COMPOSITIO MATHEMATICA

ERICH ROTHE

Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 177-197
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__177_0>

Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen

von

Erich Rothe

Breslau

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst der in n-dimensionalen Euklidischen Räumen wohlbekannte Begriff der Ordnung eines Punktes in Bezug auf das eindeutige stetige Bild einer Kugel ausgedehnt auf Abbildungen „mit vollstetiger Verschiebung" [1]) in linearen, normierten und vollständigen Räumen [2]) und die unveränderte Gültigkeit einiger seiner Haupteigenschaften auch bei dieser Ausdehnung bewiesen (§ 2) [3]), wobei sich als Anwendung auch ein Fixpunktsatz für vollstetige Abbildungen ergibt. In § 3 werden Vektorfelder der Form $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{V}(\mathfrak{x})$ mit vollstetigem $\mathfrak{V}$ betrachtet, die auf einer Kugel, bzw. Vollkugel eines Raumes der angegebenen Art definiert sind, und für diese die Begriffe der Charakteristik auf dem Rande und des Index einer Nullstelle übertragen sowie einige auf diese Begriffe bezüglichen Sätze bewiesen, so ein Analogon des bekannten funktionentheoretischen Satzes von Rouché (Satz 6), ferner ein Satz über die Existenz einer inneren und einer äußeren Normalen in einem Vektorfeld auf einer Kugel (Satz 7). § 4 enthält einen dem letztgenannten ähnlichen Satz für vollstetige Vektorfelder. In § 5 wird als Anwendung des in § 1 bewiesenen „Verschiebungssatzes" (Satz 3b) ein neuer Existenzsatz über die Lösung nichtlinearer Integralgleichungen gegeben (Satz 9 und 9a).

In § 1 sind einige im folgenden gebrauchte Bezeichnungen und Tatsachen zusammengestellt, die bekannt oder unmittelbar einzusehen sind.

---

[1]) Siehe § 1, 6.

[2]) Räume vom Typus B in der bei Banach, Théorie des opérations linéaires (Warszawa 1932), Chap. IV eingeführten Bezeichnungsweise.

[3]) Die hierbei angewandte Methode ist im Wesentlichen die gleiche wie die von Leray und Schauder, Topologie et équations fonctionnelles [Ann. Ecole norm. **51** (1934), 45—78] für den entsprechenden Zweck bezüglich des Abbildungsgrades benutzte.

§ 1. *Vorbemerkungen.*

1. Unter E wird im folgenden stets ein Raum vom Typus B verstanden, wegen dessen Definition auf das in Anm. [2]) erwähnte Buch von Banach (S. 53) verwiesen sei. Ein E^∞ ist ein Raum E, der für jedes positive ganzzahlige n n linear unabhängige Elemente (Punkte) enthält (unendlichdimensionaler Raum). Der Raum E heißt n-dimensional und wird mit E^n bezeichnet, wenn er genau n linear unabhängige Elemente enthält. In der eindeutigen Darstellung $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathfrak{e}_i$ [4]) eines beliebigen Elementes $\mathfrak{x} \subset E^n$ durch die linear unabhängigen Elemente $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ (Basis) sind sowohl die α_i stetige Funktionen von $\mathfrak{x}$ [4a]) wie auch $\mathfrak{x}$ eine stetige Funktion der α_i.

2. Ein Vektor $\mathfrak{v}$ in E ist ein Paar geordneter Punkte aus E, wobei die geordneten Punktepaare $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$ und $\{\mathfrak{c}, \mathfrak{d}\}$ dann und nur dann denselben Vektor darstellen, wenn $\mathfrak{b} - \mathfrak{a} = \mathfrak{d} - \mathfrak{c}$ ist. Ist $\mathfrak{x}$ ein Punkt von E und $\mathfrak{o}$ der Nullpunkt von E, so werden wir den durch das Punktepaar $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{x}\}$ gegebenen Vektor, kurz ebenfalls mit $\mathfrak{x}$ bezeichnen, wo Verwechslungen nicht zu befürchten sind. Den durch $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$ gegebenen Vektor in dem Punkte $\mathfrak{a}_0$ antragen, heißt, ihn durch das bestimmte Punktepaar $\{\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0\}$ mit $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ darstellen. In dieser Darstellung heißt dann $\mathfrak{a}_0$ Anfangspunkt, $\mathfrak{b}_0$ Endpunkt des Vektors. In einer Menge $M \subset E$ ein Vektorfeld definieren, heißt in jedem Punkt $\mathfrak{x} \subset M$ einen Vektor $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ antragen.

Ein Vektor $\mathfrak{v}$ heißt parallel zu einem Teilraum $\bar{E}$ von E, wenn der Endpunkt von $\mathfrak{v}$ in $\bar{E}$ liegt, falls man $\mathfrak{v}$ in einem Punkt von

---

[4]) Kleine griechische Buchstaben bezeichnen reelle Zahlen.

[4a]) Um das einzusehen genügt es offenbar, wenn $\mathfrak{o}$ der Nullpunkt von E^n ist, zu zeigen: aus $\lim \mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathfrak{e}_i = \mathfrak{o}$ folgt $\lim \alpha_i = 0$. Würde nun $\mathbf{A} = \mathrm{Max}\left(|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\right)$ nicht gegen Null konvergieren, so könnte man aus der Menge der $\mathfrak{x}$ eine Folge $\mathfrak{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \mathfrak{e}_i$ auswählen, für welche erstens auch die Folge $\frac{\mathfrak{x}_j}{\mathbf{A}_j}$ gegen Null konvergierte und zweitens die Folgen der beschränkten Zahlen $\frac{\alpha_{1j}}{\mathbf{A}_j}, \ldots, \frac{\alpha_{nj}}{\mathbf{A}_j}$ gegen endliche Grenzwerte $\beta_1, \ldots, \beta_n$ konvergierten. Aus $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathfrak{e}_i = \lim_{j \to \infty} \frac{1}{\mathbf{A}_j} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \mathfrak{e}_i = \mathfrak{o}$ würde dann wegen der linearen Unabhängigkeit der $\mathfrak{e}_i$ folgen $\beta_i = 0$. Anderseits müßte aber, wie sich aus der Definition der β_i sofort ergibt, mindestens eine dieser Zahlen vom Betrage 1 sein. Die Annahme, daß $\mathrm{Max}\left(|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|\right)$ nicht gegen Null konvergiert, hat damit zu einem Widerspruch geführt.

$\bar{E}$ anträgt. — Ist $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m$ eine Basis im Raum E^m, ist $\mathfrak{v} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathfrak{e}_i$ ein Vektor in E^m und ist E^n $(n < m)$ der durch $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ aufgespannte Teilraum von E^m, so heißt $\bar{\mathfrak{v}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathfrak{e}_i$ die zu E^n parallele Komponente von $\mathfrak{v}$ (in Bezug auf die gegebene Basis).

3. Ist $\mathfrak{a} \subset E$ und R eine positive Zahl, so heißt die Punktmenge $\|\mathfrak{x} - \mathfrak{a}\| = R$ [5]) Kugel mit Mittelpunkt $\mathfrak{a}$ und Radius R; sie wird mit S bezeichnet. Die Punktmenge $\|\mathfrak{x} - \mathfrak{a}\| \leqq R$ heißt die zu S gehörige Vollkugel und wird mit V bezeichnet. Ist $E = E^\infty$ (bzw. E^n), so wird S^∞ (bezw. S^{n-1}) für die Kugel und V^∞ (bzw. V^n) für die Vollkugel geschrieben.

4. $\mathfrak{v}$ sei ein im Punkte $\mathfrak{x}$ der Kugel S mit Mittelpunkt $\mathfrak{a}$ und Radius R angetragener nicht verschwindender Vektor. Dann weist $\mathfrak{v}$ in die Richtung der äußeren bzw. inneren „Normalen", wenn $\mathfrak{v} = \lambda(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})$ mit positivem bzw. negativem λ ist. $\mathfrak{v}$ ist Stützvektor, wenn $\|\mathfrak{x} - \mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{v}\| \geqq R$ für alle λ ist. In jedem Punkt $\mathfrak{x}$ einer Kugel S (mit Ausnahme einer S^0) gibt es mindestens [6]) einen Stützvektor, wie aus der Existenz einer Stützgeraden folgt, wenn man S mit einer durch $\mathfrak{x}$ und den Kugelmittelpunkt gelegten E^2 schneidet.

5. Bilden $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ eine Basis eines E^n und ordnet man dem Element $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathfrak{e}_i$ den Punkt $\mathfrak{x}^*$ mit den Koordinaten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eines Euklidischen Raumes R^n zu, so ist die hierdurch definierte Abbildung des E^n auf den R^n umkehrbar eindeutig, stetig und linear (vgl. 1). Auf Grund dieser Abbildung übertragen sich die topologischen Begriffe des Abbildungsgrades, der Ordnung, der Charakteristik eines auf einer S^{n-1} definierten nicht verschwindenden Vektorfeldes, des Index der Nullstelle eines Vektorfeldes sowie die im weiteren Verlauf dieser Arbeit über diese Begriffe gebrauchten Sätze ohne weiteres vom R^n auf den E^n.

6. Sei M eine in E gelegene Punktmenge und $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ eine in M definierte eindeutige stetige Abbildung auf eine im gleichen Raum E gelegene Punktmenge. Ist $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ vollstetig, d.h. führt $\mathfrak{F}$ jede beschränkte Menge in eine kompakte über, so heißt $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ Abbildung mit vollstetiger Verschiebung. Bei einer Abbildung mit vollstetiger Verschiebung ist das Bild einer

[5]) $\|\mathfrak{z}\|$ bedeutet die Norm von $\mathfrak{z}$.

[6]) Auch im Falle der S^1 ist der Stützvektor nicht notwendig eindeutig bestimmt.

beschränkten abgeschlossenen Menge abgeschlossen [7]) und hat daher von jeder abgeschlossenen kompakten zu ihr fremden Menge eine positive Entfernung.

7. Sei $E^n \subset E$. Die in einer Punktmenge des Raumes E definierte Abbildung $\mathfrak{z}(\mathfrak{x})$ mit vollstetiger Verschiebung heißt Schichtenabbildung [7a]) (in Bezug auf E^n), wenn der Verschiebungsvektor $\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{x}$ parallel zu E^n ist. Ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{x})$ Schichtenabbildung in Bezug auf E^n, so ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{x})$ offenbar auch Schichtenabbildung in Bezug auf jeden E^n umfassenden Raum E^m.

8. Ist $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ eine in einer abgeschlossenen beschränkten Punktmenge M des Raumes E definierte vollstetige Abbildung auf eine Punktmenge des gleichen Raumes, so gibt es nach einem Lemma von Leray und Schauder [8]) zu jedem positiven ε einen Raum E^n und eine stetige Abbildung $\mathfrak{S}(\mathfrak{x})$, so daß

$$\|\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{S}(\mathfrak{x})\| < \varepsilon \qquad (\mathfrak{x} \subset M) \tag{1.1}$$

und

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) \subset E^n \qquad (\mathfrak{x} \subset M) \tag{1.2}$$

ist. Da dann $\mathfrak{S}$ von selbst vollstetig ist, so folgt hieraus: zu jeder in M definierten Abbildung $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ mit vollstetiger Verschiebung und jedem positiven ε gibt es einen $E^n \subset E$ und eine in M definierte Schichtenabbildung $\mathfrak{z}(\mathfrak{x})$ im Bezug auf E^n, für die

$$\|\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{z}(\mathfrak{x})\| < \varepsilon \tag{1.3}$$

gilt.

9. $\mathfrak{z}^m(\mathfrak{x})$ sei eine eindeutige stetige in einer abgeschlossenen beschränkten Punktmenge M^m eines Raumes E^m definierte Abbildung, die Schichtenabbildung in Bezug auf den Teilraum E^n von E^m sei $(n < m)$. Der Durchschnitt M^n von E^n und M^m enthalte mindestens einen inneren Punkt von M^m. Definiert man dann für $\mathfrak{x} \subset M^n$ eine Abbildung $\mathfrak{z}^n(\mathfrak{x})$ durch $\mathfrak{z}^n(\mathfrak{x}) = \mathfrak{z}^m(\mathfrak{x})$, so ist $\mathfrak{z}^n(\mathfrak{x})$ eine eindeutige stetige Abbildung der Menge $M^n \subset E^n$ auf eine ebenfalls in E^n gelegene Punktmenge. Bezeichnet dann allgemein $\gamma(\mathfrak{f}, M, \mathfrak{y})$ den Brouwerschen Abbildungsgrad im Punkte $\mathfrak{y}$ bei der Abbildung $\mathfrak{f}$, wenn M als Originalmenge betrachtet wird, so gilt nach einem Lemma von Leray und Schauder [9])

[7]) Siehe etwa Banach l.c., S. 151.

[7a]) Von Herrn Leray (Les problèmes non linéaires [L' Enseignement Math. 35 (1936), 139—151], insbesondere 141) als transformation dégénérée bezeichnet.

[8]) l.c., S. 51, Second Lemme.

[9]) l.c., S. 49, Premier Lemme.

für jedes $\mathfrak{y} \subset E^n$, das nicht auf dem Bilde des Randes von M^m liegt, $\gamma(\mathfrak{z}^n, M^n, \mathfrak{y}) = \gamma(\mathfrak{z}^m, M^m, \mathfrak{y})$.

10. $\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}_0(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}_1(\mathfrak{x})$ seien zwei in einer gemeinsamen Punktmenge $M \subset E$ definierte Abbildungen mit vollstetiger Verschiebung. Die Aussage „$\mathfrak{f}_0$ und $\mathfrak{f}_1$ lassen sich durch stetige Abänderung ineinander überführen" soll bedeuten: es gibt eine für $\mathfrak{x} \subset M$ und $0 \leqq t \leqq 1$ definierte Abbildung $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, t)$ von folgenden Eigenschaften:

a) $$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 0) = \mathfrak{F}_0(\mathfrak{x}),\ \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, 1) = \mathfrak{F}_1(\mathfrak{x});$$

b) bei festem $\mathfrak{x}$ ist $\mathfrak{F}$ stetig als Funktion von t und zwar gleichmäßig in $\mathfrak{x}$, d.h. zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein von $\mathfrak{x}$ unabhängiges $\delta > 0$, so daß für $|t_1 - t_2| < \delta$ die Ungleichung $\|\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, t_1) - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, t_2)\| < \varepsilon$ für alle $\mathfrak{x} \subset M$ erfüllt ist;

c) bei festem t ist $\mathfrak{F}$ vollstetig in $\mathfrak{x}$.

Es läßt sich beweisen [10]), daß wenn M beschränkt ist, aus den angeführten Eigenschaften folgt:

d) die Menge aller Punkte $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, t)$ für $\mathfrak{x} \subset M$, $0 \leqq t \leqq 1$ ist kompakt.

§ 2. *Definition und Haupteigenschaften der Ordnung.*

Hilfssatz 1. S^{m-1} sei eine in einem E^m gelegene Kugel mit Mittelpunkt $\mathfrak{a}$ und Radius R. $\mathfrak{z}^m(\mathfrak{x})$ sei eine auf S^{m-1} definierte eindeutige stetige Abbildung, die Schichtenabbildung (§ 1, 7) in Bezug auf den Raum $E^n \subset E^m$ ist, wobei $\mathfrak{a} \subset E^n$ sei. Ist dann S^{n-1} der Schnitt von E^n mit S^{m-1}, so liefert also $\mathfrak{z}^m$ eine eindeutige stetige Abbildung von S^{n-1} auf eine in E^n gelegene Punktmenge. Wird diese Abbildung mit $\mathfrak{z}^n$ bezeichnet, so wird behauptet

$$(2.1)\qquad u(\mathfrak{z}^n, S^{n-1}, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{z}^m, S^{m-1}, \mathfrak{y}) \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{y} \subset E^n \\ \mathfrak{y} \not\subset \mathfrak{z}^n(S^{n-1}) \end{pmatrix},$$

wenn allgemein $u(\mathfrak{f}, S^{l-1}, \mathfrak{y})$ die Ordnung des Punktes $\mathfrak{y}$ in Bezug auf das durch die Abbildung $\mathfrak{f}$ gelieferte Bild der Kugel S^{l-1} ist.

Beweis. Sei V^m die zu S^{m-1} gehörige Vollkugel und $\bar{\mathfrak{z}}^m = \mathfrak{x} + \bar{\mathfrak{S}}^m(\mathfrak{x})$ eine eindeutige stetige Abbildung von V^m, die auf S^{m-1} mit

---

[10]) Siehe E. Rothe, Über Abbildungsklassen von Kugeln des Hilbertschen Raumes [Compositio Math. 4 (1937), 294—307], Hilfssatz 2.

$\mathfrak{z}^m = \mathfrak{x} + \mathfrak{S}^m(\mathfrak{x})$ übereinstimmt [11]). Ist dann $\bar{\bar{\mathfrak{S}}}^m(\mathfrak{x})$ die zu E^n parallele Komponente von $\bar{\mathfrak{S}}^m(\mathfrak{x})$ (in Bezug auf eine passend gewählte Basis; vgl. § 1, 1 u. 2), so stimmt die eindeutige stetige Abbildung $\bar{\bar{\mathfrak{z}}}^m = \mathfrak{x} + \bar{\bar{\mathfrak{S}}}^m(\mathfrak{x})$ von V^m auf S^{m-1} ebenfalls mit $\mathfrak{z}^m$ überein und ist außerdem Schichtenabbildung in Bezug auf E^n. Auf Grund des bekannten Zusammenhanges zwischen Abbildungsgrad γ und Ordnung u ist nun

$$(2.2)\quad u(\mathfrak{z}^m, S^{m-1}, \mathfrak{y}) = \gamma(\bar{\bar{\mathfrak{z}}}^m, V^m, \mathfrak{y});\ u(\mathfrak{z}^n, S^{n-1}, \mathfrak{y}) = \gamma(\bar{\bar{\mathfrak{z}}}^n, V^n, \mathfrak{y}),$$

wenn V^n die zu S^{n-1} gehörige Vollkugel und $\bar{\bar{\mathfrak{z}}}^n$ durch $\bar{\bar{\mathfrak{z}}}^n(\mathfrak{x}) = \bar{\bar{\mathfrak{z}}}^m(\mathfrak{x})$ für $\mathfrak{x} \subset V^n$ definiert ist. Da anderseits nach dem in § 1, 9 angeführten Lemma $\gamma(\bar{\bar{\mathfrak{z}}}^m, V^m, \mathfrak{y}) = \gamma(\bar{\bar{\mathfrak{z}}}^n, V^n, \mathfrak{y})$ ist, so ergibt sich aus (2.2) die Behauptung (2.1).

Hilfssatz 2. S^∞ sei eine in einem Raume E^∞ gelegene Kugel. E^m und E^n seien zwei Teilräume von E^∞, die den Kugelmittelpunkt enthalten. S^{m-1} und S^{n-1} seien die Schnitte von E^m und E^n mit S^∞. $\mathfrak{z}$ sei eine auf S^∞ erklärte eindeutige stetige Abbildung, die sowohl in Bezug auf E^m wie in Bezug auf E^n Schichtenabbildung ist. Durch $\mathfrak{z}$ werden also eindeutige stetige Abbildungen von S^{m-1} bzw. S^{n-1} auf in E^m bzw. E^n gelegene Punktmengen gegeben. Diese Abbildungen seien mit $\mathfrak{z}^m$ bzw. $\mathfrak{z}^n$ bezeichnet. Ist dann $\mathfrak{y}$ ein dem Durchschnitt von E^m und E^n angehörender nicht auf $\mathfrak{z}$ (S^∞) gelegener Punkt, so wird behauptet $u(\mathfrak{z}^m, S^{m-1}, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{z}^n, S^{n-1}, \mathfrak{y})$.

Beweis. Ist der eine der beiden Teilräume in dem andern enthalten, etwa $E^n \subset E^m$, so folgt die Behauptung aus Hilfssatz 1. Der allgemeine Fall läßt sich auf den erledigten Spezialfall zurückführen, indem man einen E^m und E^n enthaltenden Raum E^l einführt, da $\mathfrak{z}$ Schichtenabbildung in Bezug auf jeden solchen Raum ist.

Hilfssatz 2 gibt das Recht zu der folgenden

Definition I. $\mathfrak{z}$ sei eine eindeutige stetige Schichtenabbildung einer $S^\infty \subset E^\infty$ und $\mathfrak{y}$ ein nicht auf $\mathfrak{z}(S^\infty)$ gelegener Punkt von E^∞. Unter der Ordnung $u(\mathfrak{z}, S^\infty, \mathfrak{y})$ von $\mathfrak{y}$ in Bezug auf das durch $\mathfrak{z}$ gelieferte Bild der S^∞ verstehen wir dann die folgendermaßen zu erhaltende Zahl: sei S^{n-1} der Schnitt von S^∞ mit

---

[11]) Bekanntlich existiert eine solche Abbildung. Man setze z.B. $\bar{\mathfrak{S}}^m(\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}$ und für $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{a}$

$$\bar{\mathfrak{S}}^m(\mathfrak{x}) = \frac{\|\mathfrak{x} - \mathfrak{a}\|}{R}\,\mathfrak{S}^m\left(\mathfrak{a} + R\,\frac{\mathfrak{x} - \mathfrak{a}}{\|\mathfrak{x} - \mathfrak{a}\|}\right)$$

einem Teilraum E^n von E^∞, der $\mathfrak{y}$ und den Kugelmittelpunkt enthält und in Bezug auf den $\mathfrak{s}$ Schichtenabbildung ist. Setzt man dann $\mathfrak{s}^n(\mathfrak{x}) = \mathfrak{s}(\mathfrak{x})$ für $\mathfrak{x} \subset S^{n-1}$, so ist $\mathfrak{s}^n(\mathfrak{x}) \subset E^n$ und $\mathfrak{y} \not\subset \mathfrak{s}^n(S^{n-1})$. Die Ordnung $u(\mathfrak{s}^n, S^{n-1}, \mathfrak{y})$ von $\mathfrak{y}$ in Bezug auf das durch $\mathfrak{s}^n$ gelieferte Bild von S^{n-1} ist daher wohl definiert. Dann wird gesetzt

$$u(\mathfrak{s}, S^\infty, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{s}^n, S^{n-1}, \mathfrak{y}).$$

Hilfssatz 3. $\mathfrak{s}(\mathfrak{x}, t)$ sei für $\mathfrak{x} \subset S^\infty \subset E^\infty$ und $0 \leqq t \leqq 1$ stetig in $(\mathfrak{x}, t)$. Bei festem t sei $\mathfrak{s}$ eine Schichtenabbildung in Bezug auf den (von t unabhängigen) Raum $E^m \subset E^\infty$. Ist dann $\mathfrak{y}$ ein Punkt in E^∞, der für kein t auf dem Bilde der S^∞ liegt, so ist die Ordnung $u(\mathfrak{s}, S^\infty, \mathfrak{y})$ von t unabhängig.

Beweis. $E^n \subset E^\infty$ sei ein E^m, $\mathfrak{y}$ und den Kugelmittelpunkt enthaltender Raum. $\mathfrak{s}$ ist dann auch in Bezug auf E^n Schichtenabbildung. Bezeichnet daher wieder $\mathfrak{s}^n$ die durch $\mathfrak{s}$ gelieferte Abbildung des Schnittes S^{n-1} von S^∞ mit E^n, so ist nach Definition I $u(\mathfrak{s}, S^\infty, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{s}^n, S^{n-1}, \mathfrak{y})$. Die letztere Zahl ist aber von t unabhängig, da $\mathfrak{y} \not\subset \mathfrak{s}^n(S^{n-1})$.

Hilfssatz 4. Sei $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ eine Abbildung mit vollstetiger Verschiebung der S^∞ und $\mathfrak{y}$ ein nicht auf $\mathfrak{f}(S^\infty)$ gelegener Punkt. Sei ε die positive Entfernung, die dann (nach § 1, 6) $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{f}(S^\infty)$ hat. Sind dann $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ zwei auf der S^∞ definierte Schichtenabbildungen, für die

$$\|\mathfrak{f} - \mathfrak{s}_1\| < \varepsilon, \quad \|\mathfrak{f} - \mathfrak{s}_2\| < \varepsilon \quad (\mathfrak{x} \subset S^\infty) \tag{2.3}$$

gilt, so ist $u(\mathfrak{s}_1, S^\infty, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{s}_2, S^\infty, \mathfrak{y})$.

Beweis. $E^n \subset E$ sei ein den Kugelmittelpunkt enthaltender Raum, in Bezug auf den $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ Schichtenabbildungen sind. Sei ferner $\mathfrak{s}(\mathfrak{x}, t) = (1-t)\mathfrak{s}_1 + t\,\mathfrak{s}_2$. Dann ist nach (2.3) für $0 \leqq t \leqq 1$

$$\|\mathfrak{s}(\mathfrak{x}, t) - \mathfrak{f}(\mathfrak{x})\| =$$
$$= \|(1-t)(\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{f}) + t(\mathfrak{s}_2 - \mathfrak{f})\| \leqq (1-t)\|\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{f}\| + t\|\mathfrak{s}_2 - \mathfrak{f}\| < \varepsilon;$$

aus der Voraussetzung $\|\mathfrak{y} - \mathfrak{f}(S^\infty)\| \geqq \varepsilon$ folgt daher, daß $\mathfrak{y}$ für kein t auf dem Bilde der S^∞ bei der Abbildungs $\mathfrak{s}(\mathfrak{x}, t)$ liegt. Da schließlich $\mathfrak{s}(\mathfrak{x}, t)$ offenbar Schichtenabbildung in Bezug auf E^n ist, so folgt die Behauptung aus Hilfssatz 3.

Hilfssatz 4 in Verbindung mit § 1; 8 rechtfertigt die folgende

Definition II. $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ sei eine Abbildung mit vollstetiger Verschiebung der $S^\infty \subset E^\infty$ und $\mathfrak{y}$ ein nicht auf $\mathfrak{f}(S^\infty)$ gelegener Punkt von E^∞. Unter der Ordnung $u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{y})$ von $\mathfrak{y}$ in Bezug auf das Kugelbild $\mathfrak{f}(S^\infty)$ verstehen wir dann die Ordnung $u(\mathfrak{s}, S^\infty, \mathfrak{y})$ für irgend eine Schichtenabbildung $\mathfrak{s}$, für die $\|\mathfrak{s} - \mathfrak{f}\|$ kleiner ist als die Entfernung des Punktes $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{f}(S^\infty)$.

Satz 1. Ist $\mathfrak{f}$ wieder eine Abbildung mit vollstetiger Verschiebung einer $S^\infty \subset E^\infty$, so bleibt $u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{y})$ bei stetiger Änderung von $\mathfrak{y}$ ungeändert, solange $\mathfrak{y} \not\subset \mathfrak{f}(S^\infty)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(t)$ stetig und $\not\subset \mathfrak{f}(S^\infty)$ für $0 \leqq t \leqq 1$. Nach § 1, 6 gibt es dann eine positive Zahl ε, so daß die Kurve $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(t)$ von $\mathfrak{f}(S^\infty)$ um mehr als 2ε entfernt ist. Ist dann $\mathfrak{s}$ eine Schichtenabbildung der S^∞, für die

$$\|\mathfrak{s} - \mathfrak{f}\| < \varepsilon$$

gilt, so ist nach Definition II $u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{s}, S^\infty, \mathfrak{y})$ und es genügt, die Konstanz von $u(\mathfrak{s}, S^\infty, \mathfrak{y})$ zu beweisen. Auf Grund der Stetigkeit von $\mathfrak{y}(t)$ genügt es hierzu wiederum, zu zeigen, daß für jedes $t = t_0$ des Intervalles $0 \leqq t \leqq 1$ mit $\mathfrak{y}(t_0) = \mathfrak{y}_0$ die Gleichung $u(\mathfrak{s}, S^\infty, \mathfrak{y}_0) = u(\mathfrak{s}, S^\infty, \mathfrak{y}_1)$ gilt, wenn $\mathfrak{y}_1$ von $\mathfrak{y}_0$ weniger als ε entfernt ist. Hierzu beachte man, daß wegen $\|\mathfrak{s} - \mathfrak{y}\| \geqq \|\mathfrak{f} - \mathfrak{y}\| - \|\mathfrak{f} - \mathfrak{s}\| > \varepsilon$ die Vollkugel v^∞ mit Mittelpunkt $\mathfrak{y}_0$ und Radius ε zu $\mathfrak{s}(S^\infty)$ fremd ist. Ist nun $E^n \subset E^\infty$ ein $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{y}_1$ und den Mittelpunkt der S^∞ enthaltender Raum, in Bezug auf den $\mathfrak{s}$ Schichtenabbildung ist, ist v^n der Schnitt von v^∞ und S^{n-1} der von S^∞ mit E^n, und ist schließlich $\mathfrak{s}^n$ die durch $\mathfrak{s}$ gegebene Abbildung von S^{n-1}, so ist nach Definition I $u(\mathfrak{s}, S^\infty, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{s}^n, S^{n-1}\mathfrak{y})$. Letztere Zahl ist aber für $\mathfrak{y} \subset v^n$ konstant, da v^n zu $\mathfrak{s}^n(S^{n-1})$ fremd ist. Wegen $\mathfrak{y}_1 \subset v^n$ folgt daher die Behauptung.

Hilfssatz 5. $\mathfrak{f}$ sei eine Abbildung mit vollstetiger Verschiebung der $S^\infty \subset E^\infty$, und es sei für den Punkt $\mathfrak{y} \subset E^\infty$: $\|\mathfrak{y} - \mathfrak{f}(S^\infty)\| > \varepsilon > 0$. Ist dann $\mathfrak{f}_1$ eine Abbildung mit vollstetiger Verschiebung der S^∞, für die $\|\mathfrak{f} - \mathfrak{f}_1\| < \varepsilon' < \varepsilon$ gilt, so ist $u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{f}_1, S^\infty, \mathfrak{y})$.

Beweis. $\mathfrak{s}$ sei eine Schichtenabbildung der S^∞, für die

$$\|\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{s}\| < \varepsilon - \varepsilon'$$

gilt. Dann ist

$$\|\mathfrak{s} - \mathfrak{f}\| \leqq \|\mathfrak{s} - \mathfrak{f}_1\| + \|\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}\| < (\varepsilon - \varepsilon') + \varepsilon' = \varepsilon$$
$$\|\mathfrak{y} - \mathfrak{f}_1\| \geqq \|\mathfrak{y} - \mathfrak{f}\| - \|\mathfrak{f} - \mathfrak{f}_1\| > \varepsilon - \varepsilon'.$$

Aus der ersten dieser beiden Ungleichungen folgt nach Definition II

$u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{s}, S^\infty, \mathfrak{y})$ und aus der zweiten $u(\mathfrak{f}_1, S^\infty, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{s}, S^\infty, \mathfrak{y})$. Also ist wie behauptet $u(\mathfrak{f}_1, S^\infty, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{y})$.

Satz 2. Bei stetiger Änderung (siehe § 1, 10) der Abbildung mit vollstetiger Verschiebung $\mathfrak{f}$ der S^∞ bleibt $u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{y})$ ungeändert, wenn der Punkt $\mathfrak{y}$ während der Änderung niemals auf $\mathfrak{f}(S^\infty)$ liegt.

Beweis. Für $0 \leqq t \leqq 1$ sei $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}, t) = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x}, t)$, wo $\mathfrak{F}$ die in § 1, 10 angegebenen Eigenschaften hat. Aus der dort angeführten Eigenschaft d ergibt sich nun leicht, daß der zu $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}, t)$ fremde Punkt $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}, t)$ um mehr als eine von t unabhängige positive Zahl ε entfernt ist. Unter Benutzung der in § 1, 10 angegebenen Stetigkeitseigenschaften von $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, t)$ und Anwendung des Borelschen Überdeckungssatzes auf das Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ folgt nunmehr ohne weiteres aus Hilfssatz 5, daß $u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{y})$ von t unabhängig ist.

Satz 2a. $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ seien zwei Abbildungen mit vollstetiger Verschiebung einer $S^\infty \subset E^\infty$. Der Punkt $\mathfrak{y} \subset E^\infty$ liege nicht auf $\mathfrak{g}(S^\infty)$ und es sei

$$\|\mathfrak{f} - \mathfrak{g}\| < \|\mathfrak{g} - \mathfrak{y}\| \qquad (\mathfrak{x} \subset S^\infty).$$

Dann ist $u(\mathfrak{g}, S^\infty, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{y})$.

Beweis. Setzt man $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}, t) = (1 - t)\mathfrak{g} + t\mathfrak{f}$, so sieht man, daß der Satz ein Spezialfall des vorigen ist.

Satz 2b. Ist $\mathfrak{f} = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ eine Abbildung mit vollstetiger Verschiebung der S^∞ und ist

$$\|\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\| < \|\mathfrak{x} - \mathfrak{a}\| \qquad (\mathfrak{x} \subset S^\infty),$$

wo $\mathfrak{a}$ der Mittelpunkt der S^∞ ist, so ist $u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{a}) = 1$.

Beweis. Wie aus Definition I unmittelbar folgt, ist

$$u(\mathfrak{x}, S^\infty, \mathfrak{a}) = 1.$$

Satz 2b folgt daher aus Satz 2a mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{a}$.

Satz 3. $\mathfrak{f}$ sei eine in einer Vollkugel V^∞ definierte Abbildung mit vollstetiger Verschiebung. S^∞ sei der Rand von V^∞. Ist dann $\mathfrak{y} \not\subset \mathfrak{f}(V^\infty)$, so ist $u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{y}) = 0$.

Beweis. $\mathfrak{y}$ hat von $\mathfrak{f}(V^\infty)$ eine positive Entfernung ε (§ 1, 6). Sei $\mathfrak{s}$ eine Schichtenabbildung der V^∞ mit $\|\mathfrak{f} - \mathfrak{s}\| < \varepsilon$. Dann ist nach Definition II $u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{s}, S^\infty, \mathfrak{y})$ und ferner ist $\mathfrak{y} \not\subset \mathfrak{s}(V^\infty)$. Sei nun E^n ein den Kugelmittelpunkt und $\mathfrak{y}$ enthaltender Raum, in Bezug auf den $\mathfrak{s}$ Schichtenabbildung ist,

V^n bzw. S^{n-1} der Schnitt von E^n mit V^∞ bzw. S^∞ und $\mathfrak{z}^n$ die durch $\mathfrak{z}$ gegebene Abbildung von V^n. Dann ist nach Definition I $u(\mathfrak{z}, S^\infty, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{z}^n, S^\infty, \mathfrak{y})$. Wegen $\mathfrak{y} \not\subset \mathfrak{z}^n(V^n)$ folgt bekanntlich $u(\mathfrak{z}^n, S^{n-1}, \mathfrak{y}) = 0$, also ist auch $u(\mathfrak{z}, S^\infty, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{y}) = 0$.

Satz 3a. Haben $\mathfrak{f}$, V^∞, S^∞ die gleiche Bedeutung wie in Satz 3, ist der Mittelpunkt $\mathfrak{a}$ der V^∞ zu $\mathfrak{f}(S^\infty)$ fremd und ist $u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{a}) \neq 0$, so gibt es eine $\mathfrak{a}$ enthaltende Vollkugel, die ganz zu $\mathfrak{f}(V^\infty)$ gehört.

Beweis. Da es nach § 1, 6 eine zu $\mathfrak{f}(S^\infty)$ fremde Vollkugel mit Mittelpunkt $\mathfrak{a}$ gibt, so folgt die Behauptung in bekannter Weise aus Satz 3 in Verbindung mit Satz 1.

Satz 3b. Ist bei der in V^∞ definierten Abbildung $\mathfrak{f}$ mit vollstetiger Verschiebung die Verschiebung $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{f} - \mathfrak{x}$ der Randpunkte kleiner als der Kugelradius, so gibt es eine den Kugelmittelpunkt enthaltende Vollkugel, die ganz aus Bildpunkten besteht.

Beweis. Der Satz ist eine Folge der Sätze 2b und 3a.

Bemerkung. Wird nur vorausgesetzt, daß die Verschiebung der Randpunkte höchstens gleich dem Kugelradius ist, so gilt immer noch, daß der Kugelmittelpunkt Bildpunkt ist. Denn ist $\mathfrak{f} = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ und ist t_i $(i = 1, 2, \ldots)$ eine monoton wachsende Folge positiver gegen 1 konvergierender Zahlen, so genügen die Abbildungen mit vollstetiger Verschiebung $\mathfrak{f}_i = \mathfrak{x} + t_i\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ den Voraussetzungen von Satz 3b. Daher gibt es eine Folge $\mathfrak{x}_i$, für die $\mathfrak{f}_i(\mathfrak{x}_i) = \mathfrak{x}_i + t_i\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_i) = \mathfrak{a}$ ist. Aus der Vollstetigkeit von $\mathfrak{F}$ schließt man auf die Konvergenz einer Teilfolge der $\mathfrak{x}_i$ gegen einen Punkt $\mathfrak{x}_0$. Für diesen ist dann $\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_0) = \mathfrak{a}$.

Aus dieser Bemerkung ergibt sich sofort der folgende

Fixpunktsatz: Gehen bei der vollstetigen in einer Vollkugel V^∞ definierten Abbildung $\mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ die Randpunkte von V^∞ in Punkte der V^∞ über, so hat die Abbildung mindestens einen Fixpunkt. [12])

---

[12]) In dem Fall, daß die ganze V^∞ in sich übergeht, ist der Satz bekannt. Siehe Schauder, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen [Studia Mathematica **2** (1930), 171—179], wo dieser Satz allgemeiner für konvexe Bereiche bewiesen wird (Satz II). Dort finden sich auch weitere Fixpunktsätze sowie Angaben über die früheren einschlägigen Arbeiten von Herrn Schauder. Spezialfälle der Schauderschen Fixpunktsätze finden sich schon bei Birkhoff & Kellog, Invariant points in function space [Trans. Am. Math. Soc. **23** (1922), 96—115]. Vgl. auch Cacciopoli, Un teorema generale sull' esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale [Atti R. Acc. Naz. dei Lincei (6) **11** (1930), 794—799].

Denn ist $\mathfrak{a}$ der Mittelpunkt der V^∞, so ist am Rande $\|\mathfrak{a} - \mathfrak{G}(\mathfrak{x})\| \leqq \|\mathfrak{x} - \mathfrak{a}\|$. Nach der *Bemerkung* gibt es daher mindestens ein $\mathfrak{x} \subset V^\infty$, so daß $\mathfrak{x} + (\mathfrak{a} - \mathfrak{G}(\mathfrak{x})) = \mathfrak{a}$ d.h. $\mathfrak{x} = \mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ ist.

Zwischen Ordnung und Abbildungsgrad besteht der gleiche Zusammenhang wie in Räumen endlicher Dimension. Es gilt nämlich

SATZ 4. $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ sei eine Abbildung mit vollstetiger Verschiebung, die in der von S^∞ berandeten Vollkugel $V^\infty \subset E^\infty$ definiert ist. $\mathfrak{y}$ sei ein nicht auf $\mathfrak{f}(S^\infty)$ gelegener Punkt. Ist dann $\gamma(\mathfrak{f}, V^\infty, \mathfrak{y})$ der Abbildungsgrad dieser Abbildung im Punkte $\mathfrak{y}$ (im Sinne der von Leray-Schauder [3]) gegebenen Definition) so ist

$$u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{y}) = \gamma(\mathfrak{f}, V^\infty, \mathfrak{y}).$$

Beweis. Sei ε die Entfernung des Punktes $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{f}(S^\infty)$ und $\mathfrak{s}(\mathfrak{x})$ eine Schichtenabbildung der V^∞ mit $\|\mathfrak{f} - \mathfrak{s}\| < \varepsilon$. Sei E^n ein den Kugelmittelpunkt und $\mathfrak{y}$ enthaltender Raum, in Bezug auf den $\mathfrak{s}$ Schichtenabbildung ist. S^{n-1} bzw. V^n seien die Schnitte von E^n mit S^∞ bzw. V^∞. Ist dann $\mathfrak{s}^n$ die durch $\mathfrak{s}$ gegebene Abbildung von V^n, so ist auf Grund der von Leray-Schauder gegebenen Definition

$$\gamma(\mathfrak{f}, V^\infty, \mathfrak{y}) = \gamma(\mathfrak{s}^n, V^n, \mathfrak{y}) \tag{2.4}$$

und nach den Definitionen I, II

$$u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{y}) = u(\mathfrak{s}^n, S^{n-1}, \mathfrak{y}). \tag{2.5}$$

Da anderseits bekanntlich $u(\mathfrak{s}^n, S^{n-1}, \mathfrak{y}) = \gamma(\mathfrak{s}^n, V^n, \mathfrak{y})$ ist, so folgt aus (2.4) und (2.5) die Behauptung.

§ 3. *Vektorfelder der Form* $\mathfrak{v}(x) = \mathfrak{x} + \mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ *mit vollstetigem* $\mathfrak{B}$.

In jedem Punkt $\mathfrak{x}$ einer Kugel $S^\infty \subset E^\infty$ oder auch einer Vollkugel V^∞ sei ein Vektor $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{B}(\mathfrak{x})$ mit vollstetigem $\mathfrak{B}$ angetragen (§ 1, 2). Ordnet man dem Punkte $\mathfrak{x}$ den Endpunkt $\mathfrak{f}$ des in einem festen Punkte, etwa dem Nullpunkt $\mathfrak{o}$ des Raumes E^∞ angetragenen Vektors zu, so erhält man eine Abbildung mit vollstetiger Verschiebung $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{B}(\mathfrak{x})$, die zu dem Vektorfelde $\mathfrak{v}$ gehörige Abbildung. Ist insbesondere $\mathfrak{v} \neq \mathfrak{o}$ für $\mathfrak{x} \subset S^\infty$, so ist $\mathfrak{o} \not\subset \mathfrak{f}(S^\infty)$ und die Ordnung $u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{o})$ ist definiert. In Übereinstimmung mit der bei Räumen endlicher Dimension üblichen Definition nennen wir diese Zahl die Charakteristik des Vektorfeldes $\mathfrak{v}$ (auf dem Rande S^∞ von V^∞) und bezeichnen sie mit $\chi(\mathfrak{v}, S^\infty)$.

Hilfssatz 6. $\mathfrak{v} = \mathfrak{x} + \mathfrak{V}(\mathfrak{x})$ [13]) sei ein in der V^∞ definiertes Vektorfeld. In dem inneren Punkt $\mathfrak{a}$ der V^∞ sei $\mathfrak{v} = \mathfrak{o}$. Die in V^∞ gelegenen Vollkugeln V_1^∞, V_2^∞ mögen den Punkt $\mathfrak{a}$ in ihrem Innern und sonst keine Nullstellen des Feldes $\mathfrak{v}$ enthalten. Dann ist $\chi(\mathfrak{v}, S_1^\infty) = \chi(\mathfrak{v}, S_2^\infty)$, wenn S_1^∞, S_2^∞ die Ränder von V_1^∞, V_2^∞ sind.

Beweis. V_3^∞ sei eine Vollkugel mit Mittelpunkt $\mathfrak{a}$, die im Inneren von V_1^∞ und V_2^∞ liegt. Auf Grund von Satz 4 und bekannter Eigenschaften des Abbildungsgrades γ [3]) ist dann für $i = 1, 2$

$$\chi(\mathfrak{v}, S_i^\infty) = u(\mathfrak{f}, S_i^\infty, \mathfrak{o}) = \gamma(\mathfrak{f}, V_i^\infty, \mathfrak{o}) =$$
$$= \gamma(\mathfrak{f}, V_i^\infty - V_3^\infty, \mathfrak{o}) + \gamma(\mathfrak{f}, V_3^\infty, \mathfrak{o}) = \gamma(\mathfrak{f}, V_3^\infty, \mathfrak{o}).$$

Hilfssatz 6 rechtfertigt die folgende

Definition III. Der Index $j = j(\mathfrak{a})$ einer isolierten Nullstelle $\mathfrak{a}$ des Vektorfeldes $\mathfrak{v} = \mathfrak{x} + \mathfrak{V}(\mathfrak{x})$ ist die Charakteristik von $\mathfrak{v}$ auf dem Rande einer $\mathfrak{a}$ im Innern und sonst keine Nullstelle enthaltenden Vollkugel. Als Index der isolierten Nullstelle $\mathfrak{a}$ der zugehörigen Abbildung $\mathfrak{f}$ wird die gleiche Zahl j definiert [14]).

Satz 5. V^∞ sei eine Vollkugel mit dem Rande S^∞. $V_1^\infty, \ldots, V_k^\infty$ seien zu einander fremde im Innern der V^∞ gelegene Vollkugeln mit den Rändern $S_1^\infty, \ldots, S_k^\infty$. In der abgeschlossenen Hülle W^∞ von $V^\infty - \sum_{i=1}^{k} V_i$ sei ein Vektorfeld $\mathfrak{v} = \mathfrak{x} + \mathfrak{V}(\mathfrak{x})$ [13]) definiert, das auf $S^\infty, S_1^\infty, \ldots, S_k^\infty$ keine und im Innern von W^∞ höchstens isolierte Nullstellen hat. Diese seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ [15]) und $j_1, \ldots, j_m$ ihre Indices. $\chi, \chi_1, \ldots, \chi_k$ seien die Charakteristiken von $\mathfrak{v}$ auf $S^\infty, S_1^\infty, \ldots, S_k^\infty$. Dann ist $\chi - \sum_{i=1}^{k} \chi_i = \sum_{l=1}^{m} j_j$.

Beweis. Sei zunächst $k = 0$, d.h. $W^\infty = V^\infty$. v_l^∞ $(l = 1, 2, \ldots, m)$ seien zu einander fremde im Innern von V^∞ gelegene Vollkugeln mit Mittelpunkt a_l und den Rändern s_l^∞; $\mathfrak{f}$ sei die zu $\mathfrak{v}$ gehörige Abbildung. Dann ist

---

[13]) $\mathfrak{V}(\mathfrak{x})$ bedeutet in diesem und dem folgenden § stets eine vollstetige Funktion.

[14]) Die damit offenbar für beliebige Abbildungen mit vollstetiger Verschiebung gegebene Definition des Index einer isolierten Nullstelle stimmt auf Grund von Satz 4 mit der von Leray—Schauder (l.c., Anm. 3, S. 54) mit Hilfe des Abbildungsgrades gegebenen überein.

[15]) Daß die Anzahl der Nullstellen endlich ist, folgt wegen der Vollstetigkeit von $\mathfrak{V}$ leicht aus den übrigen Voraussetzungen.

$$j_l = \chi(\mathfrak{v}, s_l^\infty) = u(\mathfrak{f}, s_l^\infty, \mathfrak{o}) = \gamma(\mathfrak{f}, v_l^\infty, \mathfrak{o}).$$

Da anderseits

$$\chi = \chi(\mathfrak{v}, S^\infty) = u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{o}) = \gamma(\mathfrak{f}, V^\infty, \mathfrak{o}) = \gamma(\mathfrak{f}, V^\infty - \sum_{l=1}^{m} v_l^\infty, \mathfrak{o}) + \\ + \sum_{l=1}^{m} \gamma(\mathfrak{f}, v_l^\infty, \mathfrak{o}) = \sum_{l=1}^{m} \gamma(\mathfrak{f}, v_l^\infty, \mathfrak{o}) = \sum_{l=1}^{m} j_l$$

ist, so ist die Behauptung im Falle $k = 0$ bewiesen. Den allgemeinen Fall führt man auf diesen Spezielfall zurück, indem man ein in der ganzen V^∞ definiertes Vektorfeld $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{x} + \mathfrak{V}_1(\mathfrak{x})$ mit vollstetigem $\mathfrak{V}_1$ einführt, welches in W^∞ mit $\mathfrak{v}$ übereinstimmt und in jeder der Vollkugeln V_i genau eine Nullstelle hat. [16])

Aus Satz 5 (mit $k = 0$) in Verbindung mit Satz 2a und Definition III ergibt sich unmittelbar der folgende

Satz 6. $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ seien zwei in der Vollkugel V^∞ definierte Abbildungen mit vollstetiger Verschiebung. Am Rande sei $\|\mathfrak{g}\| \neq 0$ und $\|\mathfrak{f} - \mathfrak{g}\| < \|\mathfrak{g}\|$. Im Innern mögen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ höchstens isolierte Nullstellen haben. Dann ist die Indexsumme der in V^∞ liegenden Nullstellen für $\mathfrak{f}$ die gleiche wie für $\mathfrak{g}$.

Satz 7. $\mathfrak{v} = \mathfrak{x} + \mathfrak{V}(\mathfrak{x})$ sei ein auf einer S^∞ mit Mittelpunkt $\mathfrak{a}$ definiertes dort nicht verschwindendes Vektorfeld. Dann gilt:

a) Mindestens einer der folgenden beiden Fälle muß eintreten: α) das Feld enthält eine äußere Normale (§ 1, 4); β) es gibt eine Punktfolge $\mathfrak{x}_i \subset S^\infty$ mit

$$\lim_{i \to \infty} \|\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_i) - (\mathfrak{x}_i - \mathfrak{a})\| = 0. \tag{3.1}$$

b) Ist $\chi(\mathfrak{v}, S^\infty) \neq 1$, so enthält das Feld eine innere Normale.

Beweis. $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ sei die zu dem Felde gehörige Abbildung. Dann ist nach Definition III

$$\chi(\mathfrak{v}, S^\infty) = u(\mathfrak{f}, S^\infty, \mathfrak{o}). \tag{3.2}$$

Sei d die positive Entfernung des Nullpunktes $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{f}(S^\infty)$ und ε_i $(i=1, 2, \ldots)$ eine Folge positiver gegen Null konvergierender Zahlen $< d$. Für ein beliebiges aber zunächst festes i sei dann $\mathfrak{s}_i$ eine Schichtenabbildung mit

$$\|\mathfrak{f} - \mathfrak{s}_i\| < \varepsilon_i < d. \tag{3.3}$$

Ist weiter E^{n_i} ein den Kugelmittelpunkt $\mathfrak{a}$ enthaltender Raum,

---

[16]) Ist $\mathfrak{b}_i$ der Mittelpunkt und R_i der Radius von V_i, so setze man z.B. $\mathfrak{V}_1(\mathfrak{b}_i) = 0$ und für $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{x} \subset V_i$:

$$\mathfrak{V}_1(\mathfrak{x}) = -\mathfrak{b}_i + \left\|\frac{\mathfrak{x} - \mathfrak{b}_i}{R_i}\right\| \left\{\mathfrak{b}_i + \mathfrak{V}\left(\mathfrak{b}_i + R_i \frac{\mathfrak{x} - \mathfrak{b}_i}{\|\mathfrak{x} - \mathfrak{b}_i\|}\right)\right\}.$$

in Bezug auf den $\mathfrak{z}_i$ Schichtenabbildung ist, ist S^{n_i-1} der Schnitt von E^{n_i} mit der S^∞ und $\mathfrak{z}^{n_i}$ die durch $\mathfrak{z}_i$ gegebene Abbildung von S^{n_i-1}, so ist nach (3.2) und den Definitionen I und II

$$(3.4) \qquad u(\mathfrak{z}^{n_i}, S^{n_i-1}, \mathfrak{o}) = \chi(\mathfrak{v}, S^\infty).$$

Wir machen zunächst die Voraussetzung $\chi(\mathfrak{v}, S^\infty) \neq 1$. Tragen wir dann den von $\mathfrak{o}$ nach $\mathfrak{z}^{n_i}(x)$ gerichteten Vektor im Punkte $\mathfrak{x}$ der S^{n_i-1} an, so ist die Charakteristik des so definierten Vektorfeldes $\mathfrak{v}^{n_i}(\mathfrak{x})$ gleich $u(\mathfrak{z}^{n_i}, S^{n_i-1}, \mathfrak{o})$, also nach (3.4) von 1 verschieden. Machen wir daher die (nach § 1, 7 offenbar zulässige) Annahme, daß n_i gerade ist, so folgt aus bekannten Sätzen der Topologie endlichdimensionaler Räume [17]), daß das Feld $\mathfrak{v}^{n_i}$ mindestens eine innere und eine äußere Normale enthält. Es gibt also zwei Punkte $\mathfrak{x}_{1i}$, $\mathfrak{x}_{2i}$ der S^{n_i-1} und zwei positive Zahlen λ_{1i}, λ_{2i}, so daß $\mathfrak{v}^{n_i}(\mathfrak{x}_{1i}) = \lambda_{1i}(\mathfrak{x}_{1i} - \mathfrak{a})$ und $\mathfrak{v}^{n_i}(\mathfrak{x}_{2i}) = -\lambda_{2i}(\mathfrak{x}_{2i} - \mathfrak{a})$ ist. Da $\mathfrak{v}^{n_i}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{z}_i(\mathfrak{x})$ ist, ist also auch

$$(3.5) \qquad \mathfrak{z}_i(\mathfrak{x}_{1i}) = \lambda_{1i}(\mathfrak{x}_{1i} - \mathfrak{a}),\ \mathfrak{z}_i(\mathfrak{x}_{2i}) = -\lambda_{2i}(\mathfrak{x}_{2i} - \mathfrak{a}).$$

Wegen $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{V}(\mathfrak{x})$ folgt aus (3.3) und (3.5)

$$(3.6) \qquad \lim_{i\to\infty} \{\mathfrak{x}_{1i}(1-\lambda_{1i}) + \lambda_{1i}\mathfrak{a} + \mathfrak{V}(\mathfrak{x}_{1i})\} = \\ = \lim_{i\to\infty} \{\mathfrak{x}_{2i}(1+\lambda_{2i}) - \lambda_{2i}\mathfrak{a} + \mathfrak{V}(\mathfrak{x}_{2i})\} = \mathfrak{o}.$$

Wegen der Vollstetigkeit von $\mathfrak{V}$ und der Beschränktheit der Konstanten λ_{1i}, λ_{2i} dürfen wir unter eventueller Änderung der Bezeichnungsweise annehmen, daß die Folgen $\mathfrak{V}(\mathfrak{x}_{1i})$, $\mathfrak{V}(\mathfrak{x}_{2i})$, λ_{1i}, λ_{2i} konvergieren. Wegen $\lambda_{2i} > 0$ folgt dann aus (3.6) sofort die Konvergenz der Folge $\mathfrak{x}_{2i}$. Ist $\mathfrak{x}_2 = \lim_{i\to\infty} \mathfrak{x}_{2i}$, $\lambda_2 = \lim_{i\to\infty} \lambda_{2i}$, so folgt aus (3.6) $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}_2) = -\lambda_2(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{a})$. Da nach Voraussetzung das Feld nirgends verschwindet, ist $\lambda_2 > 0$ und $\mathfrak{v}(\mathfrak{x})$ ist innere Normale. Damit ist die Behauptung b) bewiesen.

In der gleichen Weise wie die Existenz einer inneren Normalen folgt aus (3.6) die einer äußeren, wenn die Folge der Faktoren $(1-\lambda_{1i})$ von $\mathfrak{x}_{1i}$ nicht gegen 0 konvergiert. Konvergiert aber diese Folge gegen Null, so folgt aus (3.6), daß für die Folge der $\mathfrak{x}_{1i}$ (3.1) erfüllt ist. Unter der Voraussetzung $\chi(\mathfrak{v}, S^\infty) \neq 1$ ist damit auch die Behauptung a bewiesen.

Daß die Behauptung a auch im Falle $\chi(\mathfrak{v}, S^\infty) = 1$ zutrifft, sieht man, wenn man die Dimensionszahlen n_i der Räume E^{n_i} ungerade wählt. Nach bekannten topologischen Sätzen [17]) enthält dann nämlich das Feld $\mathfrak{v}^{n_i}$ eine äußere Normale und es

[17]) Siehe etwa Alexandroff-Hopf, Topologie [Berlin 1935], 479, (a) und (c).

besteht wieder der auf den Index 1 bezügliche Teil der Gleichung (3.6), aus dem man wie oben auf die Richtigkeit der Behauptung a) schließt.

Aus Satz 7 ergibt sich fast unmittelbar die folgende Übertragung des sogenannten Satzes von Poincaré-Brouwer [18]):

Satz 7a. Es gibt auf einer S^∞ kein für alle $\mathfrak{x} \subset S^\infty$ definiertes nicht verschwindendes Feld von Stützvektoren (§ 1, 4) der Form $\mathfrak{v} = \mathfrak{x} + \mathfrak{V}(\mathfrak{x})$ mit vollstetigem $\mathfrak{V}$.

§ 4. *Vollstetige Vektorfelder.*

SATZ 8. $\mathfrak{V}(\mathfrak{x})$ sei ein auf einer S^∞ angebrachtes für alle Punkte $\mathfrak{x}$ der S^∞ definiertes vollstetiges Vektorfeld. Dann tritt mindestens einer der beiden folgenden Fälle ein: α) das Feld enthält sowohl eine innere wie eine äußere Normale (siehe § 1, 3), β) es gibt eine Punktfolge $\mathfrak{x}_i$ ($i=1, 2, \ldots$) auf der S^∞ mit $\lim\limits_{i\to\infty} \mathfrak{V}(\mathfrak{x}_i) = 0$ [19]) [19a]).

Beweis. Wir nehmen an, daß Fall β nicht vorliegt. Dann ist mit $\mathfrak{V}$ auch $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) = \frac{\mathfrak{V}(\mathfrak{x})}{\|\mathfrak{V}(\mathfrak{x})\|}$ vollstetig. Die Menge aller Punkte $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ ist also kompakt. Ist daher ε_i eine Folge positiver gegen 0 konvergierender Zahlen $< \frac{1}{2}$, so gibt es (§ 1, 8) zo jedem i eine vollstetige Abbildung $\mathfrak{S}_i$ und einen Raum E^{n_i}, so daß

$$\|\mathfrak{F} - \mathfrak{S}_i\| < \varepsilon_i \tag{4.1}$$

$$\mathfrak{S}_i(\mathfrak{x}) \subset E^{n_i} \tag{4.2}$$

ist, wobei wir annehmen dürfen, daß E^{n_i} den Kugelmittelpunkt enthält. Wegen $\|\mathfrak{F}\| = 1$ folgt aus (4. 1)

$$\frac{1}{2} < \|\mathfrak{S}_i(\mathfrak{x})\| < \frac{3}{2}. \tag{4.3}$$

[18]) Siehe etwa Alexandroff—Hopf, l.c., 481.

[19]) Daß der Fall α tatsächlich nicht einzutreten braucht, zeigt folgendes Beispiel: E^∞ sei der Raum L^2 der in (0,1) quadratisch integrierbaren Funktionen $\mathfrak{x} = x(t)$, und es sei

$$\mathfrak{v}(\mathfrak{x}) = \int_0^1 K(s, t)x(t)dt,$$

wo $K(s, t)$ ein symmetrischer positiv definiter stetiger Kern ist. Da dann das innere Produkt

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{v}) = \int_0^1\int_0^1 K(s, t)x(s)x(t)\,ds\,dt$$

für $\|\mathfrak{x}\|^2 = \int_0^1 x(t)^2 dt = 1$ stets positiv ist, folgt leicht, daß $\mathfrak{v}$ auf der Einheitskugel niemals die Richtung der inneren Normalen haben kann.

[19a]) Speziellere Aussagen finden sich bereits bei BIRKHOFF-KELLOG, l.c. theorem VIII; vgl. auch SCHAUDER, l.c. Anm. 26.

Es sei nun E^{n_i+1} ein E^{n_i} enthaltender Teilraum von E^∞. Der Schnitt der S^∞ mit E^{n_i} bzw. E^{n_i+1} werde dann mit S^{n_i-1} bzw. S^{n_i} bezeichnet. Ebenso sei $S_1^{n_i-1}$ bzw. $S_1^{n_i}$ der Schnitt von E^{n_i} bzw. E^{n_i+1} mit der Kugel S_1^∞ vom Radius 1 mit dem Nullpunkte $\mathfrak{o}$ als Mittelpunkt. Wir setzen dann für $\mathfrak{x} \subset S^{n_i}$

$$(4.4) \qquad \frac{\mathfrak{S}_i(\mathfrak{x})}{\|\mathfrak{S}_i(\mathfrak{x})\|} = \mathfrak{S}^{n_i+1}(\mathfrak{x}).$$

Wegen (4.2) und (4.3) ist $\mathfrak{S}^{n_i+1}$ eine eindeutige stetige Abbildung der S^{n_i} auf die $S_1^{n_i}$, wobei nach (4.2) höchstens der echte Teil $S_1^{n_i-1}$ der $S_1^{n_i}$ überdeckt wird. Der Abbildungsgrad der Abbildung $\mathfrak{S}^{n_i+1}$ ist daher Null. Also ist auch die ihm gleiche Charakteristik desjenigen Vektorfeldes Null, das entsteht, wenn man den von $\mathfrak{o}$ nach dem Punkt $\mathfrak{S}^{n_i+1}(\mathfrak{x})$ gerichteten Vektor im Punkte $\mathfrak{x}$ der S^{n_i} anträgt. Dieses Vektorfeld enthält daher eine innere und eine äußere Normale [17]), d.h. es gibt zwei positive Zahlen λ_{1i}, λ_{2i} und zwei Punkte $\mathfrak{x}_{1i}$, $\mathfrak{x}_{2i}$, der S^{n_i}, so daß

$$(4.5) \qquad \mathfrak{S}^{n_i+1}(\mathfrak{x}_{1i}) = \lambda_{1i}(\mathfrak{x}_{1i} - \mathfrak{a}), \quad \mathfrak{S}^{n_i+1}(\mathfrak{x}_{2i}) = -\lambda_{2i}(\mathfrak{x}_{2i} - \mathfrak{a})$$

ist. Wegen (4.4) ist dann

$$(4.6) \qquad \mathfrak{S}_i(\mathfrak{x}_{1i}) = \mu_{1i}(\mathfrak{x}_{1i} - \mathfrak{a}), \quad \mathfrak{S}_i(\mathfrak{x}_{2i}) = -\mu_{2i}(\mathfrak{x}_{2i} - \mathfrak{a}),$$

wenn

$$\mu_{1i} = \lambda_{1i}\|\mathfrak{S}_i(\mathfrak{x}_{1i})\|, \quad \mu_{2i} = \lambda_{2i}\|\mathfrak{S}_i(\mathfrak{x}_{2i})\|$$

gesetzt ist, und aus (4.1) folgt

$$(4.7) \qquad \lim_{i\to\infty}\{\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_{1i}) - \mu_{1i}(\mathfrak{x}_{1i} - \mathfrak{a})\} = \lim_{i\to\infty}\{\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_{2i}) + \mu_{2i}(\mathfrak{x}_{2i} - \mathfrak{a})\} = \mathfrak{o}.$$

Wegen der Beschränktheit der Konstanten μ_{1i}, μ_{2i} und der Vollstetigkeit von $\mathfrak{B}$ dürfen wir unter eventueller Änderung der Bezeichnungsweise annehmen, daß die Folgen $\mathfrak{B}(x_{1i})$, $\mathfrak{B}(x_{2i})$, μ_{1i}, μ_{2i} konvergieren. Da die beiden erstgenannten Folgen nach der bei Beginn des Beweises gemachten Annahme nicht gegen Null konvergieren, so konvergieren auch die Folgen $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_{1i})$, $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_{2i})$. Da weiter nach (4.6) und (4.3) $|\mu_{1i}| > \frac{1}{2R}$ ist, wenn R der Radius der S^∞ ist, und für μ_{2i} die entsprechende Abschätzung gilt, sind die Limites μ_1, μ_2 der Folgen μ_{1i}, μ_{2i} ebenfalls von Null verschieden. Aus (4.7) folgt daher die Konvergenz der Folgen $\mathfrak{x}_{1i}$, $\mathfrak{x}_{2i}$. Sind $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ ihre Limites, so folgt wegen $\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{B}}{\|\mathfrak{B}\|}$ aus (4.7)

$$(4.8) \qquad \mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1) = \nu_1(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{a}), \quad \mathfrak{B}(\mathfrak{x}_2) = -\nu_2(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{a}),$$

wenn

$$\nu_1 = \mu_1 \|\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1)\|, \quad \nu_2 = \mu_2 \|\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_2)\|$$

gesetzt ist. Da $\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_1)$, $\mathfrak{B}(\mathfrak{x}_2)$ von Null verschieden, also $\nu_1, \nu_2 > 0$ sind, ist Satz 8 mit (4.8) bewiesen.

In Satz 8 ist die folgende Übertragung des Satzes von Poincaré-Brouwer [18]) enthalten

Satz 8a. Auf der S^∞ gibt es kein vollstetiger Feld von Stützrichtungen.

Unter einem Feld von Stützrichtungen ist dabei ein Feld von Stützvektoren (§ 1, 4) konstanter (von Null verschiedener) Länge verstanden.

§ 5. *Ein Existenzsatz über nichtlineare Integralgleichungen.*

Als Anwendung des „Verschiebungssatzes" 3b, § 2 beweisen wir den folgenden

Satz 9. s, t seien Punkte eines m-dimensionalen Bereiches B. Wir betrachten dann das System nichtlinearer Integralgleichungen

$$u_i(s) + \int_B f_i(s, t, u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))dt = 0, \tag{5.1}$$

in welchem $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ die gesuchten Funktionen sind und die gegebenen Funktionen $f_i(s, t, u_1, \ldots, u_n)$ folgenden Voraussetzungen genügen:

a) sie sind definiert für

$$s \subset B, \ t \subset B, \ \sum_{j=1}^{n} |u_j| \leqq R,$$

wo R eine positive Zahl ist.

b) setzt man für u_j stetige Funktionen $u_j(t)$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Max} |u_j(t)| \leqq R \qquad (\operatorname{Max} = \operatorname{Max} t \subset B) \tag{5.2}$$

in die f_i ein, so existieren die in (5.1) auftretenden Integrale.

c) die genannten Integrale sind beim Einsetzen stetiger der Bedingung (5.2) genügender Funktionen $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ gleichartig beschränkt und gleichartig stetig.

d) es existieren Funktionen $F_j(s, t, u_1, \ldots, u_n)$ ($j=1, 2, \ldots, n$), die für $s \subset B, t \subset B$ und nicht negative der Bedingung $\sum_{j=1}^{n} u_j \leqq R$

genügende $u_1, \ldots, u_n$ definiert sind, die Voraussetzung b (für nicht negative stetige $u_j(t)$) erfüllen und außerdem folgenden Bedingungen genügen:

d$_1$) es ist $|f_i(s, t, u_1, \ldots, u_n)| \leqq F_i(s, t, |u_1|, \ldots, |u_n|)$;

d$_2$) es ist $F_i(s, t, u_1, \ldots, u_n) \leqq F_i(s, t, v_1, \ldots, v_n)$
für $0 \leqq u_1 \leqq v_1, \ldots, 0 \leqq u_n \leqq v_n$;

d$_3$) es gibt eine positive Zahl $r \leqq R$, so daß für alle nicht negativen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = r$$

die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Max} \int_B F_j(s, t, r_1, r_2, \ldots, r_n) dt \leqq r$$

erfüllt ist.

Unter den genannten Voraussetzungen besitzt das System (5.1) mindestens eine stetige Lösung $u_1, u_2, \ldots, u_n$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Max} |u_j| \leqq r. \tag{5.3}$$

Beweis. Die Gesamtheit der Systeme $\mathfrak{x} = (u_1(s), u_2(s), \ldots, u_n(s))$ in B definierter stetiger Funktionen bilden einen Raum E^∞, wenn

$$\|\mathfrak{x}\| = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Max} |u_j| \tag{5.4}$$

gesetzt wird. Die Abbildung $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, die dem Punkt $\mathfrak{x} = (u_1(s), \ldots, u_n(s))$ den Punkt

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) = \left(\int_B f_1(s, t, u_1(t), \ldots, u_n(t)) dt, \ldots, \int_B f_n(s, t, u_1(t), \ldots, u_n(t)) dt \right)$$

zuordnet, ist in der Vollkugel $\|\mathfrak{x}\| \leqq R$ definiert und nach b und c dort vollstetig; $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ ist also eine Abbildung mit vollstetiger Verschiebung. Nach (5.4) ist

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\| &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Max} \left| \int_B f_j(s, t, u_1(t), \ldots, u_n(t))\, dt \right| \\ &\leqq \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Max} \int_B |f_j(s, t, u_1(t), \ldots, u_n(t))|\, dt. \end{aligned}$$

Also ist nach d$_1$

$$\|\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\| \leqq \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Max} \int_B F_j(s, t, |u_1(t)|, \ldots, |u_n(t)|)\, dt$$

und nach d_2

$$\|\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\| \leqq \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Max} \int_B F_j(s, t, \operatorname{Max} |u_1(t)|, \ldots, \operatorname{Max} |u_n(t)|)\, dt. \tag{5.5}$$

Liegt nun $\mathfrak{x} = (u_1(s), \ldots, u_n(s))$ auf der Kugel $\|\mathfrak{x}\| = r$, so ist $\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Max} |u_j| = r$ und wegen d_3 folgt aus (5.5) die Ungleichung $\|\mathfrak{F}(\mathfrak{x})\| \leqq r$. Aus dieser folgt aber nach Satz 3b und der sich an ihn anschließenden Bemerkung, wenn man ihn auf die Vollkugel $\|\mathfrak{x}\| \leqq r$ anwendet, die Existenz mindestens einer Lösung von $\mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) = 0$ (d.h. von (5.1)), die in dieser Vollkugel liegt, d.h. für die (5.3) gilt [20]).

---

[20]) Die Voraussetzungen des somit bewiesenen Satzes 9 sind insbesondere in dem folgenden Spezialfall erfüllt:

$$f_i = K_i(s, t) g_i(t, u_1, \ldots, u_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

wo die $K_i(s, t)$ „brauchbar unstetige" Kerne und die $g_i(t, u_1, \ldots, u_n)$ für $t \subset B$ und $-\infty < u_i < \infty$ stetige Funktionen sind, welche Ungleichungen der Form

$$|g_i(t, u_1, \ldots, u_n)| \leqq a + \sum_{j=1}^{n} k_{ij} |u_j| \tag{I}$$

mit konstanten positiven a und k_{ij} genügen; die k_{ij} sollen dabei noch die Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ij}^2 \sum_{i=1}^{n} M_i^2 < 1 \tag{II}$$

mit

$$M_i = \operatorname{Max} \int_B |K_i(s, t)| dt \tag{III}$$

befriedigen.

Um das einzusehen, bestimme man zuerst die in Voraussetzung a von Satz 9 auftretende Zahl R folgendermaßen: aus (II) folgt auf Grund der Schwarzschen Ungleichung die Existenz eines positiven ε, für welches die Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} (k_{ij} + \varepsilon) M_i < 1 \tag{IV}$$

erfüllt sind. Man wähle ein solches ε und setze

$$R = \frac{a}{\varepsilon}. \tag{V}$$

Setzt man weiter

$$F_i = |K_i(s, t)| \left\{ a + \sum_{j=1}^{n} k_{ij} |u_j| \right\}$$

Satz 9a. In der Integralgleichung

$$u(s) + \int_B K(s, t) g(t, u(t)) dt = 0 \tag{5.6}$$

sei $g(t, u)$ eine für $t \subset B$ und $|u| \leqq R$ stetige Funktion. Der Kern $K(s, t)$ sei in Bezug auf t absolut über B integrierbar und

$$\int_B |K(s', t) - K(s, t)| \, dt$$

konvergiere mit $|s' - s|$ gegen Null. Es existiere ferner eine für $0 \leqq u \leqq R$ definierte stetige nicht abnehmende Funktion $G(u)$ mit der Eigenschaft

$$|g(t, u)| \leqq G(|u|).$$

Ist schließlich

$$M = \operatorname{Max} \int_B |K(s, t)| \, dt,$$

so soll die Gleichung

$$M\,G(r) - r = 0 \tag{5.7}$$

mindestens eine nicht negative Wurzel $r \leqq R$ haben.

Unter diesen Voraussetzungen hat (5.6) mindestens eine stetige Lösung u, welche ihrem Betrage nach höchstens gleich der kleinsten nicht negativen Wurzel von (5.7) ist.

---

und $r = R$, so ist nach (III), (V) und (IV) für $\sum_{j=1}^{n} r_j = r = R$

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Max} \int_B F_i(s, t, r_1, \ldots, r_n) dt \leqq \sum_{i=1}^{n} \left\{ a + \sum_{j=1}^{n} k_{ij} r_j \right\} M_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} r_j \sum_{i=1}^{n} M_i \left(k_{ij} + \frac{a}{R} \right) = \sum_{j=1}^{n} r_j \sum_{i=1}^{n} M_i (k_{ij} + \varepsilon) < \sum_{j=1}^{n} r_j = r.$$

Die Voraussetzung d_3) ist somit erfüllt. Da das Erfülltsein der übrigen Voraussetzungen von Satz 9 klar ist, besitzt also das System (5.1) in dem in Rede stehenden Spezialfall mindestens eine stetige Lösung. Diese Aussage ist (mit geringfügigen Abweichungen identisch mit einem Satze von M. Golomb (Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen [Math. Zeitschr. **39** (1934), 45—75]. (Bei Herrn Golomb hat die Konstante M_i nicht die durch (III) gegebene Bedeutung sondern bedeutet das Doppelintegral über K_j^2 und an Stelle der Bedingung (II) tritt diejenige, die man aus ihr durch Vertauschung von k_{ij} mit k_{ji} erhält. Auch ohne die genannten Abweichungen läßt sich der Golombsche Satz unschwer aus dem Satz 3b der vorliegenden Arbeit ableiten.)

Beweis. Ist die kleinste nicht negative Wurzel von (5.7) positiv und setzt man $F(s, t, u) = |K(s, t)| G(|u|)$ und identifiziert die in der Voraussetzung d_3 von Satz 9 auftretende Zahl r mit der kleinsten positiven Wurzel von (5.7), so sieht man unmittelbar, daß Satz 9a ein Spezialfall von Satz 9 ist. Ist aber $r = 0$ eine Wurzel von (5.7), so ist die Behauptung trivial, da dann $u \equiv 0$ eine Lösung von (5.6) ist.

(Eingegangen den 25. März 1937.)