COMPOSITIO MATHEMATICA

HANS FREUDENTHAL

Zum intuitionistischen Raumbegriff

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 82-111
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__82_0>

Zum intuitionistischen Raumbegriff

von

Hans Freudenthal

Amsterdam

Im intuitionistischen Aufbau der Topologie scheinen wesentliche Schwierigkeiten nur bei den Grundlagen aufzutauchen: man muß den Raumbegriff erklären, und man muß in natürlicher Weise *die* Teilspezies des Raumes auslesen, deren intuitionistische Untersuchung möglich und nötig ist. In § 1 seiner Note „Intuitionistische Einführung des Dimensionsbegriffes" [1]), die im Übrigen der intuitionistischen Formulierung seiner dimensionstheoretischen Untersuchungen [2]) gewidmet ist, hat L. E. J. Brouwer diese Schwierigkeiten überwunden; er hat dort den Begriff der katalogisiert-kompakten Spezies [3]) (des intuitionistischen Analogons des kompakten separablen metrischen Raumes) eingeführt und den besonders geistvollen und tiefliegenden, aber doch natürlichen Begriff der katalogisierten Teilspezies [4]).

Die katalogisiert-kompakten Spezies werden erklärt durch Vervollständigung metrisierter Folgen, die gewissen Bedingungen genügen. Daß der grundlegende *topologische* Begriff *metrisch* eingeführt wird, kann als Schönheitsfehler empfunden werden. Darüber hinaus ist aber wohl prinzipiell interessant, zu wissen, ob man die intuitionistische Topologie ebenso wie die klassische metriklos aufbauen kann [5]). Allerdings kann man nicht erwarten, daß sich die Hausdorffschen Axiome [6]) — sei es auch stark modifiziert — ins Intuitionistische übersetzen lassen. Nun kennt man

---

[1]) Proc. Akad. Amsterdam **29** (1926), 855—863.

[2]) Journal f. r. u. angew. Math. **142** (1913), 146—152; siehe auch Proc. Akad. Amsterdam **26** (1923), 795—800. **26** (1924), 635—638.

[3]) von uns wiedergegeben in 7, 1.

[4]) siehe [34]). Für Teilspezies der Ebene findet sich der Begriff bereits früher: L. E. J. Brouwer [Verhandelingen Akad. Amsterdam (Eerste sectie) **12**, No. 7 (S. 13)].

[5]) Zu Unrecht zweifelt A. Heyting [Ergebnisse **3** (1934), 404, letzte und vorletzte Zeile] an dieser Möglichkeit.

[6]) siehe F. Hausdorff, Mengenlehre [2. Aufl., Berlin & Leipzig 1927], § 40.

aber durch Alexandroff [7]) eine metriklose Definition kompakter Räume mit Hilfe von Folgen elementarer Gebilde (Projektionsspektren). Tatsächlich hat man die Alexandroffsche Spektraldarstellung nicht einmal nötig, um kompakte separable Räume zu erzeugen; man braucht nur die endlichen Inzidenzrelationen in einer immer feiner werdenden Folge abgeschlossener Teilmengen A_n zu kennen (d.h. zu wissen, welche Durchschnitte je endlich vieler der A_n leer und welche nicht leer sind), um den ganzen Raum zu kennen.

Diese letzte Bemerkung rührt von Herrn W. Hurewicz her, der sie mir vor längerer Zeit gesprächsweise mitteilte und dabei die Vermutung äußerte, daß sie sich zur intuitionistischen Raumdefinition auswerten lasse. Wir werden im Folgenden zeigen, daß sich wirklich so das intuitionistische Analogon des kompakten separablen Raumes erzeugen läßt. Wir gehen von einer unendlichen Folge von Dingen A_n aus, in der je endlich vielen der A_n ganz formal einer der Ausdrücke $=0$ und $\neq 0$ zugeordnet ist, wobei gewissen Bedingungen Genüge geschehen sein soll. Unendliche Teilfolgen der A_n heißen — um es klassisch zu formulieren — Punkte, wenn ihren A_n zu je endlich vielen der Ausdruck $\neq 0$ zugeordnet ist (intuitionistisch muß man — es liegt hier eine *typische* Schwierigkeit vor — den Punktbegriff etwas weiter fassen). Was man dann unter zusammenfallenden Punkten und unter Punktkernen zu verstehen hat, liegt auf der Hand; die Spezies der Punktkerne wird der zu definierende „Raum".

Über die so erklärten Räume lassen sich die wichtigsten Sätze beweisen, die man zum intuitionistischen Aufbau der Topologie braucht; insbesondere läßt sich der Urysohnsche Metrisationssatz [8]) übertragen, und es läßt sich sogar zeigen, daß die betrachteten Räume zusammenfallen mit den von L. E. J. Brouwer eingeführten katalogisiert-kompakten Spezies [9]), die also damit metriklos definiert sind. Auch der Begriff der katalogisierten Teilspezies [10]), der ein tiefergehendes topologisches Studium erst ermöglicht, läßt sich nun metriklos erfassen; es ergibt sich dabei ferner seine topologische Invarianz. Besonders hingewiesen sei noch auf den Begriff der ausgeprägten Lage (7, 11) zweier katalogisierter Teilspezies, der für allerlei intuitionistische Untersuchungen nützlich ist.

[7]) Siehe etwa Annals of Math. 30 (1928), 1—87.

[8]) Math. Ann.

[9]) siehe [3]).

[10]) siehe [4]).

Auch vom nicht-intuitionistischen Standpunkt aus dürften die folgenden Ausführungen von Interesse sein; typisch intuitionistische Schwierigkeiten tauchen, wenn man von dem rein intuitionistischen Begriff der katalogisierten Teilspezies absieht, nur an zwei Stellen [11]) auf.

1. Die Axiome.

Eine Folge [11a]) von Dingen A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ heißt katalogisiert, wenn jedem A_n der Ausdruck $\neq 0$ und jedem $A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k}$ der Ausdruck $= 0$ oder der Ausdruck $\neq 0$ zugeordnet ist (niemals aber beide Ausdrücke); Schreibweise

$$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} = 0$$

oder $$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} \neq 0.$$

Dabei müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

D (*Durchschnittsbildung*): Ist

$$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} \neq 0$$

und $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l$ eine Variation von $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ mit oder ohne Wiederholung, so ist auch

$$A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_l} \neq 0.$$

(Aus $$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} = 0$$

folgt also insbesondere $A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} A_{\mu_{k+1}} = 0$.)

F (*Fortsetzbarkeit*): Ist

$$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} \neq 0,$$

so läßt sich ein $m \neq \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ angegeben mit

$$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} A_m \neq 0.$$

T (*Trennbarkeit*): Ist

$$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} \neq 0, \quad A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_l} \neq 0,$$

aber $$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_l} = 0,$$

so läßt sich ein $t_0(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k;\ \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l)$ angeben, derart daß für alle $t \geqq t_0$ aus

---

[11]) siehe [20]) und [41]).

[11a]) Diese Folge braucht nicht gesetzmäßig festgelegt zu sein, sondern kann mehr oder minder frei *werden*.

$$A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k} A_t \neq 0$$

folgt

$$A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_l} A_t = 0.$$

K (*Kompaktheit*): Zu jedem k läßt sich ein l angeben, derart daß für jedes ν mindestens einem der Ausdrücke

$$A_k A_\nu,\ A_{k+1} A_\nu,\ \ldots,\ A_{k+l} A_\nu$$

$\neq 0$ zugeordnet ist.

Bemerkung: D sagt aus, daß sich die Bildung von $A_{\mu_1} A_{\mu_2} \ldots A_{\mu_k}$ hinsichtlich der Zuordnung von $= 0$ und $\neq 0$ wie die mengentheoretische Durchschnittsbildung verhält, wenn man $= 0$ als „leer" und $\neq 0$ als „nicht leer" deutet. Wir werden daher derartige Ausdrücke auch Produkte nennen und, wo es nötig ist, sie mittels Multiplikationspunkten abteilen. — Die Bezeichnung des Axioms F ist wohl ohne Weiteres verständlich; die von T und K werden später einleuchten.

Bemerkung: Daß der Begriff der katalogisierten Folge sinnvoll ist, zeigt das Beispiel der abgeschlossenen Intervalle mit rationalen Endpunkten zwischen 0 und 1, wenn man die Produktbildung als Durchschnitt usw. deutet. Allgemeiner kann man sich unter den A_n (nichtintuitionistisch formuliert) ein immer feiner werdendes Überdeckungssystem abgeschlossener Mengen eines kompakten Raumes vorstellen.

2. Inklusionen.

1. Wir bilden rein formal mit Hilfe der Addition und Multiplikation alle möglichen endlichen Verbindungen der A_n (die im Folgenden stets als katalogisierte Folge vorausgesetzt werden), Polynome genannt und mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet (dazu gehört auch die Summe, die aus null Summanden besteht). Einem Polynom soll dann und nur dann der Ausdruck $\neq 0$ zugeordnet werden, wenn es sich unter Benutzung der kommutativen, assoziativen und distributiven „Gesetze" umformen läßt [12]) in eine Summe, unter deren Summanden mindestens einer vorkommt, dem $\neq 0$ zugeordnet ist.

2. Satz: Die Axiome DFTK bleiben richtig, wenn man in ihnen die A durch P ersetzt, ausgenommen das A_m in F, das A_t in T und die $A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{k+l}$ in K. (Beweis klar.)

[12]) Zwei ineinander umformbare Ausdrücke setzen wir also nicht einander gleich, sondern ordnen ihnen nur denselben Ausdruck $= 0$ oder $\neq 0$ zu, was aber prinzi piell auf dasselbe hinauskommt.

3. Satz: Axiom F läßt sich in der Weise verschärfen, daß, wenn $P_1 P_2 \ldots P_k \neq 0$ ist, sich eine *unendliche Folge* von Zahlen m angeben läßt, für die stets $P_1 P_2 \ldots P_k A_m \neq 0$ ist.

Beweis: Wegen F kann man ein m_1 bestimmen und, wenn $m_1, \ldots, m_l$ bereits (paarweise verschieden) bestimmt sind, ein (von ihnen allen verschiedenes) m_{l+1} bestimmen, so daß $P_1 P_2 \ldots P_k A_{m_1} \ldots A_{m_{l+1}} \neq 0$ ist; nach D ist dann $P_1 P_2 \ldots P_k A_m \neq 0$ für die unendlich vielen $m = m_\lambda$.

4. Satz: Ist für unendlich viele m zugleich

$$P_1 A_m \neq 0 \text{ und } P_2 A_m \neq 0,$$

so ist auch

$$P_1 P_2 \neq 0.$$

Beweis: Wäre $P_1 P_2 = 0$, so folgte aus T in der Form von Satz 2 ein Widerspruch.

5. Definition: Wir sagen, daß P^* aus P vermöge eines elementaren Prozesses hervorgeht, wenn es aus ihm hervorgeht durch Anwendung der kommutativen, assoziativen und distributiven Gesetze oder durch Ersetzung eines Ausdruckes PQQ durch PQ oder eines Ausdruckes PQ durch PQQ oder durch Kombination aller dieser Operationen.

6. Definition: $P_1 \subset P_2$ (enthalten in) heißt: aus $A_\nu P_1 \neq 0$ folgt $A_\nu P_2 \neq 0$ für alle ν. $P_1 \Subset P_2$ heißt [12a]): aus $A_\nu P_1 \neq 0$ folgt $A_\nu \subset P_2$ für fast alle [13]) ν.

Bemerkung: Man beachte, daß die Frage nach der Gültigkeit von $P_1 \subset P_2$ (oder $P_1 \Subset P_2$) nicht notwendig mehr beantwortbar sein muß.

7. Satz: Die Beziehungen $P_1 \subset P_2$ bzw. $P_1 \Subset P_2$ bleiben gültig, wenn man in ihnen P_1 und P_2 vermöge eines elementaren Prozesses durch andere Ausdrücke ersetzt. (Beweis klar.)

8. Satz: (α) $P \subset P$. (β) Aus $P_1 \subset P_2$ und $P_2 \subset P_3$ folgt $P_1 \subset P_3$. (γ) β bleibt richtig, wenn man eines der beiden ersten und das dritte $\subset$ durch $\Subset$ ersetzt. (Beweis klar.)

9. Satz: Wenn aus $A_\nu P_1 \neq 0$ für fast alle ν $A_\nu P_2 \neq 0$ folgt, so folgt es für *alle* ν; es ist also dann $P_1 \subset P_2$.

[12a]) $P_1 \Subset P_2$ und $P_1 = P_2$ können dabei durchaus miteinander verträglich sein.

[13]) Gültig für fast alle n, gültig für genügend (hinreichend) großes n — das bedeutet stets die Existenz, d.h. Angebbarkeit eines n, von dem an die betreffende Aussage gilt. Ebenso ist ein geeignetes n stets ein angebbares n und eine unbegrenzte Folge eine, die sich beliebig weit angeben läßt.

Beweis: Wäre für ein gewisses A zugleich $AP_1 \neq 0$ und $AP_2 = 0$, so hätte man

$$AP_1 \neq 0, \quad P_2 \neq 0,$$

aber

$$AP_1 \cdot P_2 = 0,$$

also gälte nach T (in der Form von 2) für fast alle ϱ:

$$\text{aus } A_\varrho A P_1 \neq 0 \text{ folgt } A_\varrho P_2 = 0;$$

dann gälte nach 3 für unendlich viele ϱ gleichzeitig:

$$A_\varrho P_1 \neq 0 \quad \text{und} \quad A_\varrho P_2 = 0;$$

das wäre aber im Widerspruch zur Voraussetzung.

10. Satz: (α) Aus $P_1 \subset P_2$ und $P_2 = 0$ folgt $P_1 = 0$. (β) Aus $P_1 \subset P_2$ und $P_1 \neq 0$ folgt $P_1 P_2 \neq 0$. (γ) Aus $P_1 \Subset P_2$ folgt $P_1 \subset P_2$.

Beweis: (α) klar. (β) Aus $P_1 \neq 0$ folgt wegen 3 die Existenz unendlich vieler m mit $P_1 A_m \neq 0$, für diese m gilt nach Definition auch $P_2 A_m \neq 0$; beides zusammen ergibt nach 4 die Behauptung.

(γ) Für fast alle ν folgt aus $P_1 A_\nu \neq 0$ die Relation $A_\nu \subset P_2$ und daraus nach β $P_2 A_\nu \neq 0$; nach 9 folgt dann für *alle* ν aus $P_1 A_\nu \neq 0$ auch $P_2 A_\nu \neq 0$.

11. Satz: Aus $P_1 \subset P_2$ folgt $P_1 Q \subset P_2 Q$.

Beweis: Sei $AP_1 Q \neq 0$. Wir bestimmen nach 3 eine unendliche Folge von ϱ, für die

$$(\alpha) \qquad A_\varrho A P_1 Q \neq 0$$

gilt. Aus (α) folgt einerseits $A_\varrho P_1 \neq 0$ und daraus nach Voraussetzung

$$(\beta) \qquad A_\varrho P_2 \neq 0;$$

andererseits folgt aus (α)

$$(\gamma) \qquad A_\varrho A Q \neq 0.$$

Aus (β) und (γ), die für unendlich viele ϱ gelten, folgt nach 4

$$AP_2 Q \neq 0.$$

Bemerkung: Man kann also die Definition von $\subset$ auch so aussprechen: $P_1 \subset P_2$ heißt: aus $QP_1 \neq 0$ folgt $QP_2 \neq 0$ für alle Q.

12. Satz: (α) Aus $P_1 \subset P_2$ folgt $P_1 P_3 \subset P_2$. (β) Aus $P_1 \subset P_2$ und $P_1 \subset P_3$ folgt $P_1 \subset P_2 P_3$. (γ) Aus $P_1 \subset P_2$ folgt $P_1 \subset P_2 + P_3$. (δ) Aus $P_1 \subset P_3$ und $P_2 \subset P_3$ folgt $P_1 + P_2 \subset P_3$. Ferner die Formeln (α'), (β'), (γ'), (δ'), die man erhält, wenn man bzw. $\subset$ durch $\Subset$ ersetzt.

Beweis: (β) folgt aus 11, (β') folgt aus (β), alle übrigen sind trivial.

13. Satz: (α) Aus $P_1 \subset P_2 + P_3$ und $P_1 P_3 = 0$ folgt $P_1 \subset P_2$. (β) Dasselbe mit $\Subset$ statt $\subset$.

Beweis: (α) Ist $P_1 = 0$, so folgt der Satz aus 10. Ist $P_3 = 0$, so folgt für alle ν aus $A_\nu P_1 \neq 0$ nicht allein $A_\nu(P_2+P_3) \neq 0$ (nach Voraussetzung), sondern sogar $A_\nu P_2 \neq 0$, w.z.b.w. Ist endlich

$$P_1 \neq 0, \qquad P_3 \neq 0,$$

aber (nach Voraussetzung)

$$P_1 P_3 = 0,$$

so folgt wegen T aus $A_\nu P_1 \neq 0$ für fast alle ν $\quad A_\nu P_3 = 0$, also nach Voraussetzung für fast alle ν $\quad A_\nu P_2 \neq 0$, also nach 9 unser Satz.

(β) ergibt sich in derselben Weise unter Verwendung von (α).

3. Überdeckungen, Umgebungen.

1. Definition: A_ν heißt von n-ter Stufe, wenn $\nu \geqq n$ ist. Ein Produkt von A_ν heißt von n-ter Stufe, wenn mindestens ein Faktor von n-ter Stufe ist. [14])

2. Definition: $P_1, \ldots, P_k$ heißt eine Überdeckung, wenn $A_n(P_1 + \ldots + P_k) \neq 0$ für alle n gilt. $P_1, \ldots, P_k$ heißt eine $\subset$-Überdeckung bzw. $\Subset$-Überdeckung, wenn es zu fast jedem A_ν ein $\varkappa$ gibt $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$, derart daß $A_\nu \subset P_\varkappa$ bzw. $A_\nu \Subset P_\varkappa$ gilt. Eine Überdeckung heißt von n-ter Stufe, wenn jedes ihrer $P_\varkappa$ von n-ter Stufe ist.

3. Definition: $P_1 + \ldots + P_k$ heißt Umgebung [15]) n-ter Stufe von P, wenn $P \Subset P_1 + \ldots + P_k$, $PP_\varkappa \neq 0$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$ und jedes der $P_\varkappa$ von n-ter Stufe ist. Unter einem Stück n-ter Stufe verstehen wir eine Umgebung n-ter Stufe eines Produkts (von A_ν) n-ter Stufe. Eine $\subset$ (bzw. $\Subset$)-Überdeckung heißt von n-ter Stufe, wenn sie aus Stücken n-ter Stufe besteht.

4. Satz: Es gibt Überdeckungen beliebiger Stufe. (Beweis folgt aus K [16]).)

---

[14]) wird also vorläufig nur für Produkte definiert.

[15]) Als Spezies betrachtet (siehe 4, 8) sind unsere „Umgebungen" (anders als die üblichen) abgeschlossen, was aber nicht viel ausmacht.

[16]) K wird hier zum ersten Mal verwendet und spielt von nun an eine tief eingreifende Rolle.

5. Satz: Ist $P_1, \ldots, P_k$ eine Überdeckung, so ist für jedes P: $P \Subset P_1 + \ldots + P_k$. (Beweis klar.)

6. Satz: Ist $P_1, \ldots, P_k$ eine Überdeckung und P^* die Summe derjenigen unter den $P_\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$, für die $PP_\varkappa \neq 0$ gilt, so ist $P \Subset P^*$.

Beweis: Sei P^{**} die Summe derjenigen unter den $P_\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$, für die $PP_\varkappa = 0$ gilt. Dann ist P^*, P^{**} eine Überdeckung. Wir können ohne Weiteres annehmen

$$P \neq 0, \quad P^{**} \neq 0,$$

dagegen ist

$$PP^{**} = 0.$$

Also folgt für fast alle ν aus $A_\nu P \neq 0$ (nach T in der Form von **2**, 2) $A_\nu P^{**} = 0$. Andererseits ist nach 5: $A_\nu \subset P^* + P^{**}$. Also ist nach **2**, 13: $A_\nu \subset P^*$ (und zwar für fast alle ν, für die $A_\nu P \neq 0$ ist).

7. Satz: Es gibt zu jedem P Umgebungen beliebiger Stufe.

Beweis: Folgt aus 6, wenn man die Ausgangsüberdeckung wie gewünscht wählt.

8. Satz: Ist $P_1 P_2 = 0$, so gibt es P_1^*, P_2^* mit $P_1 \Subset P_1^*$, $P_2 \Subset P_2^*$ und $P_1^* P_2^* = 0$.

Beweis: Man wähle n so groß, daß (T in der Form von **2**, 2) für jedes A_ν n-ter Stufe $A_\nu P_1 \neq 0$ zur Folge hat: $A_\nu P_2 = 0$. Nach K erzeuge man eine Überdeckung n-ter Stufe aus den A_ν. Dann wende man 6 an, um ein P_1^* mit $P_1 \Subset P_1^*$ und $P_1^* P_2 = 0$ zu erhalten. Entsprechend verfahre man nun mit P_2.

9. Satz: Ist $P_1 \Subset P_2$, so gibt es ein P mit $P_1 \Subset P \Subset P_2$.

Beweis: Man wähle n so groß, daß für jedes A_ν n-ter Stufe aus $A_\nu P_1 \neq 0$ folgt $A_\nu \subset P_2$. Es sei $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_k}$ eine Überdeckung n-ter Stufe, und es sei P_3 die Summe derjenigen unter den $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_k}$, deren Produkt mit P_1 null liefert, also $P_1 P_3 = 0$. Nach 8 gibt es ein P mit $P_1 \Subset P$, $PP_3 = 0$. $P_2 + P_3$ ist eine Überdeckung, also nach 5: $P \Subset P_2 + P_3$. Nach **2**, 13 erhält man $P \Subset P_2$.

10. Satz: Ist $P_1 \Subset P_2$, so gilt für fast alle ν: aus $A_\nu P_1 \neq 0$ folgt $A_\nu \Subset P_2$.[17])

Beweis: Man bestimme ein P gemäß 9. Dann gilt für fast alle ν: aus $A_\nu P_1 \neq 0$ folgt $A_\nu \subset P$. Demnach ist $A_\nu \Subset P_2$ (**2**, 8γ).

11. Satz: Versteht man unter einer Kette j-ter Ordnung n-ter Stufe ein System $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_j}$ (sämtlich von n-ter Stufe), in dem

---

[17]) Man sieht daraus, daß es überflüssig wäre, wollte man höhere Inklusionen als die einfache und doppelte einführen.

$A_{\nu_t} A_{\nu_{t+1}} \neq 0$ gilt, so folgt aus $P_1 \Subset P_2$ für festes j und fast alle n, daß jede Kette j-ter Ordnung n-ter Stufe, deren erstes Glied mit P_1 das Produkt $\neq 0$ liefert, vollständig $\Subset P_2$ ist. (Beweis klar nach 9 und 10.)

12. Satz: Ist $P_1 P_2 = 0$, so folgt für je zwei Ketten j-ter Ordnung K_1 und K_2 genügend hoher Stufe aus $P_1 K_1 \neq 0$ und $P_2 K_2 \neq 0$: $K_1 K_2 = 0$. (Beweis klar nach 11.)

13. Satz: Ersetzt man in DFTK (also in allen Folgerungen ebenfalls) die A_n durch sie enthaltende Ketten j-ter Ordnung n-ter Stufe (j fest), so bleibt alles richtig. (Beweis klar.)

14. Satz: Ist $P_1, \ldots, P_k$ eine Überdeckung n-ter Stufe und sind $P_1^*, \ldots, P_k^*$ bzw. Umgebungen n-ter Stufe, so ist $P_1^*, \ldots, P_k^*$ eine $\Subset$-Überdeckung n-ter Stufe. Es gibt also $\Subset$-Überdeckungen beliebiger Stufe. (Beweis klar nach 10.)

15. Satz: Ist $P_1, \ldots, P_k$ eine $\Subset$-Überdeckung, so gibt es zu jeder Kette K j-ter Ordnung und genügend hoher Stufe ein $\varkappa$ $(1 \leqq \varkappa \leqq k)$ mit $K \Subset P_\varkappa$. (Beweis klar.)

4. Punkte, Punktkerne.

1. Definition: Das unendliche Produkt $P_1 P_2 \ldots$ [18]) heißt Punkt, wenn $P_1 P_2 \ldots P_k \neq 0$ für jedes k gilt und es zu jedem P_ν ein Stück S_ν n_ν-ter Stufe gibt, derart daß $P_\nu \subset S_\nu$ ist und die n_ν über alle Grenzen wachsen [19]). [20])

2. Definition: $P_1 P_2 \ldots$ sei ein Punkt. $P_1 P_2 \ldots \subset Q$ heißt dann: $P_1 P_2 \ldots P_k \cdot Q \neq 0$ für alle k. $P_1 P_2 \ldots \Subset Q$ heißt: $P_1 P_2 \ldots P_k \Subset Q$ für ein geeignetes, also nach **3**, 12 für fast alle k. $P_1 P_2 \ldots$ entfernt von Q heißt: $P_1 P_2 \ldots P_k \cdot Q = 0$ für ein geeignetes, also nach **3**, 12 für fast alle k.

3. Definition: Die Punkte $P_1 P_2 \ldots$ und $P_1' P_2' \ldots$ heißen zusammenfallend, wenn $P_1 P_2 \ldots P_k \cdot P_1' P_2' \ldots P_k' \neq 0$ für jedes k gilt. Sie heißen voneinander entfernt, wenn $P_1 P_2 \ldots P_k \cdot P_1' P_2' \ldots P_k' = 0$. für ein geeignetes, also nach **3**, 12 für fast alle k gilt.

---

[18]) Wie üblich in der intuitionistischen Mathematik braucht ein solcher Punkt nicht gesetzmäßig festgelegt zu sein; er kann auch durch mehr oder minder freie Wahl entstehen.

[19]) „über alle Grenzen wachsen" ist auch wieder positiv zu verstehen, es läßt sich also wirklich die Nummer angeben, von der an die Elemente der Folge eine gegebene Grenze übertreffen.

[20]) Wollte man nur die unendlichen Produkte der A als Punkte ansehen, so könnte man die Vollständigkeit des Raumes nicht beweisen (siehe **4**, 14). Nichtintuitionistisch tritt diese Schwierigkeit natürlich nicht auf.

4. Satz: (α) Ist der Punkt $P_1 P_2 \ldots \subset Q_1$, so ist er auch $\subset Q_1 + Q_2$, und ist er $\subset Q_1$ und $\subset Q_2$, so ist er auch $\subset Q_1 Q_2$. (β) Dasselbe mit $\Subset$ statt $\subset$.

Beweis: (α) Für den ersten Teil klar. — Man hat weiter

$$P_1 P_2 \ldots P_k Q_1 \neq 0, \qquad P_1 P_2 \ldots P_k Q_2 \neq 0;$$

wäre nun

$$P_1 P_2 \ldots P_k Q_1 Q_2 = 0,$$

so folgte wegen **T** (in der Form von **3, 13**) für die Stücke S fast aller Stufen aus

$$P_1 P_2 \ldots P_k Q_1 S \neq 0 : P_1 P_2 \ldots P_k Q_2 S = 0.$$

Im Widerspruch dazu gibt es aber nach Voraussetzung P_l, die in Stücken beliebiger Stufen enthalten sind, mit

$$P_1 P_2 \ldots P_k Q_1 P_l \neq 0, \qquad P_1 P_2 \ldots P_k Q_2 P_l \neq 0.$$

(β) ergibt sich unter Berücksichtigung von **2, 12** β.

5. Satz: $P_1 P_2 \ldots$ und $P'_1 P'_2 \ldots$ seien zusammenfallende Punkte. (α) Aus $P_1 P_2 \ldots \subset Q$ folgt dann $P'_1 P'_2 \ldots \subset Q$, ($\beta$) aus $P_1 P_2 \ldots \Subset Q$ folgt $P'_1 P'_2 \ldots Q$, (γ) aus „$P_1 P_2 \ldots$ entfernt von Q" folgt „$P'_1 P'_2 \ldots$ entfernt von Q".

Beweis: (α) Es ist $P_1 P_2 \ldots \subset Q$ und $P_1 P_2 \ldots \subset P'_1 P'_2 \ldots P'_k$, also nach 4 auch $P_1 P_2 \ldots \subset P'_1 P'_2 \ldots P'_k Q$, also $P'_1 P'_2 \ldots P'_k Q \neq 0$. ($\beta$) Für ein geeignetes k ist $P_1 P_2 \ldots P_k \Subset Q$, also sind wegen **3,11** die Stücke fast aller Stufen, die mit $P_1 P_2 \ldots P_k \neq 0$ liefern, also wegen **2,8** auch fast alle $P' \Subset Q$; daraus folgt nach **2,12** α' der zu beweisende Satz. — (γ) ergibt sich ganz analog.

6. Satz: (α) Fallen $P'_1 P'_2 \ldots$ und $P''_1 P''_2 \ldots$ mit $P_1 P_2 \ldots$ zusammen, so fallen sie untereinander zusammen. (β) Fallen $P'_1 P'_2 \ldots$ und $P''_1 P''_2 \ldots$ zusammen und ist $P_1 P_2 \ldots$ entfernt von $P'_1 P'_2 \ldots$, so ist es auch entfernt von $P''_1 P''_2 \ldots$.

Beweis: (α) Es ist $P_1 P_2 \ldots \subset P''_1 P''_2 \ldots P''_k$, also nach 5 auch $P'_1 P'_2 \ldots \subset P''_1 P''_2 \ldots P''_k$ und das gilt für alle k. (β) ganz analog.

7. Definition: Die aus (allen mit einem Punkt) zusammenfallenden Punkten bestehende Spezies heißt Punktkern (mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet). Zwei Punktkerne heißen zusammenfallend bzw. voneinander entfernt, wenn ein Punkt des einen mit einem Punkt des andern zusammenfällt bzw. von ihm entfernt ist.

Die Spezies aller Punktkerne heißt DFTK-Raum, die A_ν heißen seine Erzeugenden; außerdem wird die leere Spezies als DFTK-

Raum angesehen [21]). Unter einer Teilspezies (große deutsche Buchstaben) verstehen wir jede Spezies von Punktkernen des DFTK-Raumes. Zwei Teilspezies heißen zusammenfallend, wenn jeder Punktkern der einen mit einem geeigneten der andern zusammenfällt. Ein Punktkern bzw. eine Teilspezies heißt $\subset P$ (enthalten in P), wenn (einer seiner Punkte, also) alle seine Punkte bzw. alle ihre Punktkerne $\subset P$ sind. Ein Punktkern heißt $\Subset P$, wenn (einer seiner Punkte, also) alle seine Punkte $\Subset P$ sind.

Bemerkung: Die Definitionen sind möglich auf grund von 5 und 6.

8. Definition: Die Spezies der in P enthaltenen Punkte werde (P) genannt.

9. Satz: $P = 0$ und „(P) ist leer" sind äquivalent. $P_1 \subset P_2$, $(P_1) \subset P_2$ und $(P_1) \subset (P_2)$ sind äquivalent. $(P_1 P_2)$ fällt mit dem Durchschnitt $(P_1)(P_2)$ von (P_1) und (P_2) zusammen. (Beweis klar.)

Bemerkung: Keineswegs aber braucht die Spezies $(P_1 + P_2)$ mit der Vereinigung $(P_1) + (P_2)$ von (P_1) und (P_2) zusammenzufallen. Wenn man sich etwa das Einheitskontinuum erzeugt denkt durch Dualintervalle (als die A_ν) und für P_1 bzw. P_2 die Intervalle $(0, \frac{1}{2})$ bzw. $(\frac{1}{2}, 1)$ nimmt, erhält man für $(P_1 + P_2)$ die Spezies der Zahlen des Intervalls $(0, 1)$, für $(P_1) + (P_2)$ dagegen die Vereinigung der Spezies der Zahlen der Intervalle $(0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, 1)$. — Ferner braucht, wenn die A_ν nicht abstrakte Dinge sondern Teilspezies eines schon definierten DFTK-Raumes waren (wobei man $A_{\nu_1} A_{\nu_2} \dots A_{\nu_k} = 0$ oder $\neq 0$ in naheliegender Weise definiert hatte), selbst von nichtintuitionistischem Standpunkt aus keineswegs (P) mit P zusammenzufallen. Man definiere nämlich das Einheitskontinuum durch *offene* Dualintervalle und sorge nur dafür, daß die abgeschlossenen Hüllen zweier dieser Intervalle niemals aneinanderstoßen (sondern entweder voneinander entfernt sind oder einander ganz oder teilweise überdecken).

10. Definition: Umgebung n-ter Stufe von p heißt ein Stück S n-ter Stufe mit $p \Subset S$.

11. Satz: Ist $p \Subset Q$, so gilt dasselbe für die Umgebungen fast aller Stufen von p. Ist p entfernt von q bzw. Q, so gilt dasselbe für die Umgebungen fast aller Stufen. (Beweis folgt aus **3**, 11, 12.)

12. Satz: Ist $P_1, \dots, P_k$ eine $\Subset$-Überdeckung und p ein Punktkern, so gilt für mindestens ein $\varkappa$: $p \subset P_\varkappa$. (Beweis folgt aus **3**, 15.)

---

[21]) Bei allen Beweisen werden wir den (trivialen) Fall des leeren DFTK-Raumes stillschweigend übergehen.

13. Definition: Eine Folge p_ν von Punktkernen heißt konvergent (zum Limes p), wenn Stücke jeder Stufe existieren, die fast alle p_ν (und p) enthalten. Eine Teilspezies heißt abgeschlossen, wenn sie mit jeder zu einem Limes konvergenten Folge auch den Limes enthält. Eine Teilspezies heißt stark abgeschlossen, wenn sie jeden Punktkern p mit der folgenden Eigenschaft enthält: es kann unmöglich eine Umgebung U von p geben, in der sich unmöglich ein Punktkern der Teilspezies nachweisen ließe.

14. Satz: Jede konvergente Punktkernfolge besitzt einen Limes [22]. (Beweis klar.)

15. Satz: Ist $\lim p_\nu = p$ und $p \Subset P$, so ist $p_\nu \Subset P$ für fast alle ν. (Beweis klar.)

16. Satz: Jedes (P) ist stark abgeschlossen. (Beweis klar, weil es für ein (P) stets feststeht, ob sein Durchschnitt mit einem (U) leer ist oder einen Punktkern enthält.)

5. Finite Punktmengen. DFTK-katalogisierte Spezies.

1. Definition: Finite Punktmenge heißt eine Menge [23] $\mathfrak{M}$ von Punkten (siehe **4**, 1) $\overset{1}{P}_{\varkappa_1} \overset{2}{P}_{\varkappa_2} \ldots$ des DFTK-Raumes, wenn beim n-ten Wahlakt *endlich* viel P, nämlich $\overset{n}{P}_1, \ldots, \overset{n}{P}_{k_n}$, wählbar sind; Elemente der Menge $\mathfrak{M}$ sind die Punkte $\overset{1}{P}_{\varkappa_1} \overset{2}{P}_{\varkappa_2} \ldots$; die bei dieser Erzeugung der Elemente von $\mathfrak{M}$ mitwirkenden P heißen die Erzeugenden von $\mathfrak{M}$.

Bemerkung: Aus der allgemeinen Mengendefinition folgt: Hat man in $\mathfrak{M}$ nach n Wahlakten $\overset{1}{P}_{\varkappa_1} \overset{2}{P}_{\varkappa_2} \ldots \overset{n}{P}_{\varkappa_n}$ erhalten, so gibt es ein $\overset{n+1}{P}_{\varkappa_{n+1}}$ derart, daß $\overset{n+1}{P}_{\varkappa_{n+1}}$ im $(n+1)$-ten Wahlakt eine zulässige Fortsetzung ist. — Kommt bereits beim ersten Wahlakt nichts zur Wahl, so ist $\mathfrak{M}$ leer. — Hat man in $\mathfrak{M}$ nach n Wahlakten $\overset{1}{P}_{\varkappa_1} \overset{2}{P}_{\varkappa_2} \ldots \overset{n}{P}_{\varkappa_n}$ erhalten, so ist $\overset{1}{P}_{\varkappa_1} \overset{2}{P}_{\varkappa_2} \ldots \overset{n}{P}_{\varkappa_n} \neq 0$.

2. Satz: Zu einer finiten Punktmenge $\mathfrak{M}$ gibt es eine über alle Grenzen wachsende Zahlenfolge ν_n, derart daß jedes erzeugende P^n von $\mathfrak{M}$ $\subset$ einem geeigneten Stück ν_n-ter Stufe ist.

Beweis: $\overset{n}{P}_{\varkappa_n} \subset$ geeignetem Stück $\nu(n, \varkappa_n)$-ter Stufe (siehe **4**, **1**); ist die Folge $\varkappa_n$ fest gewählt, so wachsen die $\nu(n, \varkappa_n)$ über alle Grenzen, es ist dann $\nu(n, \varkappa_n) \geqq m$ für $n \geqq n(m)$. Die Funktion

[22]) Das ist die „Vollständigkeit" (F. HAUSDORFF, Mengenlehre [2. Aufl., Berlin & Leipzig 1927], 103) des Raumes.

[23]) Definition: siehe L. E. J. BROUWER [Math. Ann. **93** (1925), 244—257. Verhandelingen Akad. Amsterdam (Eerste sectie) **12**, No. 5 (1918)]. Der Begriff der finiten Menge findet sich an den in [24]) angegebenen Stellen.

$n(m)$ ist zunächst vom Punkte $P^1_{\varkappa_1} P^2_{\varkappa_2} \ldots$ abhängig, bei festem m gibt es nach dem Hauptsatz der finiten Mengen [24]) unter ihren Werten einen größten $n^*(m)$. $\nu_n = \operatorname{Min} \nu(n, \varkappa_n)$ (genommen bei festem n) ist also $\geqq m$ für $n \geqq n^*(m)$.

3. Satz: Der DFTK-Raum fällt zusammen mit einer finiten Punktmenge (erzeugt von Stücken, die Summen von A_ν sind [25])); die beim n-ten Wahlakt auftretenden Stücke bilden eine $\Subset$-Überdeckung.

Beweis: $P^n_1, \ldots, P^n_{k_n}$ seien Stücke (Summen von A), die eine $\Subset$-Überdeckung n-ter Stufe bilden (siehe **3**, **14**). Nach Wahl von $P^1_{\varkappa_1} \ldots P^n_{\varkappa_n}$ sei im $(n+1)$-ten Wahlakt die Wahl von $P^{n+1}_{\varkappa_{n+1}}$ dann und nur dann zulässig, wenn $P^1_{\varkappa_1} P^2_{\varkappa_2} \ldots P^{n+1}_{\varkappa_{n+1}} \neq 0$ ist. Die so entstehende Menge $\mathfrak{M}$ fällt mit dem DFTK-Raum zusammen, denn sei p ein Punktkern, so gibt es nach **4**, **12** zu jedem n ein $P^n_{\varkappa_n}$, derart daß $p \subset P^n_{\varkappa_n}$ ist; der Punkt $P^1_{\varkappa_1} P^2_{\varkappa_2} \ldots$ fällt mit p zusammen.

4. Satz: Jede finite Punktmenge $\mathfrak{N}$ fällt mit einer Teilmenge von $\mathfrak{M}$ aus 3 zusammen.

Beweis: Die Erzeugenden von $\mathfrak{N}$ mögen Q heißen. Zu jedem n gibt es nach **3**, **15** unter Berücksichtigung von 2 ein n^*, derart daß sich jedem $Q^{n^*}_{\varkappa_{n^*}}$ ein $P^n_{\lambda_n}$ zuordnen läßt mit $Q^{n^*}_{\varkappa_{n^*}} \Subset P^n_{\lambda_n}$. Die als Zugeordnete zu allen möglichen Q^{n^*} bestimmten P^n sind die Erzeugenden der gesuchten Teilmenge; und zwar ist die endliche Wahlfolge $P^1_{\lambda_1} \ldots P^n_{\lambda_n}$ dann und nur dann zulässig, wenn die $P^1_{\lambda_1}, \ldots, P^n_{\lambda_n}$ Zugeordnete gewisser $Q^{n^*}_{\varkappa_{n^*}}, \ldots, Q^{n^*}_{\varkappa_{n^*}}$ sind, die sämtlich bei einer endlichen Wahlfolge von $\mathfrak{N}$ mitwirken. Es ist klar, daß diese Teilmenge mit $\mathfrak{N}$ zusammenfällt.

5. Definition [26]): Eine finite Punktmenge heißt finite $\Subset$-Punktmenge, wenn folgende zusätzliche Bedingung erfüllt ist: nach Wahl von $P^n_{\varkappa_n}$ genügen die im $(n+1)$-ten Wahlakt zulässigen $P^{n+1}_{\varkappa_{n+1}}$ der Bedingung $P^{n+1}_{\varkappa_{n+1}} \Subset P^n_{\varkappa_n}$.

6. Satz: Jede finite Punktmenge fällt mit einer $\Subset$-Punktmenge zusammen. (Ohne Beweis.)

7. Definition: Zwei Spezies heißen abschließungsgleich, wenn ihre Abschließungen zusammenfallen.

8. Satz: Eine Teilspezies $\mathfrak{S}$ und eine finite Punktmenge $\mathfrak{M}$

---

[24]) Siehe L. E. J. Brouwer [Verhandelingen Akad. Amsterdam (eerste sectie) **13** (1923), No. 2; Math. Ann. **97** (1926), 60—75 (63)].

[25]) Diese Verschärfung ist nicht sehr wesentlich; für 17 wird sie gebraucht.

[26]) 5 und 6 werden später nicht verwendet, sind aber wohl an und für sich von Interesse.

sind dann und nur dann abschließungsgleich, wenn es eine finite Punktmenge $\mathfrak{M}'$ gibt (Erzeugende P^m), so daß in jeder Erzeugenden von $\mathfrak{M}'$ ein Punktkern von $\mathfrak{S}$ liegt und für jedes m jeder Punktkern von $\mathfrak{S}$ in einer Erzeugenden P^m von $\mathfrak{M}$ liegt. (Beweis klar.)

9. Satz: Sei $\mathfrak{S}$ eine mit einer Menge $\mathfrak{M}$ (Erzeugende P) zusammenfallende Teilspezies des DFTK-Raumes $\mathfrak{R}$ und sei $\mathfrak{S}$ eindeutig abgebildet in den DFTK-Raum $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{S}'$ das Bild von $\mathfrak{S}$. Dann ist $\mathfrak{S}'$ abschließungsgleich einer finiten Punktmenge $\mathfrak{M}'$ (Erzeugende P'), und es gilt für jedes n: für fast alle m ist das Bild jedes $(P^1_{\varkappa_1} \ldots P^m_{\varkappa_m})$ (Beginnabschnitt eines Punktes von $\mathfrak{M}$) enthalten in einem geeignetem $(P'^1_{\varkappa'_1} \ldots P'^n_{\varkappa'_n})$ (Beginnabschnitt eines Punktes von $\mathfrak{M}'$).

Bemerkung: Im zweiten Teil des Satzes wird die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildung ausgesprochen; sie wird genauso bewiesen wie die gleichmäßige Stetigkeit der vollen Funktion [27]).

Beweis: Jedem Punktkern p von $\mathfrak{S}$ ist ein Punktkern p' von $\mathfrak{S}'$ zugeordnet. Es läßt sich also zu jedem n ein $n^* = n^*(n, \pi)$ angeben, so daß, wenn die Entwicklung eines zu p gehörigen Punktes π bis $P^1_{\varkappa_1} \ldots P^{n^*}_{\varkappa_{n^*}}$ gediehen ist, die Entwicklung eines zu p' gehörigen Punktes bis $P'^1_{\varkappa'_1} \ldots P'^n_{\varkappa'_n}$ gediehen ist (die P' entnehme man dabei einer mit $\mathfrak{R}'$ zusammenfallenden finiten Punktmenge). Alle in $(P^1_{\varkappa_1} \ldots P^{n^*}_{\varkappa_{n^*}})$ enthaltenen Punktkerne werden dann in Punktkerne von $P'^1_{\varkappa'_1} \ldots P'^n_{\varkappa'_n}$ abgebildet. Nach dem Hauptsatz der finiten Mengen besitzt $n^*(n, \pi)$ ein Maximum. Damit ist der zweite Teil des Satzes bewiesen. Jedem Beginnabschnitt $P^1_{\varkappa_1} \ldots P^{n^*}_{\varkappa_{n^*}}$ ist auf diese Weise ein Beginnabschnitt $P'^1_{\varkappa'_1} \ldots P'^1_{\varkappa'_n}$ zugeordnet. Die gesuchte finite Punktmenge $\mathfrak{M}'$ besitzt als Erzeugende die so entstehenden $P'^n_{\varkappa'_n}$ und als zulässige endliche Wahlfolgen die so entstehenden Beginnabschnitte $P'^1_{\varkappa'_1} \ldots P'^n_{\varkappa'_n}$. In der Tat liegt eine Menge vor, denn die Abbildung bestimmt ja zu jeder Fortsetzung $P^1_{\varkappa_1} \ldots P^{n^*}_{\varkappa_{n^*}} \ldots P^{(n+1)^*}_{\varkappa_{(n+1)^*}}$ von $P^1_{\varkappa_1} \ldots P^{n^*}_{\varkappa_{n^*}}$ eine Fortsetzung $P'^1_{\varkappa'_1} \ldots P'^n_{\varkappa'_n} P'^{n+1}_{\varkappa'_{n+1}}$ von $P'^1_{\varkappa'_n} \ldots P'^n_{\varkappa'_n}$. Daß die Menge finit ist, ist klar. Daß sie mit $\mathfrak{S}'$ abschließungsgleich ist, folgt aus 8.

10. Satz: Bei der Abbildung von 9 geht jede konvergente

---

[27]) L. E. J. Brouwer [a. a. O. [24])].

Punktkernfolge in eine konvergente Punktkernfolge über. (Beweis klar nach 9.)

11. Definition: Eine eineindeutige Abbildung heißt topologisch.

12. Satz: Das topologische Bild einer abgeschlossenen Teilspezies ist abgeschlossen. (Beweis klar nach 10.)

13. Satz: Besteht zwischen den A_ν und A'_ν zweier DFTK-Räume $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ die Beziehung, daß A'_ν ein A_ν enthaltendes und in einer Umgebung k_ν-ter Stufe (siehe **3, 3**) von A_ν enthaltenes P_ν ist (wobei die k_ν über alle Grenzen wachsen), so sind beide Räume zueinander topologisch, sobald man jedem Punkt von $\mathfrak{R}$ denjenigen von $\mathfrak{R}'$ zuordnet, der aus ihm entsteht, wenn man jedes A_ν durch das zugehörige A'_ν ersetzt. (Beweis klar.)

14. Definition: Die Teilspezies $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{R}$ heißt DFTK-katalogisiert [28]), wenn ein zu $\mathfrak{R}$ topologischer Raum $\mathfrak{R}'$ existiert, in dem für jedes A'_ν feststeht, ob es einen Punktkern von $\mathfrak{S}'$ (dem Bild von $\mathfrak{S}$) enthält oder nicht.

Bemerkung: DFTK-Katalogisiertheit ist also ein topologisch invarianter Begriff.

15. Satz: Jedes (P) ist DFTK-katalogisiert. (Beweis klar.)

16. Satz: Ist $\mathfrak{S}$ eine Teilspezies, und ist für endlich viele P_ν bekannt, ob sie einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthalten oder nicht, so ist dasselbe für ihre Summe bekannt.

Bemerkung: Für das Produkt braucht das keineswegs zu gelten.

Beweis: Der Satz ist klar, wenn eines der P_ν einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthält. Sei nun in keinem der P_ν ein Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthalten. Enthielte die Summe der P_ν einen Punktkern von $\mathfrak{S}$, etwa den Punktkern, zu dem der Punkt $Q_1 Q_2 \ldots$ gehört, so wäre gleichzeitig $Q_1 \ldots Q_k P_\nu = 0$ und $Q_1 \ldots Q_k(P_1 + \ldots + P_l) \neq 0$, was nicht möglich ist; die Summe der P_ν enthält dann also keinen zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Punktkern.

17. Satz: Notwendig und hinreichend für DFTK-Katalogisiertheit einer Teilspezies $\mathfrak{S}$ ist Abschließungsgleichheit mit einer finiten Punktmenge $\mathfrak{M}$.

Beweis: Notwendig: Es gibt einen zu $\mathfrak{R}$ topologischen DFTK-Raum $\mathfrak{R}'$, für dessen A'_ν feststeht, ob sie einen Punktkern von $\mathfrak{S}'$ (dem Bilde von $\mathfrak{S}$) enthalten oder nicht. $\mathfrak{R}'$ fällt nach **3** mit einer finiten Punktmenge zusammen (Erzeugende P'), für deren P' nach 16 feststeht, ob sie einen Punktkern von $\mathfrak{S}'$ enthalten

[28]) Wir zeigen später, daß unser Begriff der Katalogisiertheit mit dem Brouwerschen [34]) zusammenfällt.

oder nicht. Aus dieser finiten Punktmenge erhalten wir eine finite Teilmenge $\mathfrak{M}'$, indem wir nur solche P' zulassen, die einen Punktkern von $\mathfrak{S}'$ enthalten. $\mathfrak{M}'$ ist abschließungsgleich mit $\mathfrak{S}'$. Nach **9** und **12** ist dann $\mathfrak{S}$ abschließungsgleich mit einer finiten Punktmenge $\mathfrak{M}$.

Hinreichend: $\mathfrak{S}$ ist abschließungsgleich mit der finiten Punktmenge $\mathfrak{M}$, die wir als das $\mathfrak{M}'$ aus 8 wählen (Erzeugende P^n; jedes P^n ist $\subset$ einem Stück ν_n-ter Stufe). Wir bestimmen zu jedem A_n eine Umgebung n-ter Stufe (siehe **3**, 3) U_n und ein n', derart daß jedes Stück n'-ter Stufe, das mit $A_n \quad \neq 0$ liefert, $\Subset U_n$ ist. m sei die kleinste Zahl, so daß $\nu_m \geqq n'$ ist (siehe **2**). Sobald es ein erzeugendes P^m von $\mathfrak{M}$ gibt, das mit $A_n \quad \neq 0$ liefert, setzen wir $A'_n = U_n$; sonst setzen wir $A'_n = A_n$. Der von den A'_n erzeugte DFTK-Raum ist nach **13** dem gegebenen topologisch. Ist $A'_n = A_n$, so enthält A'_n keinen Punktkern von $\mathfrak{S}$, weil jeder Punktkern von $\mathfrak{S}$ in einem der P^m enthalten ist und jedes P^m mit $A_n \quad = 0$ liefert. Ist andererseits $A'_n = U_n$, so enthält nach Konstruktion A'_n ein P^m, also einen Punktkern von $\mathfrak{S}$.

18. Satz: Notwendig und hinreichend für die DFTK-Katalogisiertheit einer Teilspezies $\mathfrak{S}$ ist es, daß zu jedem A_ν Umgebungen beliebiger Stufe existieren, für die feststeht, ob sie einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthalten oder nicht. (Beweis in dem von **17** enthalten.)

19. Satz: Ist die DFTK-katalogisierte Teilspezies $\mathfrak{S}$ mitsamt ihrer Abschließung eindeutig abgebildet, so ist das Bild von $\mathfrak{S}$ DFTK-katalogisiert. (Beweis klar nach **9** und **17**.)

20. Definition: Obere (untere) Grenze einer Spezies von reellen Zahlen heißt eine obere (untere) Schranke, die durch Elemente der Spezies beliebig gut approximiert wird.

21. Satz: Jede eine Zahl enthaltende beschränkte DFTK-katalogisierte Zahlenspezies [29]) besitzt eine obere (untere) Grenze.

Beweis: Nach **17** genügt es, zu beweisen, daß jede nichtleere finite Zahlenmenge eine obere (untere) Grenze besitzt. Man kann die Menge in der Form annehmen, daß beim n-ten Wahlakt Intervalle der Form $(k \cdot 4^{-n}, (k+2) \cdot 4^{-n})$ zu wählen sind. Von allen beim n-ten Wahlakt auftretenden k nehme man das größte (kleinste). Die Intervallfolge $((k-2) \cdot 4^{-n}, (k+2) \cdot 4^{-n})$ erzeugt eine Zahl, die obere (untere) Grenze der gegebenen Spezies.

---

29) Damit ist eine Teilspezies desjenigen DFTK-Raumes gemeint, der entsteht, wenn man ein beschränktes Zahlenintervall durch eine geeignete Intervallfolge (als die Folge der A_ν) erzeugt.

22. Satz: Eine auf einer abgeschlossenen nichtleeren DFTK-katalogisierten Teilspezies definierte Funktion f ist beschränkt.

Beweis: Einem Punkt π, der zu einem Punktkern p der Teilspezies gehört, läßt sich ein ganzzahliges $n(\pi)$ zuordnen, so daß $|f(p)| \leqq n(\pi)$. Nach **5**, **17** und dem Hauptsatz der finiten Mengen besitzt $n(\pi)$ ein Maximum, die gesuchte Schranke.

23. Satz: Eine auf einer abgeschlossenen nichtleeren DFTK-katalogisierten Teilspezies definierte Funktion besitzt eine obere, (untere) Grenze. (Beweis klar nach 19, 21, 22.)

24. Definition: Ist $\mathfrak{S}_1$ eine DFTK-katalogisierte Teilspezies, so bedeutet $\mathfrak{S}_1 \Subset \mathfrak{S}_2$: für die Stücke S fast aller Stufen, die einen Punktkern von $\mathfrak{S}_1$ enthalten, gilt $(S) \subset \mathfrak{S}_2$. Die Teilspezies $\mathfrak{S}_2$ heißt Speziesumgebung n-ter Stufe der katalogisierten Teilspezies $\mathfrak{S}_1$, wenn $\mathfrak{S}_1 \Subset \mathfrak{S}_2 \subset (P)$ ist und P eine Summe von Stücken n-ter Stufe darstellt, von denen jedes einen Punktkern von $\mathfrak{S}_1$ enthält. Die katalogisierte Teilspezies $\mathfrak{S}_1$ heißt von der DFTK-katalogisierten Teilspezies $\mathfrak{S}_2$ entfernt, wenn die Stücke fast aller Stufen, die einen Punktkern von $\mathfrak{S}_1$ enthalten, keinen Punktkern von $\mathfrak{S}_2$ enthalten.

Die folgenden Sätze lassen sich auf Grund von **17** aus Sätzen von **3** und **4** leicht ableiten:

25. Satz: Zu jeder DFTK-katalogisierten Teilspezies gibt es Speziesumgebungen beliebiger Stufen.

26. Satz: Ist $\mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{S}_2$ entfernt, so ist auch $\mathfrak{S}_2$ von $\mathfrak{S}_1$ entfernt, und es gibt Speziesumgebungen beliebiger Stufen von beiden, die auch noch voneinander entfernt sind.

27. Satz: Ist $\mathfrak{U}$ eine Speziesumgebung von $\mathfrak{S}$, so gibt es Speziesumgebungen beliebiger Stufen von $\mathfrak{S}$, die in $\mathfrak{U}$ enthalten sind.

6. Metrische DFTK-Räume.

1. Definition: Ein metrischer DFTK-Raum ist ein DFTK-Raum, in dem je zwei Punktkernen p und q eine nichtnegative [30]) reelle Zahl $\varrho(p, q) = \varrho(q, p)$ (der Abstand) zugeordnet ist, die für zusammenfallende Punktkerne verschwindet, für voneinander

---

[30]) Im Folgenden bedeutet positiv ($\circ\!> 0$): in der Entwicklung der Zahl (als Intervallfolge) läßt sich eine Stelle angeben, von der ab sie von 0 nach oben abweicht. Nichtpositiv ($\leqq 0$) ist die Absurdität von positiv. Ferner hat man die doppelte Absurdität von positiv (> 0). Analog sind die Bezeichnungen „negativ", „größer", „kleiner" zu verstehen. (Siehe L. E. J. Brouwer [Math. Ann. **95** (1925), 453—~~472~~ (467)].)

entfernte Punktkerne (siehe **4, 10**) positiv ist und der Dreiecksungleichung genügt.

In 2—12 werden wir es stets mit einem metrischen DFTK-Raum zu tun haben (nicht dagegen in 13, 14).

Bemerkung: Verschiedene Punktkerne haben einen von null verschiedenen Abstand.

2. Definition: Abstand zweier Teilspezies $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ heißt die untere Grenze von $\varrho(p_1, p_2)$, $p_1 \subset \mathfrak{S}_1$, $p_2 \subset \mathfrak{S}_2$ [31]). Durchmesser einer Teilspezies $\mathfrak{S}$ heißt die obere Grenze von $\varrho(p, q)$, $p \subset \mathfrak{S}$, $q \subset \mathfrak{S}$.

3. Satz: Die Zahlenspezies $\varrho(p_1, p_2)$ ist beschränkt. (Beweis klar nach **5, 22**.)

4. Satz: Für zwei nichtleere DFTK-katalogisierte Teilspezies existiert der Abstand. Für eine nichtleere DFTK-katalogisierte Teilspezies existiert der Durchmesser.

Beweis: Man darf die Spezies als abgeschlossen voraussetzen. Nach **5, 23** existiert die obere (untere) Grenze $\sigma(q)$ von $\varrho(p, q)$, $p \subset \mathfrak{S}$ (katalogisiert). Ebenso besitzt nach **5, 23** $\sigma(q)$ eine obere (untere) Grenze, wenn q eine weitere DFTK-katalogisierte Teilspezies durchläuft. Daraus folgt der Satz.

5. Satz: Die Durchmesser der (A_ν) konvergieren mit wachsendem ν gegen 0.

Beweis: Der DFTK-Raum fällt nach **5, 3** mit einer finiten Punktmenge zusammen (Erzeugende P). Zu jedem positiven ε gibt es nach **5, 9** ein n, derart daß bei festem Punktkern q durch die Abbildung $\varrho(p, q)$ jedes $(P^1_{\varkappa_1} \dots P^n_{\varkappa_n})$ in ein Zahlenintervall der Länge $\frac{\varepsilon}{3}$ abgebildet wird; nach dem Hauptsatz der finiten Mengen kann man n von q unabhängig wählen. Nimmt man q insbesondere als Punktkern von $P^1_{\varkappa_1} \dots P^n_{\varkappa_n}$ an, so sieht man, daß der Durchmesser von $(P^1_{\varkappa_1} \dots P^n_{\varkappa_n}) \leqq \frac{\varepsilon}{3}$ ist. Die Beginnabschnitte $P^1_{\varkappa_1} \dots P^n_{\varkappa_n}$ bilden (bei festem n) eine Überdeckung. Nach **3, 3** und **3, 13** erhält man aus ihr eine $\mathfrak{C}$-Überdeckung, wenn man jeden dieser Beginnabschnitte durch die Summe derer ersetzt, die mit ihm $\neq 0$ liefern. Die Elemente dieser $\mathfrak{C}$-Überdeckung haben einen Durchmesser $\leqq \varepsilon$. Fast alle (A_ν) sind in Elementen dieser $\mathfrak{C}$-Überdeckung enthalten (siehe **3, 2**), haben also einen Durchmesser $\leqq \varepsilon$.

6. Satz: Fallen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ mit finiten Punktmengen zusammen

---

[31]) Natürlich läßt sich auch ein Abstandsbegriff wie bei F. HAUSDORFF, Mengenlehre [2. Aufl., Berlin & Leipzig 1927], 146 erklären.

und hat jeder Punktkern von $\mathfrak{S}_1$ einen positiven Abstand von jedem Punktkern von $\mathfrak{S}_2$, so haben $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ einen positiven Abstand.

Beweis: Ist $\mathfrak{S}_1$ ein Punktkern, so folgt der Satz unmittelbar aus dem Hauptsatz der finiten Mengen. Ist $\mathfrak{S}_1$ beliebig, so erhält man für jeden Punktkern von $\mathfrak{S}_1$ einen positiven Abstand von $\mathfrak{S}_2$ und durch Anwendung des Hauptsatzes der finiten Mengen auf $\mathfrak{S}_2$ den gewünschten Satz.

7. Satz: Von einander entfernte DFTK-katalogisierte Teilspezies (siehe **5**, **24**) haben einen positiven Abstand.

Beweis: Sind $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ voneinander entfernt, so sind es auch die Abschließungen, weil es nach **5**, **26** Speziesumgebungen gibt, die voneinander entfernt sind, und weil diese Speziesumgebungen die Abschließungen enthalten. $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ sind daher abschließungsgleich mit Teilspezies $\mathfrak{S}'_1$, $\mathfrak{S}'_2$, die mit finiten Punktmengen zusammenfallen und die auch noch voneinander entfernt sind. Da nach 6 zu $\mathfrak{S}'_1, \mathfrak{S}'_2$ ein positiver Abstand gehört, haben auch $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ einen positiven Abstand.

8. Satz: Sind $P \neq 0$, $Q \neq 0$, $PQ = 0$, so haben (P), (Q) einen positiven Abstand. (Beweis klar nach 7 und **5**, **15**.)

9. Satz: Ist $\mathfrak{U}$ eine Speziesumgebung der DFTK-katalogisierten Spezies $\mathfrak{S}$, so gibt es ein positives a derart, daß jeder Punktkern im Abstand $\leqq a$ von $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{U}$ gehört.

Beweis: Wir können annehmen, daß für die erzeugenden A_ν des DFTK-Raumes feststeht, ob sie einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthalten oder nicht. $P_1, \ldots, P_k$ sei eine $\Subset$-Überdeckung mit Stücken n-ter Stufe (die Summen von A_ν sind), und zwar sei n so gewählt, daß für jedes Stück S n-ter Stufe, das einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthält, $(S) \subset \mathfrak{U}$ gilt. Die Summe derjenigen unter den $P_1, \ldots, P_k$, die einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthalten, heiße U, die der übrigen V. Weiter bestimmen wir ein $n' > n$ und eine $\Subset$-Überdeckung n'-ter Stufe $P'_1, \ldots, P'_{k'}$, derart daß jedes P' $\Subset$ geeignetem P ist (siehe **3**, **15**). Die Summe derjenigen unter den $P'_1, \ldots, P'_{k'}$, denen auf diese Art ein P aus V zugeordnet wird ($P' \Subset P$), heiße V'. Dann ist U, V' eine $\Subset$-Überdeckung und (V') entfernt von $\mathfrak{S}$, weil $V' \Subset V$ ist, also eine zu $\mathfrak{S}$ fremde Speziesumgebung von (V') existiert. Der Abstand von (V') und $\mathfrak{S}$ heiße a; a ist nach 7 positiv. Da jeder Punktkern entweder in U oder in V' liegt, enthält U, also auch $\mathfrak{U}$ alle Punktkerne, die von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $\leqq a$ haben.

10. Satz: Zu einer DFTK-katalogisierten Teilspezies $\mathfrak{S}$ und einem positiven a gibt es eine Speziesumgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{S}$, deren sämtliche Punktkerne von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $\leqq a$ haben.

Beweis: Wir können wieder annehmen, daß für die erzeugenden A_ν des DFTK-Raumes feststeht, ob sie einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthalten oder nicht. Man bestimme n nach 5 so, daß jedes Stück n-ter Stufe einen Durchmesser $\leqq a$ hat, und bilde eine $\Subset$-Überdeckung aus Stücken n-ter Stufe, die Summen von A_ν sind; U sei die Summe derjenigen unter diesen Stücken, die einen Punktkern von $\mathfrak{S}$ enthalten. $\mathfrak{U} = (U)$ hat dann die gewünschten Eigenschaften.

11. Satz: Nennt man eine Folge p_ν von Punktkernen metrisch konvergent, wenn $\varrho(p_\mu, p_\nu) \to 0$ gilt, und p ihren metrischen Limes, wenn $\varrho(p, p_\nu) \to 0$ gilt, so fällt der Begriff der metrischen Konvergenz mit dem der Konvergenz und der des metrischen Limes mit dem des Limes zusammen. (Beweis folgt aus 9 und 10.)

12. Satz: Notwendig und hinreichend für die DFTK-Katalosiertheit der nichtleeren Teilspezies $\mathfrak{S}$ ist die Existenz ihres Abstandes von jedem Punktkern p.

Beweis: Notwendig: folgt aus 4, wenn man eine der beiden Spezies dort auf einen Punktkern spezialisiert. Hinreichend: a_ν sei positiv und größer als der Durchmesser von A_ν, $\lim a_\nu = 0$ (siehe 5). $p_\nu \subset A_\nu$ sei ein Punktkern, nach Voraussetzung existiert sein Abstand von $\mathfrak{S}$. Ist dieser Abstand $\leqq 2a_\nu$, so setzen wir A'_ν = Summe gewisser A einer Überdeckung ν-ter Stufe; und zwar nehmen wir in die Summe alle diejenigen auf, die von p_ν einen Abstand $\leqq 3a_\nu$ haben, und keines, das von p_ν einen Abstand $\geqq 4a_\nu$ hat. Hat dagegen p_ν von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $\geqq \frac{5}{2}\, a_\nu$, so setzen wir $A'_\nu = A_\nu$. Für alle übrigen A_ν entscheiden wir uns von Fall zu Fall für eine der beiden Vorschriften. Immer, wenn wir der ersten Vorschrift gefolgt sind, enthält A'_ν einen Punktkern von $\mathfrak{S}$, immer, wenn wir der zweiten Vorschrift gefolgt sind, enthält A'_ν keinen Punktkern von $\mathfrak{S}$. Nach **5**, 13 erzeugen die A'_ν einen zum gegebenen topologischen DFTK-Raum.

13. Satz: Zu zwei voneinander entfernten DFTK-katalogisierten Teilspezies $\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}_1$ kann man eine im ganzen DFTK-Raum definierte nichtnegative Funktion f finden, die auf $\mathfrak{S}_0$ null, auf $\mathfrak{S}_1$ eins und überall $\leqq$ eins ist.

Beweis: Wir bestimmen U_0 so, daß $\mathfrak{S}_0$ in (U_0) enthalten und $\mathfrak{S}_1$ von (U_0) entfernt ist (siehe **5**, 24). U_1 falle mit dem DFTK-Raum zusammen. U^* sei so bestimmt, daß $\mathfrak{S}_1 \subset (U^*)$ und $U_0 U^* = 0$ gilt (siehe **5**, 24).

Weiter bestimmen wir zu jedem $\mu = m \cdot 2^{-n}$ (m, n positiv ganz, $m \leqq 2^n$) ein U_μ mit $U_\mu U^* = 0$ für $\mu < 1$ und $U_\mu \Subset U_\nu$ für $\mu < \nu$.

Und zwar bestimmen wir, wenn für ein gewisses n alle U_μ mit $\mu = m \cdot 2^{-n}$ bereits bestimmt sind, das U_μ mit $\mu = (2m+1) \cdot 2^{-n-1}$ nach **3**, 9 so, daß $U_{\mu-2^{-n-1}} \Subset U_\mu \Subset U_{\mu+2^{-n-1}}$ gilt.[31a])

Sei $P_1 P_2 \ldots$ ein Punkt des Punktkernes p. Aus $P_k U_{m \cdot 2^{-n}} \neq 0$ folgt nach **3**, 11 für genügend großes k und für $m < 2^{-n}$: $P_k \Subset U_{(m+1)\cdot 2^{-n}}$. Das kleinste μ $(= m \cdot 2^{-n})$ bei festem n mit der Eigenschaft $P_k U_\mu \neq 0$ heiße $\varphi_n(k)$ (es gibt sicherlich ein solches, da mindestens für $\mu = 1$ ja $P_k U_1 \neq 0$ gilt). Da $P_k P_l \neq 0$ und für genügend großes k $P_k \Subset U_{\mu+2^{-n}}$ ist, ist auch $P_l U_{\mu+2^{-n}} \neq 0$, also für genügend großes $k: \varphi_n(l) \leqq \varphi_n(k) + 2^{-n}$. Ebenso ist für genügend großes l: $\varphi_n(k) \leqq \varphi_n(l) + 2^{-n}$. Also

$$(*) \qquad |\varphi_n(k) - \varphi_n(l)| \leqq 2^{-n} \quad \text{für } k, l \geqq t(n).$$

Man kann von $t(n)$ übrigens verlangen, daß es eine nichtabnehmende Funktion von n ist. — Weiter ist wegen der Einschachtelungsbedingung für die U_μ

$$(\overset{*}{*}) \qquad \varphi_n(k) \geqq \varphi_{n'}(k) \geqq \varphi_n(k) - 2^{-n} \quad \text{für } n' > n.$$

Daraus folgt die Existenz des $\lim \varphi_n(t(n))$, denn es ist

$$|\varphi_n(t(n)) - \varphi_{n'}(t(n'))| \leqq$$
$$|\varphi_n(t(n)) - \varphi_n(t(n'))| + |\varphi_n(t(n')) - \varphi_{n'}(t(n'))|,$$

und hier ist (wenn wir etwa $n < n'$ nehmen) der erste Summand $\leqq 2^{-n}$ wegen $(*)$ und dei zweite Summand $\leqq 2^{-n}$ wegen $(\overset{*}{*})$.

Der Wert von $\lim \varphi_n(t(n))$ scheint noch abhängig zu sein von der Wahl der Funktion $t(n)$. Ist aber $t'(n)$ eine andere Funktion, die ebenso wie $t(n)$ der Bedingung $(*)$ genügt, so ist nach $(*)$

$$|\varphi_n(t(n)) - \varphi_n(t'(n))| \leqq 2^{-n},$$

also

$$\lim \varphi_n(t(n)) = \lim \varphi_n(t'(n)).$$

$\lim \varphi_n(t(n))$ hängt also nur von dem gegebenen Punkt ab. Man sieht ferner ohne weiteres, daß für einen Punkt, den man aus dem Punkte $P_1 P_2 \ldots$ erzeugt, indem man aus den P_k eine unbegrenzte Auswahl trifft, $\lim \varphi_n(t(n))$ denselben Wert hat. Dasselbe gilt für zwei zusammenfallende Punkte $P_1 P_2 \ldots$ und $Q_1 Q_2 \ldots$, wie man nun durch Betrachtung von $P_1 Q_1 P_2 Q_2 \ldots$ sieht. $\lim \varphi_n(t(n))$ hat also für alle Punkte $P_1 P_2 \ldots$ desselben Punktkernes p denselben Wert, $f(p)$, die gesuchte Funktion (daß f auf $\mathfrak{S}_0$ null und auf $\mathfrak{S}_1$ eins ist, ist klar).

[31a]) Keineswegs brauchen U_μ und $U_{\mu+2^{-n-1}}$ voneinander verschieden zu sein. Siehe auch [12a]).

14. Satz: Jeder DFTK-Raum läßt sich metrisieren (so daß die Bedingungen von 1 erfüllt sind).

Beweis: Man bestimme nach 13 zu A_m und A_n mit $A_m A_n = 0$ eine im ganzen DFTK-Raum definierte nichtnegative Funktion $f_{m,n}$, die auf A_m null, auf A_n eins und überall $\leqq 1$ ist, setze $f_{m,n} \equiv 0$ für $A_m A_n \neq 0$ und

$$\varrho(p, q) = \sum_{m, n} 2^{-m-n} |f_{m,n}(p) - f_{m,n}(q)|.$$

Man sieht ohne weiteres, daß die Bedingungen von 1 erfüllt sind.

Dabei beachte man: Die $f_{m,n}(p)$ sind „unfertig" gegeben; sie lassen sich mit vorgegebener Genauigkeit berechnen, wenn p mit genügender Genauigkeit bekannt ist. Wünscht man nun $\varrho(p, q)$ mit einer gewissen Genauigkeit zu kennen, so darf man in obiger unendlicher Summe fast alle Glieder vernachlässigen und braucht nur die übrig bleibenden endlich vielen mit einer gewissen Genauigkeit zu berechnen; die Funktion $\varrho(p, q)$ ist also auch „unfertig".

7. Die metrisch katalogisiertkompakten Spezies.

In 1 geben wir die Definition und Haupteigenschaften der katalogisiertkompakten Spezies und der katalogisierten Teilspezies wieder, da die Originalstelle[32]) vielleicht nicht jedem Leser zugänglich ist; wir übernehmen den Brouwerschen Text wörtlich, wir haben nur einige Buchstaben abgeändert.

1. Unter einer *katalogisierten Folge* verstehen wir eine unbegrenzte Folge $p_1, p_2, \ldots$ [33]), in welcher zu je zwei Elementen p_{ν_1} und p_{ν_2} ein Abstand $\varrho(p_{\nu_1}, p_{\nu_2}) \geqq 0$ (aber nicht notwendig entweder > 0 oder $= 0$) definiert wird, der folgenden Bedingungen genügt: Es ist stets $\varrho(p_\nu, p_\nu) = 0$ und $\varrho(p_{\nu_1}, p_{\nu_2}) \leqq \leqq \varrho(p_{\nu_1}, p_{\nu_3}) + \varrho(p_{\nu_2}, p_{\nu_3})$. Weiter existiert zu jedem n ein μ_n und ein ν_n, so daß für $\nu > \nu_n$ jedes p_ν in einer Entfernung $\leqq a <_\circ 4^{-n}$ von $s_{\mu_n} =$ Vereinigung $(p_1, p_2, \ldots, p_{\mu_n})$ gelegen ist. Schließlich ist jedes Element p_{η_n} von s_{μ_n} entweder ein β_n-*Element* oder ein α_n-*Element* (niemals aber beides gleichzeitig); im ersteren Falle ist für $\nu > m(\eta_n)$ jedes p_ν in einer Entfernung $\geqq \frac{5}{4} \cdot 4^{-n}$ von p_{η_n} gelegen, im letzteren Falle gibt es eine un-

---

[32]) a. a. O.[1]).

[33]) Die kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen hier natürlich nicht mehr Punktkerne eines DFTK-Raumes; ein solcher liegt in 7 (außer bei 17—19) überhaupt nicht vor. Mit großen deutschen Buchstaben werden wir in 7 die Teilspezies des zu definierenden Σ bezeichnen. (Verf.)

begrenzte Folge von verschiedenen p_ν in einer Entfernung $\leqq b <\circ \frac{3}{2} \cdot 4^{-n}$ $\left(b \circ> \frac{5}{4} \cdot 4^{-n}\right)$ von p_{η_n}. (Demzufolge besitzt dann auch ein beliebiges p_ν entweder die für die α_n oder die für die β_n charakteristische Eigenschaft.)

Was wir auf dieser Grundlage unter einer *positiv-konvergenten unbegrenzten Folge* (bzw. unter *zusammengehörigen positiv-konvergenten unbegrenzten Folgen*) von verschiedenen Elementen einer katalogisierten Folge zu verstehen haben, ist ohne weiteres klar.

Die Spezies Σ der *Spezies zusammengehöriger positiv-konvergenter Folgen von verschiedenen Elementen* einer katalogisierten Folge F ist *kompakt*, d.h. wenn wir in auf der Hand liegender Weise die Entfernung je zweier Elemente von Σ definieren, so konvergiert jede positiv konvergente Folge von Elementen von Σ positiv gegen ein Element von Σ. Weiter ist Σ *in bezug auf* F „*katalogisiert*", d.h. die Entfernung zwischen Σ und einem beliebigen Element p_ν von F läßt sich mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit approximieren (ohne daß jedoch stets ein Element q von S angegeben werden kann so daß $\varrho(q, p_\nu) = \varrho(\Sigma, p_\nu)$) [34]). Die Spezies Σ „*fällt zusammen*" mit einer kompakten finiten Menge $\mathfrak{M}$ von positiv-konvergenten unbegrenzten Folgen von (eventuell teilweise identischen) Elementen von F, welche erhalten werden, indem in solcher Weise der Reihe nach ein α_1-Element, ein α_2-Element, usw. gewählt werden, daß nach der Wahl eines bestimmten α_n-Elementes α_n^0 jedes α_{n+1}-Element in einer Entfernung $\leqq 2 \cdot 4^{-n}$ von α_n^0 wählbar und jedes α_{n+1}-Element in einer Entfernung $\geqq 3 \cdot 4^{-n}$ von α_n^0 unwählbar ist. Jede in derselben Weise wie Σ mittels einer katalogisierten Folge definierte Spezies, und überdies die leere Spezies, heißt eine *katalogisiert-kompakte Spezies*.

2. Satz: Zu jedem α_n-Element p_ν gibt es einen Punktkern [35]) p_ν^* aus Σ mit $\varrho(p_\nu, p_\nu^*) \leqq 2 \cdot 4^{-n}$. Zu jedem Punktkern p^* aus Σ gibt es ein α_n-Element p_ν mit $\varrho(p^*, p_\nu) \leqq 4^{-n}$. (Beweis klar.)

3. Satz: Jedes Σ fällt zusammen mit einem Σ^*, das erzeugt wird von einer metrisch katalogisierten [35a]) Folge von Punktkernen p_ν^* aus Σ.

---

[34]) Eine Teilspezies heißt also metrisch katalogisiert in bezug auf die p_ν, wenn sie entweder leer ist oder ihr Abstand von jedem p_ν existiert. (Verf.)

[35]) Punkte nennen wir die oben eingeführten positiv-konvergenten Teilfolgen der p_ν, Punktkern jede Spezies zusammengehöriger positiv-konvergenter Teilfolgen.

[35a]) Um allen Mißverständnissen vorzubeugen, geben wir dem Brouwerschen Begriff der Katalogisiertheit noch das Attribut „metrisch".

Beweis: Zu einem α_n-Element p_ν suchen wir nach 2 ein p_ν^* aus Σ mit $\varrho(p_\nu, p_\nu^*) \leqq 2 \cdot 4^{-n}$. Die Abstände der p_ν^* setzen wir so fest, wie sie durch Σ gegeben sind. Die p_ν^* bilden eine metrisch katalogisierte Folge ohne β_n-Elemente: Tritt p_ν in s_{μ_n} $(n \geqq 2)$ auf, so tritt p_ν^* in $s_{\mu_n^*}$ auf, $\mu_{n-1}^* = \mu_n$. Ist p_ν ein α_n-Element, so ist p_ν^* ein α_{n-1}-Element. Ordnet man einer Folge der p_ν die entsprechende Folge der p_ν^* zu, so erhält man das gewünschte Zusammenfallen von Σ und Σ^*.

4. Satz: Die Abschließung einer in bezug auf die p_ν metrisch katalogisierten Teilspezies ist in bezug auf die p_ν metrisch katalogisiert, ebenso die Vereinigung endlich vieler in bezug auf die p_ν metrisch katalogisierter Teilspezies. (Beweis klar.)

5. Satz: Eine in bezug auf die p_ν metrisch katalogisierte Teilspezies ist abschließungsgleich einer finiten Punktmenge[36]). (Beweis findet sich bei Brouwer[37]).)

6. Satz: Eine auf der Abschließung einer in bezug auf die p_ν metrisch katalogisierten nichtleeren Teilspezies überall definierte Funktion besitzt eine obere (untere) Grenze. (Beweis genau wie der von **5, 23.**)

7. Satz: Eine mit einer finiten Punktmenge abschließungsgleiche Teilspezies ist in bezug auf die p_ν metrisch katalogisiert. (Beweis verläuft unter Verwendung von 6 wie der von **6, 4.**)

8. Satz: Für die metrische Katalogisiertheit einer Teilspezies in bezug auf die p_ν ist notwendig und hinreichend die Existenz ihres Abstandes von jedem Punktkern aus Σ.

Beweis: Notwendig: Die metrische Katalogisiertheit der Teilspezies besagt, daß ihr Abstand von jedem p_ν der erzeugenden metrisch katalogisierten Folge existiert; für eine konvergente[38]) Teilfolge existiert dann aber auch der Limes der Abstände, und mittels solcher Teilfolgen werden ja die Punktkerne definiert; jeder Punktkern besitzt also einen Abstand von der Teilspezies. Hinreichend: Die gegebene Teilspezies besitzt insbesondere einen Abstand von jedem p_ν^* aus 3, sie fällt also mit einer katalogisierten Teilspezies von Σ^* zusammen. Nach 5 ist sie abschließungsgleich einer von den p_ν^* erzeugten finiten Punktmenge; die Funktion, die den Abstand eines festen p_ν von einem Punktkern von Σ^* darstellt, besitzt also auf der gegebenen Teilspezies eine

---

[36]) natürlich von Σ, nicht von einem DFTK-Raum.

[37]) a. a. O. [1]).

[38]) „konvergent" soll stets „positiv konvergent" bedeuten.

obere Grenze, den gesuchten Abstand; die gegebene Teilspezies ist also auch in bezug auf die p_ν metrisch katalogisiert.

9. Satz: In der Abschließung einer metrisch katalogisierten [39]) Teilspezies $\mathfrak{S}$ gibt es eine endliche Teilspezies, von der jeder Punktkern von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $\leqq a$ hat (a gegeben, positiv). (Beweis klar nach 1 und 2.)

10. Satz: Zu jeder metrisch katalogisierten Teilspezies $\mathfrak{S}$ und zu je zwei reellen Zahlen a, b mit $b \circ\!> a$ gibt es eine metrisch katalogisierte Teilspezies, $\mathfrak{S}_{a,b}$ genannt, die alle Punktkeıne im Abstand $\leqq a$ von $\mathfrak{S}$ und keinen Punktkern im Abstand $> b$ von $\mathfrak{S}$ enthält.

Beweis: Man wähle alle p_ν aus, die von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $\leqq a$ haben, jedoch keines, das von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $> b$ hat; diese metrisch katalogisierte Teilfolge der p_ν erzeugt eine Teilspezies mit den gewünschten Eigenschaften.

11. Definition: Zwei metrisch katalogisierte Teilspezies $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ heißen in ausgeprägter Lage befindlich, wenn zwei nach null konvergente Folgen positiver Zahlen δ_ν, ε_ν existieren, derart daß es zu je zwei Punktkernen q, r mit $q \subset \mathfrak{Q}$, $r \subset \mathfrak{R}$, $\varrho(q, r) \leqq \delta_\nu$ ein dritter Punktkern $s \subset \mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ mit $\varrho(q, s) \leqq \varepsilon_\nu$ existiert.

12. Satz: Der Durchschnitt zweier abgeschlossener metrisch katalogisierter Teilspezies $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$, die sich in ausgeprägter Lage befinden, ist wieder eine metrisch katalogisierte Teilspezies.

Beweis: Sei nach 9 in $\mathfrak{Q}$ eine endliche Teilspezies $q_1^\nu, \ldots, q_{k_\nu}^\nu$ gegeben, von der jeder Punktkern von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $\leqq \frac{1}{3}\,\delta_\nu$ hat; entsprechend in $\mathfrak{R}$ eine endliche Teilspezies $r_1^\nu, \ldots, r_{l_\nu}^\nu$. Zu allen Paaren $q_\varkappa^\nu$, r_λ^ν mit $\varrho(q_k^\nu, r_\lambda^\nu) \leqq \frac{3}{4}\,\delta_\nu$ (wir dürfen annehmen, daß solche Paare existieren, da sonst $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ leer, also katalogisiert ist), aber zu keinem mit $\varrho(q_\varkappa^\nu, r_\lambda^\nu) > \delta_\nu$ bilden wir die Zahl $\varrho(p, q_\varkappa^\nu)$ (für einen festen Punktkern p aus Σ); die untere Grenze dieser endlich vielen Zahlen bei festem ν heiße ϱ_ν. Wegen der ausgeprägten Lage gibt es dann einen Punktkern von $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$, dessen Abstand von p zwischen $\varrho_\nu - 2\varepsilon_\nu$ [40]) und $\varrho_\nu + 2\varepsilon_\nu$ liegt.

---

[39]) Nachdem sich in 8 der Begriff der metrisch katalogisierten Teilspezies als eine innere Eigenschaft von Σ erwiesen hat, lassen wir in Zukunft den Zusatz „in bezug auf die p_ν" weg.

[40]) Hier und an einigen anderen Stellen möchte es vielleicht so aussehen, als ob Abschätzungen nicht voll ausgenutzt würden. Diese scheinbare „Verschwendung" bei Abschätzungen ist aber dadurch bedingt, daß eine stetige Funktion selbst auf einer abgeschlossenen katalogisierten Teilspezies ihre obere Grenze nicht anzunehmen braucht.

Andererseits gibt es zu jedem Punktkern von $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ im Abstand $\leqq \frac{3}{8}\,\delta_\nu$ ein $q^\nu_\varkappa \subset \mathfrak{Q}$ und ein $r^\nu_\lambda \subset \mathfrak{R}$, die untereinander einen Abstand $\leqq \frac{3}{4}\,\delta_\nu$ haben. Mithin hat jeder Punktkern von $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ einen Abstand $> \varrho_\nu - \delta_\nu$ von p.

Also existiert $\lim \varrho_\nu$ und stellt den Abstand zwischen p und $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ dar; nach 8 ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ katalogisiert.

13. Satz: $\mathfrak{S}, \mathfrak{P}_1, \ldots \mathfrak{P}_k$ seien metrisch katalogisierte Teilspezies; ε sei eine gegebene positive Zahl. Dann lassen sich ein $\mathfrak{S}_{0,\,\varepsilon}$ (siehe 10) und ein positives δ mit den folgenden Eigenschaften bestimmen: zu je zwei Punktkernen $q_1 \subset \mathfrak{S}_{0,\,\varepsilon}$, $q_2 \subset \mathfrak{P}_\varkappa$ mit $\varrho(q_1, q_2) \leqq \delta$ gibt es ein $q_3 \subset \mathfrak{S}_{0,\varepsilon}\mathfrak{P}_\varkappa$ mit $\varrho(q_1, q_3) \leqq \varepsilon$.

Beweis: In der Abschließung von $\mathfrak{S}$ bestimmen wir nach 9 die Teilspezies $r_1, \ldots, r_l$ so, daß jeder Punktkern von $\mathfrak{S}$ einen Abstand $\leqq \frac{\varepsilon}{4}$ von ihr hat. Dann bestimmen wir σ und Δ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\frac{\varepsilon}{4} <_\circ \sigma \leqq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$0 <_\circ \Delta \leqq \frac{\varepsilon}{6}$$

$$(*) \qquad \left|\varrho(r_\lambda, \mathfrak{P}_\varkappa) - \sigma\right| \geqq \Delta \quad \text{für alle } \varkappa, \lambda.$$

Nach 10 bestimmen wir zu jedem r_λ eine metrisch katalogisierte Teilspezies $\mathfrak{B}_\lambda$, die alle Punktkerne im Abstand $\leqq \sigma$ und keinen im Abstand $> \sigma + \frac{\Delta}{2}$ von r_λ enthält.

Ein Punktkern $q \subset \mathfrak{P}_\varkappa$, der von $\mathfrak{B}_\lambda$ einen Abstand $\leqq \frac{\Delta}{4}$ hat, hat von r_λ einen Abstand $\leqq \sigma + \frac{3}{4}\,\Delta$; gibt es solch ein q, so ist $\varrho(r_\lambda, \mathfrak{P}_\varkappa) \leqq \sigma + \frac{3}{4}\Delta$, also nach (*) sogar $\leqq \sigma - \frac{3}{4}\Delta$; da $\mathfrak{B}_\lambda$ alle Punktkerne im Abstand $\leqq \sigma$ von r_λ enthält, gibt es dann also in $\mathfrak{P}_\varkappa\mathfrak{B}_\lambda$ einen Punktkern.

Wir setzen nun die Vereinigung der $\mathfrak{B}_\lambda$ gleich $\mathfrak{S}_{0,\,\varepsilon}$. In der Tat: Ist $q_1 \subset \mathfrak{S}_{0,\varepsilon}$, $q_2 \subset \mathfrak{P}_\varkappa$, $\varrho(q_1, q_2) \leqq \delta = \frac{\Delta}{5}$, so gibt es ein q_1^* und ein λ mit $q_1^* \subset \mathfrak{B}_\lambda$, $\varrho(q_1^*, q_2) \leqq \frac{\Delta}{4}$; es gibt also in $\mathfrak{P}_\varkappa$ einen Punktkern, der von $\mathfrak{B}_\lambda$ einen Abstand $\leqq \frac{\Delta}{4}$ hat, und nach dem Inhalt des vorigen Absatzes einen Punktkern $q_3 \subset \mathfrak{P}_\varkappa\mathfrak{B}_\lambda$ mit $\varrho(q_1, q_3) \leqq 2\left(\sigma + \frac{\Delta}{2}\right) \leqq \varepsilon$.

14. Satz: $\mathfrak{S}, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ seien metrisch katalogisiert; ε sei eine gegebene positive reelle Zahl. Dann gibt es ein $\mathfrak{S}_{0,\,\varepsilon}$, das sich zu jedem $\mathfrak{P}_\varkappa$ in ausgeprägter Lage befindet.

Beweis: Unter $\mathfrak{S}^0$ verstehen wir die gegebene Teilspezies $\mathfrak{S}$; unter $\mathfrak{S}^{\nu+1}$ verstehen wir ein nach 13 konstruiertes $\mathfrak{S}^{\nu}_{0,\frac{1}{3}\varepsilon_\nu}$ mit der Eigenschaft: es gibt ein positives δ_ν derart, daß aus $q_1 \subset \mathfrak{S}^{\nu+1}$, $q_2 \subset \mathfrak{P}_\varkappa$, $\varrho(q_1, q_2) \leqq 2\delta_\nu$ die Existenz eines $q_3 \subset \mathfrak{S}^{\nu+1}\mathfrak{P}_\varkappa$ mit $\varrho(q_1, q_3) \leqq \frac{1}{3}\varepsilon_\nu$ folgt. Dabei wählen wir $\varepsilon_0 = \varepsilon$, $0 <_\circ 2\varepsilon_{\nu+2} \leqq \varepsilon_{\nu+1} \leqq \frac{3}{4}\delta_\nu$. Die Vereinigung des $\mathfrak{S}^\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ist metrisch katalogisiert; wir nennen sie $\mathfrak{S}_{0,\varepsilon}$. In der Tat: Ist $q_1 \subset \mathfrak{S}_{0,\varepsilon}$, $q_2 \subset \mathfrak{P}_\varkappa$, $\varrho(q_1, q_2) \leqq \delta_\nu$, so gibt es ein n mit $q_1 \subset \mathfrak{S}^n$, ferner ein $q_1^* \subset \mathfrak{S}^{\nu+1}$ mit $\varrho(q_1, q_1^*) \leqq \frac{2}{3}(\varepsilon_{\nu+1} + \varepsilon_{\nu+2} + \cdots + \varepsilon_{n-1}) \leqq \frac{4}{3}\varepsilon_{\nu+1}$ für $\nu + 1 \leqq \leqq n - 1$ und mit $\varrho(q_1, q_1^*) = 0$ für $\nu + 1 > n - 1$. Dann ist $\varrho(q_1^*, q_2) \leqq \frac{4}{3}\varepsilon_{\nu+1} + \delta_\nu \leqq 2\delta_\nu$, und es gibt nach Konstruktion ein $q_3 \subset \mathfrak{S}^{\nu+1}\mathfrak{P}_\varkappa$, also auch $\subset \mathfrak{S}_{0,\varepsilon}\mathfrak{P}_\varkappa$, mit $\varrho(q_1^*, q_3) \leqq \frac{\varepsilon_\nu}{3}$, also auch mit $\varrho(q_1, q_3) \leqq \frac{\varepsilon_\nu}{3} + \frac{4\varepsilon_{\nu+1}}{3} \leqq \varepsilon_\nu$.

15. Satz: Sind $\mathfrak{S}, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ abgeschlossene metrisch katalogisierte Teilspezies, die sich zu je zweien in ausgeprägter Lage befinden, und kommt der Durchschnitt je zweier der $\mathfrak{P}_\varkappa$ unter den $\mathfrak{P}_\varkappa$ vor, so befinden sich alle aus den $\mathfrak{S}, \mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ zu bildenden Durchschnitte zu je zweien in ausgeprägter Lage.

Beweis: Wir dürfen annehmen, daß wir mit denselben Folgen $\delta_\nu, \varepsilon_\nu$ bei allen Paaren der $\mathfrak{S}, \mathfrak{P}_1, \quad, \mathfrak{P}_k$ auskommen. Wir bestimmen zu jedem ν ein ν', so daß $\varepsilon_{\nu'} \leqq \delta_\nu$ ist. Seien $q_1 \subset \mathfrak{S}\mathfrak{P}_\varkappa$, $q_2 \subset \mathfrak{P}_\lambda$ bzw. $\mathfrak{S}\mathfrak{P}_\lambda$, $\varrho(q_1, q_2) \leqq \delta_{\nu'}$; da q_1 auch $\subset \mathfrak{P}_\varkappa$ ist, gibt es ein $q_3 \subset \mathfrak{P}_\varkappa\mathfrak{P}_\lambda$, $\varrho(q_1, q_3) \leqq \varepsilon_{\nu'} \leqq \delta_\nu$; da q_1 auch $\subset \mathfrak{S}$ und $q_3 \subset \mathfrak{P}_\varkappa\mathfrak{P}_\lambda$ ist, $\varrho(q_1, q_3) \leqq \delta_\nu$, gibt es ein $q_4 \subset \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{P}_\varkappa\mathfrak{P}_\lambda$ $(= \mathfrak{S}\mathfrak{P}_\varkappa \cdot \mathfrak{P}_\lambda$ bzw. $\mathfrak{S}\mathfrak{P}_\varkappa \cdot \mathfrak{S}\mathfrak{P}_\lambda)$ mit $\varrho(q_1, q_4) \leqq \varepsilon_\nu$.

16. Satz: Jede metrisch katalogisiert kompakte Spezies Σ fällt mit einem geeigneten metrischen DFTK-Raum zusammen.

Beweis: Die den DFTK-Raum erzeugenden A_n bestimmen wir als metrisch katalogisierte Teilspezies $\mathfrak{A}_n$ von Σ; wir setzen dabei $A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_k} = 0$ bzw. $\neq 0$, wenn $\mathfrak{A}_{\nu_1} \mathfrak{A}_{\nu_2} \ldots \mathfrak{A}_{\nu_k}$ leer ist bzw. einen Punktkern enthält. Wir müssen dafür sorgen, daß die A_n die Axiome erfüllen, insbesondere daß feststeht, ob der Durchschnitt endlich vieler $\mathfrak{A}_n$ leer ist oder einen Punktkern enthält [41]):

---

[41]) Um das zu erreichen — hier liegt eine recht wesentliche Schwierigkeit vom intuitionistischen Standpunkt vor — haben wir den Begriff der ausgeprägten Lage eingeführt.

$p_1, p_2, \ldots$ sei die Σ erzeugende metrisch katalogisierte Folge; nach 3 können wir annehmen, daß jedes p_ν mit einem Punktkern von Σ zusammenfällt. Zu jedem α_n-Element p_ν bestimmen wir das n als die kleinste Zahl derart, daß p_ν in s_{μ_n} (siehe 1) auftritt, und nach 10 eine metrisch katalogisierte Teilspezies $\mathfrak{V}_\nu^m$, die alle Punktkerne von Σ im Abstande $\leqq 4^{-m}$ von p_ν, aber keinen im Abstand $> 2 \cdot 4^{-m}$ von p_ν enthält $(m \geqq n)$; für jedes feste n ist dann jeder Punktkern von Σ in mindestens einem der $\mathfrak{V}_1^n, \ldots, \mathfrak{V}_{\mu_n}^n$ enthalten.

Die $\mathfrak{V}_\nu^m$ zählen wir irgendwie ab und nennen sie dann $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2, \ldots$; $\mathfrak{A}_\nu$ wird bestimmt als eine $\mathfrak{W}_\nu$ enthaltende metrisch katalogisierte Teilspezies von Σ, die, wenn $\mathfrak{W}_\nu$ ein $\mathfrak{V}^m$ war, keine Punktkerne im Abstand $> 4^{-m}$ von $\mathfrak{W}$ enthält. Wir setzen $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{W}_1$. Wir nehmen an, daß wir $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\nu$ bereits so bestimmt haben, daß alle aus ihnen gebildeten Produkte metrisch katalogisiert und zu je zweien in ausgeprägter Lage sind. Dann bestimmen wir nach 14 zu $\mathfrak{W}_{\nu+1}$ (dort $\mathfrak{S}$ genannt) ein $\mathfrak{A}_{\nu+1}$, das sich zu jedem Produkt $\mathfrak{P}_\varkappa$ der $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\nu$ in ausgeprägter Lage befindet; wir können ohne weiteres annehmen, daß die $\mathfrak{A}$ abgeschlossen sind, da sich mit je zwei Teilspezies auch die Abschließungen in ausgeprägter Lage befinden. Jedes Produkt der $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{\nu+1}$ hat dann die Form $\mathfrak{P}_\varkappa$ oder $\mathfrak{P}_\varkappa \mathfrak{A}_{\nu+1}$, ist also metrisch katalogisiert und daher entweder leer, oder es enthält einen Punktkern. Ferner befinden sich nach 15 wiederum je zwei Produkte der $A_1, \ldots, A_{\nu+1}$ in ausgeprägter Lage, so daß auch die Induktionsvoraussetzung erfüllt ist. Wir bemerken noch, daß je zwei endliche Produkte der A_n, da sie sich in ausgeprägter Lage befinden, also entweder einen positiven Abstand voneinander besitzen oder einen gemeinsamen Punktkern enthalten.

Für die nun definierten $A_n = \mathfrak{A}_n$ ist D trivial erfüllt, F, weil es zu jedem α_n-Element p_ν (und jedem m) im Abstande $\leqq \frac{3}{2} \cdot 4^{-m}$ eine unbegrenzte Folge von α_n-Elementen p_ν gibt, also zu jedem $\mathfrak{W}_\nu$ eine unbegrenzte Folge von $\mathfrak{W}$, die mit $\mathfrak{W}_\nu$ einen nichtleeren Durchschnitt liefern; T ist auf Grund der letzten Bemerkung des vorigen Absatzes erfüllt (man berücksichtige, daß die Durchmesser der A_n gegen null konvergieren) und K, weil für jedes feste n jeder Punktkern von Σ in mindestens einem der $\mathfrak{V}_1^n, \ldots, \mathfrak{V}_{\mu_n}^n$ enthalten war, jedes $\mathfrak{A}_\nu$ also mit mindestens einem der $\mathfrak{V}_1^n, \ldots, \mathfrak{V}_{\mu_n}^n$ (n fest) und daher auch mit mindestens einem der zu ihnen gehörenden $\mathfrak{A}$ einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Ordnet man nun ein Polynom P der A und die Abschließung der entsprechend gebildeten Teilspezies $\mathfrak{P}$ von Σ einander zu, ferner den zum Punkte $P_1 P_2 \ldots$ gehörigen Punktkern des DFTK-Raumes und den als Durchschnitt $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \ldots$ bestimmten Punktkern von Σ (die Existenz dieses Punktkernes leuchtet ohne weiteres ein), metrisiert man schließlich den DFTK-Raum entsprechend Σ, so sieht man, daß der konstruierte DFTK-Raum mit Σ zusammenfällt.

17. Satz: Zu jedem metrischen DFTK-Raum gibt es eine mit ihm zusammenfallende metrisch katalogisiert-kompakte Spezies Σ.

Beweis: In jedem A_n bestimmen wir eine unbegrenzte Folge von Punktkernen des DFTK-Raumes; wir zählen diese Punktkerne irgendwie ab, $p_1, p_2, \ldots$. Die p_ν bilden eine metrisch katalogisierte Folge, wenn die Abstandsfunktion aus dem DFTK-Raum übernommen wird. In der Tat: Bestimmen wir $m = m(n)$ so, daß der Durchmesser jedes $(A_\nu) \leqq \frac{1}{3}\, a <_\circ \frac{1}{3} 4^{-n}$ ist für $\nu \geqq m$, und wählen wir $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_k}$ als eine Überdeckung (siehe 3, 4) m-ter Stufe! Suchen wir weiter in jedem der $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_k}$ ein p_ν der ausgewählten Folge auf, und nennen wir das mit dem größten Index p_{μ_n}! Aus $A_{\nu_1}, \ldots, A_{\nu_k}$ läßt sich nach 3, 14 eine $\mathfrak{S}$-Überdeckung m-ter Stufe bilden, die besteht aus Stücken mit dem Durchmesser $\leqq a <_\circ 4^{-n}$. Nach 4, 14 ist jeder Punktkern des DFTK-Raumes, also insbesondere jedes p_ν unserer Folge in einem dieser Stücke enthalten, besitzt also von s_{μ_n} einen Abstand $\leqq a <_\circ 4^{-n}$; damit ist die erste an die katalogisierten Folgen gestellte Forderung erfüllt. Daß auch die zweite Forderung erfüllt ist, ist evident; es ist sogar jedes p_ν von s_{μ_n} ein α_n-Element.

18. Satz: Die Begriffe „DFTK-Raum" und „metrisch katalogisiert-kompakte Spezies" fallen zusammen. (Beweis klar nach 16, 17; 6, 14.)

19. Satz: Die Begriffe „DFTK-katalogisiert" und „in bezug auf die p_ν metrisch katalogisiert" fallen zusammen. (Beweis klar nach 17, 8; 6, 12.)

Anhang.

Auch der Hilbertsche Raum (der mit keinem DFTK-Raum zusammenfällt) läßt sich intuitionistisch definieren:

Man betrachte eine unbegrenzte Folge kartesischer Räume E_1, $E_2, \ldots$, von denen jeder aus dem folgenden durch Nullsetzen der letzten Koordinate entsteht. Man erzeuge dann die folgende Menge $\mathfrak{M}$:

Beim ersten Wahlakt ist irgend eine natürliche Zahl k_1 wählbar, beim $(n+1)$-ten Wahlakt erstens ein rationaler Punkt r_n des E_{k_n} (d.h. mit rationalen Koordinaten), dessen Abstand von r_{n-1} (für $n > 1$) $\leqq 2^{-n}$ ist, zweitens irgend eine natürliche Zahl $k_{n+1} > k_n$.

Die Elemente von $\mathfrak{M}$ heißen Punkte des Hilbertschen Raumes. Man beweist leicht die Vollständigkeit dieses Raumes. **6, 14** läßt sich dann auch in bekannter Weise als Einbettungssatz deuten.

(Eingegangen den 10. Dezember 1934.)