COMPOSITIO MATHEMATICA

L. KANTOROVITCH
B. VULICH

# Sur la représentation des opérations linéaires

*Compositio Mathematica*, tome 5 (1938), p. 119-165
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__119_0>

# Sur la représentation des opérations linéaires

par

L. Kantorovitch et B. Vulich

Leningrad

Nous nous proposons d'établir dans cet article les formes générales de quelques opérations linéaires qui transforment un espace arbitraire d'un certain type dans l'un des espaces concrets.

## Introduction.

$1^0$. *L'espace.* Nous désignons dans tout ce travail par les lettres majuscules $X$, $Y$ etc. des espaces et par les lettres minuscules $x$, $y$ etc. des éléments de ces espaces. Introduisons les notations suivantes pour quelques classes d'espaces:

$\mathfrak{S}$ — les espaces semi-ordonnés linéaires réguliers [1]). Outre la convergence ordinaire dans ces espaces nous définirons un autre mode de convergence, à savoir nous dirons que $x_n \to^{(*)} x$, si l'on

---

[1]) Cf. L. Kantorovitch (1), (3). Les nombres entre parenthèses indiquent le numéro du travail dans la liste à la fin de cet article.

L'espace semiordonné linéaire est un ensemble linéaire $X = \{x\}$, où la relation $x_1 > x_2$ est définie pour certaines paires de ses éléments. On suppose cette relation verifiant certaines conditions, parmi lesquelles sont les propriétés ordinaires des inégalités. La notion d'un ensemble borné $E$ et de ses bornes exactes $\sup E$ et $\inf E$ sont définies d'une manière évidente. L'existence de $\sup E$ et de $\inf E$ est donnée par un des axiomes. Si $E$ n'est pas borné supérieurement (inférieurement) nous écrirons $\sup\ E = +\infty$ (resp. $\inf\ E = -\infty$).

Posons $x_+ = \sup(x, 0)$; $x_- = \sup(-x, 0) = x_+ - x$; $|x| = x_+ + x_- = \sup(x, -x)$;

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n = \inf_n\left[\sup(x_n, x_{n+1}, \ldots)\right],$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n = \sup_n\left[\inf(x_n, x_{n+1}, \ldots)\right].$$

Nous dirons que $x = (o)\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ou que $x_n \to^{(o)} x$, si $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = x$.

Un espace semi-ordonné linéaire s'appelle régulier si l'on a encore deux conditions remplies.

I. Soit $\{E_n\}$ une suite d'ensembles bornés telle que $(o)$-lim ($\sup E_n$) existe, fini ou non. Alors on peut extraire de chaque $E_n$ un sous-ensemble fini $E_n'$ tel que $(o)$-lim ($\sup E_n'$) $=$ $(o)$-lim ($\sup E_n$).

Ia. Soit $\sup E_n = +\infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Alors il existe des sous-ensembles finis $E_n' \subset E_n$ tels que $\sup(\sup E_n') = +\infty$.

peut extraire de chaque suite partielle $\{x_{n_i}\}$ une autre suite partielle $\{x_{n_{i_k}}\}$ telle que $x_{n_{i_k}} \xrightarrow{(o)} x$ [2]).

$\mathfrak{B}$ — les espaces normés au sens de M. S. Banach [3]). On désigne par $\|x\|$ la norme de l'élément $x$.

$\mathfrak{K}$ — les espaces normés $(K)$ [4]).

$\mathfrak{K}_1$ — les espaces linéaires qui sont semi-ordonnés réguliers et normés au sens de M. Banach simultanément et dans lesquels la convergence $(*)$ se confond avec la convergence suivant la norme. On voit que $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{B}$.

$\mathfrak{K}_2$ — les espaces linéaires qui sont simultanément semi-ordonnés réguliers et normés et qui satisfont aux conditions suivantes:

1) $|x_1| \leqq |x_2|$ implique $\|x_1\| \leqq \|x_2\|$;

2) si les $x_n$ forment une suite non-décroissante et non-bornée (c. à d. $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq \ldots \xrightarrow{(o)} +\infty$), on a $\|x_n\| \to \infty$.

Nous posons alors

$$\|(x_1, \ldots, x_\nu)\| = \|\sup(|x_1|, \ldots, |x_\nu|)\|. \tag{1}$$

Il est facile de voir que la norme ainsi définie satisfait à tous les axiomes des espaces normés $(K)$.

Montrons que dans les expaces $\mathfrak{K}_2$ la convergence $(o)$ se confond avec la convergence $(K)$, d'où il s'ensuivra immédiatement que la convergence $(*)$ se confond avec la convergence $(B)$. Nous aurons ainsi $\mathfrak{K}_2 \subset \mathfrak{K}_1$. [5])

---

[2]) Cf. L. Kantorovitch (3), (6).

[3]) Cf. le livre de M. S. Banach (1), p. 53. Nous admettons que le contenu de ce livre est connu des lecteurs en ses points principaux.

[4]) Cf. B. Vulich (1), (4).

Un espace linéaire $X = \{x\}$ s'appelle normé $(K)$ si l'on y a la norme définie pour chaque complexe fini de ses éléments $\|(x_1, \ldots, x_n)\|$, et Les conditions suivantes sont remplies.

I. Si $x_i = x_j$, on a

$$\|(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\| = \|(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\|.$$

II. $\|(x)\| = 0$ implique $x = 0$.

III. $\|(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_m')\| \leqq \|(x_1, \ldots, x_n)\| + \|(x_1', \ldots, x_m')\|$.

IV. $\|(x_1^{(1)} + x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(1)} + x_n^{(2)})\| \leqq \|(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})\| + \|(x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})\|$.

V. $\|(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)\| = |\alpha| \cdot \|(x_1, \ldots, x_n)\|$ ($\alpha$ est un nombre réel).

On dit que $x_n \xrightarrow{K} x$, si $\lim\limits_{n, m \to \infty} \|(x_n - x, \ldots, x_m - x)\| = 0$.

[5]) Si l'on suppose que au lieu de la condition 1 on a

$$1') \quad |x_1| < |x_2| \text{ implique } \|x_1\| < \|x_2\|,$$

Soit, en effet, $x_n \to^{(o)} x$. Il existe donc un $x_0 \in X$ tel qu'on a $|x_n - x| < \varepsilon \cdot x_0$ [6]) pour tous les $n$ assez grands. Il en résulte que

$$\|(x_n - x, \ldots, x_{n+p} - x)\| = \|\sup(|x_n - x|, \ldots, |x_{n+p} - x|)\| \leqq \varepsilon \cdot \|x_0\|,$$

c. à d. $x_n \to^K x$.

Réciproquement, soit $x_n \to^K x$. On a alors, si $n$ est suffisamment grand,

$$\lim_{p \to \infty} \|(x_n - x, \ldots, x_{n+p} - x)\| \leqq \varepsilon,$$

donc

$$\lim_{p \to \infty} \|\sup(|x_n - x|, \ldots, |x_{n+p} - x|)\| \leqq \varepsilon.$$

Posons

$$y_n = (o)\text{-}\lim_{p \to \infty} [\sup(|x_n - x|, \ldots, |x_{n+p} - x|)].$$

L'inégalité précédente dit qu'en vertu de la condition 2 $y_n < +\infty$, et comme la convergence $(o)$ implique la convergence $(K)$, on a $\|y_n\| \leqq \varepsilon$. Il est évident que $y_{n+1} \leqq y_n$, par conséquent il existe $y_0 = (o)\text{-}\lim y_n$. On a donc $\|y_n - y_0\| \to 0$, d'où $\|y_0\| = 0$, c. à d. $y_0 = 0$. Il en résulte que $x_n \to^{(o)} x$, c.q.f.d.

Nous désignerons par $\to^{(t)}$ la convergence $(*)$ ou la convergence suivant la norme, selon que l'espace considéré est semi-ordonné ou normé; par $\to^{(o)}$ nous désignerons, comme nous l'avons déjà indiqué, la convergence ordinaire dans les espaces semi-ordonnés, ou la convergence $(K)$ dans les espaces normés $(K)$.

Voici quelques espaces concrets:

1) $l^p$ $(p \geqq 1)$ — l'espace des suites de nombres réels $y = \{\eta^{(i)}\}$ telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\eta^{(i)}|^p < \infty.$$

Cet espace appartient à $\mathfrak{K}_2$, si l'on pose:

$$\|y\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\eta^{(i)}|^p\right]^{\frac{1}{p}},$$

et $y > 0$, si $\eta^{(i)} \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, et si les $\eta^{(i)}$ ne sont pas identiquement égaux à zéro.

---

on obtient des espaces $(B_2)$ considérés par L. Kantorovitch (3).

Il est à remarquer qu'on peut toujours vérifier dans un espace $\mathfrak{K}_1$ la condition 1 en changeant la définition de la norme $\|x\|$ de façon que cela n'altère pas la convergence $(B)$.

[6]) Cf. L. Kantorovitch (1), propos. 32, ou (3), th. 27.

Dans tout ce qui suit, si un élément $y_k$ a l'indice $k$ en dessous, nous désignerons par $\eta_k^{(i)}$ les nombres réels dont la suite $\{\eta_k^{(i)}\}_i$ représente cet élément $y_k$.

Posons, conformément à (1),

$$\|(y_1, \ldots, y_\nu)\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \max\left(|\eta_1^{(i)}|^p, \ldots, |\eta_\nu^{(i)}|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Dans $l^p$ les convergences $(t)$ et $(o)$ ont les significations suivantes:

$y_n \to^{(t)} y$ équivaut à $\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_n^{(i)} - \eta^{(i)}|^p \to_{n\to\infty} 0$;

$y_n \to^{(o)} y$ équivaut à

$$\eta_n^{(i)} \to_{n\to\infty} \eta^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

et $|\eta_n^{(i)}| \leqq \xi^{(i)} \qquad (n, i = 1, 2, \ldots)$, où $\{\xi^{(i)}\} \epsilon\, l^p$.

2) $L^p$ $(p \geqq 1)$ — l'espace des fonctions à $p^{\text{ième}}$ puissance sommable $x(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, c. à d. telles que

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty.$$

Cet espace appartient à $\mathfrak{K}_2$ si l'on pose:

$$\|x\| = \left[\int_0^1 |x(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}},$$

et $x > 0$, si $x(t) \geqq 0$ presque partout et $x(t)$ ne s'annule pas dans un ensemble de mesure positive.

Posons, pour vérifier (1),

$$\|(x_1, \ldots, x_\nu)\| = \left[\int_0^1 \max\left(|x_1(t)|^p, \ldots, |x_\nu(t)|^p\right) dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Voici la signification des convergences $(t)$ et $(o)$ dans $L^p$:

$x_n \to^{(t)} x$ veut dire que les $x_n(t)$ convergent en moyenne à $p^{\text{ième}}$ puissance vers $x(t)$, c.à d. $\int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p dt \to_{n\to\infty} 0$; $x_n \to^{(o)} x$ veut dire que $x_n(t) \to x(t)$ presque partout et que toutes les fonctions $x_n(t)$ sont bornées par une fonction de $L^p$, c. à d.

$$|x_n(t)| \leqq \xi(t) \,\epsilon\, L^p \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

3) $V^p$ $(p \geqq 1)$ — l'espace des fonctions $x(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ telles que $x(0) = 0$ et que

$$(2) \qquad \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{|x(t_i) - x(t_{i-1})|^p}{(t_i - t_{i-1})^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p}} \leqq K < +\infty,$$

quelle que soit la décomposition $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$.

Désignons par

$$\underset{0 \leqq t \leqq 1}{(p)\text{-var}}\, x(t) \qquad ((p)\text{-variation de } x(t))$$

la plus petite constante $K$ dans la formule (2). Si $p = 1$, ce nombre est égal à la variation totale de $x(t)$ et nous le désignerons simplement par var $x(t)$, comme à l'ordinaire.

$V^1$ est donc l'espace des fonctions à variation bornée qui s'annulent au point $t = 0$, et $V^p$ $(p > 1)$ est, d'après le théorème de M. Fr. Riesz, l'espace des intégrales indéfinies de fonctions qui appartiennent à $L^p$ [7]).

$V^p$ $(p \geqq 1)$ appartient aussi à $\mathfrak{K}_2$, si l'on pose:

$$\|x\| = \underset{0 \leqq t \leqq 1}{(p)\text{-var}}\; x(t);$$

$x > 0$, si $x(t_1) \geqq x(t_2)$ quels que soient $t_1 \geqq t_2$ et $x(t) \not\equiv 0$.

D'après (1), nous devons poser

$$\|(x_1, \ldots, x_\nu)\| = \sup \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{|x_{k_i}(t_i) - x_{k_i}(t_{i-1})|^p}{(t_i - t_{i-1})^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p}},$$

où sup doit etre pris non seulement par rapport à toutes les décompositions $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$, mais aussi par rapport à tous les systèmes d'indices $k_1, \ldots, k_m = 1, 2, \ldots, \nu$.

Alors $x_n \rightarrow^{(t)} x$ équivaut dans $V^p$ à

$$(p)\text{-var}\,[x_n(t) - x(t)]_{n\to\infty} \rightarrow 0;$$

$x_n \rightarrow^{(o)} x$ veut dire qu'il existe une fonction non-décroissante $\xi(t) \in V^p$ telle que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a

$$|x_n(t_2) - x(t_2) - [x_n(t_1) - x(t_1)]| \leqq \varepsilon \cdot [\xi(t_2) - \xi(t_1)]$$

pour tout $n$ assez grand et tout $t_2 > t_1$ [8]).

4) $C$ — l'espace des fonctions continues $x(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, où

$$\| x \| = \max |x(t)|.$$

C'est un espace de classe $\mathfrak{B}$.

---

[7]) Cf. Fr. Riesz (1), p. 462.

[8]) Tous nos résultats concernant l'espace $V^p$ peuvent être étendus sans aucune difficulté à l'espace de toutes les fonctions satisfaisant à (2) mais ne s'annulant peut-être pas au point $t = 0$.

5) $\widetilde{M}$ — l'espace des fonctions mesurables et bornées essentiellement [9]) $x(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$. On définit la relation $x > 0$ comme dans $L^p$.

Alors $x_n \xrightarrow{(t)} x$ veut dire que $x_n(t)$ converge „en mesure" vers $x(t)$ et que $|x_n(t)| \leqq K$ presque partout [10]);

$x_n \xrightarrow{(o)} x$ veut dire que $x_n(t) \to x(t)$ presque partout et que $|x_n(t)| \leqq K$ presque partout $(n = 1, 2, \ldots)$.

Il est à remarquer que l'espace $\widetilde{M}$ n'est pas régulier.

6) $M^*$ — l'espace des fonctions mesurables et bornées essentiellement $x(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, où l'on pose

$$\|x\| = \text{vrai max } |x(t)| \text{ [11]).}$$

C'est un espace de classe $\mathfrak{B}$.

2⁰. *Les opérations.* Soit $y = U(x)$ une opération transformant l'espace $X$ dans l'espace $Y$. On peut distinguer les trois classes suivantes des opérations additives et continues (aux différents sens):

1) $\mathcal{H}_t^t$, c. à d. $x_n \xrightarrow{(t)} x$ implique $U(x_n) \xrightarrow{(t)} U(x)$.
2) $\mathcal{H}_0^o$, c. à d. $x_n \xrightarrow{(o)} x$ implique $U(x_n) \xrightarrow{(o)} U(x)$.
3) $\mathcal{H}_t^o$, c. à d. $x_n \xrightarrow{(t)} x$ implique $U(x_n) \xrightarrow{(o)} U(x)$.

Bien entendu, les convergences demandées doivent être définies dans $X$ et $Y$ [12]).

On a $\mathcal{H}_t^t \supset \mathcal{H}_o^o \supset \mathcal{H}_t^o$.

On connaît les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une opération additive appartienne à l'une des trois classes $\mathcal{H}_t^t$, $\mathcal{H}_o^o$ ou $\mathcal{H}_t^o$. Voici ces conditions:

Théorème I. *Pour qu'une opération additive $y = U(x)$ trans-*

---

[9]) c. à d. bornées presque partout.

[10]) On dit que $x_n(t)$ converge en mesure vers $x(t)$ si l'on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$m\mathcal{E}_t(|x_n(t) - x(t)| > \varepsilon) \to_{n \to \infty} 0,$$

où l'on désigne par $m\mathcal{E}$ la mesure lebesguienne de l'ensemble $\mathcal{E}$.

[11]) On entend par vrai max $f(t)$ le plus petit nombre $A$ tel que l'ensemble $\mathcal{E}_t(f(t) > A)$ a la mesure lebesguienne nulle.

[12]) Les opérations $\mathcal{H}_t^t$ dans le cas quand $X$ et $Y$ sont normés, sont des opérations linéaires au sens de M. Banach. Les classes $\mathcal{H}_o^o$ et $\mathcal{H}_t^o$ avaient été étudiées dans une Note de L. Kantorovitch (7), et d'un autre point de vue dans l'article de B. Vulich (1), consacré à la théorie des espaces normés $(K)$.

*formant* $X \in \mathfrak{B}$ *dans* $Y \in \mathfrak{B}$ *soit une* $\mathcal{H}_t^t$, *il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $C > 0$ *tel qu'on ait*

$$\|U(x)\| \leqq C \cdot \|x\|$$

*pour tout* $x \in X$. [13])

Si la constante $C$ est choisie la plus petite possible, on l'appelle *norme* $(B)$ de $U(x)$ et on la désigne par $\|U\|_B$. Nous la désignerons ici par $\|U\|_t^t$, en vue de garder l'uniformité des notations.

Soit $y = U(x)$ une opération additive transformant $X \varepsilon \mathfrak{S}$ dans $Y \varepsilon \mathfrak{S}$. Nous dirons qu'elle est *positive*, si $x \geqq 0$ implique $U(x) \geqq 0$. Nous dirons qu'elle est *régulière*, s'il existe une opération additive et positive $y = U_1(x)$ telle qu'on ait

$$U_1(x) \geqq U(x) \text{ pour tout } x \geqq 0.$$

Théorème II. *Pour qu'une opération additive* $y = U(x)$ *transformant* $X \varepsilon \mathfrak{S}$ *dans* $Y \varepsilon \mathfrak{S}$ *soit une* $\mathcal{H}_o^o$, *il faut et il suffit qu'elle soit régulière.*

L'opération $U(x)$ étant régulière, on voit qu'il existe au moins une opération additive et positive $U_2(x)$ telle qu'on ait

$$|U(x)| \leqq U_2(|x|) \text{ pour tout } x.$$

Appelons chaque opération $U_2(x)$ de cette sorte une *majorante* de $U(x)$. On peut voir qu'il existe la plus petite majorante de $U(x)$, c. à d. une majorante $U^*(x)$ telle qu'on ait

$$|U^*(x)| \leqq U_2(|x|) \text{ pour tout } x,$$

quelle que soit la majorante $U_2(x)$. Nous appelerons cette opération *module* de $U(x)$ et nous la désignerons toujours par l'indice $*$ en dessus [14]).

Chaque fonctionnelle linéaire $F(x)$ (c. à d. une opération linéaire qui transforme $X \in \mathfrak{S}$ dans l'espace des nombres réels) est une opération $\mathcal{H}_o^o$ (même $\mathcal{H}_t^o$). Elle possède donc le module $F^*(x)$.

Posons, pour une opération $\mathcal{H}_o^o$ $y = U(x)$ dont le contre-domaine est situé dans un espace du type $\mathfrak{K}_1$,

---

[13]) Cf. S. Banach (1), p. 54.

[14]) Cf. L. Kantorovitch (5). On peut définir $U^*(x)$ comme

$$U^*(x) = \sup_{|x'| \leqq x} U(x') \text{ quand } x \geqq 0,$$

et $U^*(x) = U^*(x_+) - U^*(x_-)$ quand $x = (x_+) - (x_-)$, où $(x_+)$ et $(x_-)$ sont les parties positive et négative de $x$.

$$\|U\|_o^o = \|U^*\|_t^t,$$

et appelons ce nombre *norme* $\binom{o}{o}$ de $U(x)$.

Théorème III. *Pour qu'une opération additive $y = U(x)$ transformant $X \in \mathfrak{B}$ dans $Y \in \mathfrak{S}$ soit une $\mathcal{H}_t^o$, il faut et il suffit qu'il existe un élément $y_0 \in Y$ tel qu'on ait*

$$|U(x)| \leqq y_0 \|x\|$$

*pour tout $x \in X$.*

On peut définir $y_0$, par exemple, comme

$$y_0 = \sup_{\|x\| \leqq 1} |U(x)| \text{ [15]}. \tag{3}$$

Si $Y \in \mathfrak{K}_1$ et si $y_0$ est défini à l'aide de (3), nous posons

$$\|U\|_t^o = \|y_0\|,$$

et nous appelons ce nombre *norme* $\binom{o}{t}$ de $U(x)$ [16].

Si dans le théorème II $X$ et $Y$ appartiennent à $\mathfrak{K}_2$, ou dans le théorème III $Y \in \mathfrak{K}_2$, les normes $\binom{o}{o}$ et $\binom{o}{t}$ ainsi définies coïncident respectivement avec les normes $(K)$ et forte introduites par B. Vulich [17].

Pour les fonctionnelles linéaires $F(x)$, les normes $\|F\|_t^t$ et $\|F\|_t^o$ existent toujours et coïncident. Nous désignerons leur valeur commune par $\|F\|$ sans indices. Si $X \in \mathfrak{K}_2$, on a $\|F\|_o^o = \|F\|$.

$3^0$. *Les fonctions abstraites.* Quelques-uns de nos théorèmes seront exprimés en termes de fonctions abstraites, c'est pourquoi nous donnerons ici certaines définitions.

Nous considérerons des fonctions d'une variable réelle $f(s)$, $0 \leqq s \leqq 1$, dont les valeurs appartiennent à l'espace $\overline{X}$ conjugué

---

[15]) Cf. L. Kantorovitch (4). Le théorème III y est donné pour le cas plus général $Y \in \mathfrak{S}$.

[16]) Il est à remarquer que si $y_0$ est défini au moyen de (3) il est le plus petit possible de tous les éléments $y_0$ qui satisfont à la condition du théorème III. Nous avons donc, dans le cas lorsque $Y \in \mathfrak{K}_2$, pour un $y_0$ arbitraire satisfaisant à cette condition,

$$\|U\|_t^o \leqq \|y_0\|.$$

[17]) Cf. B. Vulich (1), § 8, ou (2) Introduction

avec un espace normé $\overline{X}$ [18]), c. à d., que pour chaque $s$ fixe, $f(s)$ représente une fonctionnelle linéaire dans $X$. Il est plus commode d'écrire la variable indépendante en-dessous de $f$, donc nous nous servirons de la notation $f_s$. Par $f_s(x)$ nous désignerons la fonction réelle de $s$ qu'on obtient lorsqu'on calcule la valeur de $f_s$ pour un élément fixe $x \epsilon X$.

Nous dirons que la fonction $f_s$ est *faiblement mesurable* (*ou faiblement absolument continue ou a sa* $(p)$*-variation faible bornée*), si la fonction réelle $f_s(x)$ est mesurable (ou absolument continue ou a sa $(p)$-variation bornée), quel que soit $x \epsilon X$.

Nous dirons que $f_s$ est *fortement absolument continue*, s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^{m} |s_i' - s_i| < \delta \text{ implique } \sum_{i=1}^{m} \|f_{s_i'} - f_{s_i}\| < \varepsilon,$$

pour chaque système d'intervalles $\{(s_i, s_i')\}$ n'empiétant l'un sur l'autre.

Nous dirons que $f_s$ *a sa* $(p)$*-variation forte bornée*, si l'on a, pour toute décomposition $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$,

$$\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\|f_{s_i} - f_{s_{i-1}}\|^p}{(s_i - s_{i-1})^{p-1}}\right]^{\frac{1}{p}} \leqq K < \infty. \tag{4}$$

Nous désignerons par $(p)$-var $f_s$ la plus petite constante $K$ dans la formule (4), comme dans le cas de fonctions réelles. Nous omettrons la lettre $p$ dans le cas où $p = 1$.

Nous dirons que $f_s$ satisfait *à la condition de Lipschitz*, s'il existe une constante $C$ telle qu'on ait

$$\|f_{s_1} - f_{s_2}\| \leqq C\,|s_1 - s_2|$$

quels que soient $s_1$ et $s_2$ [19]).

---

[18]) On entend par espace conjugué avec un espace normé $X$ et on désigne par $\overline{X}$ l'espace des fonctionnelles linéaires définis dans $X$. C'est aussi un espace normé si l'on y définit la norme d'un élément $f$ comme sa norme $\|f\|$ au sens de norme d'une fonctionnelle linéaire. Cf. S. Banach (1), p. 188.

[19]) Quelques-unes de ces définitions avaient été déjà introduites dans les travaux de divers auteurs, par exemple: S. Bochner (1), Garrett Birkhoff (1), I. Gelfand (1), (2), N. Dunford (1).

Il est à remarquer que M. Gelfand avait démontré (1) que si l'espace $\overline{X}$ est séparable (et dans ce cas $X$ est nécessairement aussi séparable) la notion de mesurabilité faible est équivalente à la notion de mesurabilité introduite par M. Bochner (1).

$4^0$. *Les résultats.* Les formes générales des opérations linéaires avaient été déjà étudiées dans les travaux de MM. D. Hilbert (1), E. Hellinger et O. Toeplitz (1), A. Fouillade (1), G. Fichtenholz (1), G. Lorentz (1), I. Gelfand (1), L. W. Cohen (1), N. Dunford (2), G. Fichtenholz et L. Kantorovitch (1), et dans quelques-uns de nos articles (L. Kantorovitch (2), (8), B. Vulich (2), (3)). Nous ne nous servons pas de ces résultats, mais quelques-uns d'entre eux peuvent etre déduits de nos théorèmes plus généraux.

Nous établissons ici les formes générales des opérations $\mathcal{H}_t^t$, $\mathcal{H}_o^o$ et $\mathcal{H}_t^o$ qui transforment un espace arbitraire d'un des types $\mathfrak{B}$ ou $\mathfrak{K}_2$ dans l'espace $l^p$, $V^p$, $L^p$, $\widetilde{M}$ ou $M^*$. Nos résultats sont exprimés au moyen de fonctionnelles linéaires. Ainsi, le problème de l'établissement des formes générales des opérations linéaires peut être réduit dans les cas étudiés ici à un problème beaucoup moins difficile, celui de l'établissement des formes générales des fonctionnelles linéaires. Mais ce problème est déjà résolu dans beaucoup de cas intéressants.

On peut déduire de nos théorèmes généraux des théorèmes particuliers, si l'on suppose le second espace également concret. Quelques-uns d'entre eux sont donnés dans cet article.

## § 1.

*Le contredomaine d'operations est situé dans $l^p$.*

$5^0$. Théorème 1. *La forme générale d'une opération $\mathcal{H}_t^t$ $y = U(x)$ transformant $X \in \mathfrak{B}$ dans $l^p$ est donnée par la formule*

$$y = U(x) = \{F_i(x)\}, \tag{1}$$

*où les $F_i(x)$ sont des fonctionnelles linéaires définies dans $X$, qui satisfont à la condition suivante:*

$$\lim_{n \to \infty} \left[ \sup_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^{n} |F_i(x)|^p \right] = K < \infty. \tag{2}$$

*D'ailleurs, on a $\|U\|_t^t = K^{\frac{1}{p}}$.*

*Démonstration.* Chacune des coordonnées de $y$ étant une fonctionnelle linéaire de $x$, on voit que l'opération $U(x)$ est représentable sous la forme (1). Il nous reste à établir (2).

Soit $y = U(x)$ une $\mathcal{H}_t^t$. On a alors, en vertu du th. I, $\|U(x)\| \leqq \|U\|_t^t$, pour tout $x$ dont la norme est égale à 1. Par conséquent, on a, pour $\|x\| = 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} |F_i(x)|^p \leqq \sum_{i=1}^{\infty} |F_i(x)|^p \leqq (\|U\|_t^t)^p,$$

d'où

(3) $$K \leqq (\|U\|_t^t)^p.$$

Réciproquement, si $U(x)$ est une opération (1) satisfaisant à (2), on a pour $\|x\| = 1$,

$$\|U(x)\| = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |F_i(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} |F_i(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqq K^{\frac{1}{p}},$$

d'où il s'ensuit que $\|U(x)\| \leqq K^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|$ pour tout $x$. En tenant compte de (3), nous voyons que $\|U\|_t^t = K^{\frac{1}{p}}$, c.q.f.d.

Théorème 2. *La forme générale d'une opération $\mathcal{H}_o^o$ $y = U(x)$ transformant $X \in \mathfrak{R}_2$ dans $l^p$ est donnée par la formule* (1), *où les fonctionnelles linéaires $F_i(x)$ satisfont à la condition*

(4) $$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^{n} |F_i^*(x)|^p\right] = K < \infty.$$

*D'ailleurs, on a* $\|U\|_o^o = K^{\frac{1}{p}}$.

*Démonstration.* Chacune des opérations $\mathcal{H}_o^o$ $U(x)$ étant régulière, elle a le module

$$U^*(x) = \{\overline{F}_i(x)\}$$

qui est aussi une $\mathcal{H}_o^o$ et a fortiori une $\mathcal{H}_t^t$. On a donc, en vertu du th. 1,

$$\sup_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^{n} |\overline{F}_i(x)|^p \leqq (\|U^*\|_t^t)^p < \infty$$

pour tout $n$.

Il est évident que les $\overline{F}_i$ sont des majorantes pour les $F_i$ correspondantes. Par conséquent, on a

$$|F_i^*(x)| \leqq \overline{F}_i(|x|)$$

pour tout $x$.

Il en résulte que (4) doit être remplie et que

(5) $$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^{n} |F_i^*(x)|^p\right] \leqq (\|U\|_o^o)^p.$$

Réciproquement, soit donnée une opération (1) satisfaisant à (4). Posons

$$U_1(x) = \{F_i^*(x)\}.$$

Grace à (4), $U_1(x)$ existe pour tout $x$ et elle est additive et positive (par conséquent, elle est une $\mathcal{H}_o^o$). On a, pour tout $x$,

$$|F_i(x)| \leqq F_i^*(|x|) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

par conséquent, $|U(x)| \leqq U_1(x) \quad (x \geqq 0)$.

En vertu du th. II, $U(x)$ est une $\mathcal{H}_o^o$, et

$$\|U\|_o^o \leqq \|U_1\|_t^t = K^{\frac{1}{p}},$$

ce qui donne avec (5) $\|U\|_o^o = K^{\frac{1}{p}}$, c.q.f.d. [20]).

Théorème 3. *La forme générale d'une opération $\mathcal{H}_t^o$ $y = U(x)$, transformant $X \in \mathfrak{B}$ dans $l^p$ est donnée par la formule* (1), *où les fonctionnelles linéaires $F_i(x)$ satisfont à la condition*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|F_i\|^p = K < \infty. \tag{6}$$

*D'ailleurs, on a* $\|U\|_t^o = K^{\frac{1}{p}}$ [21]).

*Démonstration.* En effet, on a, pour une opération $\mathcal{H}_t^o$ $y = U(x)$,

$$y_0 = \sup_{\|x\|=1} |U(x)| < \infty. \tag{7}$$

$y_0$ étant un élément de $l^p$, il est de la forme

$$y_0 = \{\eta_0^{(i)}\}, \text{ où } \sum_{i=1}^{\infty} (\eta_0^{(i)})^p = (\|U\|_t^o)^p < \infty.$$

La relation (7) veut dire qu'on a

$$|F_i(x)| \leqq \eta_0^{(i)} \text{ pour tout } \|x\| = 1.$$

On a donc $\|F_i\| \leqq \eta_0^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots)$ et

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \|F_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqq \|U\|_t^o. \tag{8}$$

D'autre part, si (6) est remplie, on a

$$y_0' = \{\|F_i\|\} \in l^p \text{ et } \|y_o'\| = K^{\frac{1}{p}}.$$

---

[20]) La relation $\|U^*\|_t^t \leqq \|U_1\|_t^t$ est évidente pour toute majorante $U_1(x)$ de $U(x)$, si le domaine et le contredomaine sont situés dans des espaces $\mathfrak{K}_2$.
Nous avons démontré entre autres que $U^*(x) = \{F_i^*(x)\}$.

[21]) Ce théorème avait été déjà énoncé dans le travail de B. Vulich (3).

Par conséquent,

$$y' = \sup_{\|x\|=1} |U(x)| \leqq y_0',$$

d'où il résulte que $U(x)$ est une $H_t^o$, et que $\|y'\| \leqq K^{\frac{1}{p}}$, ce qui donne avec (8)

$$\|U\|_t^o = K^{\frac{1}{p}}, \quad \text{c.q.f.d.}$$

**6⁰.** Nous donnerons maintenant quelques exemples. Considérons les opérations $H_t^t$ $y = U(x)$ qui transforment $L^2$ dans $l^2$. La forme générale d'une telle opération est

$$(9) \qquad y = U(x) = \left\{ \int_0^1 x(t) \cdot \alpha_i(t) dt \right\},$$

où $\alpha_i(t) \in L^2 (i = 1, 2, \ldots)$ [22]. Nous allons déduire de (2) les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les $\alpha_i(t)$.

Introduisons un système orthogonal et normal $\{\varphi_k(t)\}$ de fonctions de $L^2$ tel que chaque $\alpha_i(t)$ puisse être représentée comme une somme finie

$$\alpha_i(t) = \sum_{k=1}^{i} c_{ik} \varphi_k(t),$$

(c. à d. nous orthogonalisons le système $\{\alpha_i(t)\}$).

Posons

$$d_k = \int_0^1 x(t) \cdot \varphi_k(t) dt,$$

et

$$c_{ik} = 0 \text{ pour } k > i.$$

La condition (2) dit que

$$\sup_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^{n} \left[ \int_0^1 x(t) \cdot \alpha_i(t)\, dt \right]^2$$

doit être bornée indépendamment de $n$. Or, on a évidemment

$$\sum_{i=1}^{n} \left[ \int_0^1 x(t) \cdot \alpha_i(t) dt \right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{i} c_{ik} d_k \right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} c_{ik} d_k c_{il} d_l = \sum_{k,l=1}^{n} d_k d_l \sum_{i=1}^{n} c_{ik} c_{il} = \sum_{k,l=1}^{n} \mu_{kl} d_k d_l,$$

---

[22]) On doit à M. M. Fréchet (1) la forme générale d'une fonctionnelle linéaire définie dans $(L^2)$. Cf. aussi S. Banach (1), p. 64.

où

$$\mu_{kl} = \sum_{i=1}^{n} c_{ik} c_{il}.$$

Il est évident que, pour que cette dernière expression soit bornée, quel que soit $x(t)$ avec $\|x\| = 1$ et $n$, il faut et il suffit qu'on ait

$$\sup_{\sum_{k=1}^{n} d_k^2 = 1} \sum_{k, l=1}^{n} \mu_{kl} d_k d_l \leqq K$$

pour tout $n$.

Toutes les formes quadratiques

$$\sum_{k, l=1}^{n} \mu_{kl} d_k d_l$$

étant positives, la condition précédente est équivalente au fait que *leurs nombres caractéristiques doivent être bornés dans leur ensemble.*

D'ailleurs, on voit que la norme $(B)$ de $U(x)$ est égale à la racine carrée de la borne supérieure de tous ces nombres caractéristiques.

*Remarque.* Chaque opération $\mathcal{H}_o^o$ qui transforme $L^2$ dans $l^2$ peut être représentée de même sous la forme de (9). Nous pouvons déduire du th. 2 quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'opération (9) soit une $\mathcal{H}_o^o$. En effet, le raisonnement dans l'exemple qui précède donne la réponse à cette question, mais il faut l'appliquer à l'opération module

$$y = U^*(x) = \left\{ \int_0^1 x(t) \cdot |a_i(t)| \cdot dt \right\}.$$

Donnons encore quelques applications des théorèmes démontrés.

Théorème 4. *La forme générale d'une opération $\mathcal{H}_t^o$ $y = U(x)$ qui transforme $l^r$ $(r > 1)$ dans $l^p$ $(p \geqq 1)$ est donnée par la formule*

$$U(x) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^{(l)} \xi^{(i)} \right\}_l \textit{ pour } x = \{\xi^{(i)}\}, \tag{10}$$

*où*

$$(\|U\|_t^o)^p = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k^{(l)}|^{\frac{r}{r-1}} \right]^{\frac{p(r-1)}{r}} < \infty \text{ [23]}). \tag{11}$$

*Démonstration.* En effet, en vertu du théorème sur la forme

[23]) Cf. L. Kantorovitch (8), th. 6; cf. aussi B. Vulich (1), th. 16.

générale des fonctionnelles linéaires dans $l^r$ [24]) et d'après le th. 3, on peut représenter chaque opération $\mathcal{H}_l^0$ sous la forme (10), où (11) doit être remplie. Réciproquement, si (11) est vérifiée, chacune des sommes dans la formule (10) est une fonctionnelle linéaire dans $l^r$, et la suite de ces fonctionnelles satisfait à la condition du th. 3.

THÉORÈME 5. *La forme générale d'une opération* $\mathcal{H}_l^o$ $y = U(x)$ *qui transforme* $C$ *dans* $l^p$ $(p \geqq 1)$ *est donnée par la formule*

$$y = U(x) = \left\{ \int_0^1 x(t) \cdot dg_n(t) \right\},$$

*où*

$$\|U\|_l^o = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{var} g_n(t)]^p \right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

La démonstration est évidente, d'après le th. 3.

## § 2.

### *Le contredomaine d'opérations est situé dans $V^p$.*

7⁰. THÉORÈME 6. *La forme générale d'une opération* $\mathcal{H}_l^l$ $y = U(x)$ *transformant un espace complet* [25]) $X \in \mathfrak{B}$ *dans* $V^p$ *est donnée par la formule*

$$(1) \qquad y(s) = U(x) = f_s(x) \quad (\textit{avec } f_0 = 0),$$

*où* $f_s$ *est une fonction abstraite de* $s$ $(0 \leqq s \leqq 1)$, *avec les valeurs appartenant a* $\overline{X}$, *qui a sa* $(p)$*-variation faible bornée* [26]).

*Démonstration.* La nécessité de notre condition est évidente. Il nous reste à démontrer que, si cette condition est remplie, l'opération (1) est une $\mathcal{H}_l^l$. Le fait qu'elle est additive et que son contredomaine est situé dans $V^p$ résulte immédiatement de la

---

[24]) On peut trouver la forme générale des fonctionnelles linéaires dans $(l^r)$ dans le livre de M. BANACH (1), p. 68.

[25]) Dans tout ce travail nous entendons par un espace complet un espace tel que la relation $\|x_m - x_n\| \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ implique $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour un certain $x$. Il est à remarquer que si $X$ est un espace du type $\mathfrak{K}_2$, il est nécessairement complet. Cf. L. KANTOROVITCH (3), § 8.

[26]) Ce théorème avait été démontré dans le cas où $p = 1$ par M. GELFAND (1). Nous le démontrons d'une manière semblable.

condition du théorème. Nous allons en déduire que $\|U(x)\|$ est borné dans la sphère $\|x\| < 1$, ce qui équivaut au fait que $\|U(x)\| \leqq C \cdot \|x\|$ pour tout $x$.

Supposons par impossible que $\|U(x)\|$ prenne des valeurs arbitrairement grandes dans la sphère $\|x\| < 1$. Alors $\|U(x)\|$ n'est borné dans aucune sphère.

Prenons $x_1$ tel qu'on a $\|U(x_1)\| > 1$. Par définition de $\|U(x_1)\|$, il existe une décomposition $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ telle qu'on a

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{|f_{s_i}(x_1) - f_{s_{i-1}}(x_1)|^p}{(s_i - s_{i-1})^{p-1}} > 1.$$

Toutes les fonctionnelles $f_{s_i}$ étant continues, il existe une sphère $S_1 = S(x_1, \varrho_1)$ de centre $x_1$ et de rayon $\varrho_1$, en tout point de laquelle on a

$$\|U(x)\| \geqq \sum_{i=1}^{m} \frac{|f_{s_i}(x) - f_{s_{i-1}}(x)|^p}{(s_i - s_{i-1})^{p-1}} > 1.$$

On peut trouver dans cette sphère un point $x_2$ où l'on a $\|U(x_2)\| > 2$.

D'une manière analogue on peut l'entourer d'une sphère $S_2 = S(x_2, \varrho_2) \subset S_1$, en tout point de laquelle on a $\|U(x)\| > 2$. Ainsi, on peut indiquer une suite de sphères

$$S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_n \supset S_{n+1} \supset \ldots$$

satisfaisant à la condition $\|U(x)\| > n$ pour $x \in S_n$. Or, l'espace $X$ étant complet, on peut s'arranger de façon que toutes ces sphères aient un point commun $x_0$. On a donc en ce point $\|U(x_0)\| = \infty$, ce qui est impossible. Cette contradiction prouve donc notre théorème.

Soit $f_s$ une fonction abstraite de $s$ avec les valeurs appartenant à $\overline{X}$. Introduisons la fonction $\varphi_s$ comme il suit:

$$(2) \qquad \varphi_s(x) = \sup_{0=s_0<s_1<\ldots<s_m=s} \sum_{i=1}^{m} (f_{s_i} - f_{s_{i-1}})^*(x) \qquad \text{pour } x \geqq 0,$$

et

$$\varphi_s(x) = \varphi_s(x_+) - \varphi_s(x_-) \qquad \text{pour } x = (x_+) - (x_-).$$

Montrons d'abord que, si $\varphi_s(x)$ est finie pour un $s$ fixe et pour tout $x$, elle est une fonctionnelle linéaire de $x$. Cette fonctionnelle étant positive par définition, il suffit de montrer qu'elle est additive. Il en résultera, grâce au Th. II, que $\varphi_s(x)$ est continue, donc linéaire [27]).

Soit $x = x_1 + x_2$, où $x_1, x_2 \geqq 0$. Alors

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} (f_{s_i'} - f_{s_{i-1}'})^* (x_1) > \varphi_s(x_1) - \varepsilon, \\
&\sum_{j=1}^{n} (f_{s_j''} - f_{s_{j-1}''})^* (x_2) > \varphi_s(x_2) - \varepsilon.
\end{aligned}
$$

En superposant ces deux systèmes d'intervalles, nous obtenons une décomposition plus petite, pour laquelle les inégalités (3) sont vérifiées à plus forte raison. Nous avons ainsi $\varphi_s(x_1 + x_2) \geqq \varphi_s(x_1) + \varphi_s(x_2)$. Mais l'inégalité de sens inverse est évidente, d'où il s'ensuit l'additivité de $\varphi_s(x)$.

Théorème 7. *La forme générale d'une opération* $\mathfrak{H}_o^o$ $y = U(x)$ *transformant un espace* $X \in \mathfrak{K}_2$ *dans* $V^p$ *est donnée par la formule* (1), *où les fonctionnelles linéaires* $f_s$ *sont telles que la fonction abstraite* (2) $\varphi_s$ *a sa* $(p)$*-variation faible bornée.*

*Démonstration.* La démonstration est semblable à celle du th. 2, c'est pourquoi nous nous contenterons de l'esquisser.

Soit $y = U(x)$ une $\mathfrak{H}_o^o$. Alors il existe $U^*(x) = \bar{f}_s(x)$. On a donc $|f_{s_1}(x) - f_{s_2}(x)| \leqq \bar{f}_{s_1}(|x|) - \bar{f}_{s_2}(|x|)$, si $s_1 > s_2$. Il en résulte que

$$
|(f_{s_1} - f_{s_2})^*(x)| \leqq \bar{f}_{s_1}(|x|) - \bar{f}_{s_2}(|x|) \text{ pour tout } x.
$$

$\bar{f}_s$ ayant sa $(p)$-variation faible bornée, il en est de même de $\varphi_s$.

Réciproquement, si la condition du théorème est remplie, posons $U_1(x) = \varphi_s(x)$. $U_1(x)$ est additive et positive, ses valeurs appartiennent à $V^p$, et, grâce à l'inégalité

$$
|f_{s_1}(x) - f_{s_2}(x)| \leqq (f_{s_1} - f_{s_2})^* (|x|) \leqq (\varphi_{s_1} - \varphi_{s_2})(|x|),
$$

elle est une majorante de $U(x)$. Donc, $U(x)$ est bien une $\mathfrak{H}_o^o$, c.q.f.d.

*Remarque.* Il résulte de notre raisonnement que $U^*(x) = \varphi_s(x)$.

Théorème 8. *La forme générale d'une opération* $\mathfrak{H}_l^o$ $y = U(x)$

---

[27]) On peut définir la fonction $\varphi_s$ comme la variation abstraite de la fonction $_s$, c. à d.

$$
\varphi_s = \sup_{0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = s} \sum_{i=1}^{m} |f_{s_i} - f_{s_{i-1}}|.
$$

où le module et le symbole sup doivent être compris au sens de l'espace semi-ordonné des fonctionnelles linéaires $\bar{X}$. Cf. L. Kantorovitch (5), th. 3.

*transformant* $X \in \mathfrak{B}$ dans $V^p$ *est donnée par la formule* (1), *où la fonction abstraite* $f_s$ *avec les valeurs appartenant à* $\overline{X}$ *a la* $(p)$-*variation forte bornée.*

*D'ailleurs, on a*

$$\|U\|_t^o = \underset{0 \leqq s \leqq 1}{(p)\text{-var}}\, f_s. \tag{4}$$

*Démonstration.* Soit $y = U(x)$ une $\mathcal{H}_t^o$ transformant $X$ dans $V^p$. Evidemment, on peut la représenter sous la forme (1), où $f_s \in \overline{X}$ pour tout $s$. Or, $U(x)$ étant une $\mathcal{H}_t^o$, il existe une fonction non-décroissante $y_0(s) \in V^p$ telle qu'on a

$$|U(x)| \leqq y_0 \cdot \|x\| \tag{5}$$

et que $\|U\|_t^o = \|y_0\|$ (la norme de $y_0$ est comprise au sens de l'espace $V^p$). Cela veut dire qu'on a

$$|f_{s_1}(x) - f_{s_2}(x)| \leqq [y_0(s_1) - y_0(s_2)] \cdot \|x\|$$

pour tout $x$ et tout couple de nombres $s_1 > s_2$.

Il en résulte qu'on a

$$\sup_{0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1} \sum_{i=1}^{m} \frac{\|f_{s_i} - f_{s_{i-1}}\|^p}{(s_i - s_{i-1})^{p-1}} \leqq \|y_0\|^p = (\|U\|_t^o)^p,$$

c. à d. $f_s$ a sa $(p)$-variation forte bornée.

Réciproquement, soit $U(x)$ une opération satisfaisant aux conditions du théorème.

Posons

$$y_0(s) = \sup_{0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = s} \sum_{i=1}^{m} \|f_{s_i} - f_{s_{i-1}}\|.$$

Il est facile de voir que la fonction réelle $y_0(s)$ a sa $(p)$-variation bornée dans $(0, 1)$, par conséquent, $y_0(s) \in V^p$. D'ailleurs, on a précisément

$$(p)\text{-var } y_0(s) = (p)\text{-var } f_s.$$

Par définition de $y_0$, la relation (5) se trouve remplie pour tout $x$, ce qui prouve que $U(x)$ est bien une $\mathcal{H}_t^0$ et, en même temps, vérifie la relation (4), c.q.f.d.

**8⁰.** Faisons quelques remarques en vue des théorèmes du paragraphe suivant. Introduisons encore un espace concret, à savoir désignons par $A$ le sous-espace de $V^1$ qui comprend toutes les fonctions absolument continues. Il est facile de voir que $A$, avec la même définition du signe $>$ et de la norme du complexe, forme aussi un espace de classe $\mathfrak{K}_2$.

Remarquons que, comme pour les fonctions réelles, chaque fonction faiblement (resp. fortement) absolument continue a sa variation faible ($p=1$) (resp. forte) bornée. Cela résulte immédiatement des définitions de ces fonctions.

Il est facile maintenant de voir que les formes générales des opérations de toutes les trois classes $\mathfrak{H}_t^t$, $\mathfrak{H}_o^o$ et $\mathfrak{H}_t^o$ transformant un espace $X$ dans $A$ sont données par les théorèmes 6—8, si l'on y remplace les mots „a sa ($p$)-variation faible (resp. forte) bornée" par „est faiblement (resp. fortement) absolument continue".

En effet, pour les $\mathfrak{H}_t^t$, c'est une conséquence immédiate du th. 6. Quant aux deux autres cas, ils exigent quelques raisonnements complémentaires; on doit établir que chaque opération $\mathfrak{H}_o^o$ (resp. $\mathfrak{H}_t^o$) transformant $X$ dans $A$ peut être représentée sous la forme (1) de façon que la fonction (2) $\varphi_s$ soit faiblement absolument continue (resp. $f_s$ soit fortement absolument continue). Mais cela peut être établi d'une façon semblable à la démonstration des théorèmes 7—8, grâce au fait que l'espace $A$ est aussi un $\mathfrak{S}$ (même $\mathfrak{K}_2$).

## § 3.

### *Le contredomaine d'opérations est situé dans* $(L^p)$.

$9^0$. Pour obtenir les résultats de ce paragraphe, il faut remarquer qu'on peut établir une correspondance biunivoque et bicontinue ($t$) et ($o$)[28]) entre l'espace $(V^p)$ et l'espace $(L^p)$ $(p>1)$ et entre $(A)$ et $(L)$.

Voici cette correspondance:

$$z(s)=\int_0^s y(\sigma)\cdot d\sigma \qquad \begin{pmatrix} y\in L^p \\ z\in V^p \end{pmatrix}. \tag{1}$$

D'ailleurs, on a, pour chaque complexe $(y_1,\ldots,y_\nu)$ d'éléments de $(L^p)$

$$\left\|(z_1,\ldots,z_\nu)\right\|_{V^p}=\left\|(y_1,\ldots,y_\nu)\right\|_{L^p}, \tag{2}$$

où $z_i$ correspond à $y_i$ suivant (1), et où les normes sont prises au sens des espaces indiqués en dessous [29]).

---

[28]) Nous entendons par correspondance bicontinue ($t$) et bicontinue ($o$) une correspondance biunivoque $y=f(x)$, telle que $x_n\to^{(t)}x$ implique $f(x_n)\to^{(t)}f(x)$, $x_n\to^{(o)}x$ implique $f(x_n)\to^{(o)}f(x)$ et vice-versa.

[29]) En effet, désignons par $V(y)$ l'élément $z$ qui correspond à $y$ suivant (1). On voit sans peine que $y_1<y_2$ implique $V(y_1)<V(y_2)$ et vice-versa. On a donc, pour chaque ensemble d'éléments $y_\xi$

Ceci posé, nous voyons que, si nous avons obtenu la forme générale des opérations d'une certaine classe $\mathcal{H}_t^t$, $\mathcal{H}_o^o$ ou $\mathcal{H}_t^o$ transformant un espace $X$ dans $(V^p)$ $(p>1)$ ou $(A)$

$$z = z(s) = U(x),$$

$U(x)$ satisfaisant à certaines conditions, nous pouvons affirmer que la relation

$$y(s) = \frac{d}{ds} U(x),$$

où $U(x)$ satisfait aux mêmes conditions, donne la forme générale des opérations de la même classe transformant $X$ dans $(L^p)$ $(p > 1$ ou $p = 1)$. Cela résulte immédiatement des propriétés de la correspondance (1).

Ainsi, nous arrivons aux théorèmes suivants:

Théorème 9. *La forme générale d'une opération* $\mathcal{H}_t^t$ $y = U(x)$ *transformant un espace complet* $X \epsilon \mathfrak{B}$ *dans* $(L^p)$ $(p \geqq 1)$ *est donnée par la formule*

$$y(s) = U(x) = \frac{d}{ds}\Big[f_s(x)\Big] \quad (avec\ f_0 = 0), \tag{5}$$

*où* $f_s$ *a sa* $(p)$*-variation faible bornée* $(p>1)$ *ou est faiblement absolument continue* $(p = 1)$, *dont les valeurs appartiennent à* $\overline{X}$.

Théorème 10. *La forme générale d'une opération* $\mathcal{H}_o^o\, y = U(x)$ *transformant un espace* $X \epsilon \mathfrak{K}_2$ *dans* $(L^p)$ $(p \geqq 1)$ *est donnée par la formule* (5) *où les fonctionnelles linéaires* $f_s$ *sont telles que la fonction abstraite* (2) (§ 2) $\varphi_s$ *ait sa* $(p)$*-variation faible bornée* $(p > 1)$ *ou soit faiblement absolument continue* $(p=1)$.

---

$$\sup_\xi\{V(y_\xi)\} = V(\sup_\xi\{y_\xi\}), \quad \inf_\xi\{V(y_\xi)\} = V(\inf_\xi\{y_\xi\}). \tag{3}$$

Par conséquent, les relations

$$y_n \to^{(t)} y \quad \text{et} \quad V(y_n) \to^{(t)} V(y),$$
$$y_n \to^{(o)} y \quad \text{et} \quad V(y_n) \to^{(o)} V(y)$$

sont deux à deux équivalentes. Ceci dit, on voit que la correspondance (1) est un isomorphisme complet entre les espaces semi-ordonnés $(V^p)$ et $(L^p)$ $(p>1)$, ou $(A)$ et $(L)$.

La relation (2) résulte immédiatement de (3) et (1) (voir Introduction, (1°), la définition de norme dans des espaces $\mathfrak{K}_2$) et de l'égalité connue de M. Fr. Riesz (1)

$$\left[\int_0^1 |y(t)|^p\, dt\right]^{\frac{1}{p}} = (p)\text{-}\underset{0 \leqq t \leqq 1}{\text{var}}\ z(t)\,. \tag{4}$$

Cf. L. Kantorovitch, (3), § 11.

THÉORÈME 11. *La forme générale d'une opération* $\mathcal{H}_t^o$ $y = U(x)$ *transformant* $X \in \mathfrak{B}$ *dans* $(L^p)$ $(p \geqq 1)$ *est donnée par la formule* (5), *où la fonction abstraite* $f_s$ *dont les valeurs appartiennent à* $\overline{X}$ *a sa* $(p)$*-variation forte bornée* $(p > 1)$ *ou est fortement absolument continue* $(p = 1)$.

*D'ailleurs, on a* $\|U\|_t^o = (p)\text{-var } f_s$.

En effet, tous ces théorèmes resultent des théorèmes analogues du paragraphe qui précède et des remarques faites à la fin de celui-là. Le fait que la norme $\left(\frac{o}{t}\right)$ des opérations $\mathcal{H}_t^o$ est égale à $(p)$-var $f_s$ est une conséquence immédiate de l'égalité (4) et de l'isomorphisme entre les espaces $(L^p)$ et $(V^p)$ (ou $(A)$) établi ci-dessus [30]).

**10⁰.** Considérons quelques applications des théorèmes établis.

THÉORÈME 12. *Les classes* $\mathcal{H}_t^t$ *et* $\mathcal{H}_o^o$ *des opérations qui transforment* $(L)$ *dans* $(L^p)$ $(p \geqq 1)$ *se confondent et la forme générale d'une opération de ces deux classes est donnée par la formule*

$$y(s) = U(x) = \frac{d}{ds}\int_0^1 K(s, t) \cdot x(t)dt, \tag{6}$$

*où*

*a*) $K(s, t)$ *est mesurable dans le carré* $0 \leqq s, t \leqq 1$;

*b*) $K(0, t) \equiv 0$;

*c*) vrai $\max\limits_t \left[(p)\text{-}\underset{0 \leqq s \leqq 1}{\text{var}}\, K(s, t)\right] = C < \infty$;

*d*) *l'intégrale*

$$\int_0^\tau K(s, t)dt$$

*représente une fonction absolument continue de* $s$ *pour tout* $\tau$, $0 \leqq \tau \leqq 1$.

*D'ailleurs, on peut choisir* $K(s, t)$ *de façon qu'on ait*

$$\|U\|_t^t = \|U\|_o^o = \text{vrai } \max_t \left[(p)\text{-var}_s\, K(s, t)\right] \,^{31}). \tag{7}$$

---

[30]) Voir l'annotation [29]).

[31]) Ce théorème, dans le cas où $p = 1$, et seulement pour les opérations $\mathcal{H}_t^t$, a été déjà énoncé par M. GELFAND (1). La forme générale des opérations $\mathcal{H}_t^t$ et $\mathcal{H}_o^o$ et leur coïncidence (de même pour $p = 1$) ont été établis d'un autre point de vue par B. VULICH (2). Les conditions y différent un peu des nôtres. Les opérations $\mathcal{H}_t^t$, dans le cas où $p > 1$, ont été étudiées récemment par M. N. DUNFORD (2). Il a représenté ces opérations sous une autre forme.

*Démonstration.* Nous divisons la démonstration en plusieurs points.

1. *Les classes $\mathcal{H}_t^t$ et $\mathcal{H}_o^o$ des opérations qui transforment $(L)$ dans un espace arbitraire du type $\mathfrak{K}_2$ se confondent, et l'on a pour une telle opération $\|U\|_t^t = \|U\|_o^o$.*

Nous ferons usage d'une propriété évidente de l'espace $(L)$:

$$(\alpha) \text{ si } x_1, x_2 \geqq 0, \text{ on a } \|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\| \text{ [32]}.$$

Il nous faut montrer que chaque opération $\mathcal{H}_t^t$ est régulière, donc qu'elle a une majorante. Considérons à cet effet l'opération module

$$(8) \qquad U^*(x) = \sup_{|x'| \leqq x} \{U(x')\} = \sup_{|x'| \leqq x} \{|U(x')|\},$$

et montrons qu'elle est finie pour tout $x \geqq 0$ $(x \in L)$ [33]. Mais il est plus facile d'user d'une autre forme de $U^*(x)$, à savoir

$$(9) \qquad U^*(x) = \sup_{\substack{x_1 + \ldots + x_n = x \\ x_i \geqq 0}} (|U(x_1)| + \ldots + |U(x_n)|) \quad (x \geqq 0).$$

On voit que ces deux définitions de $U^*(x)$ sont équivalentes. En effet, désignons pour le moment par $U_1^*(x)$ la valeur de (9). On a alors, si $|x'| \leqq x$,

$$|U(x')| \leqq |U(x'_+)| + |U(x'_-)| \leqq U_1^*(|x'|) \leqq U_1^*(x),$$

par conséquent

$$(10) \qquad U_1^*(x) \geqq U^*(x) \quad (x \geqq 0).$$

D'autre part, $U^*(x)$ étant additive, on a, pour $x_1 + \ldots + x_n = x$,

$$|U(x_1)| + \ldots + |U(x_n)| \leqq U^*(x_1) + \ldots + U^*(x_n) = U^*(x),$$

par conséquent $U_1^*(x) \leqq U^*(x)$, donc l'égalité $U^*(x) = U_1^*(x)$ est établie. De plus, il résulte de (10) que, pour démontrer la régularité de $U(x)$, il suffit de démontrer que

$$(11) \qquad \sup_{\substack{x_1 + \ldots + x_n = x \\ x_i \geqq 0}} (|U(x_1)| + \ldots + |U(x_n)|)$$

est finie pour tout $x \geqq 0$.

---

[32]) Le fait que les classes $\mathcal{H}_t^t$ et $\mathcal{H}_o^o$ des opérations transformant $X \in \mathfrak{K}_2$ dans $Y \in \mathfrak{K}_2$ coïncident, peut être démontré pour chaque espace $X$ qui satisfait à $(\alpha)$. Cf. L. Kantorovitch (7) th. 13.

[33]) Voir l'annotation [14]). Il est facile de voir que si l'opération module $U^*(x)$ est finie pour chaque $x$, elle est en même temps additive, donc $U(x)$ est régulière.

Supposons, par impossible, que (11) soit infinie pour un certain $x > 0$. Il existe donc une suite de décompositions $x_1^{(k)} + \ldots + x_{n_k}^{(k)} = x$, $x_i^{(k)} \geqq 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ telle qu'on ait

$$\sup_k \sum_{i=1}^{n_k} |U(x_i^{(k)})| = +\infty\ ^{34)}.$$

Il est évident que pour tout couple de décompositions dont l'une est plus petite que l'autre (c. à d. dont l'une est obtenue de l'autre par décomposition de chacun de ses éléments), la valeur de la somme entrant dans (11) dans le premier cas est au moins égale à sa valeur dans le second cas. Par conséquent, en superposant les décompositions successives de $x$, on obtient une suite de décompositions que nous désignons également par $x_1^{(k)} + \ldots + x_{n_k}^{(k)} = x$, telle que

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{n_k} |U(x_i^{(k)})| \xrightarrow[k\to\infty]{(o)} +\infty$$

sans décroître.

D'autre part, on a, grâce à ($\alpha$),

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\left\| \sum_{i=1}^{n_k} |U(x_i^{(k)})| \right\| \leqq \sum_{i=1}^{n_k} \left\| |U(x_i^{(k)})| \right\| = \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} \|U(x_i^{(k)})\| \leqq \sum_{i=1}^{n_k} \|U\|_t^t \cdot \|x_i^{(k)}\| = \|U\|_t^t \cdot \|x\|, \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec (12), en conséquence des propriétés des espaces $\mathfrak{R}_2$. Il résulte de (9) et (13) que $\|U^*\|_t^t \leqq \|U\|_t^t$, et comme l'inégalité inverse est évidente, 1 est complètement démontré.

2. Soit, à présent, $U(x)$ une $\mathcal{H}_t^t$ qui transforme $(L)$ dans $(L^p)$. Elle est en même temps une $\mathcal{H}_o^o$. Supposons d'abord que $U(x)$ soit positive. En vertu du th. 9, on peut la représenter sous la forme (6), avec le noyau $K^*(s, t)$ qui est mesurable par rapport à $t$ quel que soit $s$ et qui satisfait à la condition b de façon que l'intégrale

$$(14) \qquad \int_0^1 K^*(s, t) \cdot x(t)\, dt$$

représente une fonction de $s$ absolument continue pour chaque

---

[34]) Nous faisons ici usage d'une propriété des espaces semi-ordonnés réguliers: de chaque ensemble $E$ de ces éléments on peut extraire un sous-ensemble dénombrable $E' \subset E$ tel qu'on a $\sup E' = \sup E$, ce dernier étant fini ou non. Cf. L. Kantorovitch (3), th. 23.

$x(t) \in (L)$[35]. Désignons l'intégrale (14) par $U_1(x)$; c'est donc aussi une opération positive avec son contredomaine dans $(V^p)$ (ou $(A)$).

3. En conséquence de la positivité de $U_1(x)$, on a, quels que soient $s_1 > s_2$,

(15) $$K^*(s_1, t) \geqq K^*(s_2, t) \text{ presque partout.}$$

Désignons par $K_n(s, t)$ „la fontion moyenne" de $K^*(s, t)$

$$K_n(s, t) = n \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} K^*(s, \tau)\, d\tau, \text{ si } \frac{i}{n} \leqq t < \frac{i+1}{n}$$

$(i = 0, 1, \ldots, n-1)$[36].

Grâce à (15), on a partout

(16) $$K_n(s_1, t) \geqq K_n(s_2, t),$$

et en outre, pour $\frac{i}{n} \leqq t_0 < \frac{i+1}{n}$,

$$K_n(s, t_0) = \int_0^1 K^*(s, t) \cdot x_0(t)\, dt,$$

où

$$x_0(t) = \begin{cases} n & \text{si } \frac{i}{n} \leqq t < \frac{i+1}{n} \\ 0 & \text{partout ailleurs;} \end{cases}$$

par conséquent

(17) $$\underset{0 \leqq s \leqq 1}{(p)\text{-var}}\, K_n(s, t_0) \leqq \|U_1\|_t^t \cdot \|x_0\| = \|U_1\|_t^t.$$

Posons

$$K(s, t) = \overline{\lim_{n \to \infty}} K_n(s, t).$$

$K_n(s, t)$ étant absolument continue par rapport à $s$, quel que soit $t$, comme la valeur de $U_1(x)$ pour un $x$ convenablement choisi, il résulte donc de sa définition qu'elle est mesurable superficiellement et, par conséquent, il en est de même de $K(s, t)$.

Par définition de $K_n(s, t)$, on a, pour chaque $s_0$ fixe,

$$K_n(s_0, t) \to_{n \to \infty} K^*(s_0, t) \text{ presque partout,}$$

donc

---

[35]) On doit à M. H. Steinhaus (1) la forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace $(L)$. On peut aussi consulter S. Banach (1), p. 65.

[36]) Quand $i = n - 1$, il faut joindre le signe $=$ au dernier membre de cette inégalité, pour ne pas exclure le point $t = 1$.

$$K_n(s_0, t) \to_{n\to\infty} K(s_0, t) \text{ presque partout,}$$

d'où il résulte, en vertu du théorème de Lebesgue-Fubini, que la même relation a lieu presque partout dans le carré. Grâce à (16) et (17), $K(s, t)$ est une fonction non-décroissante par rapport à $s$ et

(18) $$\text{vrai}\max_t \Big[\underset{0\le s\le 1}{(p)\text{-var}}\, K(s, t)\Big] \leqq \|U_1\|_t^t \text{ }^{37)}.$$

4. Il est facile de voir qu'on pourrait poser $K(s, t) = \underline{\lim}_{n\to\infty} K_n(s,t)$ au lieu de $\overline{\lim}_{n\to\infty} K_n(s, t)$ et en faire dans ce cas les mêmes conclusions.

5. Nous avons démontré dans 3 que, pour chaque $s_0$ fixe

(19) $$K(s_0, t) = K^*(s_0, t) \text{ presque partout.}$$

En comparant ceci à (14), on voit que

(20) $$U_1(x) = \int_0^1 K(s, t)\cdot x(t)\, dt,$$

donc

$$U(x) = \frac{d}{ds}\int_0^1 K(s, t)\cdot x(t)\, dt,$$

où $K(s, t)$ satisfait aux conditions de notre théorème. La condition d résulte de (20) si l'on y pose $x(t)$ égale à la fonction caractéristique de l'intervalle $(0, \tau)$, et si l'on se souvient que les valeurs de $U_1(x)$ appartiennent à $(A)$.

6. Comme chaque opération $\mathcal{H}_t^t$, étant en même temps une $\mathcal{H}_o^o$, est en vertu du th. II la différence de deux opérations positives, on peut transporter les mêmes conclusions à toutes les opérations $\mathcal{H}_t^t$, donc une partie du th. 12 est démontrée.

7. Montrons maintenant que chaque opération (6) satisfaisant aux conditions du théorème est une $\mathcal{H}_t^t$ qui transforme $(L)$ dans $(L^p)$ ou, ce qui est équivalent, que $U_1(x)$ est une $\mathcal{H}_t^t$ qui transforme $(L)$ dans $(V^p)$ [38]. Cela résulte des inégalités suivantes:

---

[37]) Si $p = 1$, on peut écrire sup au lieu de vrai max. Dans ce cas l'inégalité (18) est évidente. Dans le cas où $p > 1$ nous omettons les raisonnements basés sur le théorème de Lebesgue-Fubini et sur le fait que les intégrales des $p^{\text{ièmes}}$ puissances de $\frac{d}{ds}K_n(s, t)$ sont également bornées; le lecteur peut les rétablir sans aucune difficulté.

[38]) Dans le cas où $p = 1$ nous pouvons remarquer que d'après la condition d les valeurs de $U_1(x)$ appartiennent à $(A)$ pour un ensemble dense des $x$ (pour toutes les fonctions „en escalier"). Par conséquent, le sous-espace $(A)$ étant fermé dans $(V^1)$, le contredomaine de $U_1(x)$ est situé tout entier dans $(A)$, dès que cette opération est continue comme une transformation de $(L)$ dans $(V^1)$.

$$(21)\quad \begin{aligned} &\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(s_i-s_{i-1})^{p-1}}\left|\int_0^1[K(s_i,t)-K(s_{i-1},t)]\cdot x(t)\,dt\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \\ &\leqq\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(s_i-s_{i-1})^{p-1}}\left[\int_0^1|K(s_i,t)-K(s_{i-1},t)|\cdot|x(t)|\,dt\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \\ &\leqq\int_0^1\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{|K(s_i,t)-K(s_{i-1},t)|^p}{(s_i-s_{i-1})^{p-1}}\cdot|x(t)|^p\right]^{\frac{1}{p}} dt^{39)} \leqq \\ &\leqq \text{vrai}\max{}_t\left[(p)\text{-var}_s K(s,t)\right]\cdot\int_0^1|x(t)|\,dt = C\cdot\|x\|. \end{aligned}$$

D'ailleurs, on en conclut, en tenant compte de (18), que si l'opération $U(x)$ est positive et si le noyau $K(s, t)$ dans sa représentation (6) est construit au moyen du procédé de 3, l'égalité (7) a lieu.

Il nous reste à établir l'égalité (7) pour une opération arbitraire.

8. $p>1$. Soit $U(x)$ une $\mathcal{H}_t^t$ (même $\mathcal{H}_o^o$). Nous la supposons déjà représentée sous la forme (6), où le noyau $K(s, t)$ satisfait aux conditions a--d; en conséquence de la condition c $K(s, t)$ est continue (et même absolument continue) par rapport à $s$ pour presque chaque $t$. Or, on a, pour la fonction $\varphi_s$ [la formule (2), § 2],

$$(22)\quad \begin{aligned} \varphi_s(x) &= \sup_{0=s_0<s_1<\ldots<s_m=s}\sum_{i=1}^{m}\int_0^1|K(s_i,t)-K(s_{i-1},t)|\cdot x(t)\,dt = \\ &=\sup\int_0^1\sum_{i=1}^{m}|K(s_i,t)-K(s_{i-1},t)|\cdot x(t)\,dt \leqq \int_0^1 L^*(s,t)\cdot x(t)\,dt, \end{aligned}$$

où

$$L^*(s,t) = \operatorname*{var}_{0\leqq\sigma\leqq s} K(\sigma,t).$$

Or, $K(s, t)$ étant continue, on peut trouver une suite de décompositions

$$0 = s_0^{(n)} < s_1^{(n)} < \ldots < s_{m_n}^{(n)} = 1 \quad \left(\text{p. ex. } s_i^{(n)} = \frac{i}{n}\right)$$

---

[39]) Nous faisons usage ici et encore plusieurs fois de l'inégalité

$$\left[\int_0^1\left|\int_0^1 K(s,t)dt\right|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \int_0^1\left[\int_0^1|K(s,t)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} dt$$

ou d'une inégalité semblable qu'on déduit de celle-ci en y remplaçant l'intégration par rapport à $s$ par une sommation finie. On déduit aisément ces inégalités de l'inégalité de Minkowski.

telle qu'on ait

$$\operatorname*{var}_{0 \leqq \sigma \leqq s} K(\sigma, t) = \lim_{n \to \infty} \sum_{0 < s_i^{(n)} \leqq s} \left| K(s_i^{(n)}, t) - K(s_{i-1}^{(n)}, t) \right| .$$

On voit donc que $L(s, t)$ est mesurable dans le carré et qu'on peut passer à la limite sous le signe d'intégration au troisième membre de (22), d'où il s'ensuit non seulement l'existence de la dernière intégrale de (22), mais encore l'égalité

$$U_1^*(x) = \int_0^1 L^*(s, t) \cdot x(t)\, dt .$$

Si l'on construit, à présent, au moyen du procédé de **3** le noyau $L(s, t)$, à partir de $L^*(s, t)$, on pourrait voir que $L^*(s, t) = L(s, t)$ pour presque tous les $t$ quel que soit $s$ [40]), donc

$$\|U\|_t^t = \|U\|_o^o = \|U_1^*\|_t^t = \text{vrai } \max_t [(p)\text{-var}_s L(s, t)] =$$
$$= \text{vrai } \max_t [(p)\text{-var}_s L^*(s, t)] = \text{vrai } \max_t [(p)\text{-var}_s K(s, t)] .$$

9. $p = 1$. Soit $U(x)$ une $\mathfrak{H}_t^t$. On a donc $U(x) = U^{(1)}(x) - U^{(2)}(x)$, où $U^{(1)}(x)$ et $U^{(2)}(x)$ sont positives et où leur somme $U^*(x) = U^{(1)}(x) + U^{(2)}(x)$ représente l'opération module de $U(x)$ [41]). Supposons que nous ayons représenté ces opérations sous la forme (6) avec les noyaux $K^{*(1)}(s, t)$ et $K^{*(2)}(s, t)$, que nous ayons répété sur elles les raisonnements de **3** et que nous ayons défini

$$K^{(1)}(s, t) = \overline{\lim_{n \to \infty}} K_n^{(1)}(s, t), \quad K^{(2)}(s, t) = \underline{\lim_{n \to \infty}} K_n^{(2)}(s, t),$$

où $K_n^{(j)}(s, t)$ signifie „la fonction moyenne" de $K^{*(j)}(s, t)$. On a donc

$$U(x) = \frac{d}{ds} \int_0^1 [K^{(1)}(s, t) - K^{(2)}(s, t)] \cdot x(t)\, dt .$$

Si l'on répète à présent les raisonnements de **3** pour l'opération $U^*(x)$ et son noyau $K^{*(1)}(s, t) + K^{*(2)}(s, t) = M^*(s, t)$ et si l'on construit le noyau $M(s, t)$ comme $\overline{\lim}$ de ses noyaux „moyens",

---

[40]) C'est une conséquence immédiate de leur continuité.

[41]) On appelle ces opérations $U^{(1)}(x)$ et $U^{(2)}(x)$ parties positive et négative de $U(x)$ et l'on peut les définir comme

$$U^{(1)}(x) = \sup_{0 \leqq x' \leqq x} U(x') \ (x \geqq 0), \quad U^{(2)}(x) = U^{(1)}(x) - U(x).$$

Cf L. Kantorovitch (5).

on obtiendrait, grâce à l'inégalité évidente

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\alpha_n+\beta_n) \geqq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\alpha_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\beta_n\,,$$

$$M(s,t) \geqq K^{(1)}(s,t) + K^{(2)}(s,t)\,.$$

Toutes les fonctions $M(s,t)$, $K^{(1)}(s,t)$, $K^{(2)}(s,t)$ étant non-décroissantes par rapport à $s$, il en résulte que

$$\|U\|_t^t = \|U\|_o^o = \|U^*\|_t^t = \text{vrai max}_t\,[\text{var}_s\, M(s,t)] \geqq$$
$$\geqq \text{vrai max}_t \{\text{var}_s\,[K^{(1)}(s,t) - K^{(2)}(s,t)]\}\,,$$

et comme l'inégalité inverse résulte de (21), on conclut que l'égalité (7) a lieu pour la représentation de $U(x)$ sous la forme de (6) avec le noyau $K(s,t) = K^{(1)}(s,t) - K^{(2)}(s,t)$ [42]).

Ainsi, notre théorème est complètement démontré.

**10.** Envisageons, à présent, comme un cas particulier des opérations transformant $(L)$ dans $(L)$ des opérations d'une forme moins compliquée, à savoir

$$y(s) = \int_0^1 K(s,t)\cdot x(t)\,dt\,, \tag{23}$$

où $K(s,t)$ est mesurable superficiellement, $0 \leqq s, t \leqq 1$. La question s'impose, à quelles conditions doit satisfaire le noyau $K(s,t)$, pour que (23) représente une opération $\mathcal{H}_t^t$ (ou $\mathcal{H}_o^o$, ce qui est la même chose) transformant $(L)$ dans $(L)$. Voici la réponse à cette question:

il faut et il suffit qu'on ait

$$\text{vrai max}_t \int_0^1 |K(s,t)|\,ds < \infty. \tag{24}$$

En effet, en vertu du th. 12, si (23) est une $\mathcal{H}_t^t$ transformant $(L)$ dans $(L)$, elle peut être représentée comme

$$y(s) = \frac{d}{ds}\int_0^1 K_1(s,t)\cdot x(t)\,dt$$

de sorte que la dernière intégrale soit absolument continue par rapport à $s$, quelle que soit $x(t)\in(L)$. De plus, on a

$$\underset{0\leqq s\leqq 1}{\text{var}} \int_0^1 K_1(s,t)\cdot x(t)\,dt \leqq C\cdot\int_0^1 |x(t)|\,dt\,.$$

---

[42]) On peut voir aisément que, dans le cas où $p = 1$, on peut remplacer dans tous nos raisonnements et par conséquent dans (7) vrai max par sup. Voir l'annotation [37]).

Par conséquent, si l'on pose

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t_1 \leqq t \leqq t_2 \\ 0 & \text{partout ailleurs,} \end{cases}$$

on aura

$$\underset{0 \leqq s \leqq 1}{\text{var}} \int_{t_1}^{t_2} K_1(s, t)\, dt \leqq C \cdot |t_1 - t_2| . \tag{25}$$

D'autre part, on a

$$\int_0^s d\sigma \int_0^1 K(\sigma, t) \cdot x(t)\, dt = \int_0^1 K_1(s, t) \cdot x(t)\, dt .$$

On en conclut, grâce à (25), que

$$\int_0^1 \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{K(s, t)}{t_2 - t_1}\, dt \right| ds \leqq C .$$

Il est à remarquer que l'intégrale $\int_0^1 K(s, t) dt$ existe pour presque tous les $s$, car c'est la valeur de l'opération (23) pour $x(t) \equiv 1$. Or, si $s$ est tel que cette intégrale existe, on a, pour presque tous les $t$,

$$n \int_t^{t+\frac{1}{n}} K(s, \tau)\, d\tau \rightarrow_{n \to \infty} K(s, t) . \tag{26}$$

La fonction $K(s, t)$ étant mesurable superficiellement, il en est de même de l'intégrale

$$n \int_t^{t+\frac{1}{n}} K(s, \tau)\, d\tau$$

comme fonction de $s$ et $t$. En nous appuyant sur le théorème de Lebesgue-Fubini, nous en pouvons donc conclure que (26) a lieu presque partout dans le carré $0 \leqq s,\ t \leqq 1$, ou, à plus forte raison, pour chaque $t$ fixe n'appartenant pas à un ensemble exclusif $\mathbf{T}$ de mesure linéaire nulle et pour presque tous les $s$. On a donc, en vertu d'un lemme de Fatou ((1), 375),

$$\int_0^1 |K(s, t)|\, ds \leqq C \text{ pour tout } t \bar{\in} \mathbf{T} , \tag{27}$$

ce qui donne (24).

Réciproquement, si (24) est remplie, on a

$$(28)\qquad \int_0^1 \left| \int_0^1 K(s,t)\cdot x(t)\,dt \right| ds \leqq \int_0^1 \left[ \int_0^1 |K(s,t)|\,ds \right] \cdot |x(t)|\,dt$$
$$\leqq \text{vrai}\max{}_t \int_0^1 |K(s,t)|\,ds \cdot \|x\|,$$

c. à d. (23) est une $\mathcal{H}_t^t$, c.q.f.d.

Nous avons démontré entre autres (cf. les formules (27) et (28) que

$$\|U\|_t^t = \|U\|_o^o = \text{vrai}\max \int_0^1 |K(s,t)|\,ds.$$

Envisageons, à présent, le cas $X = (M^*)$, $Y = (L)$. On sait que la forme générale d'une fonctionnelle linéaire dans $(M^*)$ est donnée par l'intégrale du type de M. Radon

$$F(x) = \int_0^1 x(t)\cdot \Phi(dE),$$

où la fonction d'ensemble $\Phi(e)$ est bornée, additive au sens restreint et s'annule avec $me$, et où

$$\|F\| = \text{var}_e\, \Phi(e) = \int_0^1 |\Phi(dE)|\ ^{43)}.$$

On peut donc écrire chaque opération $\mathcal{H}_t^t$ qui transforme $(M^*)$ dans $(L)$ sous la forme

$$(29)\qquad U(x) = y(s) = \frac{d}{ds}\int_0^1 x(t)\cdot \Phi_s(dE).$$

Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 13. *La forme générale des opérations $\mathcal{H}_t^o$ qui transforment $(M^*)$ dans $(L)$ est donnée par la formule* (29), *où l'on a*

a) $$\underset{e}{\text{var}}\left[\underset{0\leqq s\leqq 1}{\text{var}}\ \Phi_s(e)\right] = C < \infty\ ^{44)},$$

b) *$\Phi_s(e)$ est absolument continue par rapport à $s$, pour chaque ensemble mesurable $e$.*

---

[43]) Cf. G. Fichtenholz et L. Kantorovitch (1), p. 76.

[44]) Nous admettons que la variation totale d'une fonction d'ensemble est définie pour chaque fonction $\varphi(e)$ additive ou non comme

$$\sup_{\substack{e_1+\ldots+e_n=I\\ e_i\cdot e_k=0\quad(i\neq k)}} \sum_{i=1}^{n} |\varphi(e_i)|,$$

où le supremum doit être pris par rapport à tous les systèmes d'ensembles $e_i$ sans points communs dont la somme couvre l'intervalle $I = (0, 1)$ tout entier. Pour une fonction arbitraire $\varphi(e)$ on peut donc avoir var $\varphi(e) = +\infty$.

*D'ailleurs, on a* $\|U\|_t^o = C$.

Nous avons besoin d'un lemme:

Lemme. *Soient* $\varphi_i(e)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *des fonctions d'ensemble bornées et additives* (*au sens restreint*). *On a alors*

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}_e \varphi_i(e) = \operatorname{var}_e \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(e)| \,. \tag{30}$$

En effet, prenons un $\varepsilon > 0$. Il existe des ensembles $e_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, k_i)$ tels qu'on ait

$$\operatorname{var}_e \varphi_i(e) \leqq \sum_{k=1}^{k_i} |\varphi_i(e_i^{(k)})| + \frac{\varepsilon}{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut superposer les $n$ systèmes d'ensembles $\{e_i^{(k)}\}_k$ et obtenir de cette manière un nouvel système d'ensembles $e_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ sans points communs tel que chacun des $e_i^{(k)}$ soit la somme de certains des $e_j$. On aura donc

$$\sum_{j=1}^{m} |\varphi_i(e_j)| \geqq \sum_{k=1}^{k_i} |\varphi_i(e_i^{(k)})| \geqq \operatorname{var}_e \varphi_i(e) - \frac{\varepsilon}{n},$$

d'où

$$\operatorname{var}_e \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(e)| \geqq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(e_j)| \geqq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}_e \varphi_i(e) - \varepsilon.$$

$\varepsilon$ étant arbitrairement petit, on en conclut que

$$\operatorname{var}_e \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(e)| \geqq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}_e \varphi_i(e). \tag{31}$$

D'autre part, on a, pour chaque système d'ensembles $\{e_j\}$,

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(e_j)| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |\varphi_i(e_j)| \leqq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}_e \varphi_i(e),$$

d'où il s'ensuit

$$\operatorname{var}_e \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(e)| \leqq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}_e \varphi_i(e). \tag{32}$$

Les relations (31) et (32) donnent (30), ainsi donc le lemme est démontré.

*Démonstration du théorème* 13. Soit $U(x)$ une $\mathcal{H}_t^o$ qui transforme $(M^*)$ dans $(L)$. Elle est bien de la forme (29), comme nous l'avons déjà remarqué. La condition b est aussi évidente, car on a

$$\Phi_s(e) = \int_0^1 x_e(t) \cdot \Phi_s(dE),$$

si $x_e(t)$ signifie la fonction caractéristique de l'ensemble $e$, et parce que l'intégrale au troisième membre de (29) est absolument continue par rapport à $s$, quelle que soit $x(t) \in (M^*)$.

D'après le th. 11, on a, pour chaque décomposition $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$,

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{var}_e \left[\Phi_{s_i}(e) - \Phi_{s_{i-1}}(e)\right] \leqq \|U\|_t^o.$$

En vertu du lemme démontré ci-desssus,

$$\mathrm{var}_e \sum_{i=1}^{m} |\Phi_{s_i}(e) - \Phi_{s_{i-1}}(e)| \leqq \|U\|_t^o,$$

donc, pour chaque système d'ensembles $\{e_j\}$, n'empiétant pas l'un sur l'autre, dont la somme coïncide avec l'intervalle (0, 1) tout entier, on a

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |\Phi_{s_i}(e_j) - \Phi_{s_{i-1}}(e_j)| \leqq \|U\|_t^o;$$

on en conclut, la décomposition $\{(s_{i-1}, s_i)\}$ étant arbitraire, que

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{var}_s \, \Phi_s(e_j) \leqq \|U\|_t^o,$$

où

$$\mathrm{var}_e[\mathrm{var}_s \, \Phi_s(e)] \leqq \|U\|_t^o. \tag{33}$$

Réciproquement, si les conditions du théorème sont remplies, nous en déduisons, en raisonnant selon l'ordre inverse, l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{var}_e[\Phi_{s_i}(e) - \Phi_{s_{i-1}}(e)] \leqq C, \tag{34}$$

ce qui veut dire que la fonction abstraite de $s$ $\Phi_s(e)$ est à variation forte bornée. Donc, en vertu du th. 8, l'intégrale

$$\int_0^1 x(t) \cdot \Phi_s(dE) \tag{35}$$

représente une opération $\mathcal{H}_t^o$ qui transforme $(M^*)$ dans $(V^1)$. Or, grâce à la condition b, ses valeurs appartiennent à $(A)$ pour chaque $x(t)$ qui admet un nombre fini de valeurs distinctes, donc dans un ensemble dense dans $(M^*)$. Il en résulte, comme dans le th. 12, que l'opération $\mathcal{H}_t^o$ (35) transforme $(M^*)$ dans

$(A)$. Notre théorème est donc démontré, grâce à l'isomorphisme entre $(L)$ et $(A)$[45]).

Il résulte de (33) et (34) que $\|U\|_t^o = C$.

**11°.** Nous allons maintenant examiner plus particuliérement le cas où le domaine d'opérations est situé dans un espace séparable[46]). Nous pouvons représenter dans ce cas les opérations $\mathcal{H}_t^o$ sous une autre forme beaucoup plus commode pour les applications. Voici le théorème.

THÉORÈME 14. *La forme générale des opérations* $\mathcal{H}_t^o$ $y = U(x)$ *qui transforment un espace séparable* $X \epsilon \mathfrak{B}$ dans $(L^p)$ *est donnée par la formule*

$$U(x) = y(s) = f_s(x), \tag{36}$$

*où la fonction abstraite* $f_s$ *dont les valeurs appartiennent à* $\overline{X}$ *est faiblement mesurable et où la fonction réelle* $\|f_s\| \epsilon (L^p)$.

*D'ailleurs, on a*

$$\|U\|_t^o = \left[\int_0^1 \|f_s\|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{37}$$

*Démonstration.* D'après le th. 11, on a

$$U(x) = \frac{d}{ds}\psi_s(x), \tag{38}$$

où $\psi_s$ a sa $(p)$-variation forte bornée. Les fonctions abstraites à variation bornée jouissent de beaucoup de propriétés des fonctions réelles de cette classe; p. ex., si $\psi_s$ a sa $(p)$-variation forte bornée $(p > 1)$, elle est fortement absolument continue, et si elle est fortement absolument continue, elle satisfait en presque tous les points à la condition de Lipschitz (bien entendu, avec une constante dépendant du point)[47]).

---

[45]) Nous n'avons pas établi tout à fait explicitement que la fonction abstraite $\Phi_s(e)$ est fortement absolument continue, et cependant c'est vrai, comme on peut facilement le déduire de nos raisonnements. Or, nous n'avons aucun besoin de cela, pour démontrer notre théorème. Ainsi donc il est à remarquer, que les th. 9—11 établissent plus parfaitement la structure de la fonction abstraite qui définit l'opération considérée, mais, pour les applications, il suffit des th. 6—8.

[46]) Un espace est dit séparable, lorsqu'il contient un ensemble dense dénombrable.

[47]) Les démonstrations de ces faits sont tout à fait analogues aux démonstrations pour les fonctions reélles. On peut trouver la seconde de ces assertions dans la Thèse de M. GELFAND (1), de même que certains points de la démonstration du th. 14.

L'espace $X$ contient par hypothèse un ensemble dénombrable dense dans la sphère $\|x\| \leqq 1 : x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ La fonction réelle $\psi_s(x)$ étant absolument continue, quel que soit $x$, on peut donc exclure un ensemble de points $s$ de mesure nulle tel qu'en tout point restant la fonction abstraite $\psi_s$ satisfait à la condition de Lipschitz et il existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{\psi_{s+h}(x_n) - \psi_s(x_n)}{h} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si nous désignons par $C_s$ la constante de Lipschitz au point $s$, nous aurons, pour tout $h$ suffisamment petit,

$$\left\| \frac{\psi_{s+h} - \psi_s}{h} \right\| \leqq C_s.$$

D'après le théorème général sur la convergence faible, il existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{\psi_{s+h}(x) - \psi_s(x)}{h} = f_s(x)$$

pour tout $x \in X$ et cette limite est une fonctionnelle linéaire dans $X$ [48]). En tenant compte de (38), on voit que $U(x)$ est bien représentable sous la forme de (36).

La fonction réelle $f_s(x)$ est mesurable, quel que soit $x$. On a, par définition de norme,

$$\|f_s\| = \sup_n |f_s(x_n)|,$$

donc la fonction $\|f_s\|$ est de même mesurable. En vertu du th. III, il existe une fonction $y_0(s) \in (L^p)$ telle qu'on a

$$|f_s(x_n)| \leqq y_0(s) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On a donc $\|f_s\| \leqq y_0(s)$, ce qui donne que $\|f_s\| \in (L^p)$ et qu'on a

$$\left[\int_0^1 \|f_s\|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \|U\|_t^o. \tag{39}$$

Réciproquement, soit donnée une opération (36), satisfaisant aux conditions du théorème. Ses valeurs sont des fonctions mesurables et appartiennent à $(L^p)$, grâce à l'inégalité $|f_s(x)| \leqq \|f_s\| \cdot \|x\|$, et, grâce à la même inégalité, l'opération (36) est une $\mathcal{H}_t^o$. D'ailleurs, on a $\|U\|_t^o \leqq \left[\int_0^1 \|f_s\|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}$, ce qui donne avec (39) la relation (37), c.q.f.d.

---

48) Cf. S. Banach (1), p. 123.

**12°.** Envisageons quelques exemples.

THÉORÈME 15. *La forme générale des opérations* $\mathcal{H}_t^o$ $y = U(x)$ *qui transforment* $(L^r)$ $(r > 1)$ *dans* $(L^p)$ $(p \geqq 1)$ *est donnée par la formule*

$$U(x) = y(s) = \int_0^1 K(s, t) \cdot x(t) dt, \tag{40}$$

*où la fonction* $K(s, t)$ *est mesurable superficiellement et où*

$$\left\{ \int_0^1 \left[ \int_0^1 |K(s, t)|^{\frac{r}{r-1}} dt \right]^{\frac{p(r-1)}{r}} ds \right\}^{\frac{1}{p}} = C < \infty. \tag{41}$$

*D'ailleurs, on a*

$$\|U\|_t^o = C. \tag{42}$$

*Démonstration.* D'après le théorème qui précède, chaque opération $\mathcal{H}_t^o$ qui transforme $(L^r)$ dans $(L^p)$ peut être représentée sous la forme (40) avec un noyau $K^*(s, t)$ qui satisfait à (41) et (42). Il nous reste à démontrer qu'on peut remplacer $K^*(s, t)$ par une fonction mesurable superficiellement $K(s, t)$ en ne changeant d'ailleurs la valeur de l'intégrale (40) que dans un ensemble de points $s$ de mesure linéaire nulle [49]). Dans ce but, posons

$$K_n(s, t) = n \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} K^*(s, \tau)\, d\tau \quad \text{si} \frac{i}{n} \leqq t < \frac{i+1}{n} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

et

$$K(s, t) = \overline{\lim_{n \to \infty}} K_n(s, t).$$

Le reste du raisonnement est semblable à celui des points 3 et 5 de la démonstration du th. 12. On démontre que $K(s, t)$ est mesurable dans le carré et que pour chaque $s$ tel que l'intégrale $\int_0^1 K^*(s, t) dt$ existe, on a $K(s, t) = K^*(s, t)$ pour presque tous les

[49]) Bien entendu, si l'on a

$$\int_0^1 K(s, t) \cdot x(t) dt = \int_0^1 K^*(s, t) \cdot x(t) dt$$

presque partout, quelle que soit $x(t) \in (L^r)$, les fonctions $K(s, t)$ et $K^*(s, t)$ ne peuvent différer que dans un ensemble (non-mesurable superficiellement, peut-être) dont presque toutes les sections par des droites $s =$ const. ont une mesure linéaire nulle.

$t$, donc

$$U(x) = \int_0^1 K^*(s, t) \cdot x(t)dt = \int_0^1 K(s, t) \cdot x(t)dt$$

et $K(s, t)$ satisfait à toutes les conditions du théorème.

Réciproquement, si l'opération (40) est donnée et si les conditions du théorème sont remplies, l'intégrale (40) représente une fonction mesurable de $s$, quelle que soit $x(t) \epsilon (L^r)$. Par conséquent, la fonction abstraite $f_s = K(s, t)$ est faiblement mesurable et $\|f_s\| \epsilon (L^p)$. Ainsi donc, nous voyons que les conditions du th. 14 sont remplies, d'où il s'ensuit que (40) représente une $\mathcal{H}_l^o$ transformant $(L^r)$ dans $(L^p)$, c.q.f.d.

On démontre de la même manière le théorème suivant.

THÉORÈME 16. *La forme générale des opérations $\mathcal{H}_l^o$ $y = U(x)$ qui transforment $(L)$ dans $(L^p)$ $(p \geqq 1)$ est donnée par la formule* (40), *où la fonction $K(s, t)$ est mesurable superficiellement et où l'on a*

$$\|U\|_l^o = \left[\int_0^1 (\text{vrai}\max_t |K(s, t)|^p)\, ds\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

THÉORÈME 17. *La forme générale des opérations $\mathcal{H}_l^o$ $y = U(x)$ qui transforment $(C)$ dans $(L^p)$ $(p \geqq 1)$ est donnée par l'intégrale de Stieltjes*

$$U(x) = y(s) = \int_0^1 x(t) d_t g^*(s, t), \tag{43}$$

*où*

a) *$g(s, t)$ est mesurable superficiellement dans le carré $0 \leqq s, t \leqq 1$ et a sa variation bornée par rapport à $t$ pour presque tous les $s$;*

b) $g(s, 0) \equiv 0$;

c) *$g(s, 1)$ est mesurable par rapport à $s$;*

d) $$\int_0^1 [\text{var}_t\, g(s, t)]^p\, ds < \infty.$$

*Démonstration.* Soit, en effet, $U(x)$ une $\mathcal{H}_l^o$ qui transforme $(C)$ dans $(L^p)$. On peut se borner d'abord au cas où $U(x)$ est positive. D'après le th. 14 et le théorème classique de M. Fr. Riesz (2), on peut représenter $U(x)$ sous la forme

$$U(x) = y(s) = \int_0^1 x(t) d_t g^*(s, t), \tag{44}$$

où $g^*(s, t)$ est non-décroissante et à variation bornée pour presque tous les $s$ et satisfait aux conditions b) et d). De plus, on a, pour $x(t) \equiv 1$,

$$U(x) = y(s) = g^*(s, 1),$$

donc $g^*(s, t)$ satisfait de même à c.

En outre, nous pouvons évidemment supposer $g^*(s, t)$ non-décroissante et à variation bornée pour tout $s$, car nous aurions pu poser $g^*(s, t)$ égale à 0 pour chaque $s$ exclusif. Cela est plus commode pour les raisonnements qui suivent.

Posons

$$G_n(s, t) = n \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} g^*(s, \tau)\, d\tau, \quad \text{si } \frac{i}{n} \leqq t < \frac{i+1}{n} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{45}$$

On a, comme on peut s'en convaincre sans aucune difficulté,

$$n \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} g^*(s, \tau)\, d\tau = \int_0^1 x(t)\, d_t g^*(s, t),$$

si

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leqq t \leqq \frac{i}{n} \\ n\left(\frac{i+1}{n} - t\right) & \text{pour } \frac{i}{n} \leqq t \leqq \frac{i+1}{n} \\ 0 & \text{pour } \frac{i+1}{n} \leqq t \leqq 1, \end{cases}$$

donc la fonction $G_n(s, t)$ est mesurable superficiellement.

Posons encore

$$g(s, t) = \begin{cases} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, G_n(s, t), & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 \quad , & \text{si } t = 0 \\ g^*(s, 1) \quad , & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

$g(s, t)$ est donc aussi mesurable superficiellement, et l'on a $g(s, t) = g^*(s, t)$ en tout point $(s, t)$, où $g^*(s, t)$ est continue par rapport à $t$ et, grâce à la monotonie de $g^*(s, t)$, $g(s, t) = g^*(s, t+0)$ aux points de discontinuité. Par conséquent, $g(s, t)$ est de même non-décroissante par rapport à $t$ et l'on a

$$\mathrm{var}_t\, g(s, t) = \mathrm{var}_t\, g^*(s, t).$$

De plus, l'intégrale (44) ne change pas lorsqu'on y remplace $g^*(s, t)$ par $g(s, t)$, et il en résulte que $U(x)$ est représentable sous la forme (43), avec la fonction $g(s, t)$ satisfaisant à toutes les conditions du théorème. On peut démontrer aisément la même formule dans le cas général où $U(x)$ n'est point positive, en la représentant comme la différence de deux opérations positives.

Réciproquement, si l'opération (43) satisfait aux conditions du théorème, on peut voir que l'intégrale (43) représente une fonction mesurable de $s$ pour chaque $x(t) \in (C)$. Pour s'en convaincre, il suffit de représenter (43) comme la limite de sommes de Stieltjes-Riemann de sorte qu'on prend comme points de décompositions $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ seulement des points $t$ tels que $g(s, t)$ soit mesurable par rapport à $s$. Alors chacune de ces sommes de Stieltjes-Riemann représente une fonction mesurable de $s$, et il en est de même du résultat de l'intégration (43). Grâce à la condition d on peut s'appuyer sur le th. 14.[49a])

Il est à remarquer qu'on peut définir $\|U\|_t^o$ comme

$$\|U\|_t^0 = \left\{ \int_0^1 [\text{var corr}_t\ g(s, t)]^p ds \right\}^{\frac{1}{p}},$$

si l'on entend par var corr $f(t)$ la variation totale de la fonction $f_1(t)$ qu'on obtient de $f(t)$ en changeant ses valeurs (en cas de nécessité) aux points intérieurs de discontinuité de façon que les nouvelles valeurs soient comprises entre la limite du côté droit et celle du côté gauche de $f(t)$.

Théorème 18. *La forme générale des opérations* $H_t^o$ $y = U(x)$ *qui transforment* $(l^r)$ $(r \geqq 1)$ *dans* $(L^p)$ $(p \geqq 1)$ *est donnée par la formule*

$$U(x) = y(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi^{(i)} \cdot y_i(s) \qquad \textit{pour } x = \{\xi^{(i)}\},$$

*où* $y_i(s) \in (L^p)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *et*

$$\alpha)\ (r > 1) \quad \left\{ \int_0^1 \left[ \sum_{i=1}^{\infty} |y_i(s)|^{\frac{r}{r-1}} \right]^{\frac{p(r-1)}{r}} ds \right\}^{\frac{1}{p}} = \|U\|_t^o < \infty$$

*ou*

$$\beta)\ (r = 1) \quad \left[ \int_0^1 \sup |y_i(s)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}} = \|U\|_t^o < \infty.$$

C'est une conséquence immédiate du th. 14[50]).

---

[49a]) Il est évident que la première partie du th. 14 reste vraie si l'on a $\|f_s\| \leqq Z(s) \in (L^p)$.

[50]) Pour les fonctionnelles linéaires dans $(l^p)$, on peut consulter le livre de M. Banach (1), pp. 67—68.

## § 4.

### *Le contredomaine d'opérations est situé dans $(\widetilde{M})$.*

13°. Théorème 19. *Les classes $\mathcal{H}_t^t$ et $\mathcal{H}_t^o$ des opérations $y = U(x)$ transformant $X \in \mathfrak{B}$ dans $(\widetilde{M})$ se confondent, et la forme générale des opérations de ces deux classes est donnée par la formule*

$$y(s) = U(x) = \frac{d}{ds}[f_s(x)], \tag{1}$$

*où $f_s$ est une fonction de $s$ avec des valeurs appartenant à $\overline{X}$, qui satisfait* à *la condition de Lipschitz* [51]).

*Remarque.* Si $X \in \mathfrak{K}$ *ou* $\mathfrak{K}_1$, on a $\mathcal{H}_t^t = \mathcal{H}_o^o = \mathcal{H}_t^o$.

*Démonstration.* Nous allons montrer que chaque $\mathcal{H}_t^t$ est représentable sous la forme de (1), et que chaque opération (1) est une $\mathcal{H}_t^o$.

Soit $U(x)$ une $\mathcal{H}_t^t$. Alors l'image de la sphère $\|x\| \leqq 1$ doit satisfaire à la condition suivante: $a_n \cdot U(x_n) \to^{(t)} 0$ quels que soient $\|x_n\| \leqq 1$ et $a_n \to 0$.

En d'autres termes, cette image doit être bornée au sens de M. Banach [52]).

Or, il est facile de voir que ce fait équivaut à l'existence dans $(\widetilde{M})$ d'une constante $C$ telle qu'on ait

$$|y(s)| \leqq C \text{ presque partout, si } \|x\| \leqq 1. \tag{2}$$

Posons

$$U_1(x) = z(s) = \int_0^s y(\sigma) d\sigma. \tag{3}$$

On a alors

$$z(s) = f_s(x), \tag{4}$$

où $f_s(x)$ est une fonctionnelle linéaire de $x$ pour chaque $s$ fixe. La fonction abstraite de $s$ $f_s$ satisfait d'ailleurs à la condition de Lipschitz avec la constante $C$, grâce à (2). En effet, on a

$$\|f_{s_1} - f_{s_2}\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} |f_{s_1}(x) - f_{s_2}(x)| = \sup_{\|x\| \leqq 1} \left| \int_{s_1}^{s_2} y(s) ds \right| \leqq C \cdot |s_1 - s_2|.$$

Nous voyons enfin que les relations (3) et (4) donnent (1).

---

[51]) Cf. L. Kantorovitch (7), th. 15.

[52]) Cf. S. Mazur et W. Orlicz (1).

Nous montrerons maintenant que chaque opération (1) est une $\mathcal{H}_t^o$. Dans ce but, introduisons une opération $U_1(x) = z(s) = f_s(x)$.
On a alors

$$U(x) = y(s) = z'(s).$$

Soit $C$ la constante de Lipschitz de la fonction $f_s$. Alors $z(s)$ satisfait à la condition de Lipschitz avec la constante $C \cdot \|x\|$. On a donc (2).

Soit $x_n \to^{(t)} x$, et soit $y_n = U(x_n)$. On a donc, en vertu de (2),

$$(5) \qquad |y_n(s) - y(s)| \leqq C \cdot \|x_n - x\| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

presque partout; par conséquent, $y_n(s) \to y(s)$ presque partout et la suite des $y_n(s)$ est bornée, c. à d. $y_n \to^{(o)} y$ au sens de l'espace $(\widetilde{M})$, c.q.f.d.

De plus, nous avons démontré que

$$\text{vrai max}_s |y_n(s) - y(s)| \to 0,$$

donc les valeurs de $U(x)$ convergent au sens de l'espace normé $(M^*)$. Cette convergence étant plus forte que la convergence $(o)$ dans $(\widetilde{M})$, on obtient donc le corollaire suivant:

*Corollaire. La classe des opérations $\mathcal{H}_t^t$ transformant $X \in \mathfrak{B}$ dans $(\widetilde{M})$ se confond avec celle des opérations linéaires au sens de M. Banach qui transforment $X$ dans $(M^*)$.*

Il résulte de nos raisonnements, à savoir de (2) et (5), que la norme $(B)$ de ces opérations est égale à la constante de Lipschitz dans la condition du théorème, si celle-ci est choisie la plus petite possible.

**14⁰.** Voici quelques exemples relatifs au théorème démontré.

THÉORÈME 20. *La forme générale des opérations $\mathcal{H}_t^t$ $y = U(x)$ qui transforment $(M^*)$ dans $(\widetilde{M})$ (ou $(M^*)$) est donnée par la formule*

$$(6) \qquad U(x) = y(s) = \frac{d}{ds}\int_0^1 x(t) \cdot \Phi_s(dE),$$

*où*

$$(7) \qquad |\Phi_{s_1}(e) - \Phi_{s_2}(e)| \leqq C \cdot |s_1 - s_2| \text{ pour tout } e\,[53]).$$

*Démonstration.* D'après le th. 19, la forme (6) n'exige point

[53]) Ce théoreme avait été déjà démontré d'une méthode directe par B. Vulich (2).

de démonstration. Or, on a, en vertu du même théorème,

$$(8) \qquad \int_0^1 |\Phi_{s_1}(dE) - \Phi_{s_2}(dE)| \leqq C \cdot |s_1 - s_2|,$$

ce qui donne par définition de $\int_0^1 |\Phi(dE)|$ la relation (7).

Réciproquement, si l'opération (6) satisfait à (7), on en tire immédiatement (8), où la constante $C$ est remplacée par $2C$, et nous pouvons donc nous appuyer sur le th. 19.

Quant à la norme $\|U\|_t^t$ (dans l'espace $(M^*)$) de $U(x)$, on peut affirmer qu'elle est comprise entre $C$ et $2C$, si la constante $C$ est choisie la plus petite possible, et que les bornes $C$ et $2C$ sont exactes. (B. Vulich (2), ch. II, § 3.)

Envisageons, maintenant, des opérations de la forme

$$(9) \qquad y(s) = \int_0^1 K(s, t) \cdot x(t) dt,$$

où $K(s, t)$ est mesurable dans le carré $0 \leqq s, t \leqq 1$.

Nous allons montrer que pour que (9) représente une $\mathcal{H}_t^t$ qui transforme $(M^*)$ dans $(\widetilde{M})$, il faut et il suffit qu'on ait

$$(10) \qquad \text{vrai } \max_s \int_0^1 |K(s, t)| \, dt = C < \infty.$$

En effet, représentons cette opération sous la forme (6), où $\Phi_0(e) \equiv 0$ [54]). On a alors

$$\int_0^s d\sigma \int_0^1 K(\sigma, t) \cdot x(t) dt = \int_0^1 x(t) \cdot \Phi_s(dE)$$

pour tout $x \in (M^*)$.

En posant $x(t) = x_e(t)$ (c. à d. égale à la fonction caractéristique de l'ensemble $e$), on voit que

$$\Phi_s(e) = \int_0^s d\sigma \int_e K(\sigma, t) dt.$$

---

[54]) Si $\Phi_0(e) \not\equiv 0$, on pourrait poser $\widetilde{\Phi}_s(e) = \Phi_s(e) - \Phi_0(e)$. On aurait alors

$$\frac{d}{ds} \int_0^1 x(t) \cdot \widetilde{\Phi}_s(dE) = \frac{d}{ds} \int_0^1 x(t) \Phi_s(dE), \text{ et } \widetilde{\Phi}_0(e) \equiv 0.$$

Alors la condition (7) peut être écrite sous la forme de

$$\left|\int_{s_1}^{s_2} ds \int_e K(s, t) dt\right| \leqq C_1 \cdot |s_1 - s_2|.$$

$s_1$ et $s_2$ étant arbitraires, il résulte de là qu'on a

$$\text{vrai max}_s \left|\int_e K(s, t) dt\right| \leqq C_1 \text{ pour tout } e.$$

Il en résulte que, si $s$ n'appartient pas à un ensemble $S$ ($mS = 0$), on a

$$\left|\int_e K(s, t) dt\right| \leqq C_1 \tag{11}$$

pour chaque ensemble $e$ formé d'un nombre fini d'intervalles à extrémités rationnelles. Prenons un tel point $s_0 \bar{\in} S$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un $\mu > 0$ tel qu'on a

$$\left|\int_e K(s_0, t) dt\right| < \varepsilon \text{ lorsque } me \leqq \mu. \tag{12}$$

Or, on a

$$\int_0^1 |K(s_0, t)| dt = \int_e K(s_0, t) dt - \int_{e'} K(s_0, t) dt,$$

où $e = \mathcal{E}_t(K(s_0, t) > 0)$ et $e' = \mathcal{E}_t(K(s_0, t) < 0)$.

On peut représenter $e$ et $e'$ comme

$$e = \Delta + e_1 - e_2, \quad e' = \Delta' + e_1' - e_2',$$

où $\Delta$ et $\Delta'$ sont des sommes d'un nombre fini d'intervalles à extrémités rationnelles, $\Delta\Delta' = 0$ et où la mesure de tous les ensembles $e_1$, $e_2$, $e_1'$ et $e_2'$ ne surpasse pas $\mu$. On a donc, grâce à (12),

$$\int_0^1 |K(s_0, t)| dt = \int_\Delta K(s_0, t) dt + \int_{e_1} K(s_0, t) dt -$$
$$- \int_{e_2} K(s_0, t) dt - \int_{\Delta'} K(s_0, t) dt - \int_{e'_1} K(s_0, t) dt + \int_{e'_2} K(s_0, t) dt <$$
$$< \int_\Delta K(s_0, t) dt - \int_{\Delta'} K(s_0, t) dt + 4\varepsilon.$$

On en conclut, en tenant compte de (11), que

$$\int_0^1 |K(s_0, t)| dt < 2C_1 + 4\varepsilon,$$

ou, $\varepsilon$ étant arbitrairement petit,

$$\int_0^1 |K(s_0, t)|\, dt \leqq C = 2C_1 \text{ pour tout } s_0 \bar{\epsilon} S.$$

Réciproquement, si (10) est remplie, on a

$$\left|\int_0^1 K(s, t) \cdot x(t)\, dt\right| \leqq C \cdot \text{vrai max} |x(t)|,$$

d'où il résulte que (9) est bien une $\mathcal{H}_t^t$ transformant $(M^*)$ dans $(M^*)$ (ou dans $(\widetilde{M})$), c.q.f.d.

**15$^0$.** Nous allons maintenant examiner plus particulièrement le cas où le domaine des opérations est un espace séparable. Nous avons déjà vu dans le paragraphe précédent que dans ce cas les opérations $\mathcal{H}_t^0$ n'étaient représentées qu'au moyen de fonctionnelles, sans l'aide de dérivées. Ici nous aurons un résultat semblable.

Théorème 21. *La forme générale des opérations $\mathcal{H}_t^o = \mathcal{H}_t^t$ $y = U(x)$ transformant un espace séparable $X \epsilon \mathfrak{B}$ dans $(\widetilde{M})$ est donnée par la formule*

$$U(x) = y(s) = f_s(x), \tag{13}$$

*où la fonction abstraite $f_s$ dont les valeurs appartiennent à $\overline{X}$ est faiblement mesurable et bornée presque partout.*

*D'ailleurs, si l'on considère cette opération comme une transformation de $X$ dans $(M^*)$, on a*

$$\|U\|_t^t = \text{vrai max} \|f_s\| \text{ [55]}. \tag{14}$$

*Démonstration.* On démontre le fait qu'on peut représenter chaque opération $\mathcal{H}_t^t$ sous la forme (13) d'une façon analogue à la démonstration du th. 14. De plus, on voit, d'après le th. 19, que la constante de Lipschitz $C_s$ qui entre dans la démonstration du th. 14 ne dépend pas du point $s$ dans notre cas. Nous avons donc $\|f_s\| \leqq C$ presque partout, si $C$ est la constante dans la condition du th. 19, par conséquent (voir Corollaire du th. 19)

$$\text{vrai max} \|f_s\| \leqq \|U\|_t^t. \tag{15}$$

---

[55]) Ce théorème a été établi par M. Gelfand (1) dans le cas où le contredomaine est situé dans $(M^*)$. M. Gelfand n'étudia pas l'espace $(\widetilde{M})$.

Réciproquement, si l'opération (13) est donnée et satisfait aux conditions du théorème, on a

$$(16) \qquad |y(s)| \leqq \text{vrai max} \|f_s\| \cdot \|x\| \text{ presque partout.}$$

Donc, l'opération (13) est une $\mathcal{H}_t^t$ avec son contredomaine dans $(M^*)$ et à plus forte raison avec son contredomaine dans $(\widetilde{M})$. Les relations (15) et (16) donnent (14), c.q.f.d.

*Remarque.* On peut aussi représenter les opérations $\mathcal{H}_t^o$ dont le contredomaine est situé dans $(L^p)$ ou $(\widetilde{M})$ sous la forme $y(s) = f_s(x)$ dans le cas où $X$ n'étant peut-être pas séparable est régulier [56]). Dans ce cas on obtient de plus que la fonction $f_s$ est mesurable au sens de M. Bochner (1). Il résulte que $f_s$ est mesurable au sens de M. Bochner même dans le cas où $\overline{X}$ est séparable. Nous n'entrons pas ici dans ces détails [57]).

**16⁰.** Envisageons quelques exemples.

THÉORÈME 22. *La forme générale des opérations* $\mathcal{H}_t^t = \mathcal{H}_o^o = \mathcal{H}_t^o$ $y = U(x)$ *transformant* $(L^p)$ $(p > 1)$ *dans* $(\widetilde{M})$ (*ou* $(M^*)$) *est donnée par la formule*

$$(17) \qquad U(x) = y(s) = \int_0^1 K(s, t) \cdot x(t) dt,$$

*où* $K(s, t)$ *est mesurable superficiellement et*

$$\text{vrai max}_s \left[ \int_0^1 |K(s, t)|^{\frac{p}{p-1}} dt \right]^{\frac{p-1}{p}} = C < \infty.$$

*D'ailleurs, on a* (*dans* $(M^*)$) $\|U\|_t^t = C$.

C'est une conséquence immédiate du théorème qui précède. Le fait qu'on peut choisir $K(s, t)$ mesurable superficiellement, peut être démontré comme dans le th. 15. Mais on peut s'en passer car, la convergence dans $(\widetilde{M})$ étant plus forte que dans $(L^p)$ $(p \geqq 1)$, les opérations considérées dans ce théorème sont un cas particulier des opérations du th. 15, et l'on y a démontré qu'on peut s'arranger de façon que le noyau $K(s, t)$ soit mesurable.

---

[56]) On appelle régulier un espace normé $X$ qui est équivalent (BANACH (1), p. 180) à son deuxième conjugué: $X = \overline{\overline{X}}$.

[57]) Cf. I. GELFAND (1).

On démontre de la même manière le théorème qui suit:

THÉORÈME 23. *La forme générale des opérations* $\mathcal{H}_t^t = \mathcal{H}_o^o = \mathcal{H}_t^o$ $y = U(x)$ *transformant* $(L)$ *dans* $(\widetilde{M})$ (*ou* $(M^*)$) *est donnée par la formule* (17), *où la fonction* $K(s, t)$ *est mesurable superficiellement et bornée presque partout dans le carré* $0 \leqq s,t \leqq 1$. *D'ailleurs, on a* (*dans* $(M^*)$) $\|U\|_t^t = \text{vrai max}_{s,t} |K(s, t)|$.

THÉORÈME 24. *La forme générale des opérations* $\mathcal{H}_t^t = \mathcal{H}_t^o$ $y = U(x)$ *transformant* $(C)$ *dans* $(\widetilde{M})$ (*ou* $(M^*)$) *est donnée par la formule*

$$U(x) = y(s) = \int_0^1 x(t)\, d_t g(s, t),$$

*où* $g(s, t)$ *satisfait aux conditions* a, b *et* c *du th.* 17 *et où*

$$\text{vrai max}_s \left[\text{var}_t\, g(s, t)\right] < \infty .$$

*D'ailleurs, on a* (*dans* $(M^*)$)

$$\|U\|_t^t = \text{vrai max}_s \left[\text{var corr}_t\, g(s, t)\right] .$$

Pour la démonstration il faut répéter mot pour mot celle du th. 17, mais en se basant sur le th. 21 au lieu du th. 14.

Nous avons donné beaucoup d'exemples concrets sur nos théorèmes généraux. Bien entendu, on peut examiner de la même manière d'autres cas particuliers de ces théorèmes. Nous avons donné ici les plus intéressants.

Institut de Mathematiques de l'Université de Leningrad.

(Reçu le 17 février 1937.)

## Liste des travaux cités.

S. BANACH. (1) Théorie des opérations linéaires [Warszawa 1932].

GARRETT BIRKHOFF. (1) Integration of functions with values in a Banach space [Transact. Amer. M. S. **38** (1935), 357—378].

S. BOCHNER. (1) Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind [Fundamenta Math. **20** (1933), 262—276].

L. W. COHEN. (1) Transformations of spaces of infinitely many dimensions [Annals of Math. (2) **37** (1936), 326—335].

N. DUNFORD. (1) Integration in general analysis [Transact. Amer. M. S. **37** (1935), 441—453].

— (2) Integration and linear operations [Transact. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 474—494].

P. Fatou. (1) Séries trigonométriques et séries de Taylor [Acta Math. **30** (1906), 335—400].

G. Fichtenholz. (1) Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions continues [Bull. Acad. Roy. Belg. **22** (1936), 26—33].

G. Fichtenholz et L. Kantorovitch. (1) Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées [Studia Math. **5** (1935), 69—98].

A. Fouillade. (1) Sur les substitutions fonctionnelles linéaires [Bull. Acad. Roy. Belg. **20** (1934), 282—290].

M. Fréchet. (1) Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires [C. R. **144** (1907), 1414—1416].

I. Gelfand. (1) Les fonctions abstraites et les formes générales de certaines opérations linéaires continues et totalement continues (en russe). Thèse [Moscou 1935].

— (2) Sur un lemme de la théorie des espaces linéaires [Commun. Inst. Math. Kharkoff (4) **13** (1936), 35—40].

E. Hellinger und O. Toeplitz. (1) Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen [Math. Ann. **69** (1910), 289—330].

D. Hilbert. (1) Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. (1912.)

L. Kantorovitch. (1) Sur les propriétés des espaces semi-ordonnés linéaires [C. R. **202** (1936), 813—816].

— (2) Les formes générales des opérations linéaires qui transforment quelques espaces classiques dans un espace semi-ordonné linéaire arbitraire [C. R. **202** (1936), 1251—1253].

— (3) Lineare halbgeordnete Räume [Recueil Math. (Moscou) (n.s.) **2** (44) (1937) 121—168].

— (4) Sur les espaces semi-ordonnés linéaires et leurs applications à la théorie des opérations linéaires [C. R. U.R.S.S. (1935) **4**, 13—16].

— (5) Sur la théorie générale des opérations dans les espaces semi-ordonnés [C. R. U.R.S.S. (1936) **1**, 283—286].

— (6) Einige Sätze über halbgeordnete Räume allgemeiner Art [C. R. U.R.S.S. (1936) **2**, 7—10].

— (7) Über einige Klassen der linearen Operationen [C. R. U.R.S.S. (1936) **3**, 9—14].

— (8) Allgemeine Formen gewisser Klassen von linearen Operationen [C. R. U.R.S.S. (1936) **3**, 101—106].

G. Lorentz. (1) Funktionale und Operationen in den Räumen der Zahlenfolgen [C. R. U.R.S.S. (1935) **1**, 81—85].

S. Mazur und W. Orlicz. (1) Über Folgen linearer Operationen [Studia Math. **4** (1933), 152—157].

Fr. Riesz. (1) Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen [Math. Ann. **69** (1910), 449—497].

— (2) Sur les opérations fonctionnelles linéaires [C. R. **149** (1909), 974—977].

H. Steinhaus. (1) Additive und stetige Funktionaloperationen [Math. Zeitschr. **5** (1919), 186—221].

B. Vulich. (1) On a generalized notion of convergence in a Banach space [Annals of Math. (2) **38** (1937), 156—174].

— (2) Sur les formes générales de certaines opérations linéaires [Recueil Math. Moscou (n.s.) **2** (**44**) (1937)].

— (3) Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions sommables [Mathematica Cluj **13** (1937), 40—54].

— (4) Sur les espaces métriques d'un certain type [C. R. U.R.S.S. (1935) **4**, 311—314].