ALEXANDER DINGHAS

Bemerkungen zur Ahlforsschen Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen I

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 107-118

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__107_0>

Bemerkungen zur Ahlforsschen Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen I

von

Alexander Dinghas
Berlin

Herrn Alexander Choremi gewidmet.

1. Nevanlinnas Theorie der meromorphen Funktionen [1]) ist in der letzten Zeit durch eine neue Methode bereichert worden, die zu einem einfachen Beweis des sogenannten zweiten Fundamentalsatzes führt. Diese neue Methode, die man Ahlfors [2]) verdankt, besteht darin, daß man bei der Untersuchung der Verteilung derjenigen Stellen, wo die meromorphe Funktion $w(z)$ den bestimmten Wert a annimmt, a als Veränderliche betrachtet und dann den ersten Hauptsatz über ein bestimmtes Wertegebiet integriert. Dazu wird noch eine bestimmte Massenbelegung benutzt, die für die Methode entscheidend ist.

2. Es werden in dieser Arbeit die Ahlforsschen Überlegungen und Formeln verallgemeinert, indem statt des einfachen Argumentensatzes die allgemeine Nevanlinnasche Formel [3]) benutzt wird.

Als Hauptergebnis betrachte ich eine Verallgemeinerung des klassischen Borelschen Satzes, der hier von der Ordnung der betreffenden Funktion unabhängig gemacht wird. Sie umfaßt viele bisherigen Verallgemeinerungen in dieser Richtung. Um dies zu erreichen, ist es notwendig, neue charakteristische Funktionen einzuführen, welche die klassische Nevanlinnasche Funktion $T(r)$ als Spezialfall enthalten.

Ich beschränke mich in dieser Arbeit auf Funktionen, die in

---

[1]) Für eine Zusammenfassende Darstellung der Theorie vergleiche man R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la Théorie des Fonctions méromorphes [Paris, 1929].

[2]) L. Ahlfors, Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen [Comm. Phys.-Math. Soc. Scient. Fenn. 8 (1935), No. 10].

[3]) F. und R. Nevanlinna, Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie [Acta Soc. Scient. Fenn. **50** (1922), No. 5].

der ganzen Ebene meromorph sind. In einer hieran anschließenden Arbeit werde ich zeigen, wie durch die neuen Formeln und Methoden bekannte Sätze aus der Theorie der meromorphen Funktionen in einem Winkelraum neue Form und neuen Inhalt erhalten.

3. *Nevanlinnas Formel und der Ausdruck* $S_\lambda(B)$. B sei ein einfach zusammenhängender Bereich und $f(z)$ eine dort meromorphe Funktion von $z = re^{i\varphi}$. Mit $z(c)$ bezeichnen wir die Nullstellen von $f(z) - c$. Ist $\lambda(z)$ eine innerhalb und auf der Berandung Γ von B nebst ihren partiellen Ableitungen der zwei ersten Ordnungen stetige reelle Funktion des Punktes z, so haben F. und R. Nevanlinna [4]) folgende Formel bewiesen

$$
\begin{aligned}
\sum_B \lambda(z(0)) - \sum_B \lambda(z(\infty)) &= \frac{1}{2\pi} \iint_B \log|f| \, \Delta\lambda \, d\sigma \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left(\log|f| \frac{\partial \lambda}{\partial \nu} - \lambda \frac{\partial}{\partial \nu} \log|f| \right) ds,
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

wobei $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die nach der inneren Normalen von Γ genommene Ableitung bedeutet, $d\sigma$ das Flächenelement, ds das Bogenelement von Γ und Δ der Laplacesche Operator

$$
\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}
$$

ist. Die Summe links wird über alle in B liegenden Nullstellen und Pole von $f(z)$ erstreckt.

Nun setzen wir allgemein

$$
[a, b] = \frac{|a-b|}{\sqrt{(1+|a|^2)(1+|b|^2)}},
$$

wobei a und b beliebige komplexe Zahlen sein können, und bezeichnen $[a, b]$ als die Kugelentfernung von a und b. [5])

Ist nun $w(xz)$ die zu untersuchende in der ganzen Ebene meromorphe Funktion, so wenden wir die Formel (3.1) auf die Funktion

$$
f(z) = \sqrt{\frac{1+|b|^2}{1+|a|^2}} \cdot \frac{w(z)-a}{w(z)-b}
$$

an und erhalten wegen

$$
|f(z)| = \frac{[w, a]}{[w, b]}
$$

---

[4]) loc. cit.

[5]) Ahlfors, loc. cit. S. 3.

nach einfachen Zwischenrechnungen

$$
\begin{aligned}
(3.2)\qquad &\sum_B \lambda(z(a)) + \frac{1}{2\pi}\iint_B \log\frac{1}{[w,a]}\,\Delta\lambda\,d\sigma + \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left(\log\frac{1}{[w,a]}\frac{\partial\lambda}{\partial\nu} - \lambda\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{1}{[w,a]}\right) ds \\
&= \sum_B \lambda(z(b)) + \frac{1}{2\pi}\iint_B \log\frac{1}{[w,b]}\,\Delta\lambda\,d\sigma + \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left(\log\frac{1}{[w,b]}\frac{\partial\lambda}{\partial\nu} - \lambda\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{1}{[w,b]}\right) ds\,.
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich, daß die Größe

$$
\begin{aligned}
S_\lambda(b,a) = \sum_B \lambda(z(a)) &+ \frac{1}{2\pi}\iint_B \log\frac{1}{[w,a]}\,\Delta\lambda\,d\sigma - \\
&- \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^2\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\lambda}\log\frac{1}{[w,a]}\right) ds
\end{aligned}
$$

von a unabhängig ist, d.h. es gilt

$$
(3.3)\qquad S_\lambda(B,a) = S_\lambda(B,b) = S_\lambda(B).
$$

4. Um nun $S_\lambda(B)$ zu berechnen, multiplizieren wir die Formel (3.2) mit einer positiven Funktion $\varrho(a)$ und integrieren beide Seiten über die ganze Riemannsche Kugel A, deren Flächenelement hier mit $d\omega(a)$ bezeichnet werden möge. Diese Kugel wird so gewählt, daß sie die komplexe Ebene im Ursprung berührt und den Durchmesser eins besitzt. Legen wir nun der Funktion $\varrho(a)$ die Bedingung

$$
(4.1)\qquad \iint_A \varrho(a)d\omega(a) = 1
$$

auf, so erhalten wir aus (3.2) und (3.3)

$$
\begin{aligned}
(4.2)\qquad S_\lambda(B) = \iint_A \sum_B \lambda(z(a))\,\varrho(a)\,d\omega(a) &+ \frac{1}{2\pi}\iint_B P_\varrho(w)\,\Delta\,\lambda\,d\sigma \\
&- \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \lambda^2\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{P_\varrho(w)}{\lambda(z)}\right) ds\,,
\end{aligned}
$$

wo zur Abkürzung mit $P_\varrho(w)$ die Größe

$$
P_\varrho(w) = \iint_A \log\frac{1}{[w,a]}\,\varrho(a)\,d\omega(a)
$$

bezeichnet wurde. Nun ist

$$\iint\limits_{A}\sum_{B}\lambda(z(a))\,\varrho(a)\,d\omega(a)=\iint\limits_{B}\lambda(z)\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\varrho(w)\,d\sigma\,,\tag{4.3}$$

wir erhalten also

$$\begin{aligned}S_\lambda(B)=&\iint\limits_{B}\lambda(z)\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\varrho(w)\,d\sigma\\&+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{B}P_\varrho(w)\,\Delta\,\lambda\,d\sigma-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\lambda^2\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{P_\varrho(w)}{\lambda}\right)ds\,,\end{aligned}\tag{4.4}$$

womit die Formel (3.3) jetzt erst ihre rechte Bedeutung gewinnt.

Wählt man $\lambda(z)\equiv 1$, so gelangt man zu den Ahlforsschen Ergebnissen.

5. *Die charakteristische Funktion* $T_\lambda(r)$. Wir wählen jetzt als B den Kreis

$$|z|\leqq r\tag{5.1}$$

und als $\lambda(z)$ eine nur von r abhängige elementare Funktion[6]) mit den folgenden Eigenschaften:

(5.2)

1) $\lambda(r)$ ist für $r\geqq r_0>0$ positiv und es ist $\lim\limits_{r\to\infty}\lambda(r)=\infty$.

2) Für $r\geqq 0$ ist $\Delta\lambda>0$, d.h. $\lambda(r)$ ist eine konvexe Funktion von $\log r$.

3) Für $r\geqq r_0>0$ ist $\lambda'(r)>0$.

4) $\lambda(r)$ wächst höchstens wie $\log r$, d.h. es ist $\log r=O(\lambda(r))$.

---

[6]) Man vergleiche dazu das Buch von Hardy, Orders of infinity [2. ed., Cambridge 1924], 17.

Es handelt sich hier um für $x\geqq 0$ reelle eindeutige Funktionen, die durch endlich oft vorgenommene Anwendung der gewöhnlichen algebraischen Operationen (d.h. $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt[n]{\;}$) und der transzendenten Operationen exp (), log () auf eine reelle Variable x gewonnen werden können. Von den Eigenschaften solcher Funktionen führe ich die folgenden an:

1. Ist f eine elementare Funktion, so ist auch f' eine solche.

2. Es existiert immer

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha,\qquad 0\leqq\alpha\leqq\infty.$$

3. Sind f und g zwei elementare Funktionen, so existiert stets

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta,\qquad 0\leqq\beta\leqq\infty.$$

Setzen wir in unserer Formel (4.2) zuerst $\varrho(a) = \frac{1}{\pi}$, so erhalten wir

$$S_\lambda(r) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_B \lambda(z) \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2} d\sigma \tag{5.3}$$

und aus (3.2) und (3.3)

$$\begin{aligned} S_\lambda(r) &= \frac{1}{\pi} \iint\limits_B \lambda(z) \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2} d\sigma = \Lambda_\lambda(r, a) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \iint\limits_B \log \frac{1}{[w,a]} \Delta \lambda \, d\sigma + \frac{r\lambda^2(r)}{2\pi} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{2\pi} \log \frac{1}{[w,a]} d\varphi \right), \end{aligned} \tag{5.4}$$

wobei

$$\Lambda_\lambda(r, a) = \sum_{|z(a)| \leqq r} \lambda(z(a)).$$

Setzen wir

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log \frac{1}{[w(re^{i\varphi}), a]} d\varphi$$

und bemerken wir, daß das zweite Integral rechts in (5.4) gleich

$$\int\limits_0^r m(t) \, (t\lambda')' dt$$

ist, so ergibt sich

$$S_\lambda(r) = \Lambda_\lambda(r, a) + \int\limits_0^r m(t, a) \, (t\lambda')' dt + \left(\frac{m(r, a)}{\lambda(r)} \right)' r\lambda^2$$

und daraus durch Integration von $r = r_0 > 0$ bis $r = r$

$$\begin{aligned} \int\limits_{r_0}^r \frac{S_\lambda(t)}{t\lambda^2} dt &= \int\limits_{r_0}^r \frac{\Lambda_\lambda(t, a)}{t\lambda^2} dt + \int\limits_{r_0}^r \frac{dt}{t\lambda^2} \int\limits_0^t m(\xi, a) \, (\xi\lambda')' d\xi \\ &+ \frac{m(r, a)}{\lambda(r)} + O(1). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Die Größe

$$T_\lambda(r) = \int\limits_{r_0}^r \frac{S_\lambda(t)}{t\lambda^2} dt \tag{5.6}$$

spielt eine wichtige Rolle und liefert Aussagen über die Dichtigkeit der a-Stellen einer meromorphen Funktion in Zusammenhang mit ihrem Wachstum. Im folgenden schreiben wir noch

$$N_\lambda(r, a) = \int\limits_{r_0}^r \frac{\Lambda_\lambda(t, a)}{t\lambda^2} dt, \tag{5.7}$$

$$(5.8)\qquad m_\lambda(r, a) = \frac{m(r, a)}{\lambda(r)} + \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{t\lambda^2} \int\limits_0^t m(\xi, a)\,(\xi\lambda')'d\xi$$

und erhalten somit

$$(5.9)\qquad T_\lambda(r, a) = m_\lambda(r, a) + N_\lambda(r, a)$$

den ersten Fundamentalsatz in der Form

$$(5.10)\qquad T_\lambda(r) = T_\lambda(r, a) + O(1).$$

Für $\lambda \equiv 1$ ergibt sich aus (5.10) bis auf das $O(1)$ der erste Fundamentalsatz in der Ahlforsschen Fassung.

Der allgemeine Fall einer beliebigen Belegung $\varrho(a)$, mit der Bedingung (4.1) natürlich, ist für das spätere von großer Bedeutung. Setzen wir

$$S_\lambda^{(\varrho)}(r) = \iint\limits_{|z| \leqq r} \lambda(z) \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2} \varrho(w)\, d\sigma,$$

so erhalten wir aus (4.4) zunächst die Gleichung

$$(5.11)\qquad \int\limits_{r_0}^{r} \frac{S_\lambda^{(\varrho)}(t)}{t\lambda^2} dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{t\lambda^2} \iint\limits_{|z| \leqq t} P_\varrho(w)\, \Delta\lambda\, d\sigma + \frac{1}{2\pi\lambda} \int\limits_0^{2\pi} P_\varrho(w)\, d\varphi = T_\lambda(r) + O(1)$$

und daraus durch Fortlassung negativer Größen die wichtige Ungleichung

$$(5.12)\qquad \int\limits_{r_0}^{r} \frac{S_\lambda^{(\varrho)}(t)}{t\lambda^2} dt \leqq T_\lambda(r) + O(1),$$

die aber erst in 7 gebraucht wird.

6. Der Fall der meromorphen Funktionen endlicher Ordnung wird leicht durch die Wahl

$$\lambda(r) = r^k, \qquad k > 0$$

erledigt. Man erhält nämlich aus (5.5) die Beziehung

$$(6.1)\qquad T_k(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{S_k(t)}{t^{2k+1}} dt = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{A_k(t, a)}{t^{2k+1}} dt + \frac{k}{2} \int\limits_{r_0}^{r} \left\{ \frac{1}{t^{2k}} - \frac{1}{r^{2k}} \right\} t^{k-1} m(t, a)\, dt + \frac{m(r, a)}{r^k} + O(1),$$

oder, wenn man die Definition von $A_k(t, a)$ berücksichtigt,

$$(6.2)\qquad T_k(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{S_k(t)}{t^{2k+1}} dt = \frac{1}{2} \int\limits_{r_0}^{r} \left\{ \frac{1}{t^{2k}} + \frac{1}{r^{2k}} \right\} t^{k-1} n(t, a)\, dt + \frac{m(r, a)}{r^k} + \frac{k}{2} \int\limits_{r_0}^{r} \left\{ \frac{1}{t^{2k}} - \frac{1}{r^{2k}} \right\} t^{k-1} m(t, a)\, dt + O(1).$$

Aus dieser Formel kann leicht der folgende Satz gefolgert werden:

Ist für ein k die Größe

$$T_k(r)=\int_{r_0}^{r}\frac{S_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt$$

mit

$$S_k(r)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|z|\leqq r}|z|^k\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,d\sigma$$

beschränkt, so konvergieren für jedes a die beiden Integrale

$$\int_{r_0}^{\infty}\frac{n(t,a)}{t^{k+1}}\quad und\quad\int_{r_0}^{\infty}\frac{m(t,a)}{t^{k+1}}\,dt\,.$$

Das Umgekehrte ist trivial. Analoge Sätze können für die allgemeineren Funktionen der Form

$$\lambda(r)=r^k\prod_{\nu=1}^{n}(\log_\nu r)^{\alpha_\nu}\qquad k>0,\quad \alpha_\nu\lesseqgtr 0$$

hergeleitet werden.

7. *Über die Dichtigkeit der a-Stellen einer meromorphen Funktion.* Jetzt versuchen wir, Ahlfors' Ungleichung (12) mit unseren Mitteln zu verallgemeinern.

Bezeichnen wir mit * die für die Ableitungen $w'(z)$ gebildeten Ausdrücke, so haben wir nach (3.1)

$$\begin{aligned}\overset{*}{\Lambda}_\lambda(r,0)-\overset{*}{\Lambda}_\lambda(r,\infty)=&-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\log|w'|\frac{\partial\lambda}{\partial r}-\lambda\frac{\partial}{\partial r}\log|w'|\right)r\,d\varphi\\ &+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|z|\leqq r}\log|w'|\,\Delta\lambda\,d\sigma\,.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Wir führen jetzt die Größe

$$\mu(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{|w'|}{1+|w|^2}\,d\varphi$$

ein und erhalten aus (7.1), wenn wir noch die Beziehung

$$r\lambda^2T'_\lambda(r)=\Lambda_\lambda(r,\infty)+\int_0^r m(t,\infty)(t\lambda')'dt+r\lambda^2\cdot\left(\frac{m(r,\infty)}{\lambda(r)}\right)'$$

berücksichtigen,

$$\begin{aligned}\overset{*}{\Lambda}_\lambda(r,0)-\overset{*}{\Lambda}_\lambda(r,\infty)+2\Lambda_\lambda(r,\infty)&=\overset{*}{\Lambda}_\lambda(r)\\ &=r\lambda^2\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu(r)}{\lambda(r)}\right)+\int_0^r\mu(t)\,(t\lambda')'\,dt+2r\lambda^2\,T'_\lambda(r)\end{aligned}$$

oder durch Integration von $r = r_0$ bis $r = r$

$$(7.2)\quad \frac{\mu(r)}{\lambda(r)} + \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t\lambda^2} \int_0^t \mu(\xi)\,(\xi\lambda')'\,d\xi = N_\lambda^*(r) - 2T_\lambda(r) + O(1),$$

wobei wir

$$\int_{r_0}^{r} \frac{A_\lambda^*(t)}{t\lambda^2} = N_\lambda^*(r)$$

gesetzt haben. Setzen wir nun weiter

$$2\mu(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left\{\frac{|w|^2}{(1+|w|^2)^2}\,\varrho(\omega)\right\} d\varphi$$
$$- \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \varrho(w)\,d\varphi = \sigma(r) - \tau(r),$$

so ergibt sich aus (7.2)

$$(7.3)\quad \begin{aligned} \frac{\tau(r)}{\lambda(r)} + \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t\lambda^2} \int_0^t \tau(\xi)\,(\xi\lambda')'d\xi &= 2\big(2T_\lambda(r) - N_\lambda^*(r)\big) \\ + \frac{\sigma(r)}{\lambda(r)} + \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t\lambda^2} \int_0^t \sigma(\xi)\,(\xi\lambda')'d\xi &+ O(1). \end{aligned}$$

Andererseits sei

$$v_\varrho(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{3\pi} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,\varrho(w)\,d\varphi.$$

Die elementare Ungleichung

$$(7.4)\quad \frac{1}{\beta-\alpha}\int_0^{\beta} \log f(x)dx \leqq \log\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^{\beta} f(x)\,dx\right)$$

liefert dann

$$\log v_\varrho(r) \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left\{\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,\varrho(w)\right\} d\varphi = \sigma(r),$$

also wird aus (7.3)

$$(7.5)\quad \begin{aligned} \frac{\tau(r)}{\lambda(r)} + \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t\lambda^2} \int_0^t \tau(\xi)(\xi\lambda')'d\xi &\leqq 2\big(2T_\lambda(r) - N_\lambda^*(r)\big) \\ + \frac{\log v_\varrho(r)}{\lambda(r)} + \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{t\lambda^2} \int_0^t \log v_\varrho(\xi)\,(\xi\lambda')'d\xi &+ O(1). \end{aligned}$$

Jetzt zeigen wir:

Divergiert $T_\lambda(r)$, so sind die beiden letzten Ausdrücke auf der rechten Seite dieser Ungleichung $O(\log T_\lambda(r))$ mit Ausnahme höchstens von Intervallen, deren Gesamtlänge endlich ist.

Der Beweis kann so geführt werden:

Es bezeichne $A(r)$ die Größe $\frac{1}{2} S_\lambda^{(\varrho)}(r)$, d.h. es sei

$$A(r) = \int_0^r t\lambda v_\varrho(t)\, dt \tag{7.6}$$

und

$$B(r) = \int_{r_0}^r \frac{A(t)}{t\lambda^2}\, dt. \tag{7.7}$$

Nach (5.12) ist, da $T_\lambda(r)$ divergiert,

$$B(r) = \frac{1}{2}\left(1+o(1)\right) T_\lambda(r). \tag{7.8}$$

Nun schließen wir so: Für die Intervalle I_r, in denen die Ungleichung

$$A(r) > r\lambda^2(r) B^2(r)$$

gilt, ist

$$\int_{I_r} dr = \int_{I_r} \frac{r\lambda^2}{A} dB < \int_{I_r} \frac{dB}{B^2} < +\infty.$$

Die Gesamtlänge dieser Intervalle ist also endlich. Das gleiche gilt für die Intervalle I_r' mit der Ungleichung $v_\varrho(r) > A^2_{(r)}$. Denn es ist

$$\int_{I_r'} dr = \int_{I_r'} \frac{dA}{t\lambda v_\varrho} \leqq o(1) + \int_{I_r'} \frac{dA}{A^2} < +\infty\,.$$

Das Endergebnis ist folgendes: Für die Werte von r, die weder zu den I_r noch zu den I_r' gehören, d. h. für alle Werte von r mit Ausnahme von Intervallen endlicher Totallänge gilt

$$v_\varrho(r) < r^2 \lambda^4(r)\left(1+o(1)\right) T_\lambda^4(r)\,,$$

also

$$\frac{\log v_\varrho(r)}{\lambda(r)} = O\left(\log T_\lambda(r)\right)\,.$$

8. Nun bleibt dasselbe für das Integral

$$C(r) = \int^r \frac{dt}{t\lambda^2} \int_0^t \log v_\varrho(\xi)(\xi\lambda')' d\xi$$

zu zeigen [7]). Dem Beweis schicken wir das folgende Lemma voraus:

Lemma. Ist $\lambda(r)$ eine elementare in r konvexe Funktion im Sinne von 6, so ist

$$(8.1)\qquad \lambda^{(\nu)}(r) = o\big(\lambda^{1+\varepsilon}(r)\big)\,.$$

Da mit λ auch λ' eine elementare Funktion ist, genügt es, die Behauptung nur für die erste Ableitung zu beweisen.

Da λ konvex in r ist, folgt

$$\lambda'(r) \leqq \frac{\lambda\left(r+\frac{1}{\log\lambda(r)}\right)-\lambda(r)}{\frac{1}{\log\lambda(r)}} \leqq \lambda\left(r+\frac{1}{\log\lambda(r)}\right)\log\lambda(r)\,.$$

Nun gilt nach Borel die Ungleichung

$$\lambda\left(r+\frac{1}{\log\lambda(r)}\right) < \lambda^{1+\varepsilon}(r)$$

mit Ausnahme von Intervallen, deren Gesamtlänge höchstens endlich ist. Außerhalb dieser Intervalle ist also für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lambda'(r) < \lambda^{1+\varepsilon}(r)$$

und somit dort

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\lambda'}{\lambda^{1+\varepsilon}} \to 0\,.$$

Wegen der Eigenschaft (6.3) gilt aber diese Beziehung für alle r.

Wir kommen zur Betrachtung von $C(r)$. Führen wir $\xi\lambda'(\xi)=\eta$ als neue Variable ein, was wegen $(\xi\lambda')' > 0$ eindeutig möglich ist, und benutzen wir (7.4), so wird

$$\begin{aligned}
C(r) &= \int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t\lambda^2}\int_0^t \log v_\varrho(\xi)(\xi\lambda')'\,d\xi\\
&= \int_{r_0}^{r}\frac{\lambda'}{\lambda^2}dt\cdot\frac{1}{t\lambda'(t)}\int_0^{t\lambda'(t)}\log v_\varrho(\xi)\,d\eta\\
&\leqq \int_{r_0}^{r}\frac{\lambda'}{\lambda^2}dt\cdot\log\left\{\frac{1}{\lambda' t}\int_0^t v_\varrho(\xi)(\xi\lambda')'\,d\xi\right\}\\
&= \int_{r_0}^{r}\frac{\lambda'}{\lambda^2}dt\cdot\log\left\{\frac{1}{\lambda' t}\int_0^t v_\varrho(\xi)(\lambda'+\xi\lambda'')\,d\xi\right\},
\end{aligned}$$

---

[7]) Meine ursprüngliche Abschätzung für das Integral war $o\big(T_\lambda(r)\big)$. Meinem Freunde Heinz Westphal, der das Manuskript durchgesehen hat, gelang es jedoch, ebenfalls unter Benutzung des Lemmas (8.1) die Abschätzung $O\,\big(\log T_\lambda(r)\big)$ zu gewinnen.

also nach dem Lemma (8.1) etwa

$$C(r) = O\left(\int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda'}{\lambda^2}\, dt \cdot \log\left\{\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{\lambda' t} \int\limits_0^t v_\varrho(\xi)\, \xi\lambda'\, d\xi\right\}\right)$$

$$= O\left(\int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda'}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\, dt\right) + O\left(\int\limits_{r_0}^{r} \frac{\lambda'}{\lambda^2} \log \frac{A(t)}{t\lambda'}\, dt\right).$$

Da $\lambda' > 0$ ist, kann $-\dfrac{1}{\lambda(t)} = \vartheta$ eindeutig als neue Integrationsvariable eingeführt werden. Wir erhalten dann durch nochmalige Anwendung von (7.4)

$$C(r) = O(1) + O\left(\int\limits_{-\frac{1}{\lambda(r_0)}}^{-\frac{1}{\lambda(r)}} \log \frac{A(t)}{t\lambda'}\, d\vartheta\right)$$

$$= O(1) + O\left(\left(\frac{1}{\lambda(r_0)} - \frac{1}{\lambda(r)}\right) \log\left\{\frac{1}{\frac{1}{\lambda(r_0)} - \frac{1}{\lambda(r)}} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{A(t)}{t\lambda'}\, \frac{\lambda'}{\lambda^2}\, dt\right\}\right)$$

$$= O(1) + O(\log B(r)),$$

also endlich nach (7.8)

$$C(r) = O(\log T_\lambda(r)).$$

9. *Der zweite Hauptsatz.* Als Endresultat hat sich also ergeben: Divergiert $T'(r)$, so gilt mit eventueller Ausnahme von Intervallen endlicher Totallänge

$$\frac{\tau(\nu)}{\lambda(r)} + \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dt}{t\lambda^2} \int\limits_0^t \tau(\xi)(\xi\lambda')'\, d\xi$$
$$\leqq 2(2T_\lambda(r) - N_\lambda^*(r)) + O(\log T_\lambda(r)). \tag{9.2}$$

Nun wählen wir mit Ahlfors

$$\log \varrho(w) = 2 \sum_{\nu=1}^{g} \log \frac{1}{[w, a_\nu]} - \alpha \log\left(\sum_{\nu=1}^{g} \log \frac{1}{[w, a_\nu]}\right) - 2C,$$

wobei $\alpha > 1$ angenommen werden muß, damit $\tau(r)$ überhaupt existiert. Die Konstante C bestimmt sich dann aus (4.1). Mit dieser Wahl von $\varrho(w)$ wird dann, wenn man (5.8) berücksichtigt,

$$m_\lambda(r) = \sum_{\nu=1}^{g} m_\lambda(r, a_\nu)$$

setzt und wie in 8 die Ungleichung (7.4) wiederholt anwendet,

$$\frac{\tau(r)}{\lambda(r)}+\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t\lambda^2}\int_0^t \tau(\xi)\,(\xi\lambda')'\,d\xi$$

$$=2m_\lambda(r)-\frac{2C}{\lambda(r_0)}-\frac{\alpha}{2\pi\lambda(r)}\int_0^r \log\left(\sum_{\nu=1}^{g}\log\frac{1}{[w,a_\nu]}\right)d\varphi$$

$$-\frac{\alpha}{2\pi}\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t\lambda^2}\int_0^t(\xi\lambda')'d\xi\int_0^{2\pi}\log\left(\sum_{\nu=1}^{g}\log\frac{1}{[w,a_\nu]}\right)d\varphi$$

$$\geqq 2m_\lambda(r)-\frac{2C}{\lambda(r_0)}-\frac{d}{\lambda(r)}\log\sum_{\nu=1}^{g}m(r,a_\nu)$$

$$-\alpha\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t\lambda^2}\int_0^t(\xi\lambda')'\log\left(\sum_{\nu=1}^{g}m(r,a_\nu)\right)d\xi$$

$$\geqq 2m_\lambda(r)-\frac{2C}{\lambda(r_0)}-\alpha\log\left(\frac{1}{\lambda}\sum_{\nu=1}^{g}m(r,a_\nu)\right)$$

$$-\alpha\left(\frac{1}{\lambda(r_0)}-\frac{1}{\lambda(r)}\right)\log\left\{\frac{1}{\frac{1}{\lambda(r_0)}-\frac{1}{\lambda(r)}}\sum_{\nu=1}^{g}\int_{r_0}^{r}\frac{dt}{t\lambda^2}\int_0^t m(r,a_\nu)\,(\xi\lambda')'\,d\xi\right\}.$$

Jedes der beiden letzten Glieder ist offenbar $O(\log m_\lambda(r))$. Wir erhalten also endlich aus (9.2)

$$m_\lambda(r)\leqq 2T_\lambda(r)-N_\lambda^*(r)+O(\log m_\lambda(r))+O(\log T_\lambda(r)). \tag{9.3}$$

Erinnern wir uns jetzt an (5.7) und (5.9), und wenden wir den ersten Fundamentalsatz auf die q Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_q$ an, so folgt durch Addition

$$q\,T_\lambda(r)=m_\lambda(r)+\sum_{\nu=1}^{q}N(r,a_\nu)+O(1). \tag{9.4}$$

Man entnimmt daraus erstens

$$m_\lambda(r)=O(T_\lambda(r))$$

und erhält zweitens durch Einsetzen in (9.3)

$$(q-2)\,(1+o(1))\,T_\lambda(r)\leqq\sum_{\nu=1}^{q}N_\lambda(r,a_\nu)-N_\lambda{}^*(r). \tag{9.5}$$

Damit nimmt der Satz von Borel folgende Form an:

Die Ausdrücke $T_\lambda(r)$ und $N_\lambda(r,a)$ sind zugleich beschränkt oder nicht beschränkt. Eine Ausnahme kann höchstens für zwei Werte von a stattfinden.

Dieser Satz gilt für jede elementare Interpolationsfunktion $\lambda(r)$ mit (5.2) und ist von der Ordnung der Funktion $w(z)$ unabhängig.

(Eingegangen den 27. Juni 1936.)