COMPOSITIO MATHEMATICA

S. SIDON

Über unvollständige Orthogonalsysteme

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 373-379
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__373_0>

Über unvollständige Orthogonalsysteme [1])

von

S. Sidon

Budapest

Hat das bezüglich des Intervalls $a < x < b$ orthogonale Funktionensystem $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$, dessen Glieder für $a < x < b$ beschränkt sind, die Eigenschaft, daß jede Funktion $T(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$, wo die c_k beliebige reelle Konstanten bedeuten, für ein reelles $p > 2$ die Ungleichung

$$(1) \qquad \int_a^b |T(x)|^p dx < C \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

mit von $T(x)$ unabhängigem C [2]) erfüllt, während für jedes $\varepsilon > 0$

$$(2) \qquad \overline{\lim} \frac{\int_a^b |T(x)|^{p+\varepsilon} dx}{\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \right)^{\frac{p+\varepsilon}{2}}} = \infty$$

gilt [3]), so nenne ich p den charakteristischen Exponenten des

---

[1]) Für die in Betracht kommende Literatur siehe meine Noten: I. Bemerkungen über Fourier- und Potenzreihen [Acta Szeged 7 (1934), 85—94], insbesondere Einleitung und Teil 4. II. Über die Fourier-Konstanten der Funktionen der Klasse L_p für $p > 1$ [Acta Szeged 7 (1935), 175—176].

[2]) C wird hier auch weiter diese Bedeutung haben.

[3]) Auch das Erfülltsein von

$$(1') \qquad \overline{\lim} \frac{\int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \varphi_k(x) \right|^p dx}{n^{\frac{p}{2}}} < \infty,$$

wenn sämtliche $|\gamma_k| = 1$ oder

$$(1'') \qquad \overline{\lim} \frac{\int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \right|^p dx}{n^{\frac{p}{2}}} < \infty,$$

ist von Interesse.

nämlichen Systems. Gilt (1) für jedes reelle p, so sage ich, das System $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ habe den charakteristischen Exponenten ∞.

Der charakteristische Exponent eines vollständigen normierten Orthogonalsystems ist 2, der des Systems $\cos x, \ldots, \frac{\cos nx}{n^\alpha}, \ldots$ ist $\frac{2}{1-2\alpha}$ wenn $\alpha < \frac{1}{2}$, ∞, wenn $\alpha \geqq \frac{1}{2}$.

Es lassen sich auch normierte, gleichmäßig beschränkte Orthogonalsysteme [4]) von beliebigem charakteristischen Exponenten > 2 angeben. Das System $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\left[\int_0^{2\pi} \psi_n^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}}, \ldots,$ wo $\psi_n(x) = \cos(2^n x) + \frac{\cos(2n+1)x}{n^\alpha}$, hat den charakteristischen Exponenten $\frac{2}{1-2\alpha}$ wenn $\alpha < \frac{1}{2}$, ∞, wenn $\alpha \geqq \frac{1}{2}$. Von den Teilsystemen des normierten trigonometrischen Orthogonalsystems sind solche von geradem ganzen charakteristischen Exponenten bekannt [5]). Wichtig wäre die Frage der Existenz von Teilsystemen jedes normierten vollständigen Orthogonalsystems von beliebigem charakteristischen Exponenten zu entscheiden.

Für ein bezüglich des Intervalls $a < x < b$ normiertes Orthogonalsystem $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ von charakteristischen Exponenten p gelten die Sätze:

A. Jede im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ gehört zur Klasse L_p.

B. Gehört $f(x)$ zur Klasse $L_{\frac{p}{p-1}}$, so muß $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$, wo $c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$, konvergieren [6]).

---

[4]) Unter einem bezüglich des Intervalls $a < x < b$ gleichmäßig beschränkten Orthogonalsystem verstehe ich ein solches, dessen Funktionen für $a < x < b$ dem Betrage nach sämtlich unter einer gemeinsamen Schranke bleiben.

[5]) Hat $\cos n_1 x, \sin n_1 x, \ldots, \cos n_k x, \sin n_k x, \ldots$ den charakteristischen Exponenten $2l$, wo $l > 1$ und ganz ist, so erfüllt, wenn $2^i < l$, i ganz, $\cos(2^i n_1 x)$, $\sin(2^i n_1 x), \ldots, \cos N_k x, \sin N_k x, \ldots$ wo $N_k = \sum_{m=1}^{2^i} n_{k_m}$ (1″) mit dem Exponenten $\frac{l}{2^{i-1}}$. Für $i=1$ ist diese Tatsache schon in meiner „Über Fourier-Reihen mit Lücken" [Compositio Mathematica 4 (1936), 78—81] enthalten. Dort ist auch eine Vermutung bezüglich des charakteristischen Exponenten von $\cos 2n_1 x$, $\sin 2n_1 x$, $\cos(n_1+n_2)x, \ldots$ ausgesprochen.

[6]) Ist nur (1′) oder (1″) erfüllt, so gilt $\sum_{k=1}^{n} |c_k| = O(n^{\frac{1}{2}})$, bzw. $\sum_{k=1}^{n} c_k = O(n^{\frac{1}{2}})$.

C. Für beliebige reelle Konstanten c_k gilt

$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right| dx > C \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

woraus, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, die Existenz einer im Intervalle $a < x < b$ überall stetigen Funktion $f(x)$ mit $\int_a^b f(x) \varphi_n(x)\, dx = \varepsilon_n$ folgt.

Bei den bisher untersuchten gleichmäßig beschränkten Orthogonalsystemen bezüglich eines Intervalls $a < x < b$ vom charakteristischen Exponenten p gilt für $\varepsilon > 0$ auch

$$\overline{\lim} \frac{\int_E \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^{p+\varepsilon} dx}{\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \right)^{\frac{p+\varepsilon}{2}}} = \infty,$$

wenn E eine beliebige Menge von positivem Maße des Intervalls $a < x < b$ bedeutet.

In den folgenden Zeilen beweise ich, daß es zu jeder monoton wachsenden Funktion $H(k)$ mit $\lim H(k) = \infty$, $H(k) = O\,(\log k)$ ein bezüglich des Intervalls $0 < x < 2\pi$ normiertes, gleichmäßig beschränktes Orthogonalsystem gibt, für welches

$$\overline{\lim} \frac{\int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right]^4 dx}{\left(\sum_{k=1}^{n} H(k) c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}} < \infty, \tag{3}$$

$$\overline{\lim} \frac{\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^{4+\varepsilon} dx}{\left[\sum_{k=1}^{n} H(k) c_k^2 \right]^{2+\frac{\varepsilon}{2}}} = \infty \text{ für } \varepsilon > 0, \tag{4}$$

$$\overline{\lim} \frac{\int_E \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \right|^{p} dx}{\left(\sum_{k=1}^{n} H(k) c_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}} < \infty, \text{ wenn } p > 2, \tag{5}$$

für gewisse E Mengen des Intervalls $0 < x < 2\pi$ vom Maße $2\pi - \varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$, aber beliebig klein, gilt [7]).

Ich schicke folgende Hilfssätze voraus.

Hilfssatz I: Für jedes Polynom $(n-1)$-ter Ordnung $P(z)$ gilt, wenn l eine positive ganze Zahl bedeutet und $\alpha = \frac{2\pi}{n}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |P(e^{ik\alpha})|^{2l} < n C(l) \int_0^{2\pi} |P(e^{i\varphi})|^{2l} d\varphi,$$

wo $C(l)$ nur von l abhängt.

Beweis: Wird $[P(z)]^l = \sum_{j=0}^{l-1} z^{jn} P_j(z)$ gesetzt, wo die $P_j(z)$ Polynome höchstens $(n-1)$-ter Ordnung sind, so gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} |P(e^{ik\alpha})|^{2l} = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sum_{j=0}^{l-1} P_j(e^{ik\alpha}) \cdot \sum_{j=0}^{l-1} \overline{P}_j(e^{ik\alpha}) \right| {}^{8)}$$

$$< C(l) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{l-1} |P_j(e^{ik\alpha})|^2 < C(l) \cdot n \cdot \int_0^{2\pi} |P(e^{i\varphi})|^{2l} d\varphi.$$

Hilfssatz II: Für ein beliebiges Polynom $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ gilt, wenn $l > 0$ und ganz ist, die von J. E. Littlewood herrührende Ungleichung

$$\frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{2^n-1} \int_0^{2\pi} |\Sigma a_k \gamma_k^{(l)} e^{ik\varphi}|^{2l} d\varphi < C \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 \right)^l,$$

wo die $\gamma_k^{(l)}$ voneinander unabhängig die Werte ± 1 annehmen und C eine absolute Konstante bedeutet. [9])

Hilfssatz III: Zu einer beliebigen Folge von komplexen Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n$ mit $|\alpha_k| \leqq 1$ und einem beliebigen $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$ gibt es, wenn die positive ganze Zahl K hinreichend groß ist, ein die folgenden Bedingungen erfüllendes Polynom $2nK$-ter Ordnung $P(z)$:

$$|P(z)| < 1 + \varepsilon \text{ für } |z| \leqq 1,$$

$$\left| \frac{P(z)}{z^{nK}} - \alpha_{k+1} \right| < \varepsilon \text{ für } |z| = 1, \quad \frac{2k\pi}{n} + \delta < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n} - \delta,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

---

[7]) Das System $\frac{\varphi_1(x)}{[H(1)]^{\frac{1}{2}}}, \ldots, \frac{\varphi_k(x)}{[H(k)]^{\frac{1}{2}}}, \ldots$ hat also den charakteristischen Exponenten 4.

[8]) Mit $\overline{X}$ bezeichnen wir hier, wie üblich, die Konjugierte der komplexen Zahl X.

[9]) J. E. Littlewood: On the mean values of the pover series [Journ. London M. S. 5 (1930), 179—182].

Beweis: Es bezeichne $F(x)$ die im Intervalle $0 < x < 2\pi$ auf die folgende Weise definierte Funktion:

$$F(x) = \alpha_{k+1} \text{ für } \frac{2k\pi}{n} + \delta < x < \frac{2(k+1)\pi}{n} - \delta,$$

$$F(x) = \alpha_k + \frac{\alpha_k + 1 - \alpha_k}{2\delta}\left(x + \delta - \frac{2k\pi}{n}\right) \text{ für } \frac{2k\pi}{n} - \delta < x < \frac{2k\pi}{n} + \delta.$$

Gilt für das trigonometrische Polynom Kn-ter Ordnung $T(x)$ $|F(x) - T(x)| < \varepsilon$ überall im Intervalle $0 < x < 2\pi$, so hat das durch $P(z) = z^{nk} T(\arg z)$ für $|z| = 1$ definierte Polynom $P(z)$ die gewünschte Eigenschaft.

Wir können nun ein (3), (4) und (5) erfüllendes, normiertes, gleichmäßig beschränktes Orthogonalsystem konstruieren.

Es sei für die Folge positiver ganzer Zahlen $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{H(M_k)} < \infty$. $P_{k1}(z), \ldots, P_{km}(z), \ldots, P_{kM_k}(z)$ sei eine Folge nach Hilfssatz III existierender Polynome von der $N = K \cdot 2^{M_k}\left(1 + \frac{1}{M_k}\right)$-ten Ordnung, wo K eine hinreichend große positive gerade ganze Zahl bedeutet, für welche

$$|P_{km}(z)| < 1 + \frac{1}{M_k^2} \text{ für } |z| = 1$$

$$\left| \frac{P_{km}(z)}{z^{\frac{N}{2}}} - \gamma_{kml}\, e^{-\frac{2\pi i K l(m-1)}{N M_k}} \right| < \frac{1}{M_k^2},$$

wenn

$$\frac{2\pi K\left(l + \frac{K^2}{N^2}\right)}{N} < \arg z < \frac{2\pi K\left(l + 1 - \frac{K^2}{N^2}\right)}{N},$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots, 2^{M_k} - 1,$$

wo die γ_{kml} sämtliche in Betracht kommende Variationen von ± 1 durchlaufen,

$$\left| \frac{P_{km}(z)}{z^{\frac{N}{2}}} - e^{-\frac{2\pi i K l(m-1)}{N M_k}} \right| < \frac{1}{M_k^2},$$

wenn

$$\frac{2\pi K\left(l + \frac{K^2}{N^2}\right)}{N} < \arg z < \frac{2\pi K\left(l+1 - \frac{K^2}{N^2}\right)}{N},$$

$$l = 2^{M_k}, 2^{M_k} + 1, \ldots, 2^{M_k}\left(1 + \frac{1}{M_k}\right).$$

Durch Anwendung der Hilfssätze I und II ergibt sich, wenn I eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet und $\frac{2\pi}{IM_kN} = \alpha$, $\frac{2\pi}{M_k} = \beta$ gesetzt wird

$$\frac{2n}{IM_k^2N} \sum_{r=0}^{IM_kN-1} \sum_{s=0}^{M_k-1} \left| \sum_{m=1}^{M_k} c_{km} e^{im(r\alpha+s\beta)} P_{km}\left(e^{iM_kr\alpha}\right)\right|^4$$

$$= \frac{2\pi}{IM_kN}\left(\sum_{t=0}^{KI-1} \sum_{q=0}^{2M_k-1} \sum_{s=0}^{M_k-1} \left| \sum_{m=1}^{M_k} G(m, q, s, t)\right|\right)^4$$

$$+ \sum_{t=0}^{KI-1} \sum_{q=2M_k}^{2M_k\left(1+\frac{1}{M_k}\right)} \sum_{s=0}^{M_k-1} \left| \sum_{m=1}^{M_k} G(m, q, s, t)\right|^4 < C\left(\sum_{m=1}^{M_k} c_{km}^2\right)^2,$$

wo

$$G(m, q, s, t) = c_{km} \cdot e^{im(IKq+t)\alpha+s\beta} \cdot P_{km}\left[e^{i(KIq+t)M_k\alpha}\right];$$

hingegen ist für $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \frac{2\pi}{INM_k^{3+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{r=0}^{T_kIN-1} \sum_{s=0}^{M_k-1} \left| \sum_{m=1}^{M_k} e^{im(r\alpha+s\beta)} P_{km}\left(e^{iM_kr\alpha}\right)\right|^{4+\varepsilon} = \infty.$$

Hieraus folgt durch Grenzübergang

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=1}^{M_k} c_{km} e^{i(m-1)\varphi} P_{km}\left(e^{iM_k\varphi}\right)\right|^4 d\varphi < C\left(\sum_{m=1}^{M_k} c_{km}^2\right)^2,$$

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \frac{1}{M_k^{2+\frac{\varepsilon}{2}}} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=1}^{M_k} e^{i(m-1)\varphi} P_{km}\left(e^{iM_k\varphi}\right)\right|^{4+\varepsilon} d\varphi = \infty.$$

Leicht ergibt sich auch

$$\overline{\lim} \frac{\int_E \left| \sum_{m=1}^{M_k} c_{km} P_{km}\left(e^{i\varphi}\right)\right|^p d\varphi}{\left(\sum_{m=1}^{M_k} c_{km}^2\right)^{\frac{p}{2}}} < \infty$$

für jedes $p > 2$,

wo E eine Menge des Intervalls $0 < x < 2\pi$ vom Maße $2\pi - \varepsilon$ (mit $\varepsilon > 0$, beliebig klein) bedeutet.

Das aus der Doppelfolge der trigonometrischen Polynome

$$T_{11}(x), \ldots, T_{k1}(x), \ldots, T_{kM_k}(x), \quad T_{k+1,1}(x), \ldots, T_{k+1,m}(x) \ldots,$$

wo

$$T_{km}(x) = \Re\left[e^{i(n_k+m)x} P_{km}(e^{iM_k x})\right]$$

und n_k die Ordnung von $T_{k-1 M_{k-1}}$ bedeutet, durch Normierung entstehende Orthogonalsystem ist bezüglich des Intervalls $0 < x < 2\pi$ von der gewünschten Beschaffenheit. [10])

(Eingegangen den 15. Juni 1936.)

[10]) Der Übergang zu einem beliebigen Intervall ist trivial. An Stelle von 4 kann ein beliebiger Exponent > 2 treten. Erwünscht ist natürlich die Reduktion des Faktors $H(k)$ auf 1.