S. WARSCHAWSKI

Über die Winkelderivierten schlichter Funktionen

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 346-366
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__346_0>

Über die Winkelderivierten schlichter Funktionen

von

S. Warschawski

Ithaca, N. Y.

Es sei $w = f(z)$ eine im Kreise $|z| < 1$ reguläre Funktion, die $|z| < 1$ auf ein schlichtes Gebiet G der w-Ebene konform abbildet. Ist $w = \omega$ ein erreichbarer Randpunkt von G, so ist bekanntlich für ein ζ auf $|z| = 1$ $\lim_{z \to \zeta} f(z) = \omega$, wenn $z \to \zeta$ in einem beliebigen von zwei von ζ ausgehenden Kreissehnen gebildeten Winkel strebt. Setzt man $f(\zeta) = \omega$, so ist also $f(z)$ stetig in ζ bei Annäherung „im Winkel". Ist nun darüber hinaus $\lim_{z \to \zeta} \frac{f(z) - \omega}{z - \zeta} = f'(\zeta)$ für $z \to \zeta$ im Winkel vorhanden und $\neq 0$, $\neq \infty$, so nennt man $f'(\zeta)$ die *Winkelderivierte* in $z = \zeta$. In den letzten Jahren ist eine Reihe von Kriterien für die Existenz der Winkelderivierten angegeben worden [1]). Diese können im wesentlichen auf das folgende Prinzip zurückgeführt werden: Es wird ein G *enthaltendes* und ein *in* G *enthaltenes* Gebiet angegeben, die beide den Randpunkt $w = \omega$ gemeinsam haben, derart, daß die Abbildungsfunktionen von $|z| < 1$ auf diese Gebiete in dem ω „entsprechenden" Peripheriepunkt eine von 0 und ∞ verschiedene Ableitung besitzen. Hieraus wird dann auf die Existenz der Winkelderivierten für $f(z)$ geschloßen.

Im ersten Teile dieser Note geben wir ein auf einem ähnlichen Gedanken beruhendes Kriterium für die Existenz der höheren Winkelderivierten. Für jedes ganze $n \geqq 1$ wird unter der Annahme, daß der Rand von G in der Umgebung von ω „zwischen" zwei geeigneten Kurven („Vergleichskurven") bleibt, die einen

---

[1]) C. Carathéodory [Sitzungsber. Akad. Berlin **1929**, 39—54]; G. Valiron [Bull. Sc. Math. (2) **53** (1929), 70 und **56** (1932), 208—211]; L. Ahlfors [Acta Soc. Sc. Fennicae (Nova Ser. A) **1** (1930), No. 9, 36]; J. Wolff [C. R. **191** (1930), 921 und **200** (1935), 630—31]; C. Visser [C. R. **193** (1931), 1388—1389]; J. G. van der Corput [Proc. Acad. Amsterdam **33** (1932), 330—332]; S. Warschawski [Math. Z. **35** (1932), 454—456].

analytischen Kurvenbogen in einem bestimmten, von n abhängigen Grade berühren, gezeigt: $f(z)$ hat in $z=\zeta$ die „*Taylor*"-*Darstellung*

$$f(z)=\omega+c_1(z-\zeta)+c_2(z-\zeta)^2+\cdots+c_n(z-\zeta)^n+r_n(z)\cdot(z-\zeta)^n$$

mit $\lim\limits_{z\to\zeta} r_n(z)=0$ *im Winkel.* Hieraus folgt unmittelbar, daß $f^{\nu}(z)\to c_\nu \nu!$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$ für $z\to\zeta$ im Winkel strebt. Eine analoge Darstellung gilt auch für die zu $f(z)$ inverse Funktion (Satz II).

Im zweiten Teile zeigen wir, daß unter geeigneten Annahmen über die Vergleichskurven, die „Taylor"-Darstellung sogar für gewisse *tangentielle* Annäherungen gilt. (Satz III und Zusatz zum Satz II.)

Sind die Voraussetzungen des Satzes II oder III für jedes $n=1,2,\ldots$ erfüllt, so erhält man eine *asymptotische Entwickelung* der Abbildungsfunktion in einem Randpunkt.

I. Taylordarstellung im Winkel und Winkelderivierten.

§ 1. Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Es sei $g(t)$ in $\langle -\pi,\pi\rangle$ integrabel und $\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|\frac{dt}{|t|^{n+1}}$, $n\geqq 1$, vorhanden. Setzt man für $|z|<1$*

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt+ic, \tag{1}$$

so gibt es $n+1$ Konstanten $a_0, a_1,\ldots,a_n$, so daß

$$F(z)=a_0+a_1(z-1)+\ldots+a_n(z-1)^n+r_n(z)(z-1)^n$$

$$\textit{mit } r_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\frac{e^{it}}{(e^{it}-1)^{n+1}}\,\frac{z-1}{e^{it}-z}\,dt \tag{2}$$

gilt, wobei $\lim\limits_{z\to 1} r_n(z)=0$ in jedem Winkel W_α: $|\operatorname{arc}(1-z)|\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}$ gilt.

Beweis. (2) folgt, wenn man die für $0<|t|\leqq\pi$ gültige Relation

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}+1=\frac{2e^{it}}{(e^{it}-1)\left(1-\dfrac{z-1}{e^{it}-1}\right)}=$$

$$=2e^{it}\left[\frac{1}{e^{it}-1}+\frac{z-1}{(e^{it}-1)^2}+\ldots+\frac{(z-1)^n}{(e^{it}-1)^{n+1}}+\frac{(z-1)^{n+1}}{(e^{it}-1)^{n+1}}\cdot\frac{1}{e^{it}-z}\right]$$

mit $\frac{1}{2\pi}\, g(t)$ multipliziert und gliedweise über $-\pi \ldots \pi$ integriert.

Um $\lim\limits_{z\to 1} r_n(z) = 0$ in W_α einzusehen, schreibe man für ein δ mit $0 < \delta < \pi$:

$$\pi r_n(z) = \int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_{-\delta}^{+\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi} .$$

Da in W_α : $\left|\frac{1-z}{e^{it}-z}\right| \leqq \frac{|1-z|}{1-|z|} \leqq$ konst gilt, ist in W_α :

$$\overline{\lim_{z\to 1}} \left| \int\limits_{-\delta}^{\delta} g(t)\, \frac{e^{it}}{(e^{it}-1)^{n+1}}\, \frac{z-1}{e^{it}-z}\, dt \right| \leqq \text{konst} \cdot \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{|g(t)|}{|e^{it}-1|^{n+1}}\, dt ,$$

ist also durch passende Wahl von δ beliebig klein zu machen. Bei festem δ streben aber $\int\limits_{-\pi}^{-\delta}$ und $\int\limits_{\delta}^{\pi}$ gegen 0 mit $z \to 1$.

Hilfssatz 2. *Es sei* $u = g(v)$, $|v| \leqq a$ $(g(0) = g'(0) = 0)$ *ein analytischer Jordanbogen* γ. *Es sei* $d(v)$ *für* $|v| \leqq a$ *stetig und* $\lim\limits_{v\to 0} \frac{d(v)}{v} = 0$. *Ist* $\omega = \Omega(w)$, $w = u + iv$, *mit* $\Omega(0) = 0$, $\Omega'(0) = 1$ *regulär in einem* γ *enthaltenden Kreise um* $w = 0$ *und bildet* $\omega = \Omega(w)$ $(\omega = \sigma + i\tau)$ γ *auf ein Stück der* τ*-Achse ab, so geht der Bogen* $u = g(v) + d(v)$, $|v| \leqq a$, *über in einen Bogen* $\sigma = \sigma(v)$, $\tau = \tau(v)$, *für den* $\tau(v) \backsim v$, $\sigma(v) \backsim d(v)$ *bei* $v \to 0$ *ist.*

Beweis. Wegen $\Omega'(0) = 1$ strebt für $u = g(v) + d(v)$ bei $v \to 0$ $(v \neq 0)$:

$$\frac{\sigma(v) + i\tau(v)}{u + iv} = \frac{\frac{\sigma(v)}{v} + i\,\frac{\tau(v)}{v}}{\frac{u}{v} + i} \to 1, \text{ also } \frac{\tau(v)}{v} \to 1.$$

Weiter genügt es offenbar $|\sigma(v)| \backsim |d(v)|$ bei $v \to 0$ nachzuweisen. Wir bezeichnen den Punkt $g(v) + d(v) + iv$ mit P, $g(v) + iv$ mit Q, ihre Bildpunkte in der ω-Ebene mit P_1 bzw. Q_1. Der Punkt $i\tau(v)$ werde R_1 genannt, der ihm entsprechende Punkt auf $\gamma : R$. Dann ist $Q_1P_1 \geqq R_1P_1 = |\sigma(v)|$. Wegen $\Omega'(0) = 1$ ist $Q_1P_1 \leqq (1+\varepsilon)QP = (1+\varepsilon)\,|d(v)|$, wo $\varepsilon \to 0$ mit $v \to 0$ geht. Also ist $|\sigma(v)| \leqq (1+\varepsilon)\,|d(v)|$.

Um $|\sigma(v)|$ für $P \neq Q$ nach unten abzuschätzen, beachte man, daß der Winkel $Q_1P_1R_1 = \varepsilon_1 \to 0$ bei $v \to 0$ strebt; denn nach dem Rolleschen Satze gibt es eine zu der Strecke P_1Q_1 parallele

Tangente des Bogens $\widehat{P_1Q_1}$, der das Bild der Strecke PQ vermittels $\omega = \Omega(w)$ ist. Da aber PQ parallel der u-Achse läuft und $\lim\limits_{w \to 0} \operatorname{arc} \Omega'(w) = 0$ ist, so streben die Steigungen aller Tangenten von $\widehat{P_1Q_1}$ gleichmäßig nach 0 mit $v \to 0$. Daher ist $|\sigma(v)| = R_1P_1 = Q_1P_1 \cos \varepsilon_1 \geqq (1-\varepsilon_2)QP$, wo $\lim\limits_{v \to 0} \varepsilon_2 = 0$ ist.

Satz 1. *C sei eine geschlossene Jordankurve durch $w = 0$ ($w = u + iv$), G ihr Inneres. Für $|v| \leqq a$, $a > 0$, möge $u = g(v)$ mit $g(0) = g'(0) = 0$ einen analytischen Jordanbogen darstellen. C sei in einer Umgebung von $w = 0$ durch $u = g_0(v)$, $|v| \leqq a$, mit $g_0(0) = g_0'(0) = 0$ und beschränktem $|g_0''(v)|$* [2]) *gegeben; ferner konvergiere*

$$\int\limits_{-a}^{a} |g_0(v) - g(v)| \frac{dv}{|v|^{n+1}}, \quad n \geqq 1.$$

Bildet $w = F(z)$ mit $F(1) = 0$ $|z| < 1$ auf G ab, so gilt

(3) $F(z) = A_0 + A_1(z-1) + \ldots + A_n(z-1)^n + (z-1)^n R_n(z)$

mit

$\lim R_n(z) = 0$ *für* $z \to 1$ *in jedem Winkel* $|\operatorname{arc}(1-z)| \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Beweis. 1. Es gibt eine in $|w| \leqq \varrho$ bei passendem $\varrho > 0$ reguläre schlichte Funktion $\omega = \Omega(w)$, $\Omega(0) = 0$, $\Omega'(0) = 1$ ($\omega = \sigma + i\tau$) die einen in $|w| < \varrho$ gelegenen, $w = 0$ als inneren Punkt enthaltenden Teil γ des Bogens $u = g(v)$ auf ein Stück der τ-Achse der ω-Ebene abbildet. Man darf nun annehmen, daß C in $|w| < \varrho$ liegt. Sonst ergänzen wir einen Teilbogen $u = g_0(v)$, $|v| \leqq b < a$, von C durch einen in G und $|w| < \varrho$ liegenden Jordanbogen zu einer geschlossenen Jordankurve C^*, deren Inneres G^* in G liegt. Man nehme nun an, der Satz sei für eine Funktion $F^*(z)$ mit $F^*(1) = 0$ bewiesen, die $|z| < 1$ auf G^*

---

[2]) Die Annahme der Beschränktheit von $g_1''(v)$ und $g_1^{*''}(v)$ soll folgendes sicherstellen: Ergänzt man die durch $u = g_1(v)$ und $u = g_1^*(v)$ gegebenen Bögen zu geschlossenen Jordankurven, und bildet man das Innere dieser Kurven auf $|z| < 1$ ab, so sollen die Abbildungsfunktionen eine stetige nichtverschwindende Ableitung in einer Umgebung von $w = 0$ besitzen. Hierfür genügt es, *weniger* anzunehmen: für $g_1(v)$, daß $g_1'(v)$ stetig ist und $\int\limits_0^b |g_1'(v \pm t) - g_1'(v)| \frac{dt}{t}$ gleichmäßig in v mit $b \to 0$ gegen 0 strebt, und für $g_1^*(v)$ das gleiche. (Siehe [1]), Math. Z. 35, 433, Satz 10.) Die obige Annahme ist mit Rücksicht auf die Einfachheit der Formulierung gemacht.

abbildet. Die Umkehrfunktion von $w = F(z)$ führt nun G^* in ein Teilgebiet E^* des Einheitskreises über, dessen Randkurve einen $z = 1$ als inneren Punkt enthaltenden Peripheriebogen von $|z| = 1$ als Teil hat. Bildet nun $z = z(\zeta)$ $|\zeta| < 1$ so auf E^* ab, daß $\zeta = 1$ $z = 1$ entspricht, so ist $z(\zeta)$ nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip in einer Umgebung von $\zeta = 1$ noch regulär und $z'(1) \neq 0$. Daher gilt für ihre Umkehrfunktion $\zeta = \zeta(z)$ in einer Umgebung von $z = 1$:

$$\zeta = \zeta(z) = 1 + c_1(z-1) + c_2(z-1)^2 + \ldots \tag{4}$$

Um nun (3) zu finden, hat man wegen $F^*(\zeta) = F(z(\zeta))$ in die als bereits bekannt angenommene Darstellung der Form (3) für $F^*(\zeta)$ in $\zeta - 1$ den durch (4) gegebenen Wert für $\zeta - 1$ einzusetzen.

2. Wir nehmen nun an, C liege in $|w| < \varrho$; $\omega = \Omega(w)$ bildet nun G auf ein Jordansches Gebiet Γ ab, dessen Randkurve durch $\omega = 0$ hindurchgeht, und es genügt, den Satz für die Funktion $\omega = \Phi(z) = \Omega(F(z))$ zu beweisen, die $|z| < 1$ so auf Γ abbildet, daß $z = 1$ $\omega = 0$ entspricht.

3. In einer Umgebung von $\omega = 0$ hat man für die Randkurve von Γ die Darstellung $\omega = \Omega(g_0(v) + iv)$, $|v| \leqq a_1 \leqq a$ für passendes $a_1 > 0$. Wegen Hilfssatz 2 ist $|\sigma(v)| = |\Re\Omega(g_0(v) + iv)| \leqq \text{konst} \cdot |g_0(v) - g(v)|$. Daher konvergiert

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{|\sigma(v)|}{|v|^{n+1}}\, dv. \tag{5}$$

Nun beachte man, daß wegen der Annahmen über $g_0(v)$, $w = F(z) = u(z) + iv(z)$ in einer Umgebung von $z = 1$ eine stetige, nichtverschwindende erste Ableitung hat. Weil C in $w = 0$ die v-Achse zur Tangente hat, besitzt daher auch $v(e^{i\vartheta})$ in einer Umgebung von $\vartheta = 0$ eine stetige, *nichtverschwindende* Ableitung. Setzt man daher $v = v(e^{i\vartheta})$ in $\sigma(v)$ ein, so folgt wegen $\Re\Phi(e^{i\vartheta}) = \sigma(v(e^{i\vartheta}))$ und wegen der Konvergenz von (5) die Konvergenz von

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{|\Re\Phi(e^{i\vartheta})|}{|\vartheta|^{n+1}}\, d\vartheta$$

bei passendem $\beta > 0$. Da nun $\Phi(z)$ offenbar in der Form (1) mit $g(t) \equiv \Re\Phi(e^{it})$ darstellbar ist, so folgt die Behauptung über $\Phi(z)$ aus Hilfssatz 1.

§ 2. Hauptsatz.

Satz II. *G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das $w = 0$ als einen längs der positiven reellen Achse erreichbaren Rand-*

punkt hat ($w = u + iv$). *Für* $|v| \leqq a$ *stelle* $u = g(v)$, $g(0) = g'(0) = 0$, *einen analytischen Jordanbogen dar, und* $g_1(v)$ *und* $g_1^*(v)$ *seien stetige Funktionen mit den Eigenschaften*:

a) $g_1''(v)$ *und* $g_1^{*''}(v)$ *sind vorhanden und beschränkt* [2]; *ferner ist* $g_1(0) = g_1^*(0) = g_1'(0) = g_1^{*'}(0) = 0$;

b) *es existieren die Integrale*

$$\int_{-a}^{a} |g_1(v) - g(v)| \frac{dv}{|v|^{n+1}}, \quad \int_{-a}^{+a} |g_1^*(v) - g(v)| \frac{dv}{|v|^{n+1}}, \quad n \geqq 1.$$

Ferner sei $g_1(v) \leqq g_1^*(v)$, *und in einer Umgebung von* $w = 0$ *sei der Rand von* G *in dem Bereiche* $g_1(v) \leqq u \leqq g_1^*(v)$, $|v| \leqq a$ *gelegen.*

Bildet dann $z = \varphi(w)$ G *auf* $|z| < 1$ *ab, so gilt*

$$\varphi(w) = c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \ldots + c_n w^n + w^n \varrho_n(w), \tag{6}$$

mit $c_1 \neq 0$ *und* $\lim\limits_{w \to 0} \varrho_n(w) = 0$ *in jedem Winkel* $W_\alpha : |\operatorname{arc} w| \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$. *Ferner ist in jedem* W_α:

$$\lim_{w \to 0} \varphi^{(\nu)}(w) = c_\nu \nu! \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$ [3]

Vorbemerkung: *Aus* (6) *folgt, daß auch für die Umkehrfunktion* $w = f(z)$ *von* $\varphi(w)$ *in einem Punkte von* $|z| = 1$, *den man als* $z = 1$ *annehmen darf, gilt*:

$$f(z) = a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + \ldots + a_n(z-1)^n + r_n(z)(z-1)^n \tag{7}$$

mit $\lim\limits_{z \to 1} r_n(z) = 0$ *für* $z \to 1$ *im Winkel.*

Denn zunächst ist, da $w = 0$ ein in $|\operatorname{arc} w| \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$ erreich-

---

[3]) Dies ist eine einfache Folgerung aus (6). Ist nämlich $\psi = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, so liegt für w in W_α der Kreis K_w mit dem Radius $r = |w| \sin \psi$ in $W_{\alpha+\psi}$, also auch in G bei genügend kleinem $|w|$. Dann gilt z.B. für $\nu = n$:

$$\varphi^{(n)}(w) - c_n n! = \varphi^{(n)}(w) - \frac{d^n}{dw^n} \sum_{k=1}^{n} c_k w^k = \frac{n!}{2\pi i} \int_{(K_w)} \frac{\varphi(\omega) - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \omega^k}{(\omega - w)^{n+1}} d\omega,$$

also wegen (4) und wegen

$$|\omega| \leqq r + |w| \leqq r\left(1 + \frac{1}{\sin \psi}\right)$$

$$|\varphi^{(n)}(w) - c_n n!| \leqq \frac{n!}{2\pi} \int_{(K_w)} \frac{|\varrho_n(\omega)|\,|\omega|^n}{r^{n+1}} |d\omega| \leqq n! \operatorname*{Max}_{\omega \subset K_w} |\varrho_n(\omega)| \left(1 + \frac{1}{\sin \psi}\right)^n \to 0$$

bei $w \to 0$ in W_α. — Analoges gilt für $\nu < n$.

barer Randpunkt von G ist, bei geeigneter Normierung der Abbildungsfunktion, $\lim\limits_{z\to 1} f(z) = 0$ im Winkel. Wegen $\lim\limits_{w\to 0} \operatorname{arc} \frac{\varphi(w)-1}{w} =$ $\operatorname{arc} c_1 = \Theta$ im Winkel folgt daher, daß auch $\lim\limits_{z\to 1} \operatorname{arc} \frac{f(z)}{z-1} = -\Theta$ im Winkel gilt, d.h. die Abbildung $w = f(z)$ ist in $z = 1$ winkeltreu. Unter Benutzung dieser Tatsache beweist man (7) analog wie die Existenz der inversen Reihe einer konvergenten Potenzreihe.

Beweis. 1. Für $|v| \leqq b$, bei passendem $b > 0$, liegt $u = g_1(v)$ außerhalb, $u = g_1^*(v)$ innerhalb G. Wir ergänzen die hierdurch gegebenen Bögen zu geschlossenen Jordankurven C_1 resp. C_1^* derart, daß das Innere G_1 von C_1 G enthält, das G_1^* von C_1^* in G enthalten ist, und daß ferner der Punkt w_0, den $z = \varphi(w)$ in 0 überführt, nicht in $G_1^* + C_1^*$ liegt. $z = \varphi_1(w)$ möge G_1 so auf $|z| < 1$ abbilden, daß $\varphi_1(w_0) = 0$, $\varphi_1(0) = 1$ ist. Dann gilt nach dem Lindelöfschen Prinzip

$$|\varphi_1(w)| \leqq |\varphi(w)| \qquad \text{in } G. \tag{8}$$

2. Da G_1^* w_0 nicht enthält, ist jeder Zweig von $\log \varphi(w)$ und $\log \varphi_1(w)$ in G_1^* eindeutig und regulär, und es gilt wegen (8)

$$-\log|\varphi_1(w)| \geqq -\log|\varphi(w)|. \tag{9}$$

Ist nun $w_1^* = g_1^*(v) + iv$ auf C_1^* genügend nahe bei $w = 0$, so liegt die Strecke s, die w_1^* mit $w_1 = g_1(v) + iv$ auf C_1 verbindet, bis auf w_1 in G_1. Wegen der Annahme (a) über $g_1(v)$ ist $\varphi_1'(w)$ in einer Umgebung von $w = 0$ in $G_1 + C_1$ stetig [2]), und da $\lim\limits_{w\to 0} \varphi_1(w) = 1$ gilt, so ist in einer solchen Umgebung von $w = 0$

$$\left|\frac{d \log \varphi_1(w)}{dw}\right| = \left|\frac{\varphi_1'(w)}{\varphi_1(w)}\right| \leqq M \quad (M \text{ Konstante}).$$

Daher ist für w_1^* auf C_1^*, in einer Umgebung von $w = 0$, bei Integration längs s:

$$\begin{aligned} 0 &\leqq -\log|\varphi_1(w_1^*)| = -(\log|\varphi_1(w_1^*)| - \log|\varphi_1(w_1)|) \leqq \\ &\leqq |\log \varphi_1(w_1^*) - \log \varphi_1(w_1)| \leqq \int_{w_1}^{w_1^*} \left|\frac{\varphi_1'(w)}{\varphi(w)}\right| |dw| \leqq \\ &\leqq M\,|w_1^* - w_1| \leqq M\{|g_1^*(v) - g(v)| + |g_1(v) - g(v)|\}. \end{aligned} \tag{10}$$

3. Es möge nun $w = f_1^*(z)$ $|z| < 1$ so auf G_1^* abbilden, daß

$f_1^*(1) = 0$ ist. Wegen der Annahme (a) über $g_1^*(v)$ hat $v = \Im f_1^*(e^{i\vartheta})$ in einer Umgebung von $\vartheta = 0$ nichtverschwindende stetige Ableitung [2]). Daher konvergiert für ein $\beta > 0$

$$\int_{-\beta}^{\beta} \{|g_1^*(v) - g(v)| + |g_1(v) - g(v)|\} \frac{d\vartheta}{|\vartheta|^{n+1}}, v = \Im f_1^*(e^{i\vartheta}).$$

Wegen (10) konvergiert somit auch

$$\int_{-\beta}^{\beta} -\log |\varphi_1(f_1^*(e^{i\vartheta}))| \frac{d\vartheta}{|\vartheta|^{n+1}}. \tag{11}$$

Da offenbar für eine feste Bestimmung von $\log \varphi(f_1^*(z))$ in $|z| < 1$

$$-\log \varphi(f_1^*(z)) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\varphi(f_1^*(e^{i\vartheta}))| \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} d\vartheta + \mu$$

(μ Konstante) gilt, und da ferner wegen (9) und (11)

$$\int_{-\beta}^{\beta} -\log |\varphi(f_1^*(e^{i\vartheta}))| \frac{d\vartheta}{|\vartheta|^{n+1}}$$

existiert, so hat $\log \varphi\,(f_1^*(z))$ und daher auch $\varphi(f_1^*(z)) = e^{\log \varphi(f_1^*(z))}$ eine „Taylor-Darstellung" der Form (2) in $z = 1$.

Um nun hieraus (6) zu gewinnen, beachte man, daß nach Satz I $w = f_1^*(z)$ bereits eine Darstellung der Form (3) hat, und daß wegen der Winkeltreue der Abbildung $w = f_1^*(z)$ in $z = 1$ auch die inverse Funktion $z = \varphi_1^*(w)$ die Darstellung

$$z = \varphi_1^*(w) = 1 + b_1 w + b_2 w^2 + \ldots + b_n w^n + P_n(w) w^n \text{ mit } \lim_{w \to 0} P_n(w) = 0$$

im Winkel besitzt. Man hat nunmehr nur den hierdurch gegebenen Wert von $(z-1)$ in die Darstellung von $\varphi(f_1^*(z))$ einzusetzen, um (6) zu erhalten.

Daß c_1 in (6) nicht 0 ist, folgt aus der Tatsache, daß die Abbildungsfunktionen von G_1 und G_1^* auf $|z| < 1$ in $w = 0$ von 0 verschiedene Ableitungen besitzen [4]).

II. Verallgemeinerung für tangentielle Annäherung.

Setzt man im Satz II $g(v) - g_1(v)$ und $g_1^*(v) - g(v)$ als monoton wachsend mit $|v|$ voraus, so kann gezeigt werden, daß

---

[4]) S. l.c. [1]) Math. Z. 35, 454. Vgl. auch B. GROOTENBOER [Bull. S. M. F. 61 (1933), 130] und Over het gedrag van een conforme afbeelding bij een randpunt [Diss. Utrecht, 1932], 24.

dessen Behauptung sogar noch richtig bleibt, wenn die Differenzierbarkeitsannahmen in (a) fortgelassen werden [5]). Nimmt man jedoch noch im Falle $n > 2$ eine weitere einfache Bedingung hinzu, so gilt die Darstellung (6) noch bei gewissen *tangentiellen* Annäherungen. Dies soll im folgenden ausgeführt werden. Die dafür nötigen Überlegungen scheinen sich etwas übersichtlicher zu gestalten, wenn der betrachtete Randpunkt des Gebietes G als $w = \infty$ angenommen wird und G auf die Halbebene $\Re z > 0$ (anstelle des Einheitskreises) so abgebildet wird, daß $w = \infty$ $z = \infty$ „entspricht".

§ 3. Hilfssatz.

Hilfssatz 3. *$f(t)$ sei in $-\infty < t < \infty$ summierbar. Für ein $\mu \geqq 0$ und ein $c > 0$ sei $|f(t)| \leqq c \cdot |t|^{\mu} \psi(t)$, wobei $\psi(t) \geqq 0$ für $t > 0$, stetig und abnehmend (wachsend) ist. Für $t < 0$ sei $\psi(t) = \psi(-t)$, und $|t|^{\mu}\psi(t)$ sei auch in $t = 0$ definiert und stetig. Ferner sei für ein ganzes $m \geqq -1$:*

$$\int_1^\infty \psi(t)\, t^{\mu+m-1}\, dt < \infty \textit{ und, falls } m > -1 \textit{ ist, sei } \lim_{t\to\infty} t^{\mu+m}\, \psi(t) \log t = 0.$$

Setzt man dann

$$(12)\qquad F(z) = F(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left\{\frac{1}{z-it} + \frac{1}{1+it}\right\} dt,\quad x > 0,$$

so gilt:

$$F(z) = zR_{-1}(z) \textit{ für } m = -1,$$

$$(13)\qquad F(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_m}{z^m} + \frac{R_m(z)}{z^m} \textit{ für } m > -1$$

mit

$$R_{-1}(z) = \frac{z+1}{z}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{(z-it)(1+it)},\quad R_m(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)(it)^m\,dt}{z-it},$$

wobei $\lim\limits_{z\to\infty} R_m(z) = 0$ in jedem Bereich Δ_ε: $x \geqq \varepsilon\, |y|^{\mu}\psi((1-\varepsilon)y)$ (bzw. $x \geqq \varepsilon\, |y|^{\mu}\psi((1+\varepsilon)y)$) bei beliebigem festen ε mit $0 < \varepsilon < 1$ gilt,

[5]) Unter dieser Annahme läßt sich nämlich eine Funktion $\delta(v)$ $(\delta(0) = \delta'(0) = 0)$ mit beschränkter zweiter Ableitung konstruieren, so daß $|g_1(v - g(v)| \leqq \delta(v)$, $|g_1^*(v) - g(v)| \leqq \delta(v)$ ist und $\int_{-a}^{a} \delta(v)\frac{dv}{|v|^{n+1}} < \infty$ ist. Dann kann man Satz II mit $g(v) - \delta(cv)$ und $g(v) + \delta(v)$ anstelle von $g_1(v)$ und $g_1^*(v)$ anwenden.

Wir führen den *Beweis* nur für den Fall abnehmender $\psi(t)$ aus, da der andere analog ist. — (13) ist für $m < 1$ mit (12) identisch, für $m \geqq 1$ folgt (13) aus

$$\frac{1}{z-it} = \frac{1}{z} + \frac{it}{z^2} + \frac{(it)^2}{z^3} + \dots + \frac{(it)^{m-1}}{z^m} + \frac{(it)^m}{(z-it)z^m}.$$

Beim Nachweis $\lim\limits_{z\to\infty} R_m(z) = 0$ darf man o.B.d.A. $y \geqq 0$ annehmen. Sei für das im Satze genannte ε mit $0 < \varepsilon < 1$:

$$\pi R_m(z) = \int\limits_{|t-y|>y\varepsilon} + \int\limits_{|t-y|\leqq y\varepsilon} = J_m^{(1)} + J_m^{(2)}.$$

Für $|t-y| > y\cdot\varepsilon$ ist $|t-y| > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}|t|$, also ist auch $|z-it| > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}|t|$; daher ist für $A > 0$

$$|J_m^{(1)}| \leqq 2c\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\int_A^\infty \psi(t)t^{\mu+m-1}\,dt + c\int_{-A}^{A}\frac{\psi(t)\,|t|^\mu}{|z-it|}\cdot\begin{cases}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}} & \text{falls } m=-1\\ |t|^m\,dt & \text{falls } m>-1\end{cases} \quad \text{ist.}$$

Da $J_m^{(2)} = 0$ für $y = 0$ ist, sei $y > 0$ angenommen. Dann ist

$$|J_m^{(2)}| \leqq c\int_{y(1-\varepsilon)}^{y(1+\varepsilon)} \frac{\psi(t)t^{\mu+m}}{|z-it|}\,dt$$

$$\leqq c\,\psi((1-\varepsilon)y)y^{\mu+m}(1+\varepsilon)^\mu(1\pm\varepsilon)^m\int_{y(1-\varepsilon)}^{y(1+\varepsilon)}\frac{dt}{\sqrt{x^2+(y-t)^2}},$$

wobei nur im Falle $m = -1$ $(1-\varepsilon)^m$, sonst aber $(1+\varepsilon)^m$ steht. Also ist

$$(14) \qquad |J_m^{(2)}| \leqq \text{konst}\cdot y^{\mu+m}\,\psi((1-\varepsilon)y)\log\frac{y\varepsilon+\sqrt{x^2+(\varepsilon y)^2}}{x}$$

$$\leqq \text{konst}\cdot y^{\mu+m}\,\psi((1-\varepsilon)y)\log\left(1+\frac{\varepsilon y}{x}\right).$$

Für $m = -1$ ist nun wegen $\int_1^\infty t^\mu\psi(t)\frac{dt}{t^2} < \infty$ $\lim\limits_{t\to\infty} t^{\mu-1}\psi(t) = 0$;

für $m > -1$ ist $\lim\limits_{t\to\infty} t^{\mu+m}\psi(t)\log t = 0$.

Daher folgt aus (14) für $x \geqq \varepsilon y^\mu\psi((1-\varepsilon)y)$, $y^{\mu+m}\,\psi((1-\varepsilon)y) = \Theta_m(y)$ gesetzt, bei genügend großem y:

$$(15)\quad |J_m^{(2)}| \leqq \text{konst.} \begin{cases} \Theta_{-1}(y)\,|\log \Theta_{-1}(y)|, & \text{falls } m = -1 \\ [\Theta_m(y)|\log \Theta_m(y)| + \Theta_m(y) \log y^{m+1}], & \text{falls } m > -1 \end{cases}$$

ist. Aus (14) und (15) folgt leicht $\lim\limits_{z\to\infty} J_m^{(2)} = 0$ in Δ_ε.

Somit hat man in Δ_ε: $\overline{\lim\limits_{z\to\infty}}\, |R_m(z)| \leqq 2c \dfrac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \displaystyle\int_A^\infty \psi(t) t^{\mu+m-1}\, dt,$

woraus wegen der Willkür von A die Behauptung folgt.

§ 4. Die Taylordarstellung bei tangentiellen Annäherungen.

Satz III. *Für ein* $\mu \geqq 0$ *und für* $0 \leqq t < \infty$ *sei* $\varphi(t)$ *stetig und von der Form* $\varphi(t) = t^\mu \psi(t)$, *wobei* $\psi(t) \geqq 0$ *und abnehmend (resp. wachsend) für* $t > 0$ *sei. Für* $t \leqq 0$ *sei* $\varphi(t) = \varphi(-t)$ [5a]. *Ferner sei* $\int_1^\infty \varphi(t) t^{m-1} dt < \infty$, $m \geqq -1$, *ganz, und falls* $m > -1$ *ist, sei* $\lim\limits_{t\to\infty} t^m \varphi(t) \log t = 0$.

D sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der w-Ebene, $w = u + iv$. *Der Bereich* D_1: $u \geqq -\varphi(v)$, $-\infty < v < \infty$, *möge D enthalten, der Bereich* D_1^*: $u \geqq \varphi(v)$, $-\infty < v < \infty$, *in D enthalten sein.* $z = z(w)$ *bilde D auf die Halbebene* $\Re z > 0$ *so ab, daß* $\lim\limits_{w \uparrow \infty} z(w) = \infty$ *ist. Dann gilt*

$$(16)\quad z(w) = c + \lambda w + \frac{c_1}{w} + \ldots + \frac{c_m}{w^m} + \frac{\varrho_m(w)}{w^m} \text{ mit } \lim_{w\to\infty} \varrho_m(w) = 0$$

in jedem Bereich $D_{1+\varepsilon}$: $u \geqq (1+\varepsilon)\,|v|^\mu \psi((1-\varepsilon)v)$, $-\infty < v < \infty$, (*bzw.* $u \geqq (1+\varepsilon)\,|v|^\mu \psi((1+\varepsilon)v)$), *für beliebiges festes* ε *mit* $0 < \varepsilon < 1$. *Dabei ist* $0 < \lambda < \infty$.

Zusatz. *Für die zu* $z(w)$ *inverse Funktion* $w = w(z) = w(z+iy)$ *gilt*

$$w(z) = a + \frac{1}{\lambda} z + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_m}{z^m} + \frac{r_m(z)}{z^m} \text{ mit } \lim_{z\to 0} r_m(z) = 0$$

in jedem Bereich $\Delta_{\varepsilon,\lambda}$: $x \geqq (2+\varepsilon)\lambda^{1-\mu} |y|^\mu \psi\left((1-\varepsilon)\frac{y}{\lambda}\right)$, $-\infty < y < \infty$ $\left(\textit{bzw. } x \geqq (2+\varepsilon)\lambda^{1-\mu}|y|^\mu \psi\left((1+\varepsilon)\frac{y}{\lambda}\right)\right)$ *für beliebiges festes* ε *mit* $0 < \varepsilon < 1$.

[5a]) Es darf $\lim\limits_{t\to 0} \psi(t) = +\infty$ sein; $\varphi(t) = |t|^\mu \psi(t)$ ist aber in $t = 0$ definiert und stetig, und $\varphi(0) \geqq 0$.

Beweis. 1. Wir führen den Beweis wieder nur für den Fall abnehmender $\psi(t)$ aus, da der andere analog ist. — $W(z) = U(z) + iV(z)$ und $W^*(z) = U^*(z) + iV^*(z)$ mögen $\Re z > 0$ so auf D_1 bzw. D_1^* abbilden, daß $W(z)$ und $W^*(z)$ reell für reelle z sind und $z = \infty$ $w = \infty$ entspricht. Da die Randkurven von D_1 resp. D_1^* in der Form $u = f(v)$ mit stetigem $f(v)$ und $\lim\limits_{v \to \pm\infty} \frac{f(v)}{v} = 0$ gegeben sind, und da ferner $\int_1^\infty \operatorname*{Max}\limits_{|v| \geqq t} \left(\frac{\varphi(v)}{v^2}\right) dt$ konvergiert [6]), so haben $W(z)$ und $W^*(z)$ in $z = \infty$ eine positive allseitige Ableitung [7]), die beide Male gleich 1 angenommen werden darf. Hieraus folgt insbesondere: Entsprechen $w = u + iv$ und $z = x + iy$ einander vermittels $w = W(z)$ oder $w = W^*(z)$, und liegt w oder z in seinem Definitionsbereich auf einer in ∞ mündenden Jor-

---

[6]) Ist $\psi(t)$ abnehmend, so ist zunächst, $n \geqq 1$, ganz:

$$(*) \quad \operatorname*{Max}_{2^n \leqq t \leqq 2^{n+1}} \frac{\varphi(t)}{t^2} \leqq \frac{4^\mu}{2^{n-1}} \int_{2^{n-1}}^{2^n} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt.$$

Nun ist für $2^k \leqq \tau \leqq 2^{k+1}$, $k \geqq 1$, ganz:

$$\mu(\tau) \equiv \operatorname*{Max}_{t \geqq \tau} \frac{\varphi(t)}{t^2} \leqq \operatorname*{Max}_{2^k \leqq t \leqq 2^{k+1}} \frac{\varphi(t)}{t^2} + \operatorname*{Max}_{2^{k+1} \leqq t \leqq 2^{k+2}} \frac{\varphi(t)}{t^2} + \ldots,$$

wobei die Reihe rechts wegen $(*)$ und $\int_1^\infty \varphi(t) \frac{dt}{t^2} < \infty$ konvergiert. Daher folgt nach $(*)$ zunächst rein formal,

$$\int_2^\infty \mu(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^\infty \int_{2^k}^{2^{k+1}} \mu(\tau) d\tau \leqq \sum_{k=1}^\infty \int_{2^k}^{2^{k+1}} d\tau \sum_{n=k}^\infty \operatorname*{Max}_{2^n \leqq t \leqq 2^{n+1}} \frac{\varphi(t)}{t^2}$$

$$\leqq 4^\mu \sum_{k=1}^\infty \int_{2^k}^{2^{k+1}} d\tau \sum_{n=k}^\infty \frac{1}{2^{n-1}} \int_{2^{n-1}}^{2^n} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt$$

$$= 4^\mu \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^{n-1}} \int_{2^{n-1}}^{2^n} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt \int_2^{2^{n+1}} d\tau \leqq 4^{\mu+1} \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt,$$

und da es sich durchweg um Reihen mit positiven Gliedern handelt und $\int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt < \infty$ ist, so sind die Umformungen gerechtfertigt. Ist $\psi(t)$ wachsend, so ist alles analog. Man vgl. hierfür die Arbeit von Grootenboer, l.c. [4]), 137—138 bzw. Diss., 45.

[7]) S. l.c. [1]) Math. Z. 35, 387, Satz 7.

dankurve L, längs deren $\lim\limits_{w\to\infty} \frac{u}{v} = 0$ resp. $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{x}{y} = 0$ gilt, so ist

$$(17) \qquad \lim \frac{v}{y} = 1 \text{ für } w \to \infty \text{ bzw. } z \to \infty \text{ längs } L.$$

2. Wegen $U^*(z) > 0$ in $x > 0$ und der Stetigkeit der Randwerte $U^*(iy)$ von $U^*(z)$ auf $x = 0$ gilt in $x > 0$ [8])

$$(18) \quad W^*(z) = z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*(z) \left\{ \frac{1}{z - it} + \frac{1}{1 + it} \right\} dt + \text{konst.}$$

und

$$(19) \quad U^*(z) = x + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*(it) \frac{x\,dt}{x^2 + (y-t)^2}, \quad x > 0.$$

Eine analoge Darstellung gilt auch für $U(z)$. Zunächst ist nämlich $F(z) = e^{W(z)-z}$ in $x > 0$ regulär und hat auf $x = 0$ $(z \neq \infty)$ stetige Randwerte $F(iy)$ mit $|F(iy)| = e^{U(iy)-x} \leqq 1$. Ferner ist wegen $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{W(z)}{z} = 1$: $W(z) - z = o(|z|)$ bei $z \to \infty$ in $x > 0$, also für jedes $\varepsilon > 0$ $|F(z)| \leqq e^{\varepsilon|z|}$ in $x > 0$ bei genügend großem $|z|$. Daher ist nach Phragmén-Lindelöf [9]) $|F(z)| \leqq 1$ in $x > 0$, also $e^{U(z)-x} \leqq 1$, $x - U(z) \geqq 0$ in $x > 0$. Wegen der Stetigkeit von $U(iy)$ und wegen $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{W(z)}{z} = 1$ gilt daher in der Tat

$$(20) \qquad U(z) - x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(it) \frac{x\,dt}{x^2 + (y-t)^2} \text{ für } x > 0.$$

3. Es sei $z = Z(w) = X(w) + iY(w)$ die zu $W(z)$ inverse Funktion. Da D D_1^* enthält und in D_1 enthalten ist, hat die zu $z = z(w)$ inverse Funktion $w = w(z)$ in $z = \infty$ eine positive endliche Winkelderivierte $\frac{1}{\lambda}$ [4]). Somit hat auch $Z(w(z))$ in $z = \infty$ die Winkelderivierte $\frac{1}{\lambda}$. Wegen $X(w(z)) \geqq 0$ ist daher auch [8]) $X(w(z)) - \lambda^{-1} x \geqq 0$ in $x > 0$, also ist

$$(21) \qquad \Re z(w) = x(w) \leqq \lambda X(w) \qquad \text{für } w \text{ in } D.$$

Ferner merken wir noch an, daß $z(W^*(\zeta))$, $\zeta = \xi + i\eta$, in $\xi > 0$ nichtnegativen Realteil $x(W^*(\zeta))$ mit stetigen Randwerten auf $\xi = 0$ hat, und daß daher in $\xi > 0$ gilt:

---

[8]) S. J. Wolff et F. de Kok [Bull. S. M. F. 60 (1932), 225—226].

[9]) S. z.B. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 133.

(22) $$z(W^*(\zeta)) = \lambda\zeta + \\ + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(W^*(i\tau))\left\{\frac{1}{\zeta - i\tau} + \frac{1}{1+i\tau}\right\}d\tau + \text{konst.}$$

4. Wir leiten nun aus (20) eine Ungleichung her. Sei $0 < \vartheta < 1$. Wegen $U(it) < 0$ ist nach (20) für $x > 0$ und $y > 0$

$$x - U(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|U(it)|\,x\,dt}{x^2+(y-t)^2} = \\ = \frac{1}{\pi}\left\{\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{y(1-\vartheta)} + \int\limits_{y(1-\vartheta)}^{y(1+\vartheta)} + \int\limits_{y(1+\vartheta)}^{\infty}\right\} \\ = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Für $0 < A < (1-\vartheta)y$, $y > 0$, gilt

$$J_2 \leqq \frac{x}{\pi}\,\frac{1}{\vartheta^2 y^2}\int\limits_0^A |U(it)|\,dt + \frac{x}{\pi}\int\limits_A^{y(1-\vartheta)}\frac{|U(it)|}{\vartheta^2 t^2}\,dt = x\,o(1)$$

bei $y \to \infty$ und *festem* ϑ.

Ferner gilt

$$J_4 \leqq \frac{4x}{\pi}\int\limits_{y(1+\vartheta)}^{\infty}\frac{|U(it)|}{\vartheta^2 t^2}\,dt = x\,o(1)$$

für $y \to \infty$ und *festes* ϑ.

Da für $t > 0$ $V(it)$ wächst und $\dfrac{|U(it)|}{V(it)^\mu} = \psi(V(it))$ fällt, folgt

$$J_3 \leqq \frac{U(iy(1-\vartheta))}{V(iy(1-\vartheta))^\mu}\,V(iy(1+\vartheta))^\mu\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{y(1-\vartheta)}^{y(1+\vartheta)}\frac{x\,dt}{x^2+(y-t)^2} \\ \leqq |U(iy(1-\vartheta))|\left[\frac{V(iy(1+\vartheta))}{V(iy(1-\vartheta))}\right]^\mu \leqq |U(iy(1-\vartheta))|\left[\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right]^{2\mu}$$

bei genügend großem y, da wegen (17)

$$\lim_{y\to\infty}\frac{V(iy(1+\vartheta))}{V(iy(1-\vartheta))} = \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta} < \left(\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right)^2$$

ist.

Schließlich ist noch wegen $U(-it) = U(it)$ für $A > 0$

$$J_1 = \frac{x}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{|U(it)|\,dt}{x^2+(y+t)^2} \leqq \frac{x}{\pi}\int\limits_0^A\frac{|U(it)|\,dt}{x^2+(y+t)^2} + \frac{x}{\pi}\int\limits_A^\infty\frac{|U(it)|}{t^2}\,dt = \\ = x\cdot o(1) \qquad \text{bei } y\to\infty.$$

Somit erhalten wir für *festes* ϑ und $y > y_0 = y_0(\vartheta)$, $z = x + iy$,

$$(23)\quad x - U(z) \leqq \left(\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\right)^{2\mu} \left|U(iy(1-\vartheta))\right| + x \cdot o(1) \text{ bei } y \to \infty,$$

und wegen $U(x+iy) = U(x-iy)$ gilt das gleiche auch für $y < -y_0$, $y \to -\infty$.

5. Wir wenden nun (23) auf einen speziellen Fall an und führen dabei w vermittels $z = Z(w)$ als neue Variable ein. Es sei $w = u + iv$ ein fester Punkt auf einer in $w = \infty$ mündenden Jordankurve L in D_1, längs deren $\lim v = \infty$ bei Durchlaufung von L in der einen, $\lim v = -\infty$ bei Durchlaufung in der entgegengesetzten Richtung ist und $\lim\limits_{w \to \infty} \dfrac{u}{v} = 0$ gilt. Dann ist $x = X(w)$, $U(z) = u$, $y = Y(w)$; setzt man für den Augenblick $(1-\vartheta)y = \eta$, so ist $\left|U(iy(1-\vartheta))\right| = \left|V(i\eta)\right|^{\mu} \psi(V(i\eta))$.

Wendet man (17) für $z = i\eta$ und $w = W(i\eta)$ an, so ist bei genügend großem $|\eta|$ oder — was wegen $y = Y(w)$ dasselbe besagt — bei genügend großem $|w|$

$$y \geqq (1-\vartheta^2)y \geqq V(i\eta) \geqq (1-\vartheta)^2 y.$$

Ferner ist nach (17) für $w = u + iv$ auf L und $z = Z(w)$ $(y = Y(w))$

$$(1+\vartheta)v \geqq Y(w) \geqq (1-\vartheta)v$$

bei genügend großem $|w|$. Somit gilt

$$(1+\vartheta)v \geqq V(i\eta) \geqq (1-\vartheta)^3 v, \quad |U(i\eta)| \leqq (1+\vartheta)^{\mu} |v|^{\mu} \psi((1-\vartheta)^3 v).$$

Daher erhalten wir aus (23) das *Resultat*: *Zu jedem* Θ *mit* $0 < \Theta < 1$ *gibt es ein* $A = A(\Theta; L)$, *so daß für* w *auf* L *mit* $|w| \geqq A$ *gilt*

$$(24)\qquad X(w) \leqq \{u + |v|^{\mu} \psi((1-\Theta)v)\}(1+\Theta).$$

6. Ähnlich folgt aus (19) und (17): *Ist* $0 < \Theta < 1$ *und* Λ *eine Kurve in* $x \geqq 0$ *von demselben Typus wie* L, *so ist für* z *auf* Λ *mit* $|z| \geqq B = B(\Theta; \Lambda)$

$$(25)\qquad U^*(z) \leqq \{x + |y|^{\mu} \psi((1-\Theta)y)\}(1+\Theta).$$

7. Es sei ε mit $0 < \varepsilon < 1$ vorgegeben. Ist $\Theta > 0$ so klein, daß

$$(26)\qquad \frac{1-\Theta}{1+\Theta} > 1 - \varepsilon \text{ und } (1+\Theta)^{2+\mu} < 1 + \varepsilon$$

ist, so *enthält das Bild des Bereiches* Δ_{Θ}: $x \geqq \Theta\, |y|^{\mu}\, \psi((1-\Theta)y)$, $-\infty < y < \infty$, *vermittels* $w = W^*(z)$ *in der* w*-Ebene den außerhalb eines gewissen Kreises um* $w = 0$ *gelegenen Teil des Bereiches* $D_{1+\varepsilon}$: $u \geqq (1+\varepsilon)\, |v|^{\mu} \psi((1-\varepsilon)v)$, $-\infty < v < \infty$.

Zum Beweise genügt es offenbar zu zeigen, daß das Bild der Kurve Λ_Θ: $x = \Theta\,|y|^\mu\,\psi((1-\Theta)y)$ vermittels $W^*(z)$ für alle genügend großen $|y|$ links [10]) von der Kurve $L_{1+\varepsilon}: u = (1+\varepsilon)|v|^\mu\psi((1-\varepsilon)v)$ liegt. Sei für $z = x+iy$ auf Λ_Θ, mit $|y| \geqq B_1 = B_1(\Theta) \geqq B(\Theta; \Lambda_\Theta)$ (B die Zahl aus (25)):

$$\frac{1}{1+\Theta} \leqq \frac{V^*(z)}{y} \leqq 1+\Theta. \tag{27}$$

Ist $|v_0|$ genügend groß, so schneidet die Gerade $v = v_0$ das Bild von Λ_Θ nur noch in Punkten $w = U^*(z)+iV^*(z)$ mit $|y| \geqq B_1$, möglicherweise aber in mehr als nur einem Punkte. Es sei $z_0 = x_0+iy_0$, $|y_0| \geqq B_1$, derjenige Punkt auf Λ_Θ, für den $V^*(z_0) = v_0$ und $u = U^*(z_0)$ am größten ist. Daher gilt wegen (27)

$$v_0\frac{1}{1+\Theta} \leqq y_0 \leqq v_0(1+\Theta). \tag{28}$$

Da ferner wegen (25) $u = U^*(z_0) \leqq |y_0|^\mu\psi((1-\Theta)y_0)(1+\Theta)^2$ ist, so folgt aus (28) und (26)

$$u = U^*(z_0) \leqq |v_0|^\mu\;\psi\left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta}v_0\right)(1+\Theta)^{2+\mu} < |v_0|^\mu\;\psi((1-\varepsilon)v_0)(1+\varepsilon),$$

woraus die Behauptung folgt.

8. Jetzt ergibt sich leicht die Behauptung des Satzes. Zunächst folgt aus (18), daß für $w = W^*(\zeta) = W^*(\xi+i\eta)$ gilt

$$w = W^*(\zeta) = \beta+\zeta+\frac{\beta_1}{\zeta}+\ldots+\frac{\beta_m}{\zeta^m}+\frac{B_m(\zeta)}{\zeta^m} \tag{29}$$
$$\text{mit}\ \lim_{\zeta\to\infty} B_m(\zeta) = 0$$

in Δ_ε: $\xi \geqq \varepsilon\,|\eta|^\mu\psi((1-\varepsilon)\eta)$ bei beliebigem festem ε mit $0<\varepsilon<1$.

Sei nämlich $\Theta = 1-\sqrt{1-\varepsilon}$, also $(1-\Theta)^2 = 1-\varepsilon$. Dann ist nach (25) bei genügend großem $|\eta|$:
$0 \leqq U^*(i\eta) \leqq 2\,|\eta|^\mu\psi((1-\Theta)\eta)$. Daher folgt (29) aus Hilfssatz 3, wenn für das $\psi(t)$ und ε des Hilfssatzes $\psi((1-\Theta)t)$ bzw. Θ gewählt werden.

Weiter ergibt sich aus (22), daß für $z(W^*(\zeta))$ gilt

$$z(W^*(\zeta)) = \gamma+\lambda\zeta+\frac{\gamma_1}{\zeta}+\ldots+\frac{\gamma_m}{\zeta^m}+\frac{\Gamma_m(\zeta)}{\zeta^m} \tag{30}$$
$$\text{mit}\ \lim_{\zeta\to\infty}\Gamma_m(\zeta) = 0$$

---

[10]) Wir sagen, die Kurve Λ liege links (bzw. rechts) von der Kurve $u = g(v)$, $|v| \geqq A$, wenn für jedes v_0, $|v_0| \geqq A$, die Abscissen aller Schnittpunkte von $v = v_0$ mit Λ $\leqq g(v_0)$ (resp. $\geqq g(v_0)$) sind.

in Δ_ε. Denn setzen wir wieder $\Theta = 1 - \sqrt{1-\varepsilon}$ und wenden zunächst (24) mit $\frac{\Theta}{2}$ anstatt Θ an, so erhalten wir wegen (21) für w auf L^*: $u = |v|^\mu \psi(v)$, bei genügend großem $|v|$

$$x(w) \leqq \lambda X(w) \leqq 2\lambda \left\{ |v|^\mu \psi(v) + |v|^\mu \psi\left(\left(1 - \frac{\Theta}{2}\right) v\right) \right\}.$$

Setzt man hier $w = W^*(i\eta)$ ein $(-\infty < \eta < \infty)$, so folgt wegen (17)

$$x(W^*(i\eta)) \leqq 4\lambda |\eta|^\mu \psi((1-\Theta)\eta)$$

bei genügend großem $|\eta|$ und daher die Behauptung nach Hilfssatz 3.

9. Um nun schließlich (16) zu erhalten, beachte man, daß aus (29) auch umgekehrt folgt

$$(31) \quad \zeta = b + w + \frac{b_1}{w} + \ldots + \frac{b_m}{w^m} + \frac{R_m(w)}{w^m} \text{ mit } \lim_{w \to \infty} R_m(w) = 0,$$

wenn nur $w \to \infty$ innerhalb eines Bereiches in D_1^* geht, dem vermittels $w = W^*(\zeta)$ ein Bereich der ζ-Ebene entspricht, in dem $\lim\limits_{\zeta \to \infty} B_m(\zeta) = 0$ ist. Nach Nr. 7 (Anfang) ist dies aber bei gegebenem ε mit $0 < \varepsilon < 1$ sicher der Fall für den außerhalb eines gewissen Kreises um $w = 0$ gelegenen Teil von $D_{1+\varepsilon}$. Daher ist $\lim\limits_{w \to \infty} R_m(w) = 0$ in $D_{1+\varepsilon}$. Setzt man (31) in (30) ein, so erhält man die gewünschte Darstellung für $z(w)$.

Beweis des Zusatzes. Nach Satz III ist für w auf der Kurve

$$L_{1+\Theta}\colon \quad u = (1+\Theta)\, |v|^\mu \psi((1-\Theta)v), \; -\infty < v < \infty, \; \lim_{w \to \infty} \frac{z(w)}{w} = \lambda,$$

also insbesondere $\lim\limits_{w \to \infty} z(w) = \infty$ und $\lim\limits_{v \to +\infty} y(w) = +\infty$ $(y(w) = \mathfrak{J} z(w))$, $\lim\limits_{v \to -\infty} y(w) = -\infty$. Sei nun $0 < \varepsilon < 1$. Ist dann Θ so klein, daß

$$(32) \qquad \frac{1-\Theta}{1+\Theta} > 1 - \varepsilon, \qquad (1+\Theta)^{\mu+1}(2+\Theta) < 2 + \varepsilon$$

gilt, so liegt das Bild von $L_{1+\Theta}$ vermittels $z = z(w)$ für alle genügend großen $|v|$ *links* [10]) von der Kurve

$$x = (2+\varepsilon)\lambda^{1-\mu} |y|^\mu \psi\left((1-\varepsilon)\frac{y}{\lambda}\right), \quad -\infty < y < \infty.$$

Sei nämlich $A_1 > 0$ derart, daß für w auf $L_{1+\Theta}$ mit $|v| \geqq A_1$

$$v\,\lambda(1+\Theta)^{-1} < y(w) < v\,\lambda(1+\Theta) \tag{33}$$

gilt, und daß (24) anwendbar ist. Ist nun $|y_0|$ hinreichend groß, so schneidet die Gerade $y = y_0$ das Bild von $L_{1+\Theta}$ nur noch in Punkten $z(w) = x(w) + iy(w)$ mit $|v| \geqq A_1$. Sei $w_0 = u_0 + iv_0$, $|v_0| \geqq A_1$, derjenige Punkt auf $L_{1+\Theta}$, für den $y(w_0) = y_0$ und $x(w_0) = y_0$ und $x(w_0)$ am größten ist. Dann ist nach (21) und (24)

$$x(w_0) \leqq \lambda X(w_0) \leqq \lambda\,|v_0|^{\mu}\,\psi((1-\Theta)v_0)(2+\Theta)(1+\Theta),$$

und wegen (33) und (32) ist daher

$$x(w_0) < \lambda^{1-\mu}\,|y_0|^{\mu}\,\psi\left((1-\varepsilon)\frac{y_0}{\lambda}\right)\,(2+\varepsilon),$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Das Bild des Bereiches $D_{1+\Theta}$: $u \geqq (1+\Theta)\,|v|^{\mu}\psi((1-\Theta)v)$ vermittels $z = z(w)$ in der z-Ebene enthält somit den außerhalb eines hinreichend großen Kreises um $z = 0$ gelegenen Teil des Bereiches $\Delta_{\varepsilon,\lambda}$: $x \geqq (2+\varepsilon)\lambda^{1-\mu}\,|y|^{\mu}\psi\left((1-\varepsilon)\frac{y}{\lambda}\right)$.

Die Entwickelung für $w(z)$ ergibt sich nun durch Umkehrung der Entwickelung (16) für $z(w)$, wenn man beachtet, daß das bei der Umkehrung zunächst formal gewonnene Restglied $r_m(z) \to 0$ strebt, wenn $z \to \infty$ in einem Bereiche in $\Re z > 0$ geht, dem vermittels $w(z)$ ein Bereich der w-Ebene entspricht, in dem $\lim\limits_{w\to\infty} \varrho_m(w) = 0$ ist. Nach dem eben Bewiesenen ist dies der Fall, wenn $z \to \infty$ in $\Delta_{\varepsilon,\lambda}$ geht.

§ 5. Folgerungen.

1. Ergänzung zu Sätzen von C. Visser und J. G. van der Corput. Herr van der Corput hat kürzlich ein Kriterium für die Existenz einer positiven endlichen Winkelderivierten hergeleitet,[11]) das, wie er zeigte, mit einem Kriterium von C. Visser [11]) äquivalent ist, und das so formuliert werden kann:

Es sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der w-Ebene ($w = u + iv$). Für $t \geqq 0$ sei $\psi(t) > 0$, stetig und wachsend; für $t < 0$ sei $\psi(t) = \psi(-t)$. Ferner sei

$$\int_1^{\infty} \psi(t)\frac{dt}{t^2} < \infty. \tag{34}$$

[11]) Siehe l.c. [1]).

D enthalte D_1^*: $u \geqq \psi(v)$, $-\infty < v < \infty$, und sei in D_1: $u \geqq -\psi(v)$, $-\infty < v < \infty$, enthalten. Bildet dann $z = z(w)$ D so auf $\Re z > 0$ ab, daß $\lim\limits_{w \uparrow \infty} z(w) = \infty$ ist, so hat $z(w)$ in $w = \infty$ eine endliche positive Winkelderivierte λ [12]).

Dieses Kriterium ist übrigens auch äquivalent mit einem vom Verfasser für den Fall angegebenen [13]), daß der betrachtete Randpunkt *endlich* ist. Man erhält dessen Formulierung für den Fall des unendlich fernen Punktes, wenn man in dem van der Corputschen Satz (34) durch die (nach [6]) äquivalente) Bedingung $\int\limits_1^\infty \operatorname*{Max}\limits_{|t| \geqq v} \left(\frac{\psi(t)}{t^2}\right) dv < \infty$ ersetzt.

Aus Satz III folgt nun (für $m = -1$, $\mu = 0$, $\varphi(t) = \psi(t)$), daß $\lim\limits_{w \to \infty} \frac{z(w)}{w} = \lambda$ nicht nur im Winkel, sondern *in jedem Bereich $D_{1+\varepsilon}$: $u \geqq (1+\varepsilon)\psi((1+\varepsilon)v)$, $-\infty < v < \infty$, gilt* $(0 < \varepsilon < 1)$. *Für die Umkehrfunktion $w(z) = w(x+iy)$ von $z(w)$ ist* $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{w(z)}{z} = \lambda^{-1}$ *in jedem Bereich $x \geqq (2+\varepsilon)\lambda\,\psi((1+\varepsilon)\frac{y}{\lambda})$.*

Ferner erwähnen wir noch, daß Satz III (mit $m = 0$, $\mu = 0$ und abnehmendem $\varphi(t)$) eine analoge Verallgemeinerung hinsichtlich der Annäherung $w \to \infty$ für ein kürzlich von Herrn J. Wolff und dem Verfasser gemeinsam bewiesenes Resultat [14]) über die Existenz von $\lim\limits_{w \to \infty} [z(w) - w\lambda]$ liefert.

2. Zusatz zum Satz II. *Man ersetze die Voraussetzung* (a) *im Satze II durch die Annahme, daß $g_1^*(v) = g(v) + \delta(v)$, $g_1(v) = g(v) - \delta(v)$ ist, wobei $\delta(v) \geqq 0$, stetig und gerade für $|v| \leqq a$ ist, mit $|v|$ wächst und, falls $n > 1$ ist,* $\lim\limits_{v \to \infty} \delta(v) v^{-n} \log v = 0$ *gilt. Dann gilt in* (6) $\lim\limits_{w \to \infty} \varrho_n(w) = 0$ *sogar, wenn $w \to 0$ in dem Bereich G_ε*

---

[12]) Man kann (34) durch die folgende Bedingung ersetzen: Sei für $v = V$ $h(V) \geqq 0$ derart, daß die Halbgerade $u > h(V)$, $v = V$ in D, die Halbgerade $u < -h(V)$, $v = V$ außerhalb D liegt. Ferner sei $\chi(v) = \operatorname*{Max}\limits_{|v| \leqq V} h(V)$. Dann lautet die Bedingung: $\int\limits_1^\infty \chi(v) \frac{dv}{v^2} < \infty$. Es ist leicht zu sehen, daß sie mit (34) äquivalent ist. In der Formulierung von Herrn van der Corput wird D als in $u \geqq 0$ gelegen angenommen und diese Bedingung anstelle von (34) verlangt. Auch beim Visserschen Kriterium wird D in $u \geqq 0$ angenommen.

[13]) Siehe l. c. [1]), Math. Z., 454—56.

[14]) Proceedings Akad. Amsterdam 37 (1934), 145—149.

$(0<\varepsilon<1)$: $g(v)+(1+\varepsilon)\ \delta\big((1+\varepsilon)v\big) \leqq u \leqq \beta$, $|v| \leqq \alpha$, *geht, der bei passendem* α *und* β *in* G *liegt.*

Beweis. 1. Es gibt eine in $|w| \leqq \varrho$ bei passendem $\varrho > 0$ reguläre schlichte Funktion $\omega = \Omega(w)$, $\Omega(0) = 0$, $\Omega'(0) = 1$, $\omega = \sigma + i\tau$, die einen $w = 0$ als inneren Punkt enthaltenden Teil γ des analytischen Bogens $u = g(v)$ auf ein Stück der τ-Achse abbildet. Man darf nun annehmen, daß G in $|w| < \varrho$ liegt. Sonst kann man G durch einen nicht durch $w = 0$ hindurchgehenden Querschnitt so zerlegen, daß das eine Teilgebiet, H, $w = 0$ als einen längs der positiven u-Achse erreichbaren Randpunkt hat und in $|w| < \varrho$ liegt. In $w = 0$ genügt H analogen Voraussetzungen wie G. Hat man dann den Satz für eine Funktion $z = \chi(w)$ bewiesen, die H auf $|z| < 1$ abbildet, so folgt er für $z = \varphi(w)$ daraus, daß in einer Umgebung von $w = 0$: $\chi(w) = \psi\big(\varphi(w)\big)$ gilt, wo $\psi(\zeta)$ in $\zeta = 0$ regulär und $\psi'(0) \neq 0$ ist.

2. Wir nehmen nun an, G liege in $|w| < \varrho$ und wenden die Abbildung $W = \frac{1}{\Omega(w)}$ $(W = U + iV)$ an. Hierdurch wird G in ein Gebiet D der W-Ebene übergeführt, das $W = \infty$ als einen längs der positiven U-Achse erreichbaren Randpunkt hat. Ferner gehen die Kurven l^*: $u = g_1^*(v)$, l: $u = g_1(v)$ und l_ε: $u = g(v) + (1+\varepsilon)\,\delta\big((1+\varepsilon)v\big)$, $|v| \leqq a$ in je eine Kurve L^* resp. L resp. $L(\varepsilon)$ durch $W = \infty$ über, von der ein Ast aus $V > 0$, der andere aus $V < 0$ nach $W = \infty$ geht.

Wie man nun unter Benutzung des Hilfssatzes 2 leicht sieht, bleibt für festes η mit $0 < \eta < 1$, außerhalb eines genügend großen Kreises um $W = 0$, jeder der beiden Äste

(35) von L^* *links*[10]) von L_1^*: $U = (1+\eta)\delta\Big((1+\eta)\frac{1}{V}\Big)V^2 \equiv \psi(V)\cdot V^2$,

und von L *rechts*[10]) von L_1: $U = -\,\psi(V)V^2$, $\quad |V| \geqq A > 0$.

Hierbei ist also $\psi(V) \equiv (1+\eta)\,\delta\Big((1+\eta)\frac{1}{V}\Big)$ eine für $|V| \geqq A$ stetige gerade und mit wachsendem $|V|$ abnehmende Funktion. Offenbar liegt für ein $A_1 \geqq A$ der Teil von L_1^* für $|V| \geqq A_1$ innerhalb und der von L_1 außerhalb D. Ferner erkennt man, daß bei genügend kleinem η, außerhalb eines genügend großen Kreises um $W = 0$, jeder der beiden Äste von

(36) $L(\varepsilon)$ *rechts* von $L_{1+\eta}$: $U = (1+\eta)\psi\big((1-\eta)V\big)V^2$, $|V| \geqq A$,

verläuft. $L_{1+\eta}$ liegt rechts von L_1^*, und befindet sich für $|V| \geqq A_2$ bei passendem $A_2 \geqq A$ in D.

Sei nun η *fest* gewählt, so daß (35) und (36) erfüllt ist. Bei hinreichend großem $A^* \geqq A$ kann man nun $\psi(V)$ für $|V| \leqq A^*$ so abändern bzw. definieren, daß $\psi(V)$ für $|V| > 0$ stetig und gerade ist und mit wachsendem $|V|$ abnimmt, $\psi(V)V^2$ aber auch in $V = 0$ stetig ist, und daß $u = \psi(V)V^2$ innerhalb, $u = -\psi(V)V^2$ $-\infty < V < \infty$, außerhalb D liegt. Aus dem oben Gesagten erkennt man dann leicht, daß für D die Satz III zugrundeliegende Konfiguration erfüllt ist, indem D den Bereich D_1^*: $u \geqq V^2\psi(V)$, $-\infty < V < \infty$, enthält und in D_1: $u \geqq -V^2\psi(V)$ enthalten ist. Ferner bemerken wir, daß der Teil des Bildbereiches von G_ε vermittels $W = \frac{1}{\Omega(w)}$, der außerhalb eines hinreichend großen Kreises um $W = 0$ liegt, sicher dem Bereiche $D_{1+\eta}$:

$$U \geqq (1+\eta)\psi((1-\eta)V)V^2, \quad -\infty < V < \infty,$$

angehört. *Wenn also* $w \to 0$ *in* G_ε *geht, so strebt* $W = \frac{1}{\Omega(w)} \to \infty$ *in* $D_{1+\eta}$. Schließlich beachte man, daß $\int_1^\infty \psi(V)V^2V^{n-3}dV$ konvergiert.

Bildet man nun $|z| < 1$ durch $z = z(Z)$ auf $\Re Z > 0$ so ab, daß der Punkt $z_1 = \lim\limits_{w \downarrow 0} \varphi(w)$ in $Z = \infty$ übergeht, so gilt für $W = W(Z) = \frac{1}{\Omega(\varphi(z(Z)))}$ nach Satz III (für $\mu = 2$ und $m = n - 2$)

$$W(Z) = C_0 + CZ + \frac{C_1}{Z} + \ldots + \frac{C_m}{Z^m} + \frac{R_m(Z)}{Z^m}$$

mit $\lim\limits_{Z \to \infty} R_m(Z) = 0$ in $D_{1+\eta}$. Indem man hier von W zu w und von Z zu z übergeht und das über G_ε und $D_{1+\eta}$ Gesagte berücksichtigt, folgt die Behauptung.

(Eingegangen den 8. Juli 1935.)