A. PFLUGER

Über das Anwachsen von Funktionen, die in einem Winkelraum regulär und vom Exponential-typus sind

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 367-372
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__367_0>

Über das Anwachsen von Funktionen, die in einem Winkelraum regulär und vom Exponentialtypus sind

von

A. Pfluger

Zug

Ist die Funktion $F(z)$ in einem Winkelraum der Öffnung $< \pi$ regulär und vom Exponentialtypus, so wird nach einem bekannten Resultate der Phragmén-Lindelöfschen Methode durch Angabe ihres Wachstums längs der Grenzstrahlen dieses Winkelraumes ihr Anwachsen im Innern desselben weitgehend beeinträchtigt; genauer gesprochen: Ist $F(z)$ in $|\arg z| \lesseqgtr \beta < \frac{1}{2}\pi$ regulär und gilt

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{1}{r} \log |F(re^{\pm i\beta})| \lesseqgtr A,$$

so ist

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{1}{r} \log |F(re^{i\varphi})| \lesseqgtr \frac{A \cos \varphi}{\cos \beta}$$

für $|\varphi| \lesseqgtr \beta$. Dieses Ergebnis kann ohne weitere Voraussetzungen über die Funktion nicht verbessert werden.

Im folgenden soll nun untersucht werden, wie noch durch Angabe ihres Wachstums auf genügend dicht verteilten isolierten Stellen $a_n = \varrho_n e^{i\alpha_n}$ in $|\arg z| \lesseqgtr \alpha < \beta$ ihr Anwachsen im ganzen Winkelraum $|\arg z| \lesseqgtr \beta$ beeinflußt wird. Hierüber gilt folgender Satz:

Satz I: *Es erfülle die Funktion $F(z)$ die folgenden drei Voraussetzungen:*

(1) $F(z)$ *ist regulär und vom Exponentialtypus in* $|\arg z| \lesseqgtr \beta \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$;

(2) $$\limsup_{r \to \infty} \frac{1}{r} \log |F(re^{\pm i\beta})| \lesseqgtr \pi B \sin \beta, \quad B > 0\,;$$

(3) $$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\varrho_n} \log |F(a_n)| \lesseqgtr 0$$

für eine unbeschränkt wachsende Folge komplexer Zahlen $a_n = \varrho_n e^{i\alpha_n}$, *die der dreifachen Bedingung*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\varrho_n} = D \geqq \frac{B \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}; \quad \varrho_{n+1} - \varrho_n \geqq g > 0; \quad |\alpha_n| \leqq \alpha, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

genügt. Dann ist

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log |F(r)| \leqq \frac{\pi B \sin\beta \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}. \tag{5}$$

In diesem Satz ist folgender einfache Spezialfall enthalten:

Satz II: *Erfüllt die Funktion* $F(z)$ *die Voraussetzungen* (1), (2) *und* (3) *von Satz I und zwar die letztere für eine solche Folge komplexer Zahlen* $a_n = \varrho_n e^{i\alpha_n}$, *die der dreifachen Bedingung*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\varrho_n} = D > B; \quad \varrho_{n+1} - \varrho_n \geqq g > 0; \quad \alpha_n \to 0, \quad \textit{wenn } n \to \infty, \tag{6}$$

genügt, so ist

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log |F(r)| \leqq 0\,.$$

Denn für jedes genügend kleine $\alpha > 0$ erfüllen die im Winkelraum $|\arg z| \leqq \alpha$ gelegenen Zahlen der Folge $\{a_n\}$ die Bedingungen (3) und (4). Etwas allgemeiner läßt sich letzteres Resultat auf folgende Art formulieren:

Satz III: *Die Funktion* $F(z)$ *erfülle die Voraussetzung* (1) *von Satz I und infolgedessen ihr Wachstumsindikator* $h(\varphi)$ *für eine geeignete positive Konstante* B *die Ungleichung*

$$h(\varphi) \leqq h(0) \cos\varphi + \pi B |\sin\varphi|, \quad |\varphi| \leqq \beta\,.$$

Dann gilt für jede Folge komplexer Zahlen $a_n = \varrho_n e^{i\alpha_n}$, *die den Bedingungen* (6) *genügt, die Gleichung*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\varrho_n} \log |F(a_n)| = h(0)\,.$$

Zum Beweise wende man den vorangehenden Satz auf $F_1(z) = F(z) e^{-h(0)z}$ an.

Ein erstes Resultat in dieser Richtung wurde von G. Pólya [1]) für ganze Funktionen und eine Punktfolge der speziellen Art $\left\{\frac{n}{D}\right\}$ bewiesen. V. Bernstein [2]) hat dieses in zwei Richtungen

---

[1]) G. Pólya, Über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen [Math. Zeitschr. **29** (1929), 549—640], insbes. 606.

[2]) V. Bernstein, Sulla crescenza delle funzioni olomorfe di tipo esponenziale [Rendiconti Acc. d. Lincei **15** (1932), 30—35].

hin verallgemeinert, indem er sowohl eine allgemeinere Punktfolge als auch eine allgemeinere Funktionenklasse betrachtete. Sein Resultat wird aus Satz III erhalten, indem dort $\alpha = \alpha_n = 0$, also $a_n = \varrho_n$ gesetzt wird. Sein Beweis stützt sich auf einen tieferliegenden Satz aus der Theorie der Dirichletschen Reihen [3]). Es ist der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit, einen Beweis ohne Benützung jener Theorie vorzulegen. Das Hauptgewicht des Beweises liegt in der Konstruktion einer geeigneten ganzen Funktion vom Exponentialtypus, welche $F(z)$ in den Stellen a_n interpoliert. Die übrigen Gedankengänge sind aus der Phragmén-Lindelöfschen Methode geläufig.

Beweis von Satz I: Setzen wir $f_\eta(z) = F(z)e^{-\eta z}$, $\eta > 0$, so genügt es, folgende Behauptung zu beweisen: Aus

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log |f_\eta(re^{\pm i\beta})| \lesseqgtr \pi B \sin\beta - \eta\cos\beta \tag{7}$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\varrho_n} \log |f_\eta(a_n)| \lesseqgtr -\eta \tag{8}$$

folgt für jedes $\eta > 0$

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log |f_\eta(r)| \lesseqgtr \frac{\pi B \sin\beta \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}. \tag{9}$$

Ferner genügt ein Beweis für $\beta < \frac{\pi}{2}$. Gelten nämlich die Voraussetzungen des Satzes und somit (7) für $\beta = \frac{\pi}{2}$, so gelten (7) und (8) wegen der Stetigkeit des Indikators $h(\varphi)$ auch noch für ein $\beta' < \frac{\pi}{2}$ und $\eta' < \eta$ an Stelle von β und η. Schließlich darf ohne Einschränkung der Allgemeinheit $D = \frac{B\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$ angenommen werden.

Um die Behauptung (9) zu beweisen, benötigen wir, wie es bei der Phragmén-Lindelöfschen Methode allgemein der Fall ist, eine unsern Verhältnissen angepaßte Hilfsfunktion. Wir setzen zu diesem Zwecke

$$C_\alpha(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{a_\nu^2}\right) \quad \text{und} \quad C(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\varrho_\nu^2}\right).$$

Die nötigen Eigenschaften der Hilfsfunktion $C_\alpha(z)$ erhält man

---

[3]) V. Bernstein, Sur les singularités des séries de Dirichlet [Rendiconti R. Ist. Lomb. Sc. Lett. (2) **63** (1930), 321—413], 406.

aus dem bekannten Verhalten von $C(z)$ wie folgt: Die beiden leicht zu beweisenden Ungleichungen

$$\begin{array}{ll} |C_\alpha(z)| \lesseqgtr |C(ze^{i\alpha})| & 0 \lesseqgtr |\arg z| \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi - \alpha \\ |C_\alpha(z)| \geqq |C(ze^{-i\alpha})| & \alpha \lesseqgtr |\arg z| \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi \end{array}$$

und

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log |C(re^{i\varphi})| = \pi D |\sin\varphi|, \quad \varphi \neq 0, \pi\text{[4]}$$

ergeben

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log |C_\alpha(re^{i\varphi})| \lesseqgtr \pi D \sin(|\varphi| + \alpha), \quad 0 \lesseqgtr |\varphi| \lesseqgtr \tfrac{1}{2}\pi - \alpha, \tag{10}$$

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log |C_\alpha(re^{i\varphi})| \geqq \pi D \sin(|\varphi| - \alpha), \quad \alpha \lesseqgtr |\varphi| \lesseqgtr \tfrac{1}{2}\pi. \tag{11}$$

Weiter folgt aus Voraussetzung (4) des Satzes, daß der Kondensationsindex der Folge $\{\varrho_n\}$ gleich null ist, d.h.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\varrho_n} \log \left| \frac{1}{C'(\varrho_n)} \right| = 0\text{[5]}$$

und hieraus in Verbindung mit

$$|C'_\alpha(a_n)| = \frac{2}{|a_n|} \prod_{\nu=1}^{\infty}{}' \left| 1 - \frac{a_n^2}{a_\nu^2} \right| \geqq \frac{2}{\varrho_n} \prod_{\nu=1}^{\infty}{}' \left| 1 - \frac{\varrho_n^2}{\varrho_\nu^2} \right| = |C'(\varrho_n)|$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\varrho_n} \log \left| \frac{1}{C'_\alpha(a_n)} \right| \lesseqgtr 0. \tag{12}$$

Mit Hilfe von $C_\alpha(z)$ läßt sich nun eine ganze Funktion $\varphi(z)$ konstruieren, welche $f_\eta(z)$ an den Stellen a_n interpoliert und deren Anwachsen dasjenige von $C_\alpha(z)$, welches genau vom Exponentialtypus ist, nicht wesentlich übersteigt.[6]) Setzen wir nämlich

$$\varphi(z) = C_\alpha(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_\eta(a_n)}{(z-a_n)C'_\alpha(a_n)}, \tag{13}$$

so ist

---

[4]) G. Pólya, loc. cit., 571.

[5]) V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet [Paris 1933], 289.

[6]) Ähnliche Funktionen wurden schon öfters verwendet; vgl. z.B. M. L. Cartwright, On certain integral functions of order one [Quarterly Journal (Oxford) 7 (1936), 46—55].

$$(14) \qquad \varphi(a_n) = f_\eta(a_n)$$

und

$$(15) \qquad |\varphi(z)| \lesseqgtr K_1 |C_\alpha(z)| + e^{o(r)},$$

wo K_1 eine geeignete positive Konstante bedeutet und $\frac{o(r)}{r} \to 0$, wenn $r \to \infty$. Denn wegen (4), (8) und (12) ist die unendliche Reihe auf der rechten Seite von (13) außerhalb der Kreise $|z - a_n| = \varepsilon < \frac{g}{2}$ gleichmäßig konvergent und stellt sie dort eine reguläre und beschränkte Funktion dar; in den Stellen a_n besitzt sie einfache Pole, die dann durch Multiplikation mit der Hilfsfunktion $C_\alpha(z)$, welche in denselben Punkten einfache Nullstellen besitzt, aufgehoben werden. $\varphi(z)$ ist demnach eine ganze Funktion und genügt den Gleichungen (14). Ebenso ergibt sich die Ungleichung (15) zunächst für alle z außerhalb der Kreise $|z - a_n| = \varepsilon$ und hierauf (da letztere sich gegenseitig ausschließen) nach dem Maximumprinzip in der ganzen z-Ebene.

Die folgenden Überlegungen beruhen auf dem Phragmén-Lindelöfschen Prinzip. Setzen wir nämlich

$$(16) \qquad \Phi(z) = \frac{f_\eta(z) - \varphi(z)}{C_\alpha(z)},$$

so folgt aus den dargelegten Eigenschaften der Funktionen $C_\alpha(z)$ und $\varphi(z)$ sowie den Voraussetzungen über $F(z)$ bzg. $f_\eta(z)$, daß

(17) $\Phi(z)$ regulär und von der Ordnung 1 ist in $|\arg z| \lesseqgtr \beta < \frac{\pi}{2}$

und

(18) $|\Phi(z)| < K_2$ $(K_2 = \text{konst.})$ auf $\arg z = \pm\beta$ und somit

(19) $|\Phi(z)| < K_2$ in $|\arg z| \lesseqgtr \beta$.

Daß $\Phi(z)$ sich regulär verhält in $|\arg z| \lesseqgtr \beta$ ist klar; denn wegen (1) sind sowohl Zähler und Nenner des Quotienten (16) regulär in $|\arg z| \lesseqgtr \beta$ und die vom Nenner herrührenden Pole werden dort wegen (14) durch die Nullstellen des Zählers aufgehoben. Ebenso ist die Ordnung des Zählers wegen (1) und (15) höchstens gleich 1, und diese kann durch die ganze Funktion $C_\alpha(z)$ der Ordnung 1 im Nenner nicht erhöht werden. Die Beschränktheit auf den Strahlen $\arg z = \pm\beta$ folgt aus (7), (11) und (15) zunächst für die Beträge $\left|\frac{f_\eta(z)}{C_\alpha(z)}\right|$ und $\left|\frac{\varphi(z)}{C_\alpha(z)}\right|$ und hieraus für die Funktion $|\Phi(z)|$.

Mit Rücksicht auf (16) ergibt sich aber aus (19)

$$|f(z)| < K_2 |C_\alpha(z)| + |\varphi(z)| \leqq (K_1 + K_2) |C_\alpha(z)| + e^{o(r)}$$

in $|\arg z| \leqq \beta$ und hieraus wegen (10) für $\varphi = 0$

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{1}{r} \log |f_\eta(r)| \leqq \pi D \sin \alpha = \frac{\pi B \sin \beta \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)},$$

womit die Behauptung (9) und damit Satz I bewiesen ist.

(Eingegangen den 25. November 1936.)