenen Punkt, ein (relatives) Extremum erreichen, und an dieser Stelle würde also der Gradient von z verschwinden — entgegen der Voraussetzung, daß O die einzige Nullstelle des Gradienten im Bereich A ist.

Es kommen für uns also nur die drei Fälle I, II, III in Betracht.

Wir können noch hinzufügen: *im Fall* III *liegt der Punkt O im Innern von c.* Denn im Innern von c gibt es sicher ein relatives Extremum, also eine Nullstelle des Gradienten z, und diese Stelle kann nach unseren Voraussetzungen nur mit dem Punkt O zusammenfallen.

4. Wir behaupten weiter: *Es gibt höchstens endlich viele Niveaulinien, die vom Typus II sind, die also (in einer ihrer beiden Richtungen) gegen O streben.*

Beweis: k' sei ein Kreis mit einem kleineren Radius als k und dem Mittelpunkt O. Gäbe es unendlich viele Linien $c_1, c_2, \ldots$, die sämtliche vom Typus II wären, so müßten sie alle, da sie in einer Richtung gegen O, in der andern gegen k strebten, k' schneiden. Es sei P_i für jedes i ein Schnittpunkt von c_i mit k'; die P_i hätten auf k' einen Häufungspunkt P'. Auf allen Linien c_i hätte z denselben Wert 0 wie im Punkte O. Die gleiche Betrachtung wie im Beweis in Nr. 2 lehrt, daß dies unmöglich ist.

Die Anzahl der Niveaulinien, die in den Punkt O hineinlaufen[9]), ist also endlich; zwei Hauptfälle sind zu unterscheiden, je nachdem diese Anzahl gleich null oder positiv ist.

5. Fall a: *Die Anzahl der in O hineinlaufenden Niveaulinien sei gleich null.* Es treten also nur Niveaulinien der Typen I und III auf. Wir behaupten zunächst: Es gibt eine Umgebung von O, in welcher O der einzige Punkt ist, in dem z den Wert 0 hat. Andernfalls nämlich gäbe es eine Folge gegen O strebender Punkte $P_1, P_2, \ldots$, in welchen z den Wert 0 hätte; $c_1, c_2, \ldots$ seien die Niveaulinien durch diese Punkte. Wären unendlich viele c_i miteinander identisch, so hätte diese Linie den Punkt O zum Häufungspunkt und wäre also nicht vom Typus I oder III. Wir dürfen also annehmen, daß die c_i paarweise voneinander verschieden sind. Wären unendlich viele von ihnen vom Typus I, so würde die Betrachtung ihrer Schnittpunkte mit dem Kreis k' zu demselben Widerspruch führen wie in Nr. 4. Es bliebe also nur die Möglichkeit übrig, daß fast alle Linien c_i vom Typus III sind; aber auch das ist unmöglich: denn sind c_1 und c_2 einfach geschlossen, so liegt nach Nr. 3 O sowohl im Innern von c_1 als auch im Innern von c_2. Daher verläuft die eine Linie im Innern der andern, und es begrenzen c_1 und c_2 zusammen ein ringförmiges Gebiet; in diesem müßte aber, da $z = 0$ auf c_1 und auf c_2 sein soll, auch eine Nullstelle des Gradienten von z liegen, und diese Stelle wäre verschieden von O, was unmöglich ist.

---

[9]) Wir machen keinen Unterschied zwischen den Ausdrücken: „gegen O streben" und „in den Punkt O hineinlaufen".

Die Annahme, daß es eine gegen O strebende Folge von Punkten gibt, in denen $z = 0$ ist, führt also zu einem Widerspruch, und damit ist gezeigt: *Wenn keine Niveaulinie in den Punkt O hineinläuft, dann gibt es eine Umgebung U von O, in welcher O die einzige Nullstelle von z ist.*

Da somit z in U einerlei Vorzeichen haben muß, können wir hinzufügen: *z hat in O ein (relatives) Extremum.*

Ferner gilt folgender Satz:

Wenn keine Niveaulinie in O hineinläuft, so gibt es in hinreichender Nähe von O nur geschlossene Niveaulinien; jede von ihnen enthält O im Innern.

Beweis: Wir dürfen annehmen, daß z in O ein Minimum habe. k' sei ein Kreis in U mit dem Mittelpunkt O. Das Minimum von z auf k' sei m; es ist $m > 0$. U' sei eine so kleine Umgebung von O, daß dort $z < m$ ist. Ist P ein Punkt von U', so kann seine Niveaulinie den Kreis k' nie erreichen, sie muß daher vom Typus III sein.

6. Wir wenden uns zu dem zweiten der beiden Fälle, die am Schluß von Nr. 4 unterschieden wurden:

Fall b: *Es gibt eine positive Anzahl von Niveaulinien, die in O hineinlaufen.* Wir bemerken zuerst: Es gibt keine Niveaulinie vom Typus III; denn eine solche Linie c müßte nach Nr. 3 O und daher auch eine ganze Umgebung von O im Innern enthalten; eine Niveaulinie, die durch einen Punkt dieser Umgebung geht, könnte niemals k erreichen, da sie c nicht treffen kann; sie könnte also nicht vom Typus II sein — während wir gerade voraussetzten, daß es Linien vom Typus II gibt. — Es bestehen also nur Niveaulinien der Typen I und II.

Die Linien vom Typus II seien: $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Durchläuft man c_i von O herkommend, so gibt es einen ersten Treffpunkt P_i mit k; unter c_i soll jetzt nur der Bogen von O bis P_i auf der betreffenden Niveaulinie verstanden werden; die Reihenfolge $c_1, c_2, \ldots, c_n$ entspreche der zyklischen Anordnung der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ auf k. Den von c_1, dem Kreisbogen P_1P_2 und von c_2 begrenzten „Sektor" nennen wir S_{12}; analog seien $S_{23}, \ldots, S_{n1}$ erklärt. Wir werden nun eine einfach geschlossene Kurve k^* konstruieren, die O im Innern enthält und überdies die folgende Eigenschaft hat: k^* wird von jeder Linie c_i in genau einem Punkt Q_i getroffen; und wenn wir den von O bis Q_i verlaufenden Teil von c_i mit c_i' bezeichnen, so sind O und die Punkte der Linien c_i' die *einzigen* Punkte im Innern von k^*, in denen $z = 0$ ist.

Eine solche Linie k^* erhält man z.B. folgendermaßen: auf jeder Kurve c_i wählt man einen im Innern von A gelegenen Punkt Q_i; durch Q_i legt man die orthogonale Trajektorie der Niveaulinien. Q_1' und Q_1'' seien Punkte auf der Trajektorie durch Q_1 in den Sektoren S_{12} bzw. S_{n1}, und zwar so nahe bei Q_1, daß Q_1 auf dem Bogen $Q_1'Q_1''$ die einzige Nullstelle von z ist; in gleicher Weise seien Q_i', Q_i'' für $i = 2, \ldots, n$ bestimmt. Dann gibt es [10]) eine Niveaulinie von z, die Q_i' mit Q_{i+1}'' (bzw. Q_n' mit Q_1'') verbindet und in $S_{i,\,i+1}$ (bzw. $S_{n,\,1}$) verläuft. Diese n Bögen von Niveaulinien zusammen mit den n Bögen der konstruierten Trajektorien bilden offenbar eine Kurve k^* der behaupteten Art. Daß es in der Tat im Innern von k^* keine andern Nullstellen von z gibt als O und die Punkte der c_i', folgt daraus, daß auf k^* selbst die Punkte Q_i die einzigen Nullstellen sind; gäbe es im Innern von k^* noch andere Nullstellen als die behaupteten, so müßte außer den c_i' noch andere Niveaulinien $z = 0$ im Innern von k^* verlaufen; da, wie wir am Anfang dieser Nummer sahen, jede Niveaulinie vom Typus I oder II ist, so ist dies unmöglich.

Verstehen wir nun unter $S_{12}', S_{23}', \ldots, S_{n1}'$ die Sektoren, in welche das Innengebiet von k^* durch die Linien c_i' — also durch die Bögen OQ_i — zerlegt wird, so enthält keiner dieser Sektoren in seinem Innern eine Nullstelle von z; folglich hat z in jedem dieser $S_{i,\,i+1}'$ festes Vorzeichen, z verschwindet auf jeder Linie c_i' und ändert sich beim Überschreiten einer Linie c_i' monoton, da der Gradient nicht null ist; daher hat z in benachbarten Sektoren *verschiedenes* Vorzeichen. Die Anzahl n der Sektoren ist also *gerade*: $n = 2\lambda$.

Fassen wir zusammen: ***Wenn es Niveaulinien c_i gibt, die in den Punkt O hineinlaufen, so ist deren Anzahl gerade. Eine Umgebung von O — nämlich das Innengebiet einer gewissen einfach geschlossenen Kurve k^* — wird durch die Linien c_i in Sektoren zerlegt, in deren jedem z immer festes Vorzeichen hat, während dieses Vorzeichen in zwei benachbarten Sektoren immer entgegengesetzt ist.***

Den Punkt O nennt man in diesem Falle einen „Sattelpunkt" der Funktion z. Ist die Anzahl der in O hineinlaufenden Niveaulinien gleich 2λ, so nennen wir die Zahl $\lambda - 1$ die „Ordnung" des Sattelpunktes O. Ein „gewöhnlicher" Sattel hat die Ordnung 1, weil vier Niveaulinien $z = 0$ in O hineinlaufen. (Auch Sattelpunkte der Ordnung Null sind definiert, sie spielen aber bei uns keine Rolle.)

---

[10]) Bendixson: a.a.O. Théorème V, p. 19.

7. *Felder von Richtungselementen.* In jedem Punkt eines ebenen Gebietes sei ein Richtungselement angebracht, das stetig vom Punkt abhängen soll; wir sprechen dann von einem „Feld" von Richtungselementen.

Ein Element heißt *orientiert* oder *nicht orientiert*, je nachdem auf ihm ein „Pfeilsinn" ausgezeichnet ist oder nicht. Ein Feld, dessen Elemente so orientiert sind, daß auch die Pfeilsinne stetig vom Ort abhängen, heißt ein orientiertes Feld. Es gibt orientierbare und nicht orientierbare Felder.

Der *Richtungswinkel* eines nicht orientierten Richtungselementes ist nur mod π bestimmt. Durchläuft dieses einen gerichteten geschlossenen Weg, so erleidet jener — wenn man ihn als *stetige* Funktion des Wegparameters auffaßt — eine Änderung um $d\pi$ mit ganzzahligem d.

Das Feld habe eine isolierte Singularität in O (d.h. eine Stelle, wo kein Richtungselement erklärt ist). Beim einmaligen positiven Umlaufen von O ändere sich der Richtungswinkel des Elementes um $d\pi$; bekanntlich ist d unabhängig von der Wahl des Weges, auf dem man O einmal positiv umläuft; d heiße die „Drehzahl" in O. Die Drehzahl hat die folgende Invarianzeigenschaft: *ändert man das Feld stetig ab (ohne daß dabei eine neue Singularität entsteht), so bleibt d ungeändert.*

Wenn das Feld sich orientieren läßt, so ändert sich der Richtungswinkel beim Durchlaufen eines geschlossenen Weges offenbar um ein ganzes Vielfaches von 2π; folglich ist in diesem Fall d gerade. Umgekehrt: Wenn d gerade ist, so ist das Feld orientierbar. Ist nämlich d gerade, so ändert sich der Richtungswinkel beim Umlaufen von O und infolgedessen, wie man leicht sieht, beim Durchlaufen *jedes* geschlossenen Weges um ein ganzes Vielfaches von 2π; daher führt die stetige Fortsetzung einer Orientierung eines willkürlich ausgewählten Elementes zu einer eindeutigen Orientierung aller Elemente; das Feld ist also orientierbar, und zwar auf genau zwei Weisen. [11])

8. Die Richtungselemente der Niveaulinien (d.h. deren Tangentialelemente) lassen sich orientieren, etwa indem man die Niveaulinien sodurch läuft, daß die Niveaulinien mit niedrigerer

---

[11]) Für orientierbare Felder ist es üblich, anstelle der Drehzahl den „Index" zu gebrauchen. BENDIXSONS Index i ist gleich $-\frac{d}{2}$. Gewöhnlich definiert man heute den Index als $+\frac{d}{2}$.

Kote stets zur Linken liegen. Die Drehzahl ist daher gerade. Bendixson hat (a.a.O., Théorème XI, p. 39) eine Beziehung zwischen der Drehzahl, der Anzahl der in O hineinlaufenden Niveaulinien und der Anzahl der „Knotengebiete" (die bei uns nicht auftreten) hergeleitet. In unserem Falle lautet diese Beziehung, wenn wir wie in Nr. 6 die Anzahl der in O einlaufenden Niveaulinien mit $n = 2\lambda$ bezeichnen, folgendermaßen:

$$d = 2 - n = 2 - 2\lambda. \tag{3}$$

Dies gilt insbesondere auch für den in Nr. 5 behandelten Fall, in welchem $n = 0$ ist.

9. *Stetige Abbildungen mit einer isolierten Nullstelle der Funktionaldeterminante.* Der durch $x^2 + y^2 \leqq r^2$ gegebene Bereich A der x-y-Ebene sei durch f in die x'-y'-Ebene abgebildet. f sei stetig; überdies seien $x'(x, y)$, $y'(x, y)$ stetig differenzierbar; *die Funktionaldeterminante D sei gleich* 0 *im Nullpunkt O, sonst überall* $\neq 0$, also entweder immer > 0 oder immer < 0; es sei $f(O) = O'$.

Satz: *Es gibt eine Umgebung U von O, in welcher außer O kein Punkt O_1 mit $f(O_1) = O'$ liegt.*

Beweis: Jeder von O verschiedene Punkt P von A besitzt, da $D \neq 0$ in P ist, eine Umgebung, welche *eineindeutig* abgebildet wird; folglich ist P nicht Häufungspunkt von Punkten P_1, $P_2, \ldots$ mit $f(P_1) = f(P_2) = \ldots$. Insbesondere kann daher die Menge der Punkte, die auf O' abgebildet werden, keinen anderen Häufungspunkt besitzen als allenfalls O; diese Menge ist daher höchstens abzählbar, und folglich gibt es gewiß einen Kreis k um O, auf welchem kein Punkt Q mit $f(Q) = O'$ liegt. Das Bild $f(k)$ hat eine Umlaufszahl g um O', und es existiert eine Umgebung U' von O', so daß $f(k)$ um jeden Punkt von U' dieselbe Umlaufszahl g hat. S sei die von k begrenzte Kreisscheibe; dann ist g zugleich der Grad der Abbildung f von S in jedem Punkt von U'. Nun sei P' ein von O' verschiedener Punkt von U'; wäre die Menge seiner Originalpunkte unendlich, so hätte sie einen Häufungspunkt P; wegen der Stetigkeit von f wäre $f(P) = P'$, also $P \neq O$; dies ist, wie am Anfang des Beweises festgestellt wurde, unmöglich. Es seien $P_1, P_2, \ldots, P_m$ die Originalpunkte von P', in S. Jeder Punkt P_i besitzt, da $D \neq 0$, eine Umgebung U_i, die eineindeutig, also mit dem Grade ± 1 auf eine Umgebung von P' abgebildet wird; dabei hat dieser Grad dasselbe Vorzeichen wie D in P_i; infolge unserer Voraussetzung über D sind die Grade daher für alle i einander gleich. Andererseits ist ihre Summe gleich dem Grade g der Abbildung von S in P'. Daraus folgt: *Es gibt in S genau $|g|$ Originalpunkte von P'.*

Würde es nun in S $|g| + 1$ Punkte $O_i \neq O$ mit $f(O_i) = O'$ geben, so hätte jeder — weil $D \neq 0$ — eine Umgebung V_i, die eineindeutig auf eine Umgebung V'_i von O' abgebildet würde; dabei dürfen wir die V_i als zueinander fremd annehmen; ein beliebiger, von O' verschiedener Punkt P' des Durchschnittes der V'_i hätte dann mehr als $|g|$ Originalpunkte in S — entgegen dem oben Bewiesenen. Da die Annahme von mehr als $|g|$ Punkten O_i in S somit zum Widerspruch führt, ist die Anzahl der Originalpunkte von O' in S gewiß *endlich*. Wir können daher eine Umgebung U um O auswählen, so daß darin außer O kein weiterer Originalpunkt von O' liegt. Damit ist die Richtigkeit unseres Satzes bewiesen.

10. Die in dem letzten Beweis auftretende Anzahl $|g|$ der in S gelegenen Originalpunkte eines beliebigen, von O' verschiedenen Punktes P' von U' ist gewiß nicht null; denn andernfalls wäre O' der einzige in U' gelegene Punkt des Bildes $f(S)$, was unmöglich ist, da O' nicht auf $f(k)$ liegt, und da mithin auf dem Bilde jedes Radius von S Punkte von U' liegen, die $\neq O'$ sind. Daher können wir dem vorigen Beweis noch folgenden Satz entnehmen:

Es gibt eine Kreisscheibe S mit dem Mittelpunkt O und eine Umgebung U' von O' mit folgenden Eigenschaften: O ist der einzige Originalpunkt von O' in S; jeder von O' verschiedene Punkt von U' hat genau $|g|$ Originalpunkte in S; dabei ist g die Umlaufszahl des Randbildes $f(k)$ von S um O' oder, was dasselbe ist, der Grad der Abbildung f von S im Punkte O'; es ist $g \neq 0$; und zwar $g > 0$ oder $g < 0$, je nach dem Vorzeichen von D in den von O verschiedenen Punkten.

Man kann den Sachverhalt auch so beschreiben: das Bild $f(S)$ hat in O' einen Windungspunkt der Ordnung $|g| - 1$, es verhält sich also ebenso wie die Riemannsche Fläche von $\sqrt[|g|]{z}$.

11. *Ein Satz über die Abbildung eines Feldes von Richtungselementen.* Es seien weiterhin dieselben Voraussetzungen erfüllt wie in Nr. 9 und Nr. 10. Auf einer Kreislinie k mit dem Mittelpunkt O sei ein Feld von Richtungselementen $\mathfrak{e}$ erklärt; seine Drehzahl sei d. Durch f wird jedes Element $\mathfrak{e}$ auf ein Element $\mathfrak{e}'$ abgebildet; beim einmaligen positiven Durchlaufen von k mache

$\mathfrak{e}'$ die Drehung $d'\pi$. Der folgende Satz, der im wesentlichen von St. Cohn-Vossen stammt [12]), zeigt, in welcher Weise d' durch d bestimmt ist:

Satz: *Ist der Abbildungsgrad* $g < 0$, *so ist* $d + d' = 2 + 2g$. [13])

Beweis: Zunächst überzeugen wird uns, daß die Behauptung für ein spezielles Feld $\mathfrak{e}$ richtig ist: Wir betrachten in der x-y-Ebene die Niveaulinien der Funktion $y'(x, y)$; es ist $d' = 0$, da die Richtungen $\mathfrak{e}'$ alle einander parallel sind; um die Zahl d zu bestimmen, benutzen wir die Bendixsonsche Formel $d = 2 - n$ (Nr. 8), worin n die Anzahl der Linien $y' = \text{const}$ bezeichnet, welche in den Punkt O hineinlaufen: aus dem Ergebnis von Nr. 10 folgt nun, daß es in der Nähe von O genau $|g|$ Linien gibt, die auf die positive x'-Achse abgebildet werden, und ebenso $|g|$ Linien, die auf die negative x'-Achse abgebildet werden; folglich ist $n = 2|g| = -2g$, und mithin $d = 2 + 2g$. Dies zeigt, zusammen mit $d' = 0$, die Richtigkeit der Formel für das betrachtete spezielle Feld.

Damit ist der Satz auf den folgenden Hilfssatz zurückgeführt:

Hilfssatz: Es seien $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ zwei Felder auf k und $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2'$ ihre Bilder; beim einmaligen positiven Durchlaufen von k seien die Drehungen der vier Felder $d_1\pi$, $d_2\pi$, $d_1'\pi$, $d_2'\pi$. Dann ist: $d_1 + d_1' = d_2 + d_2'$.

Wir zerlegen die Behauptung dieses Hilfssatzes in zwei Teile:

Behauptung 1: $(d_1 + d_1') - (d_2 + d_2')$ ist gerade;

Behauptung 2: $|(d_1 + d_1') - (d_2 + d_2')| < 2$.

Beweis von 1: Es genügt zu zeigen, daß für jedes einzelne Feld $d_i + d_i'$ gerade ist. Wir beziehen den Kreis k auf einen Parameter s, $0 \leqq s \leqq 1$, so daß zu 0 und 1 derselbe Punkt gehört; damit werden auch die auf k definierten Felder von diesem Parameter abhängig: $\mathfrak{e}_i(s)$; wir versehen nun weiter $\mathfrak{e}_1(0)$ mit einem Pfeilsinn und setzen diesen längs k stetig fort. Es ist dann entweder 1) $\mathfrak{e}_1(1) = \mathfrak{e}_1(0)$ oder 2) $\mathfrak{e}_1(1) = -\mathfrak{e}_1(0)$; im ersten Fall ist die Drehzahl d_1 gerade, im zweiten Fall ist sie ungerade. Die Bilder $\mathfrak{e}_1'(s)$ der orientierten $\mathfrak{e}_1(s)$ bilden Orientierungen der

---

[12]) S. Cohn-Vossen, Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen [Nachr. Göttingen, Math.-phys. Kl. **1927**, 125]. In unserer Formulierung wird der Satz nicht explizit von Cohn-Vossen ausgesprochen; er wird aber implizit beim Beweis eines andern Satzes — auf den wir nachher noch zurückkommen werden — mitbewiesen, übrigens auf einem etwas anderen Wege als dem, den wir hier einschlagen.

[13]) Ist $g > 0$, so ergibt der ganz analoge Beweis die Formel $d' - d = 2g - 2$.

zunächst nicht orientierten Elemente $\mathfrak{e}_1'$; für diese nunmehr orientierten Elemente ist wieder 1′) $\mathfrak{e}_1'(1)=\mathfrak{e}_1'(0)$ oder 2′) $\mathfrak{e}_1'(1)=-\mathfrak{e}_1'(0)$; da in allen Punkten von k, also insbesondere im Punkt, der zu $s=0$ und $s=1$ gehört, die Funktionaldeterminante der Abbildung verschieden von null ist, so können sich nur die Fälle 1 und 1′ oder 2 und 2′ entsprechen; das bedeutet aber: wenn d_1 gerade ist, so ist auch d_1' gerade und wenn d_1 ungerade ist, so ist auch d_1' ungerade. Da Analoges auch für das Feld $\mathfrak{e}_2$ gilt, so ist die Behauptung 1 bewiesen.

Beweis von 2: Wir benutzen auch hier den im Beweis von 1 eingeführten Parameter und die dort gewählten Orientierungen von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$. Unter $\alpha(s)$ verstehe man einen der Winkel, um den man $\mathfrak{e}_1(s)$ im positiven Sinne drehen muß, um in die Lage $\mathfrak{e}_2(s)$ zu kommen (dabei sind $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ *orientiert*); $\alpha(s)$ soll als stetige Funktion von s definiert sein. Die Änderung von $\alpha(s)$, wenn s von 0 bis 1 wächst, ist dann gleich $(d_2-d_1)\pi$. Analog definiert man den Winkel $\alpha'(s)$ als den Drehungswinkel von $\mathfrak{e}_1'$ in $\mathfrak{e}_2'$ (im positiven Sinne), wobei $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2'$ die Bilder der orientierten $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ sind. Die Änderung von $\alpha'(s)$ ist $(d_2'-d_1')\pi$.

Die Behauptung 2 läßt sich nun auch so aussprechen: die Änderung der stetigen Funktion $\alpha(s)+\alpha'(s)$ von $s=0$ bis $s=1$ ist absolut genommen kleiner als 2π. Dies beweisen wir folgendermaßen: Wir betrachten $\alpha(s)$ und $\alpha'(s)$ für einen festen Wert von s. Es gibt eine (und nur eine) ganze Zahl m, so daß eine der folgenden beiden (sich ausschließenden) Ungleichungen gilt:

(a) $$(2m-1)\pi \leqq \alpha < 2m\pi$$

(b) $$2m\pi \leqq \alpha < (2m+1)\pi;$$

und ebenso gibt es eine (und nur eine) ganze Zahl m', so daß eine der folgenden (sich ausschließenden) Ungleichungen gilt:

(a′) $$(2m'-1)\pi < \alpha' \leqq 2m'\pi$$

(b′) $$2m'\pi < \alpha' \leqq (2m'+1)\pi.$$

Daraus, daß die Funktionaldeterminante der Abbildung negativ ist, folgt, wie ein Blick auf eine Figur lehrt, daß (a) mit (a′) sowie (b) mit (b′) unverträglich sind; es gelten also entweder (a) und (b′) oder (a′) und (b); in jedem dieser Fälle erhält man durch Addition:

$$(2m+2m'-1)\pi < \alpha + \alpha' < (2m+2m'+1)\pi.$$

$\alpha(s)+\alpha'(s)$ liegt also *zwischen* zwei benachbarten ungeraden

Vielfachen von π und ist daher *niemals gleich* einem ungeraden Vielfachen von π. Folglich ist es unmöglich, daß die Werte der Funktion $\alpha + \alpha'$ für $0 \leqq s \leqq 1$ ein Intervall ausfüllen, dessen Länge $\geqq 2\pi$ ist; das heißt: die Änderung von $\alpha(s) + \alpha'(s)$ ist absolut genommen $< 2\pi$, w.z.b.w.

Damit sind Hilfssatz und Satz bewiesen.

Aus diesem Satz ergibt sich unmittelbar der folgende:

Satz: *Auf dem Kreise k sei ein Feld $\mathfrak{e}$ mit folgender Eigenschaft gegeben: die Bildrichtung $\mathfrak{e}' = f(\mathfrak{e})$ ist immer zu $\mathfrak{e}$ parallel (d.h. sie bildet mod π mit der positiven x'-Richtung denselben Winkel wie $\mathfrak{e}$ mit der positiven x-Richtung). Dann ist, bei negativem Grade g*

$$d = 1 + g. \tag{4}$$ [14])

Abschnitt 2. Differentialgeometrische Untersuchung der räumlichen Flächen.

12. *Vorbemerkungen über räumliche Flächenstücke und ihre sphärische Abbildung.* [15]) *F sei* ein zweimal stetig differenzierbares Flächenstück im Raum. Es sei durch den Vektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ gegeben; hierin sind u und v Flächenparameter. Die Vektoren $\mathfrak{x}_u = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u}$ und $\mathfrak{x}_v = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}$ seien linear unabhängig; sie spannen die Tangentialebene des Punktes (u, v) auf. Infolge der Unabhängigkeit von $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ ist $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0$.

Der Vektor

$$\mathfrak{x}_3(u, v) = \frac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{|\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v|} \tag{5}$$

ist der *Normalenvektor*; er hat die Länge 1 und steht normal zur Tangentialebene des Punktes (u, v). Verschiebt man seinen Anfangspunkt in einen festen Punkt, so beschreibt seine Spitze ein Stück einer Kugel vom Radius 1. Zu einem Punkt $\mathfrak{x}(u, v)$ auf der Fläche F gehört also ein bestimmter Punkt $\mathfrak{x}_3(u, v)$ dieser Kugel. Die dadurch bewirkte Abbildung nennt man die *sphärische Abbildung*.

---

[14]) Das ist der in Fußnote [12]) erwähnte Satz von Cohn-Vossen; (a.a.O. wird allerdings ein etwas allgemeinerer Satz bewiesen). — Übrigens sieht man leicht, daß es bei negativem g immer zwei Felder gibt, die die Voraussetzung des Satzes erfüllen.

[15]) Für das Folgende vergleiche man etwa:

Bieberbach: Differentialgeometrie, 1. Aufl. (1932), S. 47, 57, 69.

Blaschke: Vorlesungen über Diff.-geometrie I, 3. Aufl. (1930), §§ 41, 42, 44, 50.

Die *erste Fundamentalform* der Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ ist das Quadrat des Linienelementes ds und heißt:

$$(6) \qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

worin

$$(7) \qquad E = \mathfrak{x}_u^2, \quad F = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v, \quad G = \mathfrak{x}_v^2$$

bedeuten. Die *zweite Fundamentalform* heißt:

$$(8) \qquad \mathfrak{L} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2;$$

hierin ist

$$(9) \qquad L = \mathfrak{x}_3 \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^2}, \quad M = \mathfrak{x}_3 \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u\,\partial v}, \quad N = \mathfrak{x}_3 \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial v^2}.$$

Die *Gaußsche Krümmung* ist

$$(10) \qquad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2};$$

sie ist aber bekanntlich schon durch die E, F, G allein bestimmt.

Wir wollen nun als Flächenparameter die rechtwinkligen Koordinaten x, y benutzen. Das Koordinatensystem werde so gewählt, daß der Ursprung des Systems mit dem Punkt $O(u=0, v=0)$ zusammenfalle, und daß die x-y-Ebene Tangentialebene in O werde. Es ist $z = z(x, y)$; $z = z_x = z_y = 0$ in $O(x = y = 0)$.

Der Vektor $\mathfrak{x}$ hat dann folgende Komponenten:

$$(11) \qquad x, \; y, \; z = z(x, y);$$

die Tangentialvektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ berechnen sich damit zu

$$(12) \qquad \mathfrak{x}_u = \mathfrak{x}_x = (1, 0, z_x), \quad \mathfrak{x}_v = \mathfrak{x}_y = (0, 1, z_y);$$

daraus ergibt sich:

$$(13) \qquad \mathfrak{x}_3 = \left(\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right).$$

Die Einheitskugel, auf welche wir unsere Fläche sphärisch abbilden, sei durch $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gegeben; das sphärische Bild der Umgebung des Punktes O liegt auf der Halbkugel $z > 0$; auf dieser können wir die Werte der Koordinaten x und y der Kugelpunkte als Parameter einführen; zur Unterscheidung von den Parametern auf der Fläche F nennen wir sie x', y'. Dann wird, wie man aus (13) sieht, die sphärische Abbildung durch die folgende Beziehung zwischen den Flächenparametern x, y und den Kugelparametern x', y' dargestellt:

$$(14) \qquad x' = x'(x, y) = \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad y' = y'(x, y) = \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

Die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)}$ dieser Abbildung ist bekanntlich gleich dem Krümmungsmaß K in dem Flächenpunkt mit dem Parametern x, y.

Wir erinnern noch an die Ausdrücke für die Fundamentalgrößen und die *Gauß*sche Krümmung in dem x-y-Parametersystem:

$$(15) \qquad E = 1 + z_x^2, \qquad F = z_x z_y, \qquad G = 1 + z_y^2;$$

$$(16) \qquad L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad N = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}};$$

$$(17) \qquad K = \frac{z_{xx}\, z_{yy} - z_{xy}^2}{(1+z_x^2+z_y^2)^2}.$$

13. *Isolierte Nullstellen der Krümmung.* Wir setzen jetzt voraus: O sei eine isolierte Nullstelle der Gaußschen Krümmung; d.h. in O sei $K = 0$, und für alle von O verschiedenen Punkte einer Umgebung von O sei $K \neq 0$. Über das Vorzeichen von K, das in allen Punkten außer O das gleiche ist, setzen wir vorläufig nichts voraus.

Satz I: *Zur Normalen in O gibt es in der Umgebung von O keine parallele Normale.*

Beweis: Der Satz folgt aus dem Satz, der in Nr. 9 bewiesen wurde, wenn man diesen auf die Abbildung (14) anwendet; denn die Funktionaldeterminante dieser Abbildung ist K, also nach unsern Voraussetzungen außer in O nirgends null.

Aus dem Satz in Nr. 10 folgt auf gleiche Weise

Satz II: ***Die sphärische Abbildung einer Umgebung von O hat im Punkt O' und in seiner Umgebung einen Abbildungsgrad $g \neq 0$; sein Vorzeichen ist gleich dem Vorzeichen von K. Jede von der Normalenrichtung in O verschiedene, ihr aber hinreichend benachbarte Richtung ist die Normalenrichtung in genau $|g|$ Punkten aus der Umgebung von O. Das sphärische Bild sieht in O' aus wie die Riemannsche Fläche in einem Windungspunkt der Ordnung $|g| - 1$.***

14. Aus der Parameterdarstellung (14) der sphärischen Abbildung sieht man, daß Satz I aussagt: O ist die einzige Nullstelle von grad z in einer gewissen Umgebung von O. O ist daher die einzige kritische Stelle der Funktion $z(x, y)$, und daher sind die Sätze aus Abschnitt I anwendbar, und die dortigen Begriffe lassen sich hierher übertragen. Wir nennen O einen „Extremalpunkt", wenn z in ihm ein Extremum hat (Nr. 5); wir nennen ihn einen „Sattelpunkt", wenn z in ihm einen Sattelwert hat

(Nr. 6), und die Ordnung dieses Sattelpunktes sei wie in Nr. 6 definiert. Wir haben also die folgende erste, „*geographische*" Definition *der Ordnung s eines Sattelpunktes auf einem Flächenstück: Es gibt eine positive gerade Anzahl $n = 2\lambda$ so, daß in den Sattelpunkt O λ Täler (Gebiete negativer Kote) und λ Bergrücken (Gebiete positiver Kote) hineinlaufen. Die Zahl $s = \lambda - 1$ heißt die Ordnung des Sattelpunktes O.*

15. Die Drehzahl d der Richtungselemente der Niveaulinien im Punkte O ist definiert; über sie gilt:

Satz III: *Die zu den Niveaulinien von $z(x, y)$ gehörige Drehzahl d ist gleich $2g$, wobei g der im Satz* II *genannte Abbildungsgrad des sphärischen Bildes ist.*

Beweis: Die Drehzahl d der Niveaulinien ist gleich der Drehzahl des Vektorfeldes grad z, da grad z immer senkrecht auf den Tangenten der Niveaulinien steht; beim einmaligen positiven Umlaufen von O macht also der Vektor grad $z = (z_x, z_y)$ die Drehung $d \cdot \pi$. Die gleiche Drehung macht jeder Vektor, der aus grad z durch Multiplikation mit einem von 0 verschiedenen Skalar hervorgeht, also insbesondere der Vektor mit den durch (14) gegebenen Komponenten x', y'. Andererseits ergibt sich aus der Definition von g: wenn der Punkt (x, y) den Punkt O einmal positiv umläuft, so macht sein Bild (x', y') gerade g Umläufe um O', d.h. die Drehung des Vektors (x', y') ist gleich $g \cdot 2\pi$. Folglich ist $d = 2g$.

16. *Die Krümmung in der Umgebung des Punktes O sei positiv.*

Satz IV: *Die Fläche liegt auf einer Seite der Tangentialebene von O.*

Satz V: *Die sphärische Abbildung der Umgebung von O ist eineindeutig.*

Beweis beider Sätze: Nach Satz II ist $g > 0$, also nach Satz III $d > 0$; nach Nr. 8 befindet man sich nicht im Fall b (Nr. 6) (da dort immer $\lambda \geqq 1$, $n \geqq 2$, also $d \leqq 0$ ist), es liegt also Fall a (Nr. 5) vor. Nach Nr. 5 hat daher z in O ein Extremum, d.h. es gilt Satz IV. Nach Nr. 8 ist $d = 2$, und daraus ergibt sich nach Satz III: $g = 1$. Satz II lehrt dann, daß die sphärische Abbildung eineindeutig ist.

17. *Die Krümmung in der Umgebung des Punktes O sei negativ.*

Satz VI: *O ist ein Sattelpunkt.*

Beweis: Aus Satz II folgt zunächst, daß $g < 0$ ist, also ist nach Satz III auch $d < 0$ und gerade. Die Bendixsonsche Formel in Nr. 8 zeigt dann, daß n positiv ist: $n = 2\lambda > 0$. Nach Nr. 14 ist daher O Sattelpunkt.

Satz VII: *Die Ordnung des Sattelpunktes ist gleich* $|g| = -g$, *wobei* g *der Abbildungsgrad des sphärischen Bildes ist.*

Beweis: Nach Satz III ist $2g = d$, also nach Nr. 8

$$2g = 2 - 2\lambda$$
$$|g| = \lambda - 1.$$

Nach Nr. 14 ist $\lambda - 1$ aber gerade die Ordnung des Sattels.

Der Satz VII gestattet neben der „geographischen" Definition des Sattelpunktes (siehe Nr. 14) auch die folgende 2. *Definition* auszusprechen:

Die Ordnung s *des Sattelpunktes* O *ist entgegengesetzt gleich dem Grade* g *der sphärischen Abbildung einer Umgebung von* O *im sphärischen Bildpunkt* O' *von* O; *das sphärische Bild hat in* O' *einen Windungspunkt der Ordnung* $|g| - 1$ (*also wie die Riemannsche Fläche von* $\sqrt[|g|]{z}$).

18. In einem Gebiet, wo $K < 0$ ist, lassen sich die beiden Scharen *Asymptotenlinien* und ebenso die beiden Scharen *Krümmungslinien* immer trennen. Denn die beiden Scharen der Asymptotenlinien unterscheiden sich durch das Vorzeichen der Torsion (Formel von Enneper); in Gebieten, wo $K < 0$ ist, sind ferner die beiden Hauptkrümmungen von verschiedenem Vorzeichen, und es gelingt daher, auch diese Scharen zu trennen. Von jeder Schar läßt sich dann eine Drehzahl angeben: die Drehzahl der Tangente, wenn man einmal in positivem Sinn um O herumläuft. Da man die Tangente der einen Schar der Krümmungslinien durch Drehen um einen rechten Winkel in die Tangenten der andern Schar überführen kann, und da die Richtungen je einer Schar Asymptotenlinien zwischen den Richtungen der beiden Scharen Krümmungslinien liegen, so sind die Drehzahlen der vier Scharen alle gleich. *Die Drehzahl einer Schar heiße* j.

Satz VIII: *Es ist* $j = 1 + g$.

Beweis: Wir bestimmen j für eine Schar der Krümmungslinien. Nach der Formel von O. Rodrigues sind die Krümmungsrichtungen dadurch ausgezeichnet, daß sie zu ihren sphärischen Bildern parallel sind. Nach Nr. 11, angewandt auf die Abbildung (14), ist daher $j = 1 + g$.

Da $g \leqq -1$ ist, erhalten wir als Korollar: *Die Drehzahl der Asymptotenlinien in der Umgebung einer isolierten Nullstelle der Krümmung ist stets* $\leqq 0$.

Der Satz VIII ermöglicht nun eine 3. *Definition* der Ordnung eines Sattelpunktes:

Die Ordnung s eines Sattelpunktes O ist gleich $1 - j$, wobei j die Drehzahl einer Schar Krümmungslinien oder einer Schar Asymptotenlinien im Punkte O ist.

Aus dem Satz VIII läßt sich nun noch leicht eine Folgerung ziehen in bezug auf „parabolische" Punkte.[16])

SATZ VIIIa: *Ist der Punkt O kein Flachpunkt, also nur ein parabolischer Punkt, so ist O ein Sattel* 1. *Ordnung* („*gewöhnlicher*" *Sattel*).

Denn in einem parabolischen Punkte sind die Asymptotenlinien regulär, und es ist daher $j = 0$. Aus Satz VIII und Satz VII folgt dann $s = 1$.

19. *Ein Invarianzsatz.* Es sei eine zweimal stetig differenzierbare Flächenschar $\mathfrak{x}(u, v; t)$ gegeben, die samt den partiellen Ableitungen $\mathfrak{x}_u, \ldots, \mathfrak{x}_{vv}$ *stetig* vom Scharparameter t abhänge; t variiere im Intervall $0 \leqq t \leqq 1$. Die Schar vermittelt eine Deformation der Fläche $\mathfrak{x}(u, v; 0)$ in die Fläche $\mathfrak{x}(u, v; 1)$. Diese Deformation heiße „krümmungsdefinit", wenn für alle Parameterwerte t in $0 \leqq t \leqq 1$ das Vorzeichen von K unabhängig von t ist. (Null soll auch als Vorzeichen gelten.) Jede stetige Verbiegung (Einleitung, Nr. 3) ist krümmungsdefinit.

SATZ IX: *Die Ordnung eines Sattelpunktes ist invariant bei einer krümmungsdefiniten Deformation, also insbesondere bei einer Verbiegung.*

Beweis: Bei einer Deformation, die krümmungsdefinit ist, bleibt $K < 0$ in allen von O verschiedenen Punkten; in allen diesen Punkten bleiben also die Asymptotenrichtungen definiert; beobachten wir in der Ebene der Parameter u, v die eine Schar der Asymptotenrichtungen, so entsteht also keine neue (d.h. von O verschiedene) Singularität. Da die Ableitungen $\mathfrak{x}_u, \ldots, \mathfrak{x}_{vv}$ stetig von t abhängen, erleiden auch die Asymptotenrichtungen eine stetige Änderung. Nach Nr. 7 bleibt daher ihre Drehzahl ungeändert. Aus der 3. Definition der Sattelordnung (Nr. 18) ergibt sich dann die behauptete Invarianz.

[16]) „*Parabolisch*" nennen wir jene Punkte, für welche $LN - M^2 = 0$ ist, jedoch wenigstens eine der Größen L, M, N verschieden von null ist. Dagegen heißen die Punkte, für die $L = M = N = 0$ ist, *Flachpunkte*.

Zusatz: Die Ordnung des Sattelpunktes ist natürlich auch invariant bei einer Spiegelung.

Abschnitt 3. Analytische Flächen. Beispiele.

20. *Vorbemerkungen über reelle analytische Funktionen von zwei Veränderlichen.* a) Es sei $f_m(x, y)$ eine homogene Form m-ten Grades. Hat sie eine von (0, 0) verschiedene reelle Nullstelle, so verschwindet sie auf der ganzen Geraden, welche diese Stelle mit (0, 0) verbindet; diese Gerade heißt „Nullgerade" von $f_m(x, y)$. Eine Nullgerade habe die Gleichung $ax + by = 0$; unter der „Vielfachheit" dieser Nullgeraden verstehen wir wie üblich den Exponenten der höchsten Potenz von $ax + by$, die Teiler von $f_m(x, y)$ ist. Die bei Berücksichtigung der Vielfachheiten gezählte Anzahl ϱ der reellen Nullgeraden ist daher $\leqq m$.

Beim Einführen von Polarkoordinaten r, φ wird $f_m(x, y) = r^m l(\varphi)$, wobei $l(\varphi) = f_m(\cos\varphi, \sin\varphi)$ ist. Jeder Nullgeraden von f_m entsprechen auf dem Kreise $0 \leqq \varphi < 2\pi$ zwei Nullstellen von $l(\varphi)$, die sich um π voneinander unterscheiden. Man sieht leicht, daß die Vielfachheiten dieser Nullstellen von $l(\varphi)$ mit den Vielfachheiten der entsprechenden Nullgeraden von $f_m(x, y)$ übereinstimmen.

b) Es sei $f(x, y)$ eine in der Umgebung von (0, 0) reelle analytische Funktion von x, y; ihre Potenzreihe sei

$$f(x, y) = f_m(x, y) + f_{m+1}(x, y) + \cdots, \tag{18}$$

worin die f_i Formen i-ten Grades sind und $f_m \neq 0$ ist. Beim Einführen von Polarkoordinaten wird

$$f(x, y) = p(r, \varphi) = r^m l(\varphi) + \Lambda(r, \varphi), \tag{19}$$

wobei $l(\varphi)$ dieselbe Bedeutung wie unter a hat, und $\Lambda(r, \varphi)$ in einem Kreise um (0, 0), auf den wir uns beschränken, eine Ungleichung

$$|\Lambda(r, \varphi)| < c\, r^{m+1} \quad \text{für} \quad r > 0 \tag{20}$$

mit einer positiven Konstanten c erfüllt.

Hilfssatz 1: Ist $l(\varphi) \neq 0$ in dem Intervall $|\varphi - \varphi_0| \leqq \delta$, so gibt es ein solches $r_0 > 0$, daß $p(r, \varphi) \neq 0$ ist für $0 < r \leqq r_0$ und $|\varphi - \varphi_0| \leqq \delta$.

Beweis: Es gibt ein $\eta > 0$, so daß $|l(\varphi)| \geqq \eta$ für $|\varphi - \varphi_0| \leqq \delta$ ist. Wir setzen $r_0 = \frac{\eta}{c}$; dann ist $c \cdot r^{m+1} \leqq r^m l(\varphi)$ für $r \leqq r_0$, und nach (20): $|\Lambda(r, \varphi)| < r^m |l(\varphi)|$ für $0 < r \leqq r_0$; auf Grund von (19) gilt daher der Hilfssatz 1.

Ebenso erkennt man die Gültigkeit des folgenden *Zusatzes* zu Hilfssatz 1: $p(r, \varphi)$ hat für $0 < r \leqq r_0$ im Intervall $|\varphi - \varphi_0| \leqq \delta$ dasselbe Vorzeichen wie $l(\varphi)$ in demselben Intervall.

c) Wie im Abschnitt 1 setzen wir voraus, daß $(0, 0)$ eine isolierte Nullstelle der Funktion $z = f(x, y)$ sei; wie dort (Nr. 6) bezeichnen wir die Anzahl der Niveaulinien $z = 0$, welche in den Nullpunkt hineinlaufen, mit 2λ; unter ϱ verstehen wir wie bisher die Anzahl der reellen Nullgeraden von f_m (also mit Berücksichtigung der Vielfachheiten).

Hilfssatz 2: $\lambda \leqq \varrho$.

Beweis: $l(\varphi)$ habe auf dem durch $0 \leqq \varphi < 2\pi$ gegebenen Kreise k die Nullstellen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ mit den Vielfachheiten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$; dann ist (vergl. a): $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_s = 2\varrho$. In φ_i ist $\frac{d^{\nu_i} l}{d\varphi^{\nu_i}} \neq 0$; dasselbe gilt daher in einem ganzen Intervall I_i, das durch eine Ungleichung $|\varphi - \varphi_i| \leqq \delta$ gegeben ist. Wir dürfen annehmen, daß die Intervalle $I_1, \ldots, I_s$ zueinander fremd sind. Unter $I'_1, \ldots, I'_s$ verstehen wir ihre (abgeschlossenen) Komplementärintervalle; dann ist $l(\varphi) \neq 0$ in jedem I'_i. Durch wiederholte Anwendung des Hilfssatzes 1, teils auf die Intervalle I_i und die Funktionen $\frac{d^{\nu_i} l}{d\varphi^{\nu_i}}$ und $\frac{\partial^{\nu_i} p}{\partial\varphi^{\nu_i}}$, teils auf die Intervalle I'_i und die Funktionen l und p, finden wir ein solches $r_0 > 0$, daß auf jedem Kreise mit dem Radius $r < r_0$ um $(0, 0)$ folgendes gilt: variiert φ in einem I_i, so ist $\frac{\partial^{\nu_i} p}{\partial\varphi^{\nu_i}} \neq 0$, und die Anzahl der Nullstellen von $p(r, \varphi)$ ist daher nach dem Rolleschen Satz $\leqq \nu_i$; variiert φ in einem I'_i, so ist $p(r, \varphi) \neq 0$. Die Anzahl der voneinander verschiedenen Nullstellen von p auf einem solchen Kreise ist daher $\leqq \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_s = 2\varrho$. Folglich ist die Anzahl 2λ der Niveaulinien $f(x, y) = 0$, welche in den Nullpunkt hineinlaufen, $\leqq 2\varrho$, w.z.b.w.

Zusatz zum Hilfssatz 2: Sind alle reellen Nullgeraden von f_m *einfach*, so ist $\lambda = \varrho$.

Beweis: Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß für $0 < r \leqq r_0$ in jedem Intervall I_i mindestens eine Nullstelle von $p(r, \varphi)$ liegt. Da $l(\varphi)$ in I_i eine *einfache* Nullstelle hat, gibt es zwei abgeschlossene Teilintervalle von I_i, in denen $l(\varphi)$ verschiedene Vorzeichen annimmt. Nach dem Zusatz zum Hilfssatz 1 nimmt daher auch $p(r, \varphi)$ für $0 < r \leqq r_0$ verschiedene Vorzeichen an, wenn φ sich in diesen Teilintervallen befindet; folglich existiert in I_i eine Nullstelle von $p(r, \varphi)$.

21. *Die Sattelordnung auf analytischen Flächen.* Es sei $z(x, y)$ eine in der Umgebung von $(0, 0)$ reelle analytische Funktion mit der Potenzreihe

$$z(x, y) = f_m(x, y) + f_{m+1}(x, y) + \ldots, \tag{21}$$

worin die f_i Formen i-ten Grades sind und $f_m \not\equiv 0$ ist. Wir betrachten die analytische Fläche $z = z(x, y)$; wie immer nehmen wir an, daß sie im Nullpunkt von der x-y-Ebene berührt wird, daß also in (21) $m \geqq 2$ ist; $m - 1$ ist in der üblichen Bezeichnungsweise die „Ordnung" der Berührung. Die Fläche habe im Nullpunkt einen Sattel der Ordnung s (Nr. 17); es ist also (Nr. 6), wenn λ die bisherige Bedeutung hat, $s = \lambda - 1$. Der folgende Satz ist eine unmittelbare Folge des Hilfssatzes 2 und seines Zusatzes:

Satz X: *Zwischen der Sattelordnung s, der Anzahl ϱ der (mit Vielfachheiten gezählten) reellen Nullgeraden der Form $f_m(x, y)$ und der Berührungsordnung $m - 1$ der durch* (21) *gegebenen analytischen Fläche im Nullpunkt besteht die Beziehung*:

$$s \leqq \varrho - 1 \leqq m - 1;$$

falls alle reellen Nullgeraden von f_m einfach sind, so ist

$$s = \varrho - 1.$$

Hieraus folgt weiter:

Satz Xa: *In einem Sattelpunkt der Ordnung s einer analytischen Fläche verschwindet die Gaußsche Krümmung mindestens von der Ordnung* $2s - 2$.

Denn z beginnt nach dem eben bewiesenen Satz frühestens mit dem Glied $(s + 1)$-ter Ordnung. Aus der Formel (17) für die Krümmung $K = \dfrac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2}$ geht dann hervor, daß alle Glieder von K verschwinden, deren Ordnung kleiner ist als $2s - 2$.

22. *Beispiele.* Die nachstehenden Beispiele a—d zeigen isolierte Nullstellen der Krümmung auf analytischen Flächen; die Krümmung in der Umgebung der Punkte $(0, 0)$ ist negativ. Die Buchstaben s, λ, m haben dieselbe Bedeutung wie im Satz X.

a) Für *Sattelpunkte mit beliebig vorgeschriebener Ordnung s* erhält man einfache Beispiele durch die *Real- bzw. Imaginärteile* *der analytischen Funktionen.* Es sei $\zeta = x + iy$ und $w = w(\zeta)$ eine analytische Funktion von ζ, $w = u + iv$. u und v genügen der Laplaceschen Gleichung: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Wenn man $z = u(x, y)$ oder $z = v(x, y)$ als Gleichung einer Fläche wählt, so hat diese überall negative Krümmung, mit Ausnahme der Punkte, für die $u_{xx} = u_{yy} = 0$ ist; in diesen verschwindet die Krümmung; denn

$$K = \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{\left(1 + u_x^2 + u_y^2\right)^2} = \frac{-u_{xx}^2 - v_{yy}^2}{\left(1 + u_x^2 + u_y^2\right)^2} = -\frac{|w''|^2}{\left(1 + |w'|^2\right)^2}.$$

K verschwindet also überall dort und nur dort, wo die zweite Ableitung der Funktion w verschwindet.

Ein einfaches Beispiel hierfür ist: $w = \zeta^m$, $m \geqq 2$.

Es sei $$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi, \qquad \text{dann gilt:}$$

$$u = r^m \cos m\varphi,\quad v = r^m \sin m\varphi.$$

Setzt man nun $z = u$ oder $z = v$, so hat z auf jedem Kreis k um O $2m$ Nullstellen, nach Nr. 6 haben wir einen Sattelpunkt $(m-1)$-ter Ordnung vor uns.

Es ist: $$K = \frac{-m^2(m-1)^2 r^{2m-4}}{\left(1 + m^2 r^{2m-2}\right)^2},$$

Sattelordnung $s = \varrho - 1 = m - 1$.

b) In den Beispielen a ist immer $s = \varrho - 1 = m - 1$, d.h. bei gegebener Berührungsordnung $m - 1$ hat s den größten Wert, der möglich ist (Satz X). Die folgenden Beispiele zeigen, daß s auch kleiner sein kann:

Setzt man $z = r^m \cos(\lambda\varphi)$, so ist die dadurch dargestellte Fläche immer dann analytisch, wenn $m = \lambda + 2\nu$, ν positiv ganz; fügt man nämlich zu $\cos\lambda\varphi$ den Faktor $(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^\nu$, so bilden diese Faktoren, in $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ ausgedrückt, eine homogene Form $(\lambda+2\nu)$-ten Grades; mit dem Faktor r^m zusammen ergibt sich daraus eine homogene Form m-ten Grades in x und y, wenn $\lambda + 2\nu = m$ ist. Für die Krümmung erhalten wir:

$$K = -\frac{r^{2m-4}\left[m(m-1)(\lambda^2 - m)\cos^2\lambda\varphi + \lambda^2(m-1)^2\sin^2\lambda\varphi\right]}{\left[1 + r^{2m-2}(m^2\cos^2\lambda\varphi + \lambda^2\sin^2\lambda\varphi)\right]^2}.$$

Es sei nun $\lambda^2 > m$; dann ist $K < 0$ in der Umgebung von $(0, 0)$. Wir haben also einen Sattelpunkt vor uns (Nr. 17) mit

$$s = \lambda - 1 = m - 1 - 2\nu \leqq m - 1,$$

also $s < m - 1$ für $\nu > 0$. Auf die Bedingung $\lambda^2 > m$ kann man hier nicht verzichten; denn andernfalls wären wohl die Niveaulinien in der Umgebung U von $(0, 0)$ regulär, jedoch wäre K in U nicht überall negativ. Es muß also, damit diese Beispiele die gewünschten Eigenschaften haben, $\lambda^2 > m$ sein, und da $m \geqq \lambda + 2$, ist $\lambda \geqq 3$; wir erhalten hier nur Beispiele mit $s \geqq 2$, $m \geqq 5$.

c) Wie soeben bemerkt, haben wir noch kein Beispiel mit $s = 1 < m - 1$, also kein Beispiel eines *gewöhnlichen Sattels*, in dem die Berührungsordnung > 1, der also selbst *Flachpunkt* wäre. Ein solches Beispiel ist das folgende:

$$z = (x^2 - y^2)(x^4 + y^4).$$

Der Sattelpunkt erster Ordnung ist nach Satz X an z unmittelbar zu erkennen. Es ist:

$$K = -\frac{20}{3}(9x^8 - 48x^6y^2 + 138x^4y^4 - 48x^2y^6 + 9y^8) + \text{höhere Glieder.}$$

Durch Umformen ergibt sich daraus:

$$K = -\frac{20}{3}[(3x^4 - 8x^2y^2 + 3y^4)^2 + 56x^4y^4] + \text{höhere Glieder.}$$

K ist also in der Umgebung von $(0, 0)$ kleiner als 0. Nach Nr. 17 liegt also ein Sattelpunkt vor, auf den wir unsere Begriffe anwenden dürfen. Es ist:

$$s = \lambda - 1 = 1 < m - 1 = 5.$$

d) Alle vorstehenden Beispiele sind Flachpunkte; wir geben jetzt ein Beispiel eines *parabolischen* Punktes [16]), in dessen Umgebung überall $K < 0$ ist; er ist nach Nr. 18 natürlich ein gewöhnlicher Sattel $(s = 1)$:

Ein solcher Punkt liegt auf der Fläche

$$z = x^2 - 6x^2y^2 - y^4$$

im Punkte $x = y = 0$. Die Krümmung dieser Fläche ist gegeben durch:

$$K = -24(x^2 + y^2) + \text{höhere Glieder.}$$

Zweiter Teil.

Über die Existenz von Flächenstücken mit gegebenem Linienelement und ihre Verbiegbarkeit.

Abschnitt 1. Ein Existenzsatz und Folgerungen aus ihm.

Die Frage, deren Beantwortung unser nächstes Ziel darstellt, ist die folgende: Die Flächenstücke F und F' seien isometrisch so aufeinander abgebildet, daß die Sattelpunkte O und O' sich entsprechen; *sind dann die Sattelordnungen s und s' von O und O' notwendigerweise einander gleich*? Mit andern Worten: *Ist die Sattelordnung eine Invariante der Isometrien?* Die Antwort wird in Nr. 26 gegeben werden. Sie wird sich leicht aus einem Existenzsatz folgern lassen, der im wesentlichen von Darboux stammt, und den wir zunächst (Nr. 23 und 24) darstellen und nach der Darbouxschen Methode beweisen. In diesem Teil der Arbeit werden im Gegensatz zum 1. Teil ausschließlich *analytische* Flächenstücke betrachtet, d.h. solche, die durch *analytische* Funktionen $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ der Parameter u, v dargestellt werden.

23. *Flächenstücke mit vorgegebenem Linienelement.* In der Umgebung des Punktes $(0, 0)$ der u-v-Ebene sei ein positiv definites Linienelement

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, dudv + G\, dv^2 \tag{22}$$

mit analytischen Koeffizienten E, F, G, gegeben. Gesucht sind Flächenstücke im Raume mit dem Linienelement (22), d.h. solche Tripel reeller analytischer Funktionen $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, daß

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\, du^2 + 2F\, dudv + G\, dv^2 = ds^2 \tag{23}$$

identisch in u, v wird.

Hat man ein solches Flächenstück F, so kann man es durch eine (eigentliche) Bewegung in eine solche Lage bringen, daß dem Punkt $u = v = 0$ der Nullpunkt O des Raumes entspricht, die Tangentialebene in O mit der x-y-Ebene zusammenfällt, die positive u-Richtung der positiven x-Richtung entspricht und die positive v-Richtung in die Halbebene mit positivem y weist; in Formeln:

$$\left.\begin{array}{lll}(24) & & x = y = 0 \\ (24') & & z = 0 \\ (25) & & z_u = z_v = 0 \\ (26) & & x_u > 0, \;\; x_v = 0, \;\; y_v > 0\end{array}\right\} \text{ für } u = v = 0.$$

Wir suchen also die Funktionen $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, die der Differentialgleichung (23) und den Nebenbedingungen (24), (24′), (25), (26) genügen. Die Methode von Darboux zur Lösung dieser Aufgabe ist die folgende:

Es seien zunächst x, y, z Funktionen der gesuchten Art. Die Differentialform

$$(27) \quad d\sigma^2 = ds^2 - dz^2 = (E - z_u^2)du^2 + 2(F - z_u z_v)du dv + (G - z_v^2)dv^2$$

stimmt auf Grund von (25) an der Stelle $u = v = 0$ mit (22) überein und ist daher an dieser Stelle positiv definit; da ihre Koeffizienten stetig sind, ist sie auch in einer ganzen Umgebung dieser Stelle positiv definit. Deshalb bestimmt sie eine reguläre Riemannsche Metrik Φ.

Die Funktionen $x(u, v)$, $y(u, v)$ besitzen die folgenden beiden Eigenschaften: erstens ist infolge (26) ihre Funktionaldeterminante $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ an der Stelle $u = v = 0$ und mithin auch in der Umgebung dieser Stelle verschieden von Null. x und y lassen sich also als reguläre Parameter in Φ einführen; zweitens ist nach (23) und (27)

$$(28) \qquad dx^2 + dy^2 = d\sigma^2.$$

Daraus folgt bekanntlich: Φ ist mit der euklidischen Geometrie isometrisch, d.h. es gilt für das Gaußsche Krümmungsmaß K^* von Φ:

$$(29) \qquad K^* = 0.$$

Dabei ist K^* nach der Vorschrift des theorema egregium aus den Koeffizienten von $d\sigma^2$, die in (27) gegeben sind, zu berechnen. (29) stellt eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für $z(u, v)$ dar [17]).

Wir sehen also: Sind $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ Funktionen der gesuchten Art, so ist $z(u, v)$ eine Lösung von (29), welche (24′) und (25) erfüllt, und $x(u, v)$, $y(u, v)$ sind Lösungen von (28) — wobei $d\sigma^2$ gemäß (27) durch E, F, G, z auszudrücken ist —, welche (24) und (26) erfüllen.

Es sei jetzt umgekehrt eine Lösung $z(u\ v)$ der Differentialgleichung (29) gegeben, die den Bedingungen (24′) und (25) genügt. (25) sichert uns die positive Definitheit der quadratischen Form (27), (29) sagt, daß das Krümmungsmaß K^* der durch (27) bestimmten Riemannschen Metrik Φ identisch null ist. Daher kann man in Φ euklidische Koordinaten x, y einführen, d.h. Funktionenpaare $x(u, v)$, $y(u, v)$ so finden, daß

---

[17]) Darboux, Leçons sur la Théorie générale des Surfaces. III, Chap. IV, p. 254; die partiellen Ableitungen 3. Ordnung, die zunächst auftreten, heben sich auf.

erstens $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ ist und zweitens (28) gilt; dann ist infolge (28) und (27) die Differentialgleichung (23) erfüllt. Durch Drehung und Spiegelung (im Sinne der euklidischen Geometrie von Φ) kann man überdies erreichen, daß x und y die Bedingungen (26) erfüllen; die Gültigkeit von (24) können wir von vorneherein annehmen. Dabei ergibt sich aus den elementaren Eigenschaften der euklidischen Geometrie von Φ, daß durch (24) und (25) die euklidischen Koordinaten x und y *eindeutig* bestimmt sind.

Fassen wir zusammen:

Die räumlichen Flächenstücke F, welche das Linienelement (22) *besitzen und die Nebenbedingungen* (24), (24′), (25), (26) *erfüllen, sind eineindeutig den Lösungen $z(u, v)$ der Differentialgleichung* (29) *zugeordnet, die* (24′) *und* (25) *erfüllen; zu jeder solchen Lösung z lassen sich nämlich auf eine und nur eine Weise Funktionen $x(u, v)$, $y(u, v)$ bestimmen, die die Differentialgleichung* (28) — *ausführlich geschrieben*

$$(28') \quad dx^2 + dy^2 = (E - z_u^2)du^2 + 2(F - z_u z_v)du\,dv + (G - z_v^2)dv^2,$$

identisch in u, v — befriedigen und den Nebenbedingungen (24) *und* (26) *genügen. Diese Funktionentripel $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ stellen die gesuchten Flächenstücke F dar.*

Damit ist die Bestimmung der Flächenstücke F auf die Bestimmung der Lösungen der Differentialgleichung (29) zurückgeführt.

24. Die klassische Theorie der Differentialgleichungen führt nun leicht zu folgendem Satz:

Satz XI: *Es seien $\varphi(v)$ und $\psi(v)$ zwei in der Umgebung von $v = 0$ reguläre, reelle Funktionen, für die*

$$(30) \qquad \varphi(0) = \varphi'(0) = \psi(0) = 0,$$

$$(31) \qquad \varphi''(0) \neq 0$$

ist. Dann gibt es ein und nur ein durch reguläre Funktionen $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ dargestelltes räumliches Flächenstück F, das erstens das Linienelement (22) *besitzt, zweitens die Bedingungen* (24), (24′), (25), (26) *erfüllt, und für welches drittens*

$$(32) \qquad z(0, v) = \varphi(v), \quad z_u(0, v) = \psi(v)$$

gilt.

Beweis: Aus (32) und (30) ergeben sich (24′) und (25). Auf

Grund des Ergebnisses der Nr. 23 genügt es daher, folgendes zu zeigen: *Es gibt eine und nur eine Funktion* $z(u, v)$, *die die Differentialgleichung* (29) *erfüllt und den Anfangsbedingungen* (32) *genügt.* Setzen wir wie üblich $z_u = p$, $z_v = q$, $z_{uu} = r$, $z_{uv} = s$, $z_{vv} = t$, so hat die Differentialgleichung (29) die folgende Gestalt (Darboux, a.a.O., p. 263):

$$r(t + Ap + Bq) + C = 0,$$

wobei A, B, C nicht von r abhängen; die Gleichung lautet, aufgelöst nach r:

$$r = \frac{-C}{t + Ap + Bq} = f(u, v, z, p, q, s, t); \tag{33}$$

dabei ist die Funktion f (die übrigens z nicht enthält) regulär in der Umgebung jeder Stelle, an welcher $p = q = 0$, $t \neq 0$ ist; dies ist, wie aus (32), (30) und (31) ersichtlich, an der Stelle $u = v = 0$ der Fall, wenn wir dort

$$z = \varphi(0), \quad p = \psi(0), \quad q = \varphi'(0), \quad s = \psi'(0), \quad t = \varphi''(0)$$

setzen. Nach dem klassischen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für partielle Differentialgleichungen [18]) gibt es daher in der Umgebung von $u = v = 0$ genau eine reguläre Funktion $z(u, v)$, welche die Differentialgleichung (33) löst und die Anfangsbedingungen (32) erfüllt. Da (33) mit (29) gleichbedeutend ist, so ist damit der Satz XI bewiesen.

25. *Flächenstücke ohne Flachpunkte.* Wir ziehen jetzt aus dem Existenzsatz XI (ohne die in ihm enthaltene Eindeutigkeitsaussage zu benutzen) eine für unsere Fragestellung wichtige Folgerung.

Ist F ein auf die Parameter u, v bezogenes räumliches Flächenstück, so bezeichne $L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$ in der üblichen Weise seine zweite Fundamentalform (vergl. Nr. 12). Eine Richtung (du, dv) im Punkte $u = v = 0$ ist eine Asymptotenrichtung von F, wenn für sie

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0 \tag{34}$$

ist. Wir behaupten:

Satz XII. *Das Linienelement* (22) *sei gegeben, und im Punkte* $u = v = 0$ *sei eine Richtung* $\mathfrak{t}$ *ausgezeichnet. Dann gibt es ein*

[18]) Goursat, Cours d'Analyse Mathématique, III [4e ed.], Chap. XXIV, p. 47 (die dortigen x, y heißen bei uns u, v).

räumliches Flächenstück F, welches das Linienelement (22) *besitzt und auf welchem* $\mathfrak{t}$ *nicht Asymptotenrichtung ist.*

Beweis: Durch eine reguläre Parametertransformation können wir erreichen, daß $\mathfrak{t}$ mit der Richtung $du = 0$ zusammenfällt. Dann lautet unsere Behauptung, daß es eine Fläche F mit dem Linienelement (22) und $N \neq 0$ im Nullpunkt gibt. Wir nehmen zwei Funktionen $\varphi(v)$, $\psi(v)$, die (30) und (31) erfüllen — z.B. $\varphi(v) = v^2$, $\psi(v) = 0$ — und betrachten das Flächenstück F, das nach Satz XI dadurch bestimmt ist. Wir haben nur zu zeigen, daß dann $N \neq 0$ ist. Es ist (vergl. Nr. 12)

$$N = \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial v^2}\mathfrak{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

also in unserem Fall mit Rücksicht auf (25) und (26)

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} z_{vv}(0,0)\; x_u(0,0)\; y_v(0,0); \tag{35}$$

nach (31) und (26) ist $N \neq 0$.

Ein *Flachpunkt* einer Fläche ist ein Punkt, in dem (34) für *alle* Richtungen (du, dv) gilt, in welchem also *jede* Richtung Asymptotenrichtung ist. Daher ist in Satz XII enthalten:

Satz XII a: *Zu jedem vorgegebenen Linienelement* (22) *gibt es räumliche Flächenstücke, auf denen der Punkt mit den Parametern $u = v = 0$ nicht Flachpunkt ist.*

26. *Isometrische Flächenstücke mit verschiedenen Sattelordnungen.* Es sei F ein Flächenstück, das im Punkte O einen Sattel beliebiger Ordnung besitzt. In O seien die Parameter $u = v = 0$; das Linienelement von F bezeichnen wir mit (22). Es gibt dann nach Satz XIIa ein Flächenstück $\overline{F}$, das ebenfalls das Linienelement (22) besitzt, das also mit einer Umgebung von O auf F isometrisch ist, und auf welchem der Punkt $\overline{O}$, der dem Punkt O entspricht, kein Flachpunkt ist. Nach Nr. 18, Satz VIIIa, ist dann $\overline{O}$ ein gewöhnlicher Sattel, d.h. seine Sattelordnung ist $\bar{s} = 1$.

Damit haben wir den folgenden Satz gewonnen;

Satz XIII: *Es sei O ein Sattelpunkt beliebiger Ordnung auf einer Fläche F. Dann gibt es ein Flächenstück $\overline{F}$, das mit einer Umgebung von O isometrisch ist, und auf dem der Punkt $\overline{O}$, der dem Punkt O entspricht, ein Sattelpunkt* 1. *Ordnung ist.*

Da es tatsächlich Sattelpunkte von Ordnung $s > 1$ gibt —

man vergleiche die Beispiele in Nr. 22 —, so ist in dem Satz XIII enthalten:

Satz XIIIa: *Es gibt Paare von (analytischen) isometrischen Flächenstücken, auf welchen zwei einander entsprechende Punkte O und $\overline{O}'$ Sattelpunkte verschiedener Ordnungen sind.*

Mit andern Worten: *Die Sattelordnung ist im allgemeinen nicht invariant bei isometrischer Abbildung.*

Damit ist die am Anfang dieses Abschnittes gestellte Frage verneint.

27. *Isometrie und Verbiegbarkeit.* Jetzt ergibt sich leicht eine Tatsache von prinzipieller Bedeutung, nämlich:

Satz XIV: *Es gibt Paare (analytischer) isometrischer Flächenstücke F und $\overline{F}$ mit der Eigenschaft: $\overline{F}$ läßt sich nicht stetig in F und auch nicht in das Spiegelbild von F verbiegen.*

Dabei ist die behauptete Eigenschaft in dem folgenden scharfen Sinne zu verstehen: T bezeichne die isometrische Abbildung von F auf $\overline{F}$; es gibt einen solchen Punkt O auf F, daß sich keine noch so kleine Umgebung U des Punktes O auf F stetig in die entsprechende Umgebung $\overline{U}$ des Punktes $\overline{O} = T(O)$ auf $\overline{F}$ (und auch nicht in das Spiegelbild von $\overline{U}$) verbiegen läßt. Die im Satz XIV behauptete Unverbiegbarkeits-Eigenschaft ist also durchaus eine Eigenschaft „im Kleinen".

Beweis von Satz XIV: Man nehme ein Flächenpaar F, $\overline{F}$, wie es nach Satz XIIIa existiert; es ist isometrisch. Nach Satz IX (Nr. 19) läßt sich, da O und $\overline{O}$ verschiedene Sattelordnung haben, keine Umgebung von O in die entsprechende Umgebung von $\overline{O}$ und (nach dem „Zusatz" zu Satz IX) auch nicht in deren Spiegelbild stetig verbiegen.

Abschnitt 2. Verbiegbarkeitssätze.

Die in diesem Abschnitt dargestellten Sätze haben zwar nicht unmittelbar etwas mit unserem eigentlichen Problem — der Untersuchung der Umgebung einer Nullstelle der Krümmung — zu tun, jedoch lassen sie sich einerseits sehr einfach aus dem Satz XI des vorigen Abschnittes herleiten, und andererseits bildet der soeben bewiesene Satz XIV ein wichtiges Gegenstück zu ihnen (s.u. Nr. 29).

28. Satz XV: *Es seien F und $\overline{F}$ isometrische Flächen, O und $\overline{O}$ entsprechende Punkte auf ihnen; es gebe einander entsprechende Richtungen in O bzw. $\overline{O}$, für welche die beiden zweiten Fundamentalformen*

$$L\,du^2+2M\,dudv+N\,dv^2 \quad und \quad \bar{L}\,du^2+2\bar{M}\,dudv+\bar{N}\,dv^2$$

von 0 verschieden und von gleichem Vorzeichen sind. Dann läßt sich eine Umgebung U von O auf F stetig in die entsprechende Umgebung $\bar{U}$ von $\bar{O}$ auf $\bar{F}$ verbiegen.

Beweis: Wir dürfen erstens annehmen, daß die im Satz genannten Richtungen der Parameterrichtung $du = 0$ entsprechen und zweitens, daß sowohl die Funktionen $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, welche F darstellen, als auch die Funktionen $\bar{x}(u, v)$, $\bar{y}(u, v)$, $\bar{z}(u, v)$, welche $\bar{F}$ darstellen, die Bedingungen (24), (24'), (25), (26) erfüllen. Das Linienelement von F und $\bar{F}$ bezeichnen wir wieder mit (22) wie in Nr. 23.

Wir setzen für $0 \leqq \tau \leqq 1$

$$\varphi_\tau(v) = (1-\tau)z(0, v) + \tau\bar{z}(0, v),$$
$$\psi_\tau(v) = (1-\tau)z_u(0, v) + \tau\bar{z}_u(0, v).$$

Dann folgt aus den Bedingungen (24') und (25), die von z und $\bar{z}$ erfüllt werden,

$$(30_\tau) \qquad \varphi_\tau(0) = \varphi'_\tau(0) = \psi_\tau(0) = 0;$$

ferner haben nach Voraussetzung die beiden zweiten Fundamentalformen für $du = 0$, also die Größen N und $\bar{N}$, gleiches Vorzeichen; aus (35) und (26) — angewandt auf $x, y, \bar{x}, \bar{y}$ — ergibt sich, daß $z_{vv}(0, 0)$ und $\bar{z}_{vv}(0, 0)$ von null verschieden und von gleichem Vorzeichen sind; folglich ist

$$(31_\tau) \qquad \varphi''_\tau(0) \neq 0.$$

(30_τ) und (31_τ) gelten für alle τ, $0 \leqq \tau \leqq 1$.

Wendet man nun den Satz XI auf jedes Paar φ_τ, ψ_τ an, so findet man für jedes τ genau eine Fläche F_τ mit dem Linienelement (22); diese wird durch reguläre Funktionen $x_\tau(u, v)$, $y_\tau(u, v)$, $z_\tau(u, v)$ dargestellt, die gemäß dem Satz XI neben den Bedingungen (24), (24'), (25), (26) auch die Bedingungen

$$(32_\tau) \qquad z_\tau(0, v) = \varphi_\tau(v), \frac{\partial z_\tau}{\partial u}\ (0, v) = \psi_\tau(v)$$

erfüllen.[19]) F_τ fällt — infolge der im Satz XI ausgesprochenen Eindeutigkeit der Lösung — für $\tau = 0$ mit F, für $\tau = 1$ mit $\bar{F}$ zusammen. Alle Flächen F_τ haben das Linienelement (22), sie sind also untereinander isometrisch. Für den Beweis der Behauptung, daß die Schar F_τ eine *stetige* Verbiegung von F in $\bar{F}$ dar-

[19]) Die Funktionen x_τ, y_τ, z_τ, und damit die Flächen F_τ sind in einer Umgebung von $u = v = 0$ definiert, die kleiner sein kann als der Regularitätsbereich des Linienelementes (22).

stellt, hat man nur zu zeigen, daß die Funktionen $x_\tau(u, v)$, $y_\tau(u, v)$, $z_\tau(u, v)$ stetig von dem Parameter τ abhängen.

Hiervon überzeugt man sich, wenn man nachsieht, auf welche Weise nach der in Nr. 23 und 24 angegebenen Vorschrift die Funktionen $x_\tau(u, v)$, $y_\tau(u, v)$, $z_\tau(u, v)$ zu bestimmen sind. Man hat zunächst die Differentialgleichung (33) (in der übrigens τ nicht vorkommt), mit den Anfangsbedingungen (32_τ) zu lösen; man braucht dazu nur τ als neue (dritte) unabhängige Veränderliche aufzufassen (es wird nach ihr nicht differenziert!), dann ist die reguläre Abhängigkeit der Funktion $z_\tau(u, v)$ von τ in den klassischen Sätzen enthalten (Goursat, a.a.O.) Mit dem in dieser Weise bestimmten $z_\tau(u, v)$ hat man nun das Linienelement

$$d\sigma_\tau^2 = (E - z_{\tau_u}^2)du^2 + 2(F - z_{\tau_u} z_{\tau_v})du\,dv + (G - z_{\tau_v}^2)dv^2$$

zu bilden. Von diesem wissen wir, daß die aus ihm berechnete Krümmung null ist. Es bestimmt daher eine euklidische Metrik Φ_τ. Die Funktionen $x_\tau(u, v)$ und $y_\tau(u, v)$ können und müssen nun so gewählt werden, daß die Differentialgleichung

$$dx_\tau^2 + dy_\tau^2 = d\sigma_\tau^2$$

gilt; ferner sollen x_τ und y_τ noch die Anfangsbedingungen (24) und (26) erfüllen. Nach dem Ergebnis von Nr. 23 gibt es ein und nur ein Paar Funktionen $x_\tau(u, v)$, $y_\tau(u, v)$, das zugleich die Differentialgleichung und diese Bedingungen erfüllt. Aus der Art und Weise, wie man die $x_\tau(u, v)$, $y_\tau(u, v)$ zu bestimmen hat, ergibt sich nach bekannten Sätzen leicht, daß x_τ und y_τ stetig von τ abhängen.

Damit ist der Satz XV bewiesen.

29. Satz XVI: *Es seien F und $\overline{F}$ isometrische Flächen im Raume, auf denen sich die Punkte O und $\overline{O}$ bei der Isometrie entsprechen; keiner der Punkte O und $\overline{O}$ sei ein Flachpunkt. Dann läßt sich eine Umgebung U von O entweder in die entsprechende Umgebung $\overline{U}$ von $\overline{O}$ oder in deren Spiegelbild $\overline{U}'$ stetig verbiegen.*

Beweis: Da weder O noch $\overline{O}$ Flachpunkte sind, gibt es in jedem dieser Punkte höchstens zwei Asymptotenrichtungen; es gibt also in der u-v-Ebene — der gemeinsamen Parameterebene der beiden Flächen — gewiß eine Richtung, der auf keiner der beiden Flächen eine Asymptotenrichtung entspricht; für diese Richtung sind die zweiten Fundamentalformen beider Flächen $\neq 0$. Haben die Fundamentalformen für diese Richtung das gleiche Vorzeichen, so folgt Satz XVI unmittelbar aus Satz XV; sind die Vorzeichen der beiden Formen entgegengesetzt, so ersetze man die Fläche $\bar{F}$ durch ihr Spiegelbild $\bar{F}'$; dabei ändert sich das Vorzeichen der zweiten Fundamentalform; nun wende man den Satz XV auf F und $\bar{F}'$ an.

Der damit bewiesene Satz XVI ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von E. E. Levi [20]); der Levische Satz geht aus dem Satz XVI hervor, wenn man in diesem die Voraussetzung, daß O und $\bar{O}$ nicht Flachpunkte sind, durch die stärkere ersetzt, daß die Krümmung in diesen Punkten nicht verschwindet [21]). Daß aber die Behauptung des Satzes XVI im allgemeinen falsch wird, wenn einer der Punkte O, $\bar{O}$ Flachpunkt ist, zeigt Satz XIV (Nr. 27).

Wir können aus dem Satz XV noch eine Folgerung ziehen:

Satz XVIa: *F sei eine beliebige Fläche, O ein Punkt auf ihr, der nicht Flachpunkt ist; dann gestattet eine Umgebung von O eine stetige Verbiegung (die keine Bewegung ist).*

Beweis: In O sei $u = v = 0$. Wir dürfen annehmen, daß F die Bedingungen (24)—(26) erfüllt und daß in O $N \neq 0$, also $z_{vv}(0, 0) \neq 0$ ist. Nach Satz XI gibt es eine zu F isometrische Fläche $\bar{F}$, die ebenfalls die Bedingungen (24)—(26) erfüllt und für welche $\bar{z}(0, v) = 2 \cdot z(0, v)$ ist. Nach Satz XV kann man F stetig in $\bar{F}$ verbiegen. Diese Verbiegung ist keine Bewegung; denn andernfalls wären F und $\bar{F}$ kongruent, genauer: die durch die Parameter u, v vermittelte Isometrie wäre eine Kongruenz; mit Rücksicht auf die Bedingungen (24)—(26), die von beiden Flächen erfüllt werden, würde dies aber bedeuten, daß diese Kongruenz die Identität wäre, und dies ist nicht der Fall, da $\bar{z}(0, v) \neq z(0, v)$ ist.

Ob ein entsprechender Satz auch für die Umgebungen von Flachpunkten gilt, ist mir nicht bekannt.

30. Levi hat dem genannten Satz noch den nachstehenden Satz XVII an die Seite gestellt, für den wir der Vollständigkeit halber auch noch einen Beweis mittelst unserer Methode angeben.

Satz XVII: *F sei eine Fläche negativer Krümmung und O ein beliebiger Punkt auf ihr (auch in O sei die Krümmung negativ). Dann gibt es eine Umgebung U von O, die sich stetig in ihr Spiegelbild verbiegen läßt.* [22])

[20]) a.a.O.: siehe Fußnote [3]).

[21]) Der Levische Beweis würde bei leichter Veränderung wohl auch den Satz XVI liefern; er unterscheidet sich aber von dem obigen Beweis des Satzes XVI insofern, als in ihm die Fälle positiver und negativer Krümmung unterschieden werden.

[22]) Daß der analoge Satz für Flächen positiver Krümmung nicht gilt, ist leicht einzusehen; man vergl. E. E. Levi, a.a.O., oder die Fußnote [4]).

Beweis: Wir betrachten in dem Punkt der Parameterebene, dem O entspricht, das Richtungsbüschel. Da F negativ gekrümmt ist, gibt es genau zwei Richtungen, die Asymptotenrichtungen für F sind; $\mathfrak{t}$ sei eine von ihnen. Dreht man die Richtungen in dem Büschel, so ändert die zweite Fundamentalform $\mathfrak{L} = L\, du^2 + 2M\, dudv + N\, dv^2$ beim Durchschreiten von $\mathfrak{t}$ ihr Vorzeichen; folglich gibt es in jeder Nähe von $\mathfrak{t}$ sowohl Richtungen, in denen $\mathfrak{L} > 0$, als solche, in denen $\mathfrak{L} < 0$ ist.

Nach Satz XII (Nr. 25) gibt es eine mit F isometrische Fläche $\bar{F}$, für die $\mathfrak{t}$ nicht Asymptotenrichtung ist; die zweite Fundamentalform $\bar{\mathfrak{L}}$ von $\bar{F}$ ist somit in $\mathfrak{t}$ nicht 0; wir dürfen — indem wir allenfalls $\bar{F}$ durch ihr Spiegelbild ersetzen — annehmen, daß $\bar{\mathfrak{L}} > 0$ in $\mathfrak{t}$ ist; dann ist $\bar{\mathfrak{L}} > 0$ auch in einem ganzen Sektor von Richtungen, der $\mathfrak{t}$ im Innern enthält. In diesem Sektor gibt es, wie oben festgestellt wurde, gewiß Richtungen, in denen $\mathfrak{L} > 0$ ist; daher ist nach Satz XV F stetig in $\bar{F}$ verbiegbar. In demselben Sektor gibt es aber auch Richtungen, in welchen $\mathfrak{L} < 0$, und daher die zweite Fundamentalform $\mathfrak{L}'$ des Spiegelbildes F' von F positiv ist; daher ist nach Satz XV $\bar{F}$ stetig in F' verbiegbar. Folglich ist auch F stetig in F' verbiegbar.[23])

Aus den Sätzen XVI und XVII folgt unmittelbar der folgende Satz (von Levi):

Satz XVIIa: *Zwei isometrische Flächen negativer Krümmung lassen sich (in der Umgebung zweier entsprechender Punkte O, $\bar{O}$) immer stetig ineinander verbiegen.*

Dritter Teil.

Über die Möglichkeiten für die Ordnungen einander entsprechender Sattelpunkte auf isometrischen Flächen.

Ein Linienelement ds mit $ds^2 = E\, du^2 + 2F\, dudv + G\, dv^2$ sei gegeben, für das die Krümmung K in $u = v = 0$ verschwindet,

---

[23]) Der Satz XVI entsteht, wie in Nr. 29 festgestellt wurde, aus einem Satz von Levi, indem man in diesem die Voraussetzung, daß die Krümmung $\neq 0$ ist, durch die schwächere ersetzt, daß die betrachteten Punkte nicht Flachpunkte sind. Diese Bemerkung legt die Frage nahe, ob man nicht auch in dem Levischen Satz XVII die Voraussetzung der negativen Krümmung durch die folgende schwächere ersetzen kann: „O sei kein Flachpunkt, und in den von O verschiedenen Punkten sei die Krümmung von F negativ". Diese Abschwächung der Voraussetzung des Satzes XVII ist aber unzulässig; dies wird in einer gemeinsamen Note von H. Hopf und mir gezeigt werden.

in allen andern Punkten aber negativ ist. Jede räumliche Fläche mit diesem ds^2 hat in dem Punkte O (mit den Parameterwerten $u = v = 0$) einen Sattelpunkt (Satz VI); uns interessiert die Frage: *Welche Zahlen s treten bei gegebenem ds^2 als Ordnungen dieser Sattelpunkte O auf?* Wir wissen, daß s im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist, daß also wenigstens zwei verschiedene Zahlen s auftreten können (Satz XIIIa). Da aber in einem *parabolischen* Punkt [16]) immer $s = 1$ ist (Satz VIIIa), verdient unsere Frage nur Interesse für diejenigen Flächen, auf denen O *Flachpunkt* ist. Unendlich viele verschiedene Werte von s können jedenfalls nicht auftreten; denn bezeichnet μ die Ordnung, von welcher die Krümmung K in $u = v = 0$ verschwindet — also eine Zahl, die eine innere Eigenschaft der durch ds^2 gegebenen Differentialgeometrie ist —, so ist nach Satz Xa: $2s \leqq \mu + 2$. [24]) Ob aber bei Beschränkung auf Flachpunkte O verschiedene Werte von s auftreten können, oder ob dann die Ordnung s eindeutig durch ds^2 bestimmt ist, das ist mir für beliebiges ds^2 nicht bekannt. Jedoch soll in diesem Teil noch gezeigt werden, daß *für gewisse Klassen von Flächen* immer die zweite der soeben genannten Möglichkeiten eintritt; es werden also (Satz XIX) Flächen mit Sattelpunkten O der Ordnung s, und zwar für jedes $s \geqq 2$, angegeben werden, zu welchen es *nur folgende zwei Typen* isometrischer Flächen gibt: erstens Flächen, auf denen die entsprechenden Punkte O' *dieselbe* Ordnung s haben, und zweitens die — nach Satz XIIa stets existierenden — Flächen, auf denen die Punkte O' parabolisch und daher von der Ordnung 1 sind.

Abschnitt 1. Hilfssätze über Hessesche Formen.

31. Für jede Funktion $f(x, y)$ setzen wir

$$Hf = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2;$$

H heißt der Hessesche Operator. Er ist für unsere Zwecke wichtig, weil für eine durch die Gleichung $z = f(x, y)$ gegebene Fläche die Krümmung

$$K = \frac{Hf}{(1+f_x^2+f_y^2)^2} \tag{36}$$

ist (siehe Nr. 12, Formel 17).

Im folgenden ist unter f_m immer eine (homogene) Form m-ten

---

[24]) In diesem Teil werden ausschließlich *analytische* Flächen betrachtet.

Grades zu verstehen. Dann ist Hf_m ebenfalls eine Form (die auch $\equiv 0$ sein kann), und zwar vom Grade $2m - 4$; Hf_m heißt die zu f_m gehörige „Hessesche Form". Hat f_m in Polarkoordinaten (wie in Nr. 20) die Gestalt $f_m = r^m l(\varphi)$, so ist, wie man leicht nachrechnet,

$$(37) \qquad Hf_m = (m-1)r^{2m-4}(mll'' - (m-1)l'^2 + m^2 l^2).$$

Wir werden nun einige Hilfssätze (Nr. 32—37) beweisen; zum Teil sind sie bekannt (neu dürften nur Nr. 35 und 36 sein).

32. *Ist Hf_m negativ definit, so besitzt f_m eine reelle Nullgerade.* [25])

Beweis: Die Funktion $l(\varphi)$ hat in $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ sicher ein Maximum (es sei in $\varphi = \varphi_1$) und ein Minimum (in φ_2). Da $l(\varphi)$ stetig differenzierbar und periodisch ist, so ist in φ_1 und φ_2: $l' = 0$, also, da $Hf_m < 0$ ist, nach (37): $ll'' < 0$ und daher jedenfalls $l'' \neq 0$; im Max φ_1 ist $l'' < 0$ also $l > 0$; im Min φ_2 ist $l'' > 0$, also $l < 0$; also muß, da l stetig ist, zwischen φ_1 und φ_2 eine Nullstelle von l liegen. Einer Nullstelle von $l(\varphi)$ entspricht aber eine Nullgerade von f_m.

33. *Hat f_m eine mehrfache Nullgerade, so ist diese auch Nullgerade von Hf_m.*

Beweis: In Polarkoordinaten bedeutet eine mehrfache Nullgerade vom f_m, daß an einer Stelle sowohl l als auch l' verschwinden. Aus Gleichung (37) sieht man, daß an dieser Stelle auch Hf_m verschwindet.

34. *Dann und nur dann ist $Hf_m \equiv 0$, wenn $f_m = \pm (ax+by)^m$ ist.*

Dieser Satz ist schon von *Hesse* bewiesen worden. Der Beweis möge hier übergangen werden.

35. *Dann und nur dann ist*

$$(39) \qquad Hf_m = -A(x^2+y^2)^{m-2}, \; A > 0, \; m > 2,$$

wenn f_m harmonisch, d.h. Realteil von $c(x+iy)^m$ (c komplex) ist; mit andern Worten: wenn

$$(40) \qquad l(\varphi) = a \cos m(\varphi - \varphi_0) \quad (a \text{ reell})$$

ist.

Beweis: In Polarkoordinaten erhält (39) die Gestalt

[25]) Sogar, wie man leicht sieht, wenigstens zwei Nullgeraden. — Über die Definition der Nullgeraden vergl. man Nr. 20.

$$(39') \qquad (m-1)(mll''-(m-1)l'^2+m^2l^2)=-A.$$

Wenn f_m harmonisch, also von der Form (40) ist, so verifiziert man leicht die Gültigkeit von (39'). Es gelte anderseits (39'). Zur Vereinfachung setzen wir $A = a^2m^2(m-1)^2$; damit schreibt sich die Gleichung (39') folgendermaßen:

$$(39'') \qquad mll''-(m-1)l'^2+m^2l^2+a^2m^2(m-1)=0.$$

Man bestätigt nun leicht die Identität (auf die man durch bekannte Integrationsmethoden geführt wird; man vergl. Bieberbach, Differentialgleichungen (Berlin 1923), S. 113):

$$[mll''-(m-1)l'^2+m^2l^2+a^2m^2(m-1)]\, l^{\frac{2}{m}-3}\, l' \equiv \frac{m}{2}\left[l^{\frac{2}{m}-2}(l'^2+m^2l^2-a^2m^2)\right]'.$$

Anstatt (39'') kann man daher auch schreiben:

$$(41) \qquad \left[l^{\frac{2}{m}-2}(l'^2+m^2l^2-a^2m^2)\right]'=0.$$

Daraus findet man

$$(42) \qquad l^{\frac{2}{m}-2}(l'^2+m^2l^2-a^2m^2) = b = \text{const.}$$

Es sind hier nun zwei Fälle zu unterscheiden;

Fall I: $b = 0$; Fall II: $b \neq 0$.

Wir behaupten: Fall II kommt für uns nicht in Frage.

Um dies zu zeigen, schreiben wir (42) in der Form

$$(l'^2+m^2l^2-a^2m^2)^m = b^m l^{2m-2}, \qquad b \neq 0.$$

Nun multiplizieren wir beide Seiten mit r^{4m^2} und gehen wieder zu rechtwinkligen Koordinaten über; es wird

$$(43) \qquad (e(x,y))^m = b^m(f_m(x,y))^{2m-2}(x^2+y^2)^m,$$

wobei $e(x, y)$ eine Form ist. Wir nehmen an, daß wir uns im Fall II befinden; b ist also verschieden von Null. Denkt man sich die Polynome der beiden Seiten der Gleichung (43) in ihre Primfaktoren zerlegt, so kann die Gleichung nur dann erfüllt sein, wenn links und rechts des Gleichheitszeichens die gleichen Primfaktoren stehen. Insbesondere enthält $e(x, y)$ den Faktor $x^2 + y^2$; wir setzen

$$e(x,y)=(x^2+y^2)\bar{e}(x,y);$$

dann muß

$$(\bar{e}(x,y))^m=b^m(f_m(x,y))^{2m-2}$$

sein. Es sei $g(x, y)$ ein Primfaktor, der in f_m in der p-ten, in e in der q-ten Potenz aufgeht; dann ist $mq = (2m-2)p$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle, je nachdem m ungerade oder gerade ist.

m sei ungerade; dann ist m teilerfremd mit $2m - 2$; also m Teiler von p; da $p \leqq m$ ist, muß $p = m$ sein, also g linear und $f_m = g^m$; nach Nr. 34 wäre dann $Hf_m \equiv 0$, entgegen unserer Voraussetzung.

m sei gerade; dann ist $\frac{m}{2}\, q = (m-1)p$; da $\frac{m}{2}$ teilerfremd zu $m - 1$ ist, muß $\frac{m}{2}$ Teiler von p sein; also, weil $p \leqq m$ ist, entweder $p = \frac{m}{2}$ oder $p = m$. Die zweite Möglichkeit scheidet aus demselben Grunde aus wie bei ungeradem m. Ist $p = \frac{m}{2}$, so ist $f_m(x, y) = \left(g(x, y)\right)^{\frac{m}{2}}$ und g eine quadratische Form. Hätte g eine Nullgerade, so wäre diese, da nach Voraussetzung $m > 2$ ist, mehrfache Nullgerade von f_m, also nach Nr. 33 Nullgerade von Hf_m, im Widerspruch zu (39). Hätte g keine Nullgerade, so hätte auch f_m keine Nullgerade, was nach (39) im Widerspruch zu Nr. 32 steht.

Der Fall II ist also unmöglich; folglich ist $b = 0$, und es besteht die Gleichung

$$l'^2 + m^2 l^2 - a^2 m^2 = 0 \tag{44}$$

daraus ergibt sich:

$$\frac{dl}{d\varphi} = \pm \sqrt{a^2 m^2 - m^2 l^2}$$

$$\frac{dl}{\sqrt{a^2 - l^2}} = \pm\, m\, d\varphi, \text{ also } \arccos \frac{l}{a} = \mp\, m(\varphi - \varphi_0),$$

$$l = \pm\, a \cos m(\varphi - \varphi_0).$$

Dies ist aber gerade die für l behauptete Form.

36. *Die Funktion $f(x, y)$ besitze die Potenzreihenentwicklung*

$$f(x, y) = cx^m + f_{m+1} + \ldots,\quad m \geqq 2, \tag{45}$$

und es sei

$$Hf = h_\varkappa + \ldots \tag{46}$$

(*dabei seien f_i und h_i wieder Formen i-ten Grades*); *dann enthält $h_\varkappa$ den Faktor x^{m-2}.*

Beweis: a) Wir nehmen zunächst an, alle Glieder von f enthalten den Faktor x^m, es sei also $f(x, y) = x^m \cdot p(x, y)$. Dann enthält sicher Hf und daher auch $h_\varkappa$ den Faktor x^{m-2}; denn f_{xx}, f_{yy} und f_{xy} sind alle durch x^{m-2} teilbar.

b) f_λ sei das erste Glied von f, das x^m nicht als Faktor enthalte. Es ist $\lambda > m$. Wir schreiben dann abgekürzt:

$$f = A + B$$

mit
$$A = x^m + f_{m+1} + \cdots + f_{\lambda-1},$$
$$B = f_\lambda + \cdots;$$

A ist nach Voraussetzung durch x^m teilbar.
A_{xx}, A_{yy} und A_{xy} sind infolgedessen durch x^{m-2} teilbar und HA durch x^{2m-2}. Nun ist:

$$\begin{array}{ccccc} Hf = HA & + A_{xx}B_{yy} & + A_{yy}B_{xx} & - 2A_{xy}B_{xy} & + HB \\ 2m-3 & | \; m+\lambda-4 & | \; m+\lambda-3 & | \; m+\lambda-3 & | \; 2\lambda-4 \end{array}$$

Die Zahlen in der zweiten Zeile geben die Mindestordnung der darüberstehenden Summanden an; d.h. es tritt in den betreffenden Summanden bestimmt kein Glied kleinerer Ordnung, allenfalls aber ein Glied dieser „Mindestordnung" auf. Alle diese Summanden sind mit Ausnahme des letzten durch x^{m-2} teilbar. Es genügt also zu zeigen, daß es in $A_{xx}B_{yy}$ ein Glied $cx^\alpha y^\beta$, $c \neq 0$, $\alpha < 2m - 2$, $\alpha + \beta = m + \lambda - 4$ gibt; denn da der Grad eines solchen Gliedes $m + \lambda - 4 < m + \lambda - 3 \leqq 2\lambda - 4$ ist, kann es sich gegen kein Glied der spätern Summanden, und da HA durch x^{2m-2} teilbar ist, auch nicht gegen ein Glied von HA fortheben. Da f_λ nicht identisch verschwindet und nicht durch x^m teilbar ist, enthält f_λ ein Glied $ax^{m-i}y^{\lambda-m+i}$ mit $a \neq 0$ und $i \geqq 1$; nun ist $\lambda > m$ und daher ist der Exponent von y in diesem Glied $\geqq 2$; dieses kann also bei zweimaliger Differenzierung nicht wegfallen; es gibt daher in $(f_\lambda)_{yy}$ ein nichtverschwindendes Glied mit $x^{m-i}\, y^{\lambda-m+i-2}$. In $A_{xx}B_{yy}$ ist nun die Form $x^{m-2}(f_\lambda)_{yy}$ enthalten, und diese ihrerseits enthält nach dem Vorhergehenden ein Glied von der Gestalt $x^{2m-2-i}\, y^{\lambda-m+i-2}$; dieses ist vom Grade $m + \lambda - 4$, und da $i \geqq 1$, nicht durch x^{2m-2} teilbar.

Damit ist gezeigt, daß das niedrigste Glied von Hf den Faktor x^{m-2} enthält.

37. Ferner sei an die bekannte und leicht zu bestätigende Kovarianz-Eigenschaft der Hesseschen Formen erinnert: Es sei $g_m(x, y)$ eine Form, $G = Hg_m$ die zugehörige Hessesche Form, und g_m gehe durch eine lineare Transformation der Variablen in g_m^* über: $g_m^*(x, y) = g_m(ax+by, cx+dy)$; *dann ist*

$$(47) \qquad Hg_m^* = (ad-bc)^2 \cdot G(ax+by, cx+dy).$$

Wir werden diese Tatsache später in folgender Weise benutzen:

Es seien f_m und g_m Formen mit $Hf_m = F$ und $Hg_m = G$, und es sei $F(x, y) = G(ax + by, cx+dy)$; dann ist, wenn wir $g_m(ax+by, cx+dy) = g_m^*(x, y)$ setzen,

$$Hg_m^* = (ad-bc)^2 Hf_m.$$

Dies folgt unmittelbar aus (47).

Abschnitt 2. Untersuchung spezieller Klassen von Flächen.

38. *Hilfssatz*: In der Potenzreihe

$$(48) \qquad f(x, y) = f_m(x, y) + f_{m+1}(x, y) + \dots, \qquad f_m \neq 0, \; m \geqq 2$$

(worin f_i Formen i-ten Grades sind) sei nicht $f_m = \pm(ax+by)^m$; die Krümmung K der durch $z = f(x, y)$ gegebenen Fläche besitze die Potenzreihe

$$K(x, y) = h_\varkappa(x, y) + \dots, \qquad h_\varkappa \neq 0$$

(h_i sind Formen i-ten Grades). Dann ist

$$(49) \qquad Hf_m = h_\varkappa, \qquad \varkappa = 2m - 4.$$

Beweis: Bekanntlich ist $Hf = (1+f_x^2+f_y^2)^2 \cdot K$ (Formel (36)); da wegen $m \geqq 2$ in f_x und f_y keine von x und y freien Glieder vorkommen, beginnt daher die Entwicklung von Hf mit dem Glied $h_\varkappa$:

$$Hf = h_\varkappa + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Übt man aber auf die Reihe (48) die Operation H aus, so entstehen keine Glieder von Ordnungen $< 2m - 4$; die einzigen Glieder der Ordnung $2m - 4$, die entstehen können, sind diejenigen von Hf_m. Daher ist die Behauptung (49) richtig, wenn $Hf_m \neq 0$ ist; da aber nach Voraussetzung f_m nicht von der Form $\pm(ax+by)^m$ ist, so ist in der Tat nach Nr. 34 $Hf_m \neq 0$.

39. *Flächen mit stark definiter Krümmung.* Eine (reelle analytische) Funktion $K(x, y)$ heiße „stark definit", wenn in ihrer Potenzreihenentwicklung

$$(50) \qquad K(x, y) = h_\varkappa(x, y) + h_{\varkappa+1}(x, y) + \dots,$$

in welcher die h_i Formen i-ten Grades sind, das erste Glied $h_\varkappa$ eine definite Form ist. Eine stark definite Funktion ist sicher definit, d.h. sie ist in den von (0, 0) verschiedenen Punkten einer Umgebung des Punktes (0, 0) verschieden von 0 und daher dort von festem Vorzeichen [26]); die Ordnung $\varkappa$ ist natürlich gerade. Die Eigenschaft, stark definit zu sein, bleibt erhalten, wenn man durch eine Transformation mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante zu andern Veränderlichen übergeht; denn dann erleidet das niedrigste Glied $h_\varkappa$ nur eine lineare Transformation.

40. Satz XVIII: *Durch die Gleichung*

$$z = f(x, y) = f_m(x, y) + f_{m+1}(x, y) + \ldots, \qquad f_m \neq 0, \tag{51}$$

sei eine Fläche F gegeben, welche die x-y-Ebene im Nullpunkt berührt ($m>2$); *der Nullpunkt sei ein Flachpunkt* ($m \geqq 3$); *die Krümmung K sei durch* (50) *gegeben und stark definit. Dann ist*

$$Hf_m = h_\varkappa, \qquad \varkappa = 2m - 4. \tag{52}$$

Beweis: Infolge Nr. 38 genügt es, zu zeigen, daß nicht $f_m = \pm(ax+by)^m$ ist. Wäre $f_m = \pm\,(ax+by)^m$, so könnte man durch eine Koordinatentransformation f_m auf die Form $f_m = cx^m$ bringen; bei dieser Transformation bleibt, wie in der vorhergehenden Nummer bemerkt wurde, der definite Charakter von $h_\varkappa$ erhalten. Nun wäre aber nach Nr. 36 $h_\varkappa$ durch x^{m-2}, also da $m \geqq 3$, durch x teilbar — entgegen der Definitheit von $h_\varkappa$. Folglich ist $f_m \neq \pm\,(ax+by)^m$ [27]).

41. Jetzt sei neben der Fläche (51) noch eine Fläche

$$z' = g(x', y') = g_{m'}(x', y') + \ldots, \qquad g_{m'} \neq 0, \tag{51'}$$

in einem x'-y'-z'-Raum gegeben, die im Nullpunkt von der x'-y'-Ebene berührt wird und dort einen Flachpunkt hat, so daß also $m' \geqq 3$ ist. Zwischen den Flächen (51) und (51') bestehe eine Isometrie, bei der sich die Nullpunkte entsprechen. Daher ist

---

[26]) Das folgt z.B. aus dem Hilfssatz in Nr. 20, indem man ihn nicht nur auf ein Intervall, sondern auf den ganzen Kreis $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ anwendet.

[27]) Der damit bewiesene Satz lehrt, daß die Berührungsordnung der Tangentialebene in einem Flachpunkt durch die *innere* Differentialgeometrie der Fläche bestimmt ist, falls in der Umgebung des Punktes die Krümmung stark definit ist; daß ohne diese Voraussetzung die Berührungsordnung im allgemeinen nicht in dieser Weise bestimmt ist, sieht man an den Flächen mit $K \equiv 0$.

den beiden Flächen die Krümmung K gemeinsam, als Funktion von x', y' beginnt die Entwicklung von K daher ebenfalls mit einer definiten Form $\varkappa$-ten Grades $h'_\varkappa$:

$$(50') \qquad K(x, y) = K'(x', y') = h'_\varkappa(x', y') + \dots$$

Ferner gilt in Analogie zu (52)

$$(52') \qquad Hg_{m'} = h'_\varkappa, \qquad \varkappa = 2m' - 4;$$

aus (52) und (52′) folgt $m' = m$.

Nun kann man vermöge der bestehenden isometrischen Abbildung die Veränderlichen x, y als reguläre Parameter auf der Fläche (51′) einführen; die Transformationsformeln seien:

$$(54) \qquad \begin{aligned} x' &= ax + by + \text{Glieder höherer Ordnung},\\ y' &= cx + dy + \text{Glieder höherer Ordnung}, \end{aligned}$$

wobei $ad - bc \neq 0$ ist. Führt man diese Ausdrücke für x' und y' in (50′) ein, so ergibt der Vergleich mit (50):

$$(55) \qquad h'_\varkappa(ax+by, cx+dy) = h_\varkappa(x, y).$$

Setzen wir nun $h_\varkappa = F$, $h'_\varkappa = G$, so bestehen infolge von (52), (52′) und (55) gerade die in Nr. 37 vorausgesetzten Beziehungen; daher ist nach Nr. 37, wenn wir

$$(56) \qquad g_m(ax+by, cx+dy) = g^*_m(x, y)$$

setzen:

$$(57) \qquad Hg^*_m = (ad-bc)^2 Hf_m.$$

Die Tatsache, daß sich die Form g_m durch eine Transformation $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad - bc \neq 0$ in eine Form g^*_m überführen läßt, die mit f_m durch die Gleichung (57) verknüpft ist, werden wir nun benutzen, um geometrische Beziehungen zwischen gewissen Flächen (51) und (51′) zu beweisen.

42. *Spezielle Flächen.* Wir betrachten „harmonische" Formen f_m, d.h. solche, die durch $f_m =$ Realteil von $c(x+iy)^m$ gegeben sind; in Polarkoordinaten ist $f_m = r^m \cos m(\varphi - \varphi_0)$ (man vergleiche Nr. 35); f_m hat m einfache Nullgeraden.

Satz XIX: *Die Fläche F sei durch* (51) *gegeben, und es sei f_m harmonisch, $m \geqq 3$; F' sei eine Fläche, die mit einer Umgebung des Nullpunktes O auf F isometrisch ist. Dann ist der entsprechende Punkt O' auf F' entweder parabolisch und daher Sattel* 1. *Ordnung* (*Nr.* 18) *oder Flachpunkt und Sattel* $(m-1)$*-ter Ordnung.*

Beweis: Auf Grund von Nr. 38 beginnt die Entwicklung von K mit dem Glied Hf_m; da nach Nr. 35 Hf_m negativ definit ist, so ist K stark definit. Bei der Fläche F' brauchen wir nur den Fall des Flachpunktes zu behandeln. F' sei durch (51′) gegeben; wir können dann das Ergebnis von Nr. 41 anwenden; es ist also $m' = m$, und es gilt (57), wobei g_m^* durch (56) erklärt ist. Nach Nr. 35 ist $Hf_m = -A(x^2+y^2)^{m-2}$, also nach (57):

$$Hg_m^* = -(ad-bc)^2 A(x^2+y^2)^{m-2}, \text{ mit } A > 0;$$

also ist nach Nr. 35 *auch* g_m^* *harmonisch.* Folglich hat g_m^* m reelle einfache Nullgeraden, und dasselbe gilt dann auch für die Form g_m, die ja aus g_m^* durch eine lineare Transformation mit von 0 verschiedener Determinante hervorgeht. Nunmehr folgt aus Teil I, Nr. 21, daß die Ordnung des Sattels O' auf F' gleich $m-1$ ist.

(Eingegangen den 5. August 1937.)