Compositio Mathematica

I. Chlodovsky

Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynomes de M. S. Bernstein

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 380-393

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__380_0>

Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynomes de M. S. Bernstein

par

I. Chlodovsky

Moscou

---

1. M. S. Bernstein a démontré [1]) que toute fonction continue définie dans $[0, 1]$ peut être représentée comme la limite d'une suite de polynomes

$$(1) \qquad B_n[f(x)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

convergeant uniformément sur ce segment.

Le polynome $B_n[f(x)]$ est appelé polynome de M. S. Bernstein. La formule (1) nous montre que les coefficients des polynomes de M. S. Bernstein sont définis au moyen des valeurs de la fonction qu'on cherche à approximer aux points rationnels du segment $[0, 1]$. A ce point de vue les polynomes de M. S. Bernstein se rapprochent des polynomes d'interpolation de Newton-Lagrange. Il est à remarquer que les polynomes de M. S. Bernstein ont l'avantage d'être uniformément convergents quelle que soit la fonction continue $f(x)$, tandis que les polynomes d'interpolation de Newton ne convergent pas toujours.

Le but du présent travail est d'étudier la représentation par une suite de polynomes de M. S. Bernstein des fonctions définies dans un intervalle infini. On peut se borner au cas d'une fonction $f(x)$ définie dans $0 \leqq x < \infty$. Il est facile de voir que tous les résultats obtenus peuvent être étendus au cas de l'intervalle $-\infty < x < +\infty$.

2. Considérons une fonction $f(x)$ définie dans $0 \leqq x < \infty$. Soit

$$(2) \qquad h_1,\ h_2,\ h_3, \ldots,\ h_n, \ldots$$

---

[1]) S. Bernstein, Démonstration du théorème de Weierstraß fondée sur le calcul des probabilités [Communic. Soc. Math. de Charkow (2) 13 (1912), 1—2].

une suite croissante de nombres positifs tels que

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \infty.$$

Approximons la fonction $f(x)$ dans le segment fini $0 \leqq x \leqq h_n$ au moyen du polynome de M. S. Bernstein de degré égal à n. En faisant une simple transformation linéaire on déduit de la suite des polynomes (1) la suite suivante:

$$(3) \qquad B_n[f(x), h_n] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{h_n k}{n}\right) \left(\frac{x}{h_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{h_n}\right)^{n-k}.$$

Nous dirons que la suite (3) est la suite des polynomes de M. S. Bernstein étendue à un intervalle infini.

Il est bien naturel de poser la question suivante: quelles sont les conditions qu'il faut imposer à la fonction $f(x)$ et aux nombres h_n pour que la suite (3) converge vers la fonction $f(x)$ en chaque point x, $0 \leqq x < \infty$?

3. Il est facile de voir que la suite des nombres h_n ne peut être choisie arbitrairement. Il suffit de considérer les exemples suivants: en calculant les suites des polynomes de M. S. Bernstein pour les fonctions x^2 et e^x on trouve

$$B_n[x^2, h_n] = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{h_n}{n} x$$

et

$$B_n[e^x, h_n] = \left[1 + \left(e^{\frac{h_n}{n}} - 1\right)\frac{x}{h_n}\right]^n.$$

Les exemples considérés prouvent que si le rapport $\frac{h_n}{n}$ ne tend pas vers zéro quand n croit indéfiniment, la suite correspondante des polynomes de M. S. Bernstein ne converge pas, en général, vers la fonction qui l'a déterminée. Par exemple, en posant $h_n = n$, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} B_n[x^2, n] = x^2 + x,$$

$$\lim_{n\to\infty} B_n[e^x, n] = e^{(e-1)x}.$$

Si $\frac{h_n}{n}$ ne converge pas vers une limite finie, la suite des polynomes (3) est, en général, divergente.

4. Afin d'obtenir des conditions suffisantes pour la convergence des polynomes de M. S. Bernstein dans un intervalle infini, considérons quelques propriétés de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = 1. \tag{4}$$

Dans son mémoire „Démonstration du théorème de Weierstraß fondée sur le calcul des probabilités", M. S. Bernstein, en démontrant que la suite des polynomes (1) converge vers $f(x)$, prenait pour point de départ la propriété suivante de la somme (4): En prenant une valeur fixe de t $(0 < t < 1)$ et en considérant les valeurs entières de k qui vérifient l'inégalité

$$\left| \frac{k}{n} - t \right| > \delta, \tag{5}$$

où δ est un nombre positif arbitraire, on voit que la somme (4) étendue aux valeurs de k vérifiant l'inégalité (5) tend uniformément vers zéro quand n croît indéfiniment. Cette propriété de la somme (4) est équivalente à un théorème de Bernoulli bien connu dans la théorie des probabilités.

Pour étendre la démonstration de M. S. Bernstein au cas d'un intervalle infini, il suffit d'évaluer la somme précédente avec plus de précision que dans le cas du théorème de Bernoulli.

La méthode la plus simple pour évaluer la somme

$$\sum_{\left|\frac{k}{n} - t\right| > \delta} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

est d'utiliser le théorème suivant de la théorie des probabilités, qu'on appelle habituellement inégalité généralisée de Tchebycheff.

Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ des quantités indépendantes dont les espérances mathématiques sont respectivement égales à a_1, $a_2, \ldots, a_n$. Les espérances mathématiques des puissances des différences $x_k - a_k$ vérifient les inégalités

$$| \text{Esp. math. } (x_k - a_k)^m | \leqq \frac{\beta_k}{2} H^{m-2} m!, \tag{6}$$

où β_k est l'espérance mathématique de $(x_k - a_k)^2$, c'est-à-dire la dispersion de $(x_k - a_k)$, et H une constante positive.

Si la condition (6) est vérifiée, la probabilité de chacune des inégalités

$$\begin{cases} (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \geqq 2z\sqrt{B} \\ (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \leqq -2z\sqrt{B} \end{cases} \tag{7}$$

est inférieure à e^{-z^2} si $B = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$ et $0 < z \leqq \frac{\sqrt{B}}{2H}$.

Appliquons le théorème énoncé au schéma de Bernoulli. Considérons à cet effet un événement E dont la probabilité est égale à t, posons $x_k = 1$ si l'événement a lieu à la k-ième expérience, et $x_k = 0$ dans le cas contraire. Il est évident que l'espérance mathématique a_k de la quantité x_k est égale à t, la dispersion β_k de la différence $x_k - a_k$ est égale à $t(1-t)$. On a ainsi

$$a_k = t, \quad \beta_k = t(1-t),$$

donc

$$B = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = nt(1-t).$$

Il est aisé de voir que les inégalités (6) ont lieu si l'on pose $H = \frac{1}{3}$. Les inégalités (7) prennent la forme

$$k - nt \geqq 2z\sqrt{nt(1-t)}, \tag{8}$$

$$k - nt \leqq -2z\sqrt{nt(1-t)}. \tag{9}$$

La valeur numérique de z doit vérifier l'inégalité

$$0 < z \leqq \frac{3}{2}\sqrt{nt(1-t)}.$$

Il est évident que la probabilité de l'inégalité (8) est égale à

$$\sum^{*} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k},$$

où le signe Σ^* n'est étendu qu'aux termes pour lesquels k vérifie l'inégalité (8).

D'autre part, la probabilité de l'inégalité (9) est égale à

$$\sum^{**} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k},$$

la somme étant étendue aux valeurs de k vérifiant l'inégalité (9). En appliquant le théorème énoncé, on trouve

$$\left\{\begin{aligned} &\sum^{*} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} < e^{-z^2} \\ &\sum^{**} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} < e^{-z^2}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Remarquons qu'on peut obtenir les inégalités (10) directement sans faire appel aux résultats de la théorie des probabilités.

5. Considérons une fonction continue $f(x)$ définie dans $0 \leqq x < +\infty$. Soit x une valeur positive fixe inférieure à h_n. Les nombres entiers $0, 1, 2, \ldots, n$ seront répartis en deux catégories: la première est formée des entiers k vérifiant l'inégalité

$$(11) \qquad \left| \frac{kh_n}{n} - x \right| < \delta,$$

où δ est un nombre positif donné; la seconde est formée des entiers k qui vérifient l'une des inégalités

$$(12) \qquad \frac{kh_n}{n} - x \geqq \delta,$$

$$(13) \qquad \frac{kh_n}{n} - x \leqq -\delta.$$

Les inégalités (12) et (13) peuvent être écrites sous la forme

$$(14) \qquad \begin{cases} k - nt \geqq \dfrac{n\delta}{h_n} \\ k - nt \leqq -\dfrac{n\delta}{h_n}, \end{cases}$$

où

$$t = \frac{x}{h_n}.$$

En comparant les inégalités (8) et (9) avec les inégalités (14), on obtient

$$z = \frac{n\delta}{2h_n\sqrt{nt(1-t)}}.$$

Soit ε un nombre positif aussi petit qu'on veut; choisissons un δ positif de manière à avoir simultanément

$$|f(x_1) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x_1 - x| < \delta,$$

et

$$(15) \qquad \frac{h_n\delta}{x(h_n-x)} \leqq 3.$$

Il est évident que δ dépend de ε et de la valeur fixée de x. Chaque fonction $f(x)$ peut être représentée sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{h_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{h_n}\right)^{n-k}.$$

Il en résulte immédiatement que l'on a

$$(16) \quad |f(x) - B_n[f(x), h_n]| = \left| \sum_{k=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{kh_n}{n}\right)\right] \binom{n}{k} \left(\frac{x}{h_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{h_n}\right)^{n-k} \right|.$$

Nous allons décomposer la somme du second membre en deux autres Σ^* et Σ^{**}. La somme Σ^* est étendue aux termes pour lesquels k appartient à la première catégorie, et la somme Σ^{**} à ceux où k appartient à la seconde catégorie. On obtient ainsi

$$(17)\quad \begin{aligned} |f(x)-B_n[f(x),h_n]| \leqq &\left|\sum\nolimits^{*}\left[f(x)-f\left(\frac{kh_n}{n}\right)\right]\binom{n}{k}\left(\frac{x}{h_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{h_n}\right)^{n-k}\right| + \\ &+\left|\sum\nolimits^{**}\left[f(x)-f\left(\frac{kh_n}{n}\right)\right]\binom{n}{k}\left(\frac{x}{h_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{h_n}\right)^{n-k}\right|. \end{aligned}$$

Considérons la première somme du second membre de l'inégalité précédente. On a

$$\left|\sum\nolimits^{*}\left[f(x)-f\left(\frac{kh_n}{n}\right)\right]\binom{n}{k}\left(\frac{x}{h_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{h_n}\right)^{n-k}\right| \leqq \varepsilon,$$

puisque la somme Σ^* ne contient que les termes pour lesquels

$$\left|x-\frac{kh_n}{n}\right| < \delta.$$

D'autre part il est facile de voir qu'on peut appliquer à la somme Σ^{**} les inégalités (10). On obtient ainsi

$$\left|\sum\nolimits^{**}\left[f(x)-f\left(\frac{kh_n}{n}\right)\right]\binom{n}{k}\left(\frac{x}{h_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{h_n}\right)^{n-k}\right| < 4M(h_n)e^{-\frac{\delta^2}{4x\left(1-\frac{x}{h_n}\right)}\cdot\frac{n}{h_n}},$$

où $M(h_n)$ est la valeur maximum du module de $f(x)$ dans $0 \leqq x < h_n$.

On obtient finalement

$$(18)\qquad |f(x)-B_n[f(x),h_n]| < \varepsilon + 4M(h_n)e^{-\alpha^2\frac{n}{h_n}}$$

où

$$\alpha^2 = \frac{\delta^2}{4x\left(1-\frac{x}{h_n}\right)}.$$

L'inégalité (18) permet de démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. *Si $f(x)$ est continue au point x et si l'expression*

$$M(h_n)e^{-\alpha^2\frac{n}{h_n}}$$

tend vers zéro pour chaque $\alpha \neq 0$ quand n croît indéfiniment, il existe pour cette valeur de x et pour chaque ε positif aussi petit qu'on veut un entier N tel que pour tous les $n \geqq N$ on a l'inégalité

$$|f(x)-B_n[f(x),h_n]| < \varepsilon.$$

Ainsi l'allure de la suite des polynomes de M. S. Bernstein en un point fixe ne dépend que de la croissance de $f(x)$ et de l'allure de cette fonction au voisinage du point considéré, et ne dépend pas de la continuité de $f(x)$ dans tout l'intervalle $0 \leqq x < \infty$.

6. Il est aisé d'obtenir comme corollaire du théorème précédent la proposition suivante.

Si $f(x)$ est continue dans $0 \leqq x < \infty$ et vérifie l'inégalité

$$|f(x)| < C e^{x^p}$$

pour toutes les valeurs positives de x (C et p étant des constantes arbitraires), la suite des polynomes de M. S. Bernstein converge en chaque point de l'intervalle $0 \leqq x < \infty$ vers la valeur correspondante de $f(x)$ pourvu que la suite des nombres h_n vérifie les conditions

$$h_n < n^{\frac{1}{p+1+\eta}},$$

η étant une quantité positive aussi petite qu'on le veut.

Remarquons que l'inégalité (18) ne permet aucune conclusion sur la convergence des polynomes de M. S. Bernstein dans le cas où la fonction $f(x)$ croît plus rapidement qu'une fonction exponentielle arbitraire.

7. Nous allons maintenant étudier les cas où la convergence de la suite des polynomes de M. S. Bernstein définis pour tout intervalle fini est uniforme. Il est très facile de démontrer le théorème suivant:

Théorème 2. *Si $f(x)$ est continue dans l'intervalle $0 \leqq x < \infty$ et si l'expression*

$$M(h_n)\, e^{-\alpha^2 \frac{n}{h_n}}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ quel que soit α fini et non nul, la suite des polynomes $B_n[f(x), h_n]$ converge uniformément vers $f(x)$ sur chaque segment fini $0 < a \leqq x \leqq b$.

Pour démontrer ce théorème il suffit de remarquer que la fonction $f(x)$ est uniformément continue sur le segment fini $a \leqq x \leqq b$, donc quel que soit ε positif fixe, il existe un δ tel que pour tous les points x_1 et x de $[a, b]$ on a l'inégalité

$$|f(x_1) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x_1 - x| < \delta.$$

D'autre part α^2 a un minimum sur le segment $a \leqq x \leqq b$, nous le désignerons par γ^2.

Il est facile de voir que pour tous les points x du segment $a \leqq x \leqq b$ l'inégalité (18) prend la forme

$$|f(x) - B_n[f(x), h_n]| < \varepsilon + 4M(h_n)\, e^{-\gamma^2 \frac{n}{h_n}},$$

ce qui prouve le théorème précédemment énoncé.

8. La suite des polynomes

$$B_n[f(x)] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

a la propriété remarquable suivante: si $f(x)$ possède une dérivée continue sur le segment $[0, 1]$, les dérivées des polynomes de M. S. Bernstein convergent uniformément vers la dérivée de $f(x)$.

Afin d'étendre au cas d'un intervalle infini cette propriété des polynomes de M. S. Bernstein, nous avons besoin du lemme suivant:

La suite des polynomes

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{kh_n}{n} + \xi_k\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{h_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{h_n}\right)^{n-k}$$

où $0 \leqq \xi_k < \frac{h_n}{n}$ $\left(\frac{h_n}{n} \to 0\right)$ *converge en chaque point de l'intervalle* $0 \leqq x < \infty$ *vers* $f(x)$ *si* $f(x)$ *est continue dans* $0 \leqq x < \infty$ *et si l'expression*

$$M(h_n) e^{-\alpha^2 \frac{n}{h_n}}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ *quel que soit* $\alpha \neq 0$.

Le lemme énoncé est évident si $f(x)$ est uniformément continue dans $0 \leqq x < \infty$.

Si $f(x)$ n'est pas uniformément continue sur le demi-axe réel, il suffit pour démontrer le lemme, d'apporter quelques modifications insignifiantes à la démonstration du théorème 1.

9. Considérons une fonction $f(x)$ continue ainsi que sa première dérivée dans l'intervalle $0 \leqq x < \infty$. Soit $M'(h_n)$ le maximum de la valeur absolue de $f'(x)$ dans le segment $0 \leqq x \leqq h_n$.

THÉORÈME 3. *La suite des polynomes*

$$\frac{d}{dx} B_n[f(x), h_n]$$

converge vers $f'(x)$ *en chaque point de* $0 \leqq x < \infty$ *si l'expression*

$$M'(h_{n+1})e^{-\alpha^2\frac{n}{h_{n+1}}}$$

tend vers zéro quand n croît indéfiniment, quel que soit $\alpha \neq 0$.

En dérivant le polynome $B_{n+1}[f(x), h_{n+1}]$ et en tenant compte de la formule des accroissements finis, on voit que

$$\frac{d}{dx}B_{n+1}[f(x), h_{n+1}] = \sum_{k=0}^{n} f'\left(\frac{kh_{n+1}}{n} + \xi_k\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{h_{n+1}}\right)^k\left(1-\frac{x}{h_{n+1}}\right)^{n-k}$$

où

$$0 < \xi_k < \frac{h_{n+1}}{n}.$$

D'autre part

$$\frac{kh_{n+1}}{n+1} + \xi_k = \frac{kh_{n+1}}{n} + \eta_k$$

où

$$\eta_k = \xi_k - \frac{kh_{n+1}}{n(n+1)},$$

donc

$$|\eta_k| < \frac{h_{n+1}}{n}.$$

On obtient ainsi

$$\frac{d}{dx}B_{n+1}[f(x), h_{n+1}] = \sum_{k=0}^{n} f'\left(\frac{kh_{n+1}}{n} + \eta_k\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{h_{n+1}}\right)^k\left(1-\frac{x}{h_{n+1}}\right)^{n-k}.$$

En appliquant le lemme précédent, on voit que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}B_{n+1}[f(x), h_{n+1}] = \frac{df(x)}{dx}$$

c.q.f.d.

Il est aisé de voir que le théorème précédent reste vrai quand on considère les dérivées d'ordre supérieur.

10. Nous n'avons étudié jusqu'à présent que la convergence des polynomes de M. S. Bernstein aux points de continuité de $f(x)$; étudions maintenant la convergence aux points de discontinuité de la fonction $f(x)$. En étudiant l'allure des polynomes de M. S. Bernstein définis sur le segment [0, 1] aux points de discontinuité de $f(x)$, on peut utiliser la relation suivante [2])

[2]) I. Chlodovsky, Sur la représentation des fonctions discontinues par les polynomes de M. S. Bernstein [Fund. Math. 13 (1929), 62—72].

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\alpha t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

On peut obtenir une formule analogue pour les polynomes de M. S. Bernstein définis dans $0 \leqq x < \infty$, quand on considère seulement les fonctions $f(x)$ bornées.

En effet, considérons une fonction $f(x)$ bornée dans $0 \leqq x < \infty$ et telle que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} f(x+\alpha t)e^{-t^2}dt \quad (\alpha > 0)$$

existe.

Il est nécessaire de postuler l'existence de l'intégrale, car on ne suppose pas la continuité de $f(x)$.

Il est évident que sans restreindre la généralité, on peut supposer $f(x)$ positive.

Considérons le polynome

$$B_n[f(x), h_n] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{kh_n}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{h_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{h_n}\right)^{n-k}.$$

La somme du second membre peut être décomposée en deux sommes Σ^* et Σ^{**}. La première est étendue aux valeurs de k vérifiant l'inégalité

$$-T\sqrt{\frac{n}{h_n}x\left(1-\frac{x}{h_n}\right)} < k - \frac{nx}{h_n} < T\sqrt{\frac{n}{h_n}x\left(1-\frac{x}{h_n}\right)},$$

T étant un nombre positif donné et x fixe. La seconde somme contient tout ce qui reste.

Nous avons supposé $f(x)$ positive, donc on a

$$\sum\nolimits^{*} f\left(\frac{kh_n}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{h}{x_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{h_n}\right)^{n-k} < B_n[f(x), h_n] \quad (0 \leqq x < h_n). \tag{19}$$

En appliquant à la somme Σ^{**} l'inégalité de Tchebycheff, nous avons

$$\sum\nolimits^{**} f\left(\frac{kh_n}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{h_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{h_n}\right)^{n-k} < Me^{-T^2},$$

où M est la borne supérieure des valeurs de $f(x)$ dans $0 \leqq x < \infty$; d'autre part en posant

$$k = \frac{nx}{h_n} + t\sqrt{\frac{n}{h_n}x\left(1-\frac{x}{h_n}\right)}$$

et en faisant quelques transformations élémentaires on obtient

$$\sum^{*} f\left(\frac{kh_n}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{h_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{h_n}\right)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-T}^{T} f(x+\alpha_n t)e^{-\frac{t^2}{2}}\Delta t + \varepsilon,$$

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{h_n}x\left(1-\frac{x}{h_n}\right)}},$$

où $\alpha_n = \frac{h_n}{n}\sqrt{\frac{x}{h_n}\left(1-\frac{x}{h_n}\right)}$ et où ε tend uniformément vers zéro quand n croît indéfiniment. En remplaçant la dernière somme finie par une intégrale, on a

$$\sum^{*} f\left(\frac{kh_n}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{h_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{h_n}\right)^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T} f(x+\alpha_n t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \eta.$$

Ainsi l'inégalité (19) prend la forme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T} f(x+\alpha_n t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\eta < B_n[f(x), h_n] <$$
$$< \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T} f(x+\alpha_n t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\eta+2Me^{-T^2}.$$

En supposant que $\frac{h_n}{n}$ tend vers zéro, on fait un passage à la limite et on obtient

$$\lim_{n\to\infty} B_n\,[f(x), h_n] = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\alpha t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \tag{20}$$

La formule (20) permet de démontrer la proposition suivante:

Si $f(x)$ est bornée dans $0 \leqq x < \alpha$, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\alpha t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ existe et si $\frac{h_n}{n}$ tend vers zéro, alors la suite des polynomes $B_n[f(x), h_n]$ converge vers $f(x)$ au point x considéré s'il est point de continuité, et vers la valeur moyenne s'il est point de discontinuité de première espèce.

11. Il est facile de se débarrasser de l'hypothèse restrictive que $f(x)$ est bornée. En effet, on peut démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Si l'expression*

$$M(h_n)e^{-\alpha^2\frac{n}{h_n}}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ *pour chaque* $\alpha \neq 0$, *la suite des polynomes* $B_n[f(x), h_n]$ *converge vers la valeur de* $f(x)$ *aux points de continuité et vers la valeur moyenne* $\frac{1}{2}$ $[f(x+0)+f(x-0)]$ *aux points de discontinuité de première espèce.*

La première partie du théorème a déjà été démontrée, il ne reste qu'à démontrer la seconde partie. Supposons que le point $x = a$ soit pour la fonction $f(x)$ un point de discontinuité de première espèce. Définissons une fonction $\omega(x)$ en posant

$$\omega(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x - a| > 1,$$
$$\omega(x) = \frac{1}{2} [f(a+0) - f(a-0)] (x-a+1) \quad \text{si} \quad a - 1 \leqq x < a,$$
$$\omega(x) = \frac{1}{2} [f(a-0) - f(a+0)] (x-a-1) \quad \text{si} \quad a < x \leqq a + 1.$$

La fonction $F(x) = f(x) + \omega(x)$ est continue au point $x = a$ et on a

$$F(a) = \frac{f(a+0) + f(a-0)}{2}.$$

D'autre part $\omega(x)$ est bornée dans l'intervalle $-\infty < x < \infty$ et sa valeur moyenne au point $x = a$ est nulle. Considérons la suite des polynomes $B_n[F(x), h_n]$. On a évidemment

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ x=a}} B_n[F(x), h_n] = \lim_{\substack{n \to \infty \\ x=a}} [B_n[f(x), h_n] + B_n[\omega(x), h_n]].$$

En remarquant que

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ x=a}} B_n[\omega(x), h_n] = 0,$$

on trouve

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ x=a}} B_n[f(x), h_n] = \frac{f(a+0) + f(a-0)}{2}$$

c.q.f.d.

12. Passons maintenant à l'étude des polynomes de M. S. Bernstein dans le domaine d'une variable complexe. Commençons par la considération de la suite des polynomes $B_n[z^p, h_n]$.

Si $p \leqq n$, on a

$$(21) \qquad B_n[z^p, h_n] = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)z^p +$$
$$+ a_{1,p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-2}{n}\right)\frac{h_n}{n} z^{p-1} +$$

$$+ a_{2,p}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-3}{n}\right)\frac{h_n^2}{n^2}z^{p-2}+\ldots+\frac{h_n^{p-1}}{n^{p-1}}z,$$

et si $p > n$

$$B_n[z^p, h_n] = \frac{n!}{n^p}z^n + a_{1,p}\frac{h_n}{n}\frac{n(n-1)\cdots 2}{n^{p-1}}z^{n-1}+$$
$$+ a_{2,p}\frac{h_n^2}{n^2}\frac{n(n-1)\cdots 3}{n^{p-2}}z^{n-2}+\ldots+\frac{h_n^{n-1}}{n^{n-1}}z,$$

où les $a_{k,p}$ sont des nombres positifs qu'on calcule par récurrence d'après la formule

$$a_{k,p} = \sum_{m=1}^{n-k} m a_{m-1,p-1}, \quad a_{0,p} = a_{p-1,p} = 1.$$

La formule (21) montre que la suite des polynomes

$$B_n[p(z), h_n],$$

où $P(z)$ est un polynome donné, converge uniformément vers $P(z)$ dans chaque domaine fini du plan de la variable complexe z pourvu que $\frac{h_n}{n}$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

En remarquant que dans les formules (21) et (22) tous les coefficients sont positifs et réels, on a

$$|B_n[z^p, h_n]| \leqq \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)r^p+\ldots+\left(\frac{h_n}{n}\right)^{p-1}r \quad (p\leqq n)$$

$$|B_n[z^p, h_n]| \leqq \frac{n!}{n^p}r^n+\ldots+\left(\frac{h_n}{n}\right)^{n-1}r \quad (p>n)$$

où

$$r = |z|.$$

On trouve ainsi pour chaque valeur entière de p

$$|B_n[z^p, h_n]| \leqq B_n[r^p, h_n], \quad |z| = r. \tag{23}$$

14. Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini ϱ. En développant $f(x)$ en série de Taylor, on a

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Considérons maintenant la fonction $F(r)$ d'une variable réelle r définie par la série

$$F(r) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k.$$

Comme $f(z)$ est par hypothèse d'ordre fini ϱ, la fonction $F(r)$ vérifie l'inégalité

$$F(r) < C\, e^{r^\varrho}.$$

D'autre part, on a évidemment

$$B_n[f(z), h_n] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k B_n[z^k, h_n]$$

d'où

$$| B_n[f(z), h_n] | \leqq \sum_{k=0}^{\infty} | a_k | | B_n[z^k, h_n] |.$$

En appliquant à cette dernière formule l'inégalité (23) on trouve

$$|B_n[f(z), h_n]| \leqq \sum_{k=0}^{\infty} | a_k | B_n[r^k, h_n], \quad | z | = r,$$

c'est-à-dire

$$| B_n[f(z), h_n] | \leqq B_n[F(r), h_n].$$

Cette dernière inégalité permet de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 5. *Si $f(z)$ est une fonction entière d'ordre fini ϱ et si les nombres h_n vérifient les inégalités $h_n < n^{\frac{1}{\varrho+1+\varepsilon}}$, la suite des polynomes $B_n[f(z), h_n]$ converge uniformément vers $f(z)$ dans chaque cercle de rayon fini.*

En effet, la croissance des nombres h_n est choisie de telle manière que la suite des polynomes $B_n[F(r), h_n]$ converge uniformément sur le segment $0 < r_1 \leqq r \leqq r_2$ vers la fonction $F(r)$. Donc on peut toujours trouver un entier N tel que pour tous les $n > N$ et pour tous les r du segment considéré, on ait l'inégalité

$$B_n[F(r), h_n] < 2F(r_2).$$

Il en résulte que

$$| B_n[f(z), h_n] | < 2F(r_2)$$

si $r_1 \leqq | z | \leqq r_2$.

Nous avons ainsi démontré que la suite des polynomes $B_n[f(z), h_n]$ est uniformément bornée dans le cercle de rayon $| z | = r_2$. D'autre part nous avons vu précédemment que la suite considérée converge uniformément sur le segment $(0, r_2)$ de l'axe réel, donc elle converge uniformément dans tout le domaine $| z | \leqq r_2$.

(Reçu le 3 juin 1936.)