COMPOSITIO MATHEMATICA

ARTUR ERDÉLYI

Gewisse Reihentransformationen, die mit der linearen Transformationsformel der Thetafunktion zusammenhängen

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 406-423

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__406_0>

Gewisse Reihentransformationen, die mit der linearen Transformationsformel der Thetafunktion zusammenhängen

von

Artur Erdélyi

Brünn

§ 1. *Einleitung.*

Die lineare oder Jacobische Transformationsformel der Thetafunktion [1])

$$(1,1)\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{n^2\pi i\tau+2niz} = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(z-n\pi)^2}{\pi i\tau}}$$

hat bekanntlich die Eigenschaft mit einer Reihe von wichtigen Funktionalrelationen *äquivalent* zu sein [2]). Unter diesen mit (1,1) gleichwertigen Funktionalbeziehungen verdient die von Doetsch [3]) angegebene Transformationsformel einer gewissen Reihe mit Besselschen Funktionen ein besonderes Interesse. Sie kann aus (1,1) im wesentlichen durch die Anwendung der Umkehrung der (einseitigen) Laplaceschen Transformation gewonnen werden und lautet [4])

$$(1,2)\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_\nu[2\pi(n+v)\sqrt{t}]}{(n+v)^\nu} = \frac{\pi^{\nu-\frac{1}{2}}t^{-\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \sum_{|n|<\sqrt{t}} e^{-2\pi i v n}(t-n^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$$
$$(\Re e\ \nu>0).$$

Hierbei ist v reell und t positiv reell anzunehmen; die Summe auf der rechten Seite erstreckt sich über alle positive und negative ganzzahlige Werte von n, die ihrem absoluten Betrage nach unterhalb $\sqrt{t}$ liegen. Die Quadratwurzel wird positiv ausgezogen.

---

1) [9] S. 476.

2) Als äquivalent oder gleichwertig bezeichnen wir in der üblichen Weise zwei Funktionalrelationen, die mittels einer Funktionaltransformation ineinander übergeführt werden können.

3) [1].

4) [1] Gl. (IV), in der noch $x = 2\pi\sqrt{t}$ gesetzt wurde.

Die linke Seite von (1,2) ist eine mod 1 periodische Funktion von v und die rechte Seite gibt offenbar die Fourier-Entwicklung dieser Funktion an. Die Beziehung (1,2) kann nach Kober [5]) noch etwas verallgemeinert werden.

(1,2) gewinnt dadurch ein besonderes Interesse, daß diese Gleichung eine summatorische Eigenschaft des *Hankelschen Kernes* $J_\nu(2\sqrt{st})$ zum Ausdruck bringt. Eine jede lineare Funktionalbeziehung für den Hankelschen Kern — und um eine solche handelt es sich hier — kann aber auf die in Gestalt einer Hankelschen Transformierten, also in der Form [6])

$$(1,3) \qquad f(s) = \int_a^b F(t) J_\nu(2\sqrt{st})dt \quad (b > a \geqq 0)$$

darstellbaren Funktionen übertragen werden.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, diese Methode des „Übertragens", die ich auch in zwei früheren Arbeiten [7]) angewendet habe, gegenüber der meist verwendeten Methode, durch Anwendung von Integraltransformationen Funktionalbeziehungen zu „übersetzen", abzugrenzen. Wir betrachten zu diesen Zwecke für einen Augenblick eine allgemeine Integraltransformation

$$f(s) = \int_a^b K(s,t) F(t) dt.$$

Die oft mit gutem Erfolg verwendete Methode besteht nun ganz allgemein gesagt darin, aus bekannten Eigenschaften der ***Objektfunktion*** $F(t)$ auf entsprechende Eigenschaften der ***Resultatfunktion*** $f(s)$ zu schließen und umgekehrt. Die Möglichkeit, aus Eigenschaften des ***Kernes*** $K(s,t)$ entsprechende Eigenschaften der ***Resultatfunktion*** zu folgern, ist offensichtlich, doch wird von dieser Möglichkeit in der Theorie der Funktionaltransformationen wenig Gebrauch gemacht. In der Theorie der Integralgleichungen hingegen ist eine solche Schlußweise sehr bekannt und wird vielfach herangezogen. [8])

---

[5]) [5]. Vergl. auch weiter unten.

[6]) Als die Hankelsche Transformierte bezeichnet man gewöhnlich einen Ausdruck von der Form (1,3) in dem aber das Integral auf der rechten Seite von 0 bis ∞ erstreckt ist. In diesem Sinne wäre $f(s)$ als die Hankelsche Transformierte jener Funktion zu bezeichnen, welche für $t < a$ und $t > b$ verschwindet und im Intervall $a \leqq t \leqq b$ mit $F(t)$ übereinstimmt.

[7]) [2] und [3].

[8]) Es genügt daran zu erinnern, daß z.B. die „Übertragung" der bilinearen Reihe des Kernes $K(s,t)$ auf „quellenmäßig dargestellte Funktionen" $f(s)$ die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen des Kernes liefert.

Obwohl dieser Vorgang, lineare Funktionalbeziehungen, denen der Kern genügt, dadurch auf die Resultatfunktion $f(s)$ zu übertragen, daß diese Funktionalbeziehungen mit $F(t)$ multipliziert und hierauf nach t von a bis b integriert werden, zunächst trivial anmutet, so ist es doch nicht ganz ohne Interesse, diese Übertragung im Einzelnen etwas näher zu verfolgen, weil dabei eine Reihe von Funktionalbeziehungen für die Funktionen $f(s)$ in einfachster Weise gewonnen werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird diese Methode verwendet, um aus der von Kober angegebenen Verallgemeinerung der Doetschschen Transformationsformel (1,2) eine entsprechende Transformationsformel für die Reihe

$$(1,4) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left[\pi^2(n+v)^2\right]\left|n+v\right|^{-\nu} e^{2\pi i\beta(n+v)}$$

abzuleiten, in der die Funktion $f(s)$ durch (1,3) erklärt ist. Aus dieser Transformationsformel kann dann mit Leichtigkeit die Fouriersche Kosinus-Transformierte der Funktion $f(t^2)t^{-\nu}$ hergeleitet werden.

Es möge noch Erwähnung finden, daß die Fouriersche Kosinus-Transformierte der Funktion $f(t^2)t^{-\nu}$ auch unmittelbar aus (1,3) gewonnen werden kann. Aus ihr ergibt sich durch Anwendung der von Watson verallgemeinerten Poissonschen Summationsformel [9]) die Transformationsformel für die Reihe (1,4). Daß hier doch der Weg über die Doetschsche Transformationsformel eingeschlagen wird, hat den Grund einerseits darin, daß wie schon Kober [10]) betont hat, es nicht immer leicht ist, die Anwendbarkeit der Poissonschen Summenformel sicherzustellen, andererseits darin, daß auf diese Weise der Zusammenhang mit der (1,2) äquivalenten linearen Transformationsformel der Thetafunktion besonders deutlich zum Vorschein kommt.

Eine große Anzahl der in der Analysis auftretenden Funktionen kann in der Gestalt (1,3) dargestellt werden. Als Beispiel eines Integrals mit endlichen Grenzen wird in der vorliegenden Arbeit behandelt:

$$a = 0, \quad F(t) = t^{\frac{\nu}{2}}(b-t)^{\frac{\mu}{2}} J_\mu\left(2\sqrt{\sigma(b-t)}\right).$$

In diesem Fall kann das Integral (1,3) auf Grund des sogenannten

---

9) [7].

10) [5], S. 612.

zweiten Sonineschen Integrals der Theorie der Besselschen Funktionen ausgerechnet werden und ergibt, daß $f(s)$ in diesem Falle durch die Besselsche Funktion $J_{\mu+\nu+1}(2\sqrt{b(s+\sigma)})$ ausgedrückt werden kann. Die aus dieser Annahme entspringende Transformationsformel mit Besselschen Funktionen degeneriert für $\sigma \to 0$ in die Doetsch-Kobersche Transformationsformel und bildet eine wesentliche Verallgemeinerung dieser Beziehung. Als zweites Beispiel wird die bei der Annahme

$$a=0, \quad b=\infty, \quad F(t)=t^{\frac{\nu}{2}}(t+y)^{-\frac{\mu}{2}}K_\mu(2\pi\sqrt{x(t+y)})$$

entstehende Funktionalbeziehung näher untersucht. Auch in diesem Falle kann das Integral (1,3) berechnet und durch eine K-Funktion ausgedrückt werden. Die entstehende Transformationsformel degeneriert für $y \to 0$ in eine von Kober angegebene.

Als drittes und letztes Beispiel wird die bei der Annahme

$$a=0, \quad b=\infty, \quad F(t)=t^{-m+2\mu-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi t}{x}} \quad (\nu=2m)$$

entstehende Resultatfunktion behandelt, die durch die *Whittakerschen konfluenten hypergeometrischen Funktionen* ausgedrückt werden kann. Die Transformation der (1,4) entsprechenden Reihe mit diesen Funktionen ist nun dadurch besonders bemerkenswert, daß sie im Sonderfalle $\mu = m + \frac{1}{2}$ in die lineare Transformationsformel der Thetafunktion übergeht und also nicht nur eine Übertragung, sondern auch eine *direkte Verallgemeinerung* dieser Transformationsformel bildet. Die Summen der Reihen mit Whittakerschen Funktionen können noch in geschlossener Form in Gestalt eines bestimmten Integrals dargestellt werden, in dessen Integranden außer elementaren Funktionen nur noch eine Thetafunktion auftritt.

Es gibt noch eine große Anzahl Funktionen, welche in der Gestalt (1,3) erscheinen, und für welche also ganz entsprechende Transformationsformeln zu gewinnen wären. Wir erwähnen nur die Annahme

$$a=0, \quad b=\infty, \quad F(t)=(t^2+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \nu=0,$$

welche auf Produkte von Zylinderfunktionen mit rein imaginärem Argument, und die Annahme

$$a=0, \quad b=\infty, \quad F(t)=t^\mu e^{-\sqrt{t}},$$

welche auf Kugelfunktionen führt [11]), ohne an dieser Stelle auf nähere Einzelheiten einzugehen.

§ 2. *Die allgemeine Transformationsformel.*

Der Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist die Kobersche Verallgemeinerung der Doetschschen Transformationsformel [12])

$$(2,1)\qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_\nu(2\pi|n+v|\sqrt{t})}{|n+v|^\nu} e^{2\pi i\beta(n+v)} = \\ = \frac{t^{-\frac{\nu}{2}}\pi^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \sum_{|n+\beta|<\sqrt{t}} e^{-2\pi i v n}\left[t-(n+\beta)^2\right]^{\nu-\frac{1}{2}}.$$

Darin seien v und β reell und t positiv reell. Auf der rechten Seite dieser Beziehung wird über alle der Ungleichung $|n+\beta|<\sqrt{t}$ genügenden positiven und negativen ganzzahligen Werte von n summiert. Vorausgesetzt wird, daß $\Re e\, \nu > \frac{1}{2}$. Für $v=0$ ist links im Glied für $n=0$ der Grenzwert für $v \to 0$

$$\frac{(\pi\sqrt{t})^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$$

zu nehmen.

Diese Beziehung multiplizieren wir mit $F(t)dt$ und integrieren nach t von a bis b. Bedeuten a und b zwei endliche positive Zahlen ($b > a > 0$), so kann die Reihenfolge von Integration und Summation hierbei gewiß vertauscht werden wenn $\Re e\, \nu > \frac{1}{2}$, weil in diesem Falle die linke Seite von (2,1) in jedem ganz im Endlichen gelegenen positiven t-Intervall absolut und gleichmäßig konvergiert. Mit der Bezeichnung (1,3) ergibt sich also hieraus

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f[\pi^2(n+v)^2]}{|n+v|^\nu} e^{2\pi i\beta(n+v)} = \\ = \frac{\pi^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_a^b t^{-\frac{\nu}{2}} F(t) \left\{ \sum_{|n+\beta|<\sqrt{t}} e^{-2\pi i v n}\left[t-(n+\beta)^2\right]^{\nu-\frac{1}{2}} \right\} dt.$$

---

[11]) Vergl. hierzu auch § 7 und §§ 9 bis 11 von [3].

[12]) [5], Gl. (3a).

Auf der rechten Seite kann gliedweise integriert werden, weil die dort auftretende Summe eine endliche ist. Um eine einfache Schreibweise zu haben, setzen wir

$$g(s) = \int_{\max(a,s)}^{b} t^{-\frac{\nu}{2}} F(t)(t-s)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \tag{2,2}$$

und erhalten, da die Bedingung $t \geqq (n+\beta)^2$ stets zu erfüllen ist, die allgemeine Transformationsformel

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f[\pi^2(n+v)^2]}{|n+v|^\nu} e^{2\pi i \beta(n+v)} = \\ = \frac{\pi^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \sum_{|n+\beta|<\sqrt{b}} g[(n+\beta)^2]\, e^{-2\pi i v n}.\end{aligned}} \tag{2,3}$$

Die Summation auf der rechten Seite wird über alle der Ungleichung $|n+\beta| < \sqrt{b}$ genügenden positiven und negativen Werte von n erstreckt. Die untere Grenze des in (2,2) auftretenden Integrals ist die größere der beiden Zahlen a, s, so daß $t-s$ stets nichtnegativ ist. Die Potenz der positiven Größe $t-s$ erklären wir eindeutig mittels der Gleichung

$$(t-s)^{\nu-\frac{1}{2}} = e^{(\nu-\frac{1}{2})\log(t-s)},$$

wobei der reelle Wert des Logarithmus der positiven Größe $t-s$ zu nehmen ist.

Ist insbesondere $|\beta| < 1-\sqrt{b}$, was nur im Falle $b < 1$ eintreten kann, so reduziert sich die Summe auf der rechten Seite auf ein einziges Glied, nämlich auf dasjenige für $n=0$. Ist überdies noch $|\beta| \geqq \sqrt{b}$, so wird die Summe rechts leer, d.h. die linke Seite ist gleich Null. Daher ist

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f[\pi^2(n+v)^2]}{|n+v|^\nu} e^{2\pi i\beta(n+v)} \begin{cases} = 0 & \text{für } \sqrt{b} \leqq |\beta| < 1-\sqrt{b} \\ = \dfrac{\pi^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} g(\beta^2) & \\ & \text{für } |\beta| < \sqrt{b} \text{ und } |\beta| < 1-\sqrt{b}. \end{cases}$$

Die linke Seite von (2,3) ist offenbar eine mod 1 periodische Funktion von v, und die rechte Seite dieser Beziehung stellt die in komplexer Form geschriebene Fourier-Entwicklung dieser in

v periodischen Funktion dar. Wir können aber die Fourier-Koeffizienten dieser Funktion auch unmittelbar bestimmen, indem wir die linke Seite von (2,3) mit $e^{2\pi i v m}$ multiplizieren und nach v von 0 bis 1 integrieren. So ergibt sich für diesen Fourier-Koeffizienten der Ausdruck

$$\int_0^1 e^{2\pi i v m}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{f[\pi^2(n+v)^2]}{|n+v|^\nu}e^{2\pi i\beta(n+v)}\right\}dv.$$

Hier führen wir die Integration gliedweise aus und ersetzen in den einzelnen Integralen v durch $u-n$, wodurch wir

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_n^{n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\pi^2u^2)}{|u|^\nu}e^{2\pi i(\beta+m)u}\,du =$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{f(\pi^2u^2)}{u^\nu}\cos 2\pi(\beta+m)u\,du$$

erhalten, oder, indem wir in dem letzten Integral $\beta+m$ durch $\sqrt{\alpha}$, πu durch $\sqrt{s}$ ersetzen und den so erhaltenen Fourier-Koeffizienten mit dem auf der rechten Seite von (2,3) stehenden vergleichen

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{f(s)}{s^{\frac{\nu+1}{2}}}\cos 2\sqrt{\alpha s}\,ds \begin{cases} = 0 & \alpha \geqq b \\ = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}g(\alpha) & \alpha < b. \end{cases}} \tag{2,4}$$

Bisher haben wir stets angenommen, daß a und b endliche positive Zahlen sind. In den Anwendungen der allgemeinen Transformationsformel ist aber meistens $a=0$, $b=\infty$. Die Vertauschbarkeit der Summation und Integration ist dann in jedem Falle noch besonders zu prüfen, die Formeln ändern sich aber wenig. Unter der Voraussetzung, daß die bei der Ableitung von (2,3) und (2,4) vorgenommenen gliedweise Integrationen zulässig sind, ergibt sich nämlich in diesem Falle

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{f(\pi^2(n+v)^2)}{|n+v|^\nu}e^{2\pi i\beta(n+v)}\\ &= \frac{\pi^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi i v n}\int_{(n+\beta)^2}^\infty t^{-\frac{\nu}{2}}F(t)[t-(n+\beta)^2]^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt\end{aligned}} \tag{2,5}$$

und

$$(2{,}6)\qquad \boxed{\int_0^\infty f(s)s^{-\frac{\nu+1}{2}}\cos 2\sqrt{\alpha s}\,ds=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_\alpha^\infty t^{-\frac{\nu}{2}}F(t)(t-\alpha)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt.}$$

§ 3. *Eine unmittelbare Verallgemeinerung der Doetschschen Transformationsformel.*

Eine unmittelbare Verallgemeinerung von (1,2) erhalten wir, wenn wir in den im vorigen Paragraphen betrachteten allgemeineren Formeln insbesondere

$$a=0,\quad F(t)=t^{\frac{\nu}{2}}(b-t)^{\frac{\mu}{2}}J_\mu\left(2\sqrt{\sigma(b-t)}\right)$$

setzen. Um in diesen Falle die durch (1,3) definierte Funktion $f(s)$ zu berechnen, setzen wir in dem diese Funktion definierenden Integral $t=b\cos^2\theta$ und erhalten auf Grund des „zweiten endlichen Integrals von Sonine" [13])

$$(3{,}1)\quad f(s)=2b^{\frac{\mu+\nu}{2}+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}J_\mu(2\sqrt{\sigma b}\sin\theta)J_\nu(2\sqrt{sb}\cos\theta)\sin^{\mu+1}\theta\cos^{\nu+1}\theta d\theta$$

$$=\sigma^{\frac{\mu}{2}}s^{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{b}{s+\sigma}\right)^{\frac{\mu+\nu+1}{2}}J_{\mu+\nu+1}\left(2\sqrt{b(s+\sigma)}\right)$$

$$(\Re\mu>-1,\ \Re\nu>-1).$$

Die durch (2,2) erklärte Funktion $g(s)$ berechnen wir in diesem Falle dadurch, daß wir zunächst in dem sie definierenden Integral die Substitution $t=(b-s)\cos^2\theta+s$ durchführen und dann das sogenannte erste endliche Integral von Sonine verwenden [14]), in folgender Weise:

$$(3{,}2)\quad g(s)=2(b-s)^{\frac{\mu}{2}+\nu+\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}J_\mu\left(2\sqrt{\sigma(b-s)}\sin\theta\right)\sin^{\mu+1}\theta\cos^{2\nu}\theta d\theta$$

$$=\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sigma^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}(b-s)^{\frac{\mu+\nu}{2}+\frac{1}{4}}J_{\mu+\nu+\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{\sigma(b-s)}\right)$$

$$(\Re\mu>-1,\ \Re\nu>-\tfrac{1}{2}).$$

Indem wir die so gefundenen Werte für $f(s)$ bzw. $g(s)$ in (2,3)

13) [6], § 12, 13.
14) [6], § 12, 11.

einsetzen und in der so entstandenen Beziehung $\mu+\nu+1$ durch ν ersetzen, erhalten wir folgende Transformationsformel

$$
\boxed{\begin{aligned}
&b^{\nu}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sqrt{b[\pi^2(n+v)^2+\sigma]}\right\}^{-\nu}J_{\nu}\left(2\sqrt{b[\pi^2(n+v)^2+\sigma]}\right)e^{2\pi i\beta(n+v)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma^{\nu-\frac{1}{2}}}\sum_{|n+\beta|<\sqrt{b}}\left\{\sqrt{\sigma[b-(n+\beta)^2]}\right\}^{\nu-\frac{1}{2}}J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{\sigma[b-(n+\beta)^2]}\right)e^{-2\pi i v n},\\
&\qquad\qquad(\Re\,\nu>\tfrac{1}{2}).
\end{aligned}}\tag{3,3}
$$

Diese sehr symmetrisch gebaute *Beziehung ist* offenbar *eine Verallgemeinerung der Doetschschen Transformationsformel* (1,2) bzw. ihrer Koberschen Erweiterung (2,1). Durch den Grenzübergang $\sigma\to 0$ geht nämlich die linke Seite von (3,3) bis auf den Faktor b^{ν} in die linke Seite von (2,1) über und auf Grund der bekannten Beziehung [15])

$$\lim_{x\to 0}\frac{J_{\nu-\frac{1}{2}}(2x)}{x^{\nu-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$$

folgt dasselbe auch für die rechte Seite.

Es ist erwähnenswert, daß diese Transformationsformel mit der von Doetsch bei der Herleitung von (1,2) verwendeten Methode auch unmittelbar aus der Jacobischen Transformationsformel der Thetafunktion gewonnen werden kann. Sie entspricht in ihrem symmetrischen Aufbau offenbar viel mehr (1,1) als die bis jetzt bekannten Transformationsformeln von Reihen mit Besselschen Funktionen (1,2) und (2,1). Daher möchten wir *sie* als die eigentliche Übertragung von (1,1) in das Gebiet der Besselschen Funktionen ansprechen und die Doetsch-Kobersche Transformationsformel nur als ihren Grenzfall betrachten.

Genau in derselben Weise — durch Eintragung von (3,1) und (3,2) in (2,4) und Ersetzung von $\mu+\nu+1$ durch ν — geht die zweite Hauptformel des vorigen Paragraphen über in

$$
\boxed{b^{\nu}\int_0^{\infty}\frac{J_{\nu}\left(2\sqrt{b(s+\sigma)}\right)}{[b(s+\sigma)]^{\frac{\nu}{2}}}\cos 2\sqrt{\alpha s}\,\frac{ds}{\sqrt{s}}\;(\Re\,\nu>-\tfrac{1}{2})\;\begin{cases}=0, & \alpha\geqq b,\\[4pt] =\sqrt{\pi}\left(\dfrac{b-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}(\nu-\frac{1}{2})}J_{\nu-\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{\sigma(b-\alpha)}\right), & \alpha<b.\end{cases}}\tag{3,4}
$$

[15]) Vergl. etwa [8], S. 37, Gl. (13).

Auch diese Formel geht beim Grenzübergang $\sigma \to 0$ über in die bekannte und von Doetsch im Falle $\nu = 0$ auf dem Wege über (1,2) wiedergewonnene Formel für die Fouriersche Transformierte von $t^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{t})$ [16]) und bildet einen Sonderfall eines von Sonine untersuchten Integrals [17]).

§ 4. *Eine Reihe mit K-Funktionen.*

Der durch die Annahme

$$(4,1) \quad a = 0,\ b = \infty,\ F(t) = t^{\frac{\nu}{2}} \left[2\pi\sqrt{x(t+y)}\right]^{-\mu} K_\mu\left(2\pi\sqrt{x(t+y)}\right)$$

gekennzeichnete Sonderfall unserer in § 2 abgeleiteten allgemeinen Beziehungen führt ebenfalls auf die Transformationsformel einer gewissen Reihe mit Zylinderfunktionen, nur sind es diesmal die Bassetschen Zylinderfunktionen

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} e^{\frac{i\pi}{2}(\nu+1)} H_\nu^{(1)}\left(z e^{\frac{i\pi}{2}}\right) = \int_0^\infty e^{-z \operatorname{Cos} \theta} \operatorname{Cos} \nu\theta \, d\theta \quad (\Re z > 0),$$

welche in der Transformationsformel auftreten. Da ferner die obere Grenze der Integration, b, in diesem Falle ∞ ist, so werden auf beiden Seiten der Transformationsformel unendliche Reihen auftreten.

Um diese Transformationsformel herzustellen, berechnen wir ähnlich wie im vorigen Paragraphen die der Annahme (4,1) entsprechenden Funktionen $f(s)$ und $g(s)$. Aus der Definition von (1,3) folgt mit den Annahmen (4,1) nach Ersetzung von t durch t^2

$$f(s) = \frac{2}{(2\pi\sqrt{x})^\mu} \int_0^\infty \frac{K_\mu\left(2\pi\sqrt{x(t^2+y)}\right)}{(t^2+y)^{\frac{1}{2}\mu}} J_\nu(2t\sqrt{s}) t^{\nu+1} dt.$$

Das hier auftretende Integral ist in Watsons Bessel Functions ausgerechnet [18]) und ergibt

$$(4,2)\ f(s) = (2\pi^2 x)^{-\mu} y^{-\frac{\mu-\nu-1}{2}} s^{\frac{\nu}{2}} (s+\pi^2 x)^{\frac{\mu-\nu-1}{2}} K_{\mu-\nu-1}\left(2\sqrt{y(s+\pi^2 x)}\right).$$

Entsprechend erhält man nach der Ersetzung von t durch $t^2 + s$ für die durch (2,2) erklärte Funktion $g(s)$

---

[16]) [1], § 5.

[17]) Vergl. auch [6], S. 415, Gl. (1), wo noch $\mu = -\frac{1}{2}$ zu setzen ist.

[18]) [6], S. 416, Gl. (2).

$$g(s) = \frac{2}{(2\pi\sqrt{x})^{\mu}} \int_0^{\infty} \frac{K_{\mu}(2\pi\sqrt{x(t^2+s+y)})}{(t^2+s+y)^{\frac{1}{2}\mu}} t^{2\nu} dt.$$

Auch dieses Integral findet sich in dem oben genannten Werk von Watson ausgerechnet [19]), und die Einsetzung seines Wertes liefert

$$(4,3)\quad g(s) = \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(2\pi^2 x)^{-\nu-\frac{1}{2}}\left[2\pi\sqrt{x(s+y)}\right]^{-(\mu-\nu-\frac{1}{2})} K_{\mu-\nu-\frac{1}{2}}(2\pi\sqrt{x(s+y)}).$$

Die auf diese Weise berechneten Werte von $f(s)$ und $g(s)$ setzen wir in (2,3) ein und erhalten nach Ersetzung von $\mu-\nu-1$ durch ν folgende anscheinend neue Transformationsformel

$$(4,4)\quad \boxed{\begin{aligned} & y^{-\frac{\nu}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[(n+v)^2+x\right]^{\frac{\nu}{2}} K_{\nu}(2\pi\sqrt{y[(n+v)^2+x]})\, e^{2\pi i\beta(n+v)} \\ & = x^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[(n+\beta)^2+y\right]^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} K_{\nu+\frac{1}{2}}(2\pi\sqrt{x[(n+\beta)^2+y]})\, e^{-2\pi i v n}. \end{aligned}}$$

Diese in ihrem symmetrischen Aufbau an (3,3) erinnernde Beziehung degeneriert beim Grenzübergang $x \to 0$ in eine einfachere Beziehung, die auf der rechten Seite keine Zylinderfunktionen mehr enthält und von Kober bereits angegeben wurde [20]).

(4,4) ist mit der zu

$$(4,5)\quad \boxed{\begin{aligned} & \int_0^{\infty} (s+\pi^2 x)^{\frac{\nu}{2}} K_{\nu}(2\sqrt{y(s+\pi^2 x)}) \cos 2\sqrt{\alpha s}\frac{ds}{\sqrt{s}} = \\ & \qquad = \sqrt{\pi}\, y^{-\frac{\nu}{2}} \left(\frac{\pi\sqrt{x}}{\sqrt{\alpha+y}}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} K_{\nu+\frac{1}{2}}(2\pi\sqrt{x(\alpha+y)}) \end{aligned}}$$

gehörenden verallgemeinerten Poissonschen Summationsformel identisch. (4,5) wird aus (2,6) gewonnen und gilt für $x > 0$, $y > 0$ und für alle Werte von ν.

In ganz ähnlicher Weise könnte man den Fall

$$a = 0, \quad b = \infty, \quad F(t) = \left[2\pi\sqrt{x(t+y)}\right]^{-\mu} J_{\mu}(2\pi\sqrt{x(t+y)})\, t^{\frac{\nu}{2}}$$

---

[19]) [6], S. 417, Gl. (6).

[20]) [5], Gl. (2a).

behandeln, welcher auf eine (4,4) ähnliche Beziehung mit Besselschen Zylinderfunktionen führt [21]).

Die bei der Herleitung dieser Formeln vorgenommenen gliedweise Integrationen können in der selben Weise gerechtfertigt werden, wie es in einem ähnlichen Falle Kober [22]) getan hat.

§ 5. *Reihen mit Whittakerschen Funktionen.*

Als letztes Beispiel für die Anwendung der in § 2 gegebenen allgemeinen Transformationsformeln betrachten wir den durch die Annahme

$$(5,1) \qquad a=0, \quad b=\infty, \quad F(t)=t^{-m+2\mu-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{x}t}$$
$$(x>0, \quad \mu>0, \quad \nu=2m)$$

gekennzeichneten Fall. Die dieser Annahme entsprechende Funktion $f(s)$ kann, wie in früheren Arbeiten gezeigt wurde, durch die Whittakersche Funktion $M_{k,m}(z)$ ausgedrückt werden [23]). Es ist [24])

$$(5,2) \qquad f(s)=\frac{\Gamma\left(2\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2m+1)}\left(\frac{\pi}{x}\right)^{m-2\mu}\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x}{\pi}s}M_{2\mu-m,m}\left(\frac{x}{\pi}s\right).$$

Auch das die Funktion $g(s)$ definierende Integral führt, wie sogleich gezeigt werden soll, auf eine konfluente hypergeometrische Funktion, nur gelangt diesmal nicht die Funktion $M_{k,m}(z)$, sondern die gleichfalls von Whittaker eingeführte Funktion $W_{k,m}(z)$ zur Anwendung. Durch die Substitution $t=s+\frac{x}{\pi}u$ geht nämlich die die Funktion $g(s)$ definierende Gleichung (2,2) in dem durch (5,1) gekennzeichneten Fall über in

$$g(s)=s^{2\mu-2m-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2m+\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{x}s}\int_0^\infty e^{-u}u^{2m-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{\pi s}u\right)^{2\mu-2m-\frac{1}{2}}du,$$

und das auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Integral tritt in einer bekannten Integraldarstellung der Funktion

---

[21]) Den Grenzfall $x\to 0$ der auf diese Weise zu erhaltenden Beziehung hat Kober bewiesen. [5], Gl. (4).

[22]) [5], S. 613.

[23]) Die Erklärung und die Anfänge der Theorie der von Whittaker eingeführten konfluenten hypergeometrischen Funktionen findet der Leser in Kapitel XVI von [9].

[24]) Vergl. etwa [2], Gl. (1), und [3], Gl. (1).

$W_{\mu-2m,\mu}\left(\frac{\pi}{x}s\right)$ auf [25]). Daher ist

$$(5,3)\qquad g(s)=\Gamma\left(2m+\frac{1}{2}\right)s^{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{\pi}{x}s}W_{\mu-2m,\mu}\left(\frac{\pi}{x}s\right).$$

Auf Grund von (5,2) und (5,3) ist es ganz klar, daß unsere allgemeinere Transformationsformel die Überführung einer nach M-Funktionen fortschreitenden unendlichen Reihe in eine nach W-Funktionen fortschreitende bewirkt. Da $e^{-\frac{1}{2}z}M_{k,m}(z)$ im allgemeinen (wenn nicht zwischen den Parametern k und m eine gewisse Beziehung besteht) für $z\to+\infty$ das Verhalten einer Potenz von z zeigt, $e^{-\frac{1}{2}z}W_{k,m}(z)$ aber im Wesentlichen das der Exponentialfunktion e^{-z}, so ist mit dieser Überführung zugleich eine bedeutende Verbesserung der Konvergenz der unendlichen Reihe bewirkt. Die aus (2,5) sofort sich ergebende Transformationsformel hat im Übrigen folgende Gestalt

$$(5,4)\qquad \boxed{\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[x\pi(n+v)^2]^{-m-\frac{1}{2}}M_{2\mu-m,m}[x\pi(n+v)^2]\,e^{-\frac{1}{2}x\pi(n+v)^2+2\pi i\beta(n+v)}\\&=\frac{\Gamma(2m+1)}{\sqrt{x}\,\Gamma\left(2\mu+\frac{1}{2}\right)}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\pi}{x}(n+\beta)^2\right]^{\mu-\frac{1}{2}}W_{\mu-2m,\mu}\left[\frac{\pi}{x}(n+\beta)^2\right]e^{-\frac{1}{2}\frac{\pi}{x}(n+\beta)^2-2\pi i v n}\end{aligned}}$$

und gilt für reelle v und β und positive Werte von x und μ. m ist ganz beliebig. Die Formel verliert zunächst ihren Sinn, wenn v oder β gleich einer ganzen Zahl wird, doch kann man durch entsprechende Umformungen eine in diesem Falle gültige Beziehung herleiten [26]). (5,4) beruht auf der aus (2,6) folgenden Fourierschen Kosinustransformierten

$$(5,5)\qquad \boxed{\begin{aligned}&\int_0^\infty M_{2\mu-m,m}(s)s^{-m-1}e^{-\frac{1}{2}s}\cos 2\sqrt{\alpha s}\,ds=\\&\qquad=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2m+1)}{\Gamma\left(2\mu+\frac{1}{2}\right)}W_{\mu-2m,\mu}(\alpha)\alpha^{\mu-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\alpha},\end{aligned}}$$

in der ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x=\pi$ gesetzt

---

[25]) [9], S. 340. Vergl. auch weiter unten (6,2).

[26]) Vergl. hierzu auch die von Doetsch in einem entsprechenden Falle ausgeführten Rechnungen, [1], Gl. (IV_0).

werden durfte. Die Umkehrung dieser Formel ergibt

$$(5,6)\quad \boxed{\begin{aligned}&\int_0^\infty W_{\mu-2m,\mu}(s)s^{\mu-1}e^{-\frac{1}{2}s}\cos 2\sqrt{\alpha s}ds = \\ &\qquad = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(2\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2m+1)} M_{2\mu-m,m}(\alpha)\alpha^{-m-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\alpha}.\end{aligned}}$$

Es ist am Platze, einiges über die Beziehungen zu sagen, die aus (5,4) bei besonderen Werten der Parameter entstehen. Die einfachste Beziehung dieser Art erhalten wir wohl bei der Annahme $\mu = m + \frac{1}{2}$. Die in diesem Falle auftretenden Whittakerschen Funktionen können durch elementare Funktionen ausgedrückt werden; es ist [27])

$$M_{m+\frac{1}{2},m}(z)=z^{m+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}z} \text{ und } W_{-m+\frac{1}{4},m+\frac{1}{4}}(z)=z^{-m+\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{2}z}.$$

Daher ergibt sich in diesem Falle aus (5,4)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-x\pi(n+v)^2+2\pi i\beta(n+v)} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{x}(n+\beta)^2-2\pi i v n},$$

eine mit (1,1) völlig gleichbedeutende Beziehung. (5,4) *enthält also die lineare Transformationsformel der Thetafunktion als Sonderfall* und kann als *direkte Verallgemeinerung* dieser so wichtigen Funktionalbeziehung aufgefasst werden.

Wird $\mu = m + \frac{r}{2} + \frac{1}{2}$ $(r=0, 1, 2, \ldots)$ gesetzt, so können die in diesem Falle auftretenden Whittakerschen Funktionen durch Laguerresche Polynome ausgedrückt werden [28]) und es entsteht eine entsprechende Transformationsformel einer gewissen Reihe mit Laguerreschen Polynomen. Wird $\mu = \frac{1}{4}$ gesetzt, so treten auf der rechten Seite von (5,4) die Funktionen des parabolischen Zylinders auf [29]), während bei der Annahme $\mu = 2m$ bzw. $\mu = \frac{1}{2}m$ auf der rechten bzw. linken Seite von (5,4) Zylinderfunktionen mit rein imaginärem Argument auftreten [30]). Da alle diese Beziehungen auf Grund bekannter Formeln [31]) sofort hingeschrieben werden können, so kann ihre Notierung hier wohl unterbleiben.

[27]) Vergl. z.B. [4], Gl. (1,2) und (1,8).
[28]) Vergl. z.B. [4], Gl. (1,9).
[29]) Vergl. z.B. [4], Gl. (1,11).
[30]) Vergl. z.B. [4], Gl. (1,13).
[31]) Vergl. Anm. [28]) bis [30]).

Noch eine Eigenschaft der Transformationsformel (5,4) möge Erwähnung finden, ohne ausführlich abgeleitet zu werden. Wird (5,4) mit x^{2m} multipliziert und auf die so erhaltene Reihe, als Funktion von x betrachtet, die Laplacesche Transformation

$$\mathfrak{L}_y\{A(x)\} \equiv \int_0^\infty e^{-xy} A(x) dx$$

ausgeübt, so entsteht eine Beziehung, die bis auf die Bezeichnung mit dem Grenzfall $x \to 0$ von (4,4), also mit einer von Kober [32]) abgeleiteten Reihe übereinstimmt.

§ 6. *Summierung der im vorigen Paragraphen auftretenden Reihen.*

Die nach Whittakerschen Funktionen fortschreitenden Reihen, die auf beiden Seiten der Transformationsformel (5,4) stehen, bzw. noch etwas allgemeiner gebaute Reihen können mit Hilfe bekannter Integraldarstellungen der Whittakerschen Funktionen summiert werden, wobei der Zusammenhang dieser Reihen mit der Thetafunktion deutlich zum Ausdruck kommt.

Um zunächst eine Verallgemeinerung der auf der linken Seite von (5,4) stehenden Reihe zu summieren, verwenden wir folgende bekannte Integraldarstellung der $M_{k,m}$-Funktion [33]):

$$M_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(2m+1) 2^{-2m} z^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+m\right)} \int_{-1}^{+1} (1+u)^{-\frac{1}{2}-k+m} (1-u)^{-\frac{1}{2}+k+m} e^{\frac{1}{2}zu} du,$$

$$\left(|\Re\mathrm{e}\, k| < \Re\mathrm{e}\, m + \tfrac{1}{2}\right).$$

Aus dieser Integraldarstellung ergibt sich sofort

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x\pi(n+v)^2]^{-m-\frac{1}{2}} M_{k,m}[x\pi(n+v)^2] e^{-\frac{1}{2}y\pi(n+v)^2 + 2\pi i\beta(n+v)}$$

$$= \frac{\Gamma(2m+1) 2^{-2m}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+m\right)} \cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{+1} (1+u)^{-\frac{1}{2}-k+m} (1-u)^{-\frac{1}{2}+k+m} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-ux)\pi(n+v)^2 + 2\pi i\beta(n+v)} \right\} du.$$

Die auf der linken Seite dieser Beziehung stehende Reihe konvergiert für $y > x > 0$ sicher absolut, und dasselbe gilt von der unter dem Integralzeichen stehenden Reihe, deren absolute

---

32) [5], Gl. (2a).

33) [9], S. 352, Example 1.

Konvergenz überdies noch in Intervalle $-1 \leqq u \leqq 1$ gleichmäßig ist. Daher darf die Reihenfolge von Integration und Summation vertauscht werden. Die unter dem Integralzeichen stehende Summe ist aber gleich

$$\exp\left(-\frac{2\beta^2\pi}{y-ux}\right)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{\pi}{2}(y-ux)\left(n+v-\frac{2i\beta}{y-ux}\right)^2\right\}=$$
$$\sqrt{\frac{2}{y-ux}}\exp\left(-\frac{2\beta^2\pi}{y-ux}\right)\cdot\vartheta_3\left(v\pi-\frac{2i\beta\pi}{y-ux}\,\middle|\,\frac{2i}{y-ux}\right),$$

wobei $\vartheta_3(z|\tau)$ die Jacobische Thetafunktion in der von Whittaker und Watson verwendeten Bezeichnungsweise bedeutet[34]). Daher ist

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[x\pi(n+v)^2\right]^{-m-\frac{1}{2}}M_{k,m}\left[x\pi(n+v)^2\right]e^{-\frac{1}{2}y\pi(n+v)^2+2\pi i\beta(n+v)}\\&=\frac{\Gamma(2m+1)2^{-2m+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+m\right)}\cdot\\&\cdot\int_{-1}^{+1}(1+u)^{-\frac{1}{2}-k+m}(1-u)^{-\frac{1}{2}+k+m}e^{-\frac{2\beta^2\pi}{y-ux}}\vartheta_3\left(v\pi-\frac{2i\beta\pi}{y-ux}\,\middle|\,\frac{2i}{y-ux}\right)\frac{du}{\sqrt{y-ux}}\cdot\end{aligned}}\tag{6,1}$$

$$(\Re k<\Re m+\tfrac{1}{2},\; y>x\geqq 0).$$

Diese Beziehung vereinfacht sich bedeutend für $\beta=0$. Wird in diesem Sonderfall die Thetafunktion im Integranden durch ihre Fourier-Reihe ersetzt, so ergibt sich eine (5,4) analoge Transformationsformel, auf deren Aufstellung wir an dieser Stelle nicht näher eingehen möchten.

In ähnlicher Weise läßt sich eine Reihe mit $W_{k,m}$-Funktionen summieren, welche also der rechten Seite von (5,4) entspricht. Als Ausgangspunkt dient hier die Integraldarstellung[35])

$$W_{k,m}(z)=\frac{e^{-\frac{1}{2}z}z^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+m\right)}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}-k+m}(1+t)^{-\frac{1}{2}+k+m}e^{-zt}dt\tag{6,2}$$

$$(\Re k<\Re m+\tfrac{1}{2},\;\Re z>0).$$

Aus ihr kann man genau so wie im vorhergehenden Falle —

[34]) [9], Kapitel XXI.

[35]) [9], S. 340.

durch Ersetzung der $W_{k,m}$-Funktion durch ihre Integraldarstellung, Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration und Summierung der Reihe unter dem Integralzeichen mit Hilfe der Thetareihe — folgende für $y > 0$ und $\Re k < \Re m - \frac{1}{2}$ gültige Beziehung herleiten:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x\pi(n+v)^2]^{-m-\frac{1}{2}} W_{k,m}[x\pi(n+v)^2] e^{-(y-\frac{1}{2}x)\pi(n+v)^2-2\pi i\beta(n+v)} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+m\right)} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}-k+m}(1+t)^{-\frac{1}{2}+k+m} e^{-\frac{\beta^2\pi}{y+xt}} \vartheta_3\left(v\pi+\frac{i\beta\pi}{y+xt} \,\middle|\, \frac{i}{y+xt}\right) \frac{dt}{\sqrt{y+xt}}.\end{aligned}} \tag{6,3}$$

Die im vorigen Paragraphen gewonnene Transformationsformel (5,4) hätte auch aus einer der Integrale (6,1) oder (6,3) durch Anwendung der Jacobischen Transformation der Thetafunktion gewonnen werden können.

Anmerkung bei der Korrektur:

Während der Drucklegung ist mir bekannt geworden, daß die hier als Doetschsche Transformationsformel bezeichnete Beziehung ebenfalls aus der linearen Transformationsformel der Thetafunktion unter Zuhilfenahme der Umkehrung der Laplaceschen Transformation bereits vor Doetsch von H. V. Lowry [Operational calculus II]. The values of certain integrals and the relationships between various polynomials and series obtained by operational methods [Phil. Mag. (7) **13** (1932), 1144—1163] im Wesentlichen gewonnen wurde.

Literaturverzeichnis.

G. Doetsch.

[1] Summatorische Eigenschaften der Besselschen Funktionen und andere Funktionalrelationen, die mit der linearen Transformationsformel der Thetafunktion äquivalent sind [Comp. Math. **1** (1935), 85—97].

A. Erdélyi.

[2] Über eine Methode zur Gewinnung von Funktionalbeziehungen zwischen konfluenten hypergeometrischen Funktionen [Monatshefte f. Math. u. Phys. **45** (1936), 31—52].

[3] Über gewisse Funktionalbeziehungen [Monatshefte f. Math. u. Phys. **45** (1937) 251—279].

[4] Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Erste Mitteilung: Additions- und Multiplikationstheoreme [Math. Zeitschr. **42** (1936), 125—143].

H. Kober.

[5] Transformationsformeln gewisser Besselscher Reihen, Beziehungen zu Zeta-Funktionen [Math. Zeitschr. **39** (1935), 609—624].

G. N. WATSON.

[6] A Treatise on the Theory of Bessel Functions [Cambridge 1922].

[7] Über Poissonsche Summationsformeln [Zprávy o druhém sjezdu matematiku zemi slovanskych, Praha 1934, 169—171].

R. WEYRICH.

[8] Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen [Berlin 1937].

E. T. WHITTAKER & G. N. WATSON.

[9] A Course of Modern Analysis [Cambridge 1927].

(Eingegangen den 17. Februar 1937.)