ERICH ROTHE

Über Abbildungsklassen von Kugeln des Hilbertschen Raumes

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 294-307

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__294_0>

Über Abbildungsklassen von Kugeln des Hilbertschen Raumes

von

Erich Rothe

Breslau

Einleitung.

S^∞ sei die Kugel

$$|\mathfrak{x}| = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu^2 = 1\ ^{1)}$$

des Hilbertschen Raumes. Wir betrachten alsdann Abbildungen der S^∞ in sich [2]), die von der From

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \tag{0.1}$$

sind, wobei $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ eine für alle $\mathfrak{x} \subset S^\infty$ erklärte eindeutige vollstetige Funktion ist, also die Kugel in eine kompakte Menge überführt [3]). Solche Abbildungen mögen Abbildungen mit vollstetiger Verschiebung heißen. Zwei Abbildungen mit vollstetiger Verschiebung sollen zur gleichen Abbildungsklasse gehören, wenn man sie — in einem noch zu präzisierenden Sinn (s. § 1, Schluß) — stetig durch Abbildungen mit vollstetiger Verschiebung ineinander überführen kann. In der Topologie der n-dimensionalen Kugeln S^n wird bekanntlich nach Brouwer [4]) jeder eindeutigen stetigen Abbildung einer S^n auf sich ein Abbildungsgrad zugeordnet, der innerhalb einer Klasse konstant ist. Wie H. Hopf [5])

---

[1]) $\mathfrak{x}$ steht für den Punkt $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ des Hilbertschen Raumes. Ist $\mathfrak{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$, so bedeute wie üblich $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ den Punkt $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, \ldots)$.

[2]) Das bedeutet keine Einschränkung gegenüber dem Fall, daß die Bildmenge auf einer zweiten Kugel des Hilbertschen Raumes liegt.

[3]) Denn die S^∞ ist beschränkt, und eine vollstetige Funktion führt nach Definition jede beschränkte Menge in eine kompakte über.

[4]) Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten [Math. Annalen **71** (1912), 97—115].

[5]) Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten [Math. Annalen **96** (1926), 209—224]. Für $n = 2$ wurde der Satz bereits von Brouwer (Sur la notion de „classe" de transformations d'une multiplicité [Proc. V. Intern. Congr. Cambridge 1912, **2**, 9—10]) bewiesen.

gezeigt hat, gehören umgekehrt zwei Abbildungen mit gleichem Grade zur gleichen Klasse. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, den Begriff des Abbildungsgrades auf Abbildungen mit vollstetiger Verschiebung der S^∞ in sich auszudehnen [6]) und auch hier zu zeigen, daß zwei Abbildungen dann und nur dann zur gleichen Klasse gehören, wenn ihre Grade übereinstimmen.

Dabei werden wir in folgender Weise vorgehen: wir werden zunächst für jedes $\gamma = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ gewisse Normalabbildungen $\mathfrak{n}_\gamma$ der S^∞ in sich definieren, die den Abbildungen der Form $\varphi' = \gamma\varphi$ eines Kreises in sich entsprechen (§ 1). Zwei Normalabbildungen $\mathfrak{n}_\gamma$, $\mathfrak{n}'_\delta$ werden sich dann und nur dann als zur gleichen Klasse gehörig erweisen, wenn $\gamma = \delta$ ist (§ 3, Satz I u. II). Durch die $\mathfrak{n}_\gamma$ wird also für jedes γ eine Abbildungsklasse $\mathfrak{K}_\gamma$ definiert. Sodann wird gezeigt, daß jede Abbildung mit vollstetiger Verschiebung einer und nur einer Klasse $\mathfrak{K}_\gamma$ angehört (§ 3, Hauptsatz). Den der Klasse $\mathfrak{K}_\gamma$ angehörigen Abbildungen wird nun der Abbildungsgrad γ zugeordnet. Der am Schluß des vorigen Absatzes angeführte Satz ist bei dieser Definition selbstverständlich.

Im § 1 sind Definitionen und im § 2 einige Hilfssätze zusammengestellt.

Die Übertragung weiterer im n-dimensionalen Falle bekannter Eigenschaften des Abbildungsgrades sei einer späteren Veröffentlichung vorbehalten [7]).

§ 1. Definitionen.

E^{n+1} sei eine $(n+1)$-dimensionale den Kugelmittelpunkt $\mathfrak{o}$ enthaltende Ebene. Ihr Schnitt mit S^∞ ist eine n-dimensionale Kugel A^n. Ist $\bar{E}^{n+1}$ eine zu E^{n+1} parallele Ebene, so hat sie mit der S^∞ entweder gar keinen Punkt gemeinsam oder genau einen Punkt $\mathfrak{p}$ oder eine n-dimensionale Kugel B^n. Bei gegebener

---

[6]) Der Abbildungsgrad für Räume nicht endlicher Dimension wurde erstmalig in einer gemeinsamen Arbeit von Leray und Schauder eingeführt und zwar für Abbildungen mit vollstetiger Verschiebung einer beschränkten offenen Punktmenge eines linearen, normierten und vollständigen Raumes auf eine Punktmenge des gleichen Raumes [C.R. **197** (1933), 115—117; Ann. Ecole norm **51** (1934), 45—78].

[7]) Folgende Resultate seien angeführt: Bedeckt bei der Abbildung mit vollstetiger Verschiebung $\mathfrak{f}$ die Bildmenge nicht die ganze S^∞, so ist ihr Grad Null. Ist $\mathfrak{g}$ eine gleichmäßig stetige Abbildung mit vollstetiger Verschiebung, so gilt für $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ der Produktsatz. Ist $\mathfrak{g}$ überdies eineindeutig und $\mathfrak{g}^{-1}$ gleichfalls gleichmäßig stetig, so ist der Grad von $\mathfrak{g}$ gleich ± 1.

E^{n+1} werden wir häufig A^n als Äquatorkugel bezeichnen, $\mathfrak{p}$ als einen Polpunkt und B^n als Breitenkugel [8]). Zwischen den Punkten $\mathfrak{x}$ von A^n und $\mathfrak{x}'$ von B^n stellen wir die folgende eineindeutige Zuordnung her: wir projizieren $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{o}$ aus auf die zu A^n konzentrische n-dimensionale Kugel, deren Radius gleich dem von B^n ist. Ist $\bar{\mathfrak{x}}$ der so erhaltene Punkt, so sei $\mathfrak{x}' = \bar{\mathfrak{x}} + \mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{b}$ der Mittelpunkt von B^n ist. Die so zugeordneten Punkte von A^n und B^n, sollen im folgenden kurz als *entsprechende* Punkte bezeichnet werden [9]). *Entsprechende* Punkte auf zwei Breitenkugeln sind solche Punkte, die dem gleichen Äquatorpunkt entsprechen.

Eine Abbildung von B^n in sich heißt *isomorph* zu einer Abbildung von A^n oder auch einer andern Breitenkugel in sich, wenn bei den Abbildungen entsprechende Punkte in entsprechende übergehen.

Eine Abbildung der S^∞ in sich heißt *Abbildung* mit *vollstetiger Verschiebung*, wenn sie von der Form (0.1) mit eindeutigem vollstetigem $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ ist.

Eine eindeutige stetige Abbildung $\mathfrak{S}$ der S^∞ in sich heißt *Schichtenabbildung* (in Bezug auf E^{n+1} als Äquatorebene oder A^n als Äquator), wenn der Äquator A^n ebenso wie jede Breitenkugel B^n und jeder Polpunkt bei der Abbildung in sich übergeht. Jede Schichtenabbildung $\mathfrak{S}$ ist eine Abbildung mit vollstetiger Verschiebung, denn schreibt man $\mathfrak{S}$ in der Form $\mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, so bildet

---

[8]) Ist das Koordinatensystem speziell so gewählt, daß

$$x_{n+2} = 0,\ x_{n+3} = 0,\ \ldots$$

die Ebene E^{n+1} ist, so ist A^n die Kugel

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1, \qquad x_{n+2} = 0,\ x_{n+3} = 0,\ \ldots$$

und eine Breitenkugel B^n wird durch

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1 - \sum_{m=2}^{\infty} b_{n+m}^2;\ x_{n+2} = b_{n+2},\ x_{n+3} = b_{n+3},\ \ldots$$

mit $\sum\limits_{m=2}^{\infty} b_{n+m}^2 < 1$ gegeben, während ein Polpunkt durch

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1} = 0, \quad x_{n+2} = b_{n+2},\ x_{n+3} = b_{n+3},\ \ldots$$

mit $\sum\limits_{m=2}^{\infty} b_{n+m}^2 = 1$ geliefert wird.

[9]) Hat bei der Koordinatenwahl der Anm. [8]) $\mathfrak{x}$ die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, 0, 0, \ldots$, so hat $\mathfrak{x}'$ die Koordinaten $\varrho x_1, \varrho x_2, \ldots, \varrho x_{n+1}, b_{n+2}, b_{n+3}, \ldots$, wobei $\varrho = +\sqrt{1 - \sum\limits_{m=2}^{\infty} b_{n+m}^2}$ gesetzt ist.

$\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ jeden Punkt von S^∞ in einen Punkt einer beschränkten Punktmenge des endlich dimensionalen Euklidischen Raumes E^{n+1} ab, ist also gewiß vollstetig.

Bei der Schichtenabbildung $\mathfrak{s}$ erfährt jede Breitenkugel B^n eine Abbildung in sich. Ist jede dieser Abbildungen isomorph zu der durch $\mathfrak{s}$ gegebenen Abbildung des Äquators A^n in sich, so heißt $\mathfrak{s}$ eine *isomorphe* Schichtenabbildung (in Bezug auf A^n als Äquator oder E^{n+1} als Äquatorebene). Eine isomorphe Schichtenabbildung ist hiernach durch die Äquatorabbildung bestimmt; umgekehrt gibt es zu jeder Äquatorabbildung eine wohlbestimmte durch sie erzeugte isomorphe Schichtenabbildung der S^∞, die eben darin besteht, daß jede Breitenkugel die zur Äquatorabbildung isomorphe Abbildung erfährt und jeder Polpunkt in sich übergeht.

Die folgende Bemerkung, deren Richtigkeit man sich ohne weiteres überlegt, wird häufig benutzt werden: ist $\mathfrak{s}$ eine Schichtenabbildung, bzw. isomorphe Schichtenabbildung in Bezug auf E^{n+1} als Äquatorebene, so ist $\mathfrak{s}$ auch Schichtenabbildung, bzw. isomorphe Schichtenabbildung in Bezug auf jede E^{n+1} enthaltende Ebene.

Eine *Normal*abbildung $\mathfrak{n}_\gamma$ $(\gamma = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ist eine isomorphe Schichtenabbildung mit folgenden Eigenschaften: als Äquatorebene kann eine zweidimensionale Ebene E^2 gewählt werden und die Abbildung des zugehörigen Äquatorkreises ist — bei passender Wahl des Anfangspunktes der Winkelkoordinate φ — die Abbildung $\varphi' = \gamma\varphi$.

Eine Funktion $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$ des Punktes $\mathfrak{x}$ der S^∞ und der reellen Veränderlichen t $(0 \leqq t \leqq 1)$ heiße eine *Überführungsfunktion,* wenn sie vollstetig als Funktion von $(\mathfrak{x}, t)$ ist, d.h. also wenn sie stetig als Funktion von $(\mathfrak{x}, t)$ ist und die Menge aller $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$ für $\mathfrak{x} \subset S^\infty$, $0 \leqq t \leqq 1$, kompakt ist.

Zwei Abbildungen mit vollstetiger Verschiebung $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{G}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ heißen *stetig* ineinander *überführbar,* wenn es eine Überführungsfunktion $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$ mit $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, 0) = \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, 1) = \mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ gibt. Bei festem t ist dann $\mathfrak{u}(\mathfrak{x}, t) = \mathfrak{x} + \mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$ eine Abbildung mit vollstetiger Verschiebung; läuft t von 0 nach 1, so führt $\mathfrak{u}(\mathfrak{x}, t)$ die Abbildung $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ stetig in die Abbildung $\mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ über. Die Gesamtheit aller Abbildungen mit vollstetiger Verschiebung, die sich in dem definierten Sinn stetig ineinander überführen lassen, bilden eine *Abbildungsklasse.*

§ 2. Einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1 [10]). Zu jeder Abbildung $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ mit vollstetiger Verschiebung und jeder positiven Zahl ε gibt es eine Schichtenabbildung $\mathfrak{y}_\varepsilon = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}_\varepsilon(\mathfrak{x})$, für welche

$$(2.1) \qquad |\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_\varepsilon| = |\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{F}_\varepsilon(\mathfrak{x})| < \varepsilon$$

ist.

Beweis. Da $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ vollstetig ist, ist die Menge $\mathfrak{M}$ aller Punkte $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ für $\mathfrak{x} \subset S^\infty$ kompakt. Es gibt daher bei vorgegebenem $\delta > 0$ endlich viele Punkte $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_m$ in $\mathfrak{M}$, so daß für jedes $\mathfrak{x} \subset S^\infty$ die Ungleichung

$$(2.2) \qquad |\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{z}_\mu| < \delta$$

für mindestens ein μ der Reihe $\mu = 1, 2, \ldots, m$ erfüllt ist. Wir wählen nun für δ eine feste die Ungleichungen

$$(2.3) \qquad 0 < 2\delta < 1, \quad \delta < \left(\frac{\varepsilon}{9}\right)^4$$

erfüllende Zahl. E^{n+1} sei nun eine den Mittelpunkt $\mathfrak{o}$ der S^∞ und die Punkte $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_m$ enthaltende $(n+1)$-dimensionale Ebene $(n+1 \leqq m)$; sie schneidet die S^∞ in einer Kugel A^n, die wir als Äquatorkugel ansehen. Um nun die Schichtenabbildung $\mathfrak{y}_\varepsilon = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}_\varepsilon(\mathfrak{x})$ zu definieren, legen wir durch $\mathfrak{x}$ die Parallelebene $\bar{E}^{n+1}$ zu E^{n+1}; sie schneidet S^∞ in einer Kugel, die eine Breitenkugel B^n in Bezug auf A^n ist oder auch ein Polpunkt sein kann. Bei festem $\mathfrak{x}$ wählen wir nun die Koordinaten so wie in Anm. 8 und außerdem noch so, daß die Koordinaten von $\mathfrak{x}$ von der $(n+3)$-ten an und die von $\mathfrak{y}$ von der $(n+4)$-ten an alle Null sind. Sei also

$$(2.4) \qquad \mathfrak{x}: \ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, 0, 0, 0, \ldots$$

und

$$(2.5) \qquad \mathfrak{y}: \ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \eta_{n+3}, 0, 0, \ldots.$$

Der Mittelpunkt $\mathfrak{b}$ von B^n hat dann die Koordinaten

$$\mathfrak{b}: \ 0, 0, \ldots, 0, \xi_{n+2}, 0, 0, 0, \ldots.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

---

[10]) Hilfssatz 1 entspricht dem „Second Lemme" der in Anm. [6]) an zweiter Stelle angeführten Arbeit von Leray und Schauder.

$$(2.6)\qquad \text{Fall 1:}\quad |\xi_{n+2}| = |\mathfrak{b}| \leqq 1 - 2\delta,$$

$$(2.7)\qquad \text{Fall 2:}\quad |\xi_{n+2}| = |\mathfrak{b}| > 1 - 2\delta.$$

Um nun zunächst im ersten Falle den Bildpunkt $\mathfrak{y}_\varepsilon$ von $\mathfrak{x}$ bei der zu konstruierenden Schichtenabbildung zu erhalten, projizieren wir $\mathfrak{y}$ senkrecht auf $\overline{E}^{n+1}$ und erhalten so den Punkt $\mathfrak{y}_0$

$$\mathfrak{y}_0:\ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n+1}, \xi_{n+2}, 0, 0, \ldots.$$

Den gesuchten Bildpunkt $\mathfrak{y}_\varepsilon$ erhalten wir nun durch Projektion des Punktes $\mathfrak{y}_0$ von $\mathfrak{b}$ aus auf B^n:

$$(2.8)\qquad \mathfrak{y}_\varepsilon:\ x_\nu = \eta_\nu \frac{\sqrt{1-\xi_{n+2}^2}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \eta_i^2}}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n+1);\quad x_{n+2} = \xi_{n+2},\ x_{n+3} = 0,\ \ x_{n+4} = 0, \ldots.$$

Hinsichtlich der Eindeutigkeit der letztgenannten Konstruktion ist jedoch noch zu zeigen, daß die Punkte $\mathfrak{y}_0$ und $\mathfrak{b}$ nicht zusammenfallen können, d.h. daß der Nenner in (2.8), der gleich ihrer Entfernung ist, von Null verschieden ist. Um dies einzusehen, beachten wir, daß wegen (2.2) $\mathfrak{y}$ von mindestens einem Punkt $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}, \xi_{n+2}, 0, 0, \ldots$ der Ebene $\overline{E}_{n+1}$ weniger als δ entfernt ist, für den also

$$(z_1-\eta_1)^2 + \cdots + (z_{n+1}-\eta_{n+1})^2 + (\xi_{n+2}-\eta_{n+2})^2 + \eta_{n+3}^2 < \delta^2$$

gilt, so daß erst recht

$$(2.9)\qquad (\xi_{n+2}-\eta_{n+2})^2 + \eta_{n+3}^2 < \delta^2$$

ist. Da hieraus und aus (2.6) $\eta_{n+2}^2 + \eta_{n+3}^2 < (1-\delta)^2$ folgt und anderseits $|\mathfrak{y}| = 1$ ist, so ergibt sich unter Beachtung von (2.3)

$$(2.10)\qquad \sum_{i=1}^{n+1} \eta_i^2 = 1 - \eta_{n+2}^2 - \eta_{n+3}^2 > \delta(2-\delta) > \delta > 0,$$

wie gezeigt werden sollte.

Liegt nun der Fall 2 vor, so setzen wir $\mathfrak{y}_\varepsilon = \mathfrak{x}$, wenn $\mathfrak{x}$ ein Polpunkt ist; andernfalls sei $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}(1-2\delta) : |\mathfrak{b}|$ und B_0^n der Schnitt der durch $\mathfrak{b}_0$ zu A^n parallel gelegten $(n+1)$-dimensionalen Ebene mit S^∞. Da $|\mathfrak{b}_0| = 1 - 2\delta$ ist, liegt für jeden Punkt $\mathfrak{x}_0$ von B_0^n der Fall 1 vor und $\mathfrak{x}_0$ hat nach dem angegebenen Verfahren einen wohlbestimmten wieder auf B_0^n gelegenen Bildpunkt, so daß eine Abbildung von B_0^n auf sich vorliegt. Die Breitenkugel B^n, auf der $\mathfrak{x}$ liegt, soll nun die zu der Abbildung von B_0^n isomorphe Abbildung (§ 1, S. [3] 296) erfahren.

Auf diese Weise ist für jedes $\mathfrak{x} \subset S^\infty$ eine eindeutige Abbildung definiert, die, wie man unter Beachtung von (2.10) sofort sieht, auch stetig ist. Da sie ferner nach Konstruktion eine Schichtenabbildung ist, ist nur noch das Bestehen der Ungleichung (2.1) zu beweisen.

Im Falle 1 erhalten wir nun aus (2.5) und (2.8) durch elementare Umformung unter Benutzung von $|\mathfrak{y}| = 1$

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_\varepsilon|^2 = \frac{(\xi_{n+2} - \eta_{n+2})(\xi_{n+2} + \eta_{n+2}) - \eta_{n+3}^2}{\sqrt{1 - \eta_{n+2}^2 - \eta_{n+3}^2} + \sqrt{1 - \xi_{n+2}^2}} + (\eta_{n+2} - \xi_{n+2})^2 + \eta_{n+3}^2 .$$

Hieraus folgt unter Benutzung von (2.9), (2.10), (2.6) und (2.3)

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_\varepsilon|^2 < \frac{2\delta}{2\sqrt{\delta}} + \delta^2 < 2\sqrt{\delta} < \varepsilon^2,$$

womit (2.1) im Falle 1 bewiesen ist. Im Falle 2 sei ϱ der Radius von B^n. Für ihn gilt nach (2.7) und (2.3)

$$\varrho^2 = 1 - |\mathfrak{b}|^2 < 1 - (1 - 2\delta)^2 < 4\delta . \tag{2.11}$$

Da nach Konstruktion mit $\mathfrak{x}$ auch $\mathfrak{y}_\varepsilon$ auf B^n liegt, so folgt

$$|\mathfrak{y}_\varepsilon - \mathfrak{x}| \leqq 2\varrho < 4\sqrt{\delta} . \tag{2.12}$$

Anderseits ist nach (2.4) und (2.5)

$$\begin{aligned} |\mathfrak{y} - \mathfrak{x}| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (\eta_i - \xi_i)^2 + (\eta_{n+2} - \xi_{n+2})^2 + \eta_{n+3}^2} \\ &\leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} \eta_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^2} + \sqrt{(\eta_{n+2} - \xi_{n+2})^2 + \eta_{n+3}^2} . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Beachtet man nun, daß nach (2.9) und (2.7)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \eta_i^2 &= 1 - \eta_{n+2}^2 - \eta_{n+3}^2 \leqq 2(1 - |\eta_{n+2}|) \\ &\leqq 2(1 - |\xi_{n+2}| + \delta) < 2 \cdot 3\delta \end{aligned}$$

ist, so folgt aus (2.13) unter Benutzung von (2.11), (2.9) und (2.3)

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{x}| \leqq \sqrt{6\delta} + 2\sqrt{\delta} + \delta < 5\sqrt{\delta} .$$

Also ist nach (2.12) und (2.3) (unter der Annahme $\varepsilon < 1$)

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_\varepsilon| \leqq |\mathfrak{y} - \mathfrak{x}| + |\mathfrak{y}_\varepsilon - \mathfrak{x}| < 9\sqrt{\delta} < \varepsilon ,$$

wie zu beweisen war.

Zusatz zu Hilfssatz 1. Sei $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$ eine Überführungsfunktion (§ 1, S. [4] 297) und $\mathfrak{u} = \mathfrak{x} + \mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$. Nach Hilfssatz 1 gibt es dann zu vorgegebenem von t unabhängigen $\varepsilon > 0$ für jedes t in $0 \leqq t \leqq 1$ eine Schichtenabbildung $\mathfrak{u}_\varepsilon = \mathfrak{x} + \mathfrak{U}_\varepsilon(\mathfrak{x}, t)$ mit $|\mathfrak{u} - \mathfrak{u}_\varepsilon| < \varepsilon$. Behauptet wird, daß man die Konstruktion solcher Schichtenabbildungen außerdem noch so einrichten kann, daß sie einen gemeinsamen von t unabhängigen Äquator haben.

Die Richtigkeit dieser Behauptung erkennt man unmittelbar, wenn man beachtet, daß nach Voraussetzung die Menge aller Punkte $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$ für $\mathfrak{x} \subset S^\infty$, $0 \leqq t \leqq 1$ kompakt ist und daher die bei Beginn des Beweises von Hilfssatz 1 eingeführten Punkte $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_m$ unabhängig von t gewählt werden können.

Hilfssatz 2. $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$ sei eine eindeutige für $\mathfrak{x} \subset S^\infty$, $0 \leqq t \leqq 1$ erklärte Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) Bei festem $\mathfrak{x}$ ist $\mathfrak{U}$ eine stetige Funktion von t, und zwar unabhängig von $\mathfrak{x}$, d.h. zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein von $\mathfrak{x}$ unabhängiges $\delta > 0$, so daß für alle $\mathfrak{x} \subset S^\infty$

$$|\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t_1) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t_2)| < \varepsilon \tag{2.14}$$

ist, sobald $|t_1 - t_2| < \delta$ ist.

b) bei festem t ist $\mathfrak{U}$ eine vollstetige Funktion von $\mathfrak{x}$.

Dann ist $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$ eine Überführungsfunktion.

Beweis. Nach b ist $\mathfrak{U}$ jedenfalls stetig als Funktion von $\mathfrak{x}$ bei festem t. Daher folgt aus

$$|\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}_0, t_0)| \leqq |\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t_0)| + |\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t_0) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}_0, t_0)|$$

im Verein mit a in bekannter Weise, daß $\mathfrak{U}$ stetig in $(\mathfrak{x}, t)$ ist. Es bleibt zu beweisen, daß man aus jeder Folge $\mathfrak{x}_\alpha$, t_α eine Teilfolge $\mathfrak{x}_{\alpha_\nu}$, t_{α_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots)$ so auswählen kann, daß die Folge $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}_{\alpha_\nu}, t_{\alpha_\nu})$ konvergiert. Zu diesem Zwecke wollen wir zunächst zeigen: man kann zu gegebenem $\eta > 0$ die Teilfolge $\mathfrak{x}_{\alpha_\nu}$, t_{α_ν} so auswählen, daß

$$|\mathfrak{U}(\mathfrak{x}_{\alpha_\nu}, t_{\alpha_\nu}) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}_{\alpha_\mu}, t_{\alpha_\mu})| < \eta \tag{2.15}$$

ist für alle ν, $\mu = 1, 2, 3, \ldots$.

Zum Beweise nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß die Folge der t_α bereits konvergiert. Wegen a können wir dann ein festes $\bar{\nu}$ so groß wählen, daß für alle $\mathfrak{x} \subset S^\infty$

$$|\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t_\alpha) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t_\beta)| < \frac{\eta}{3} \tag{2.16}$$

ist, sobald α und $\beta \geqq \bar{\nu}$ sind. Nach b können wir nun aus den $\mathfrak{x}_\alpha$ eine Teilfolge $\mathfrak{x}_{\bar{\alpha}_\nu}$ so auswählen, daß die Folge $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}_{\bar{\alpha}_\nu}, t_{\bar{\nu}})$

konvergent ist. Dann gibt es eine Zahl $\bar{\bar{\nu}}$, so daß

$$(2.17) \qquad |\mathfrak{U}(\mathfrak{x}_{\bar{\alpha}_\nu}, t_{\bar{\nu}}) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}_{\bar{\alpha}_\mu}, t_{\bar{\nu}})| < \frac{\eta}{3}$$

ist, sobald $\bar{\alpha}_\nu$ und $\bar{\alpha}_\mu \geqq \bar{\bar{\nu}}$ sind. Wir lassen nun in der Folge der $\bar{\alpha}_\nu$ alle diejenigen Elemente weg, die nicht mindestens gleich Max $(\bar{\nu}, \bar{\bar{\nu}})$ sind. Die so entstandene Folge sei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Für sie gilt die behauptete Ungleichung (2.15), wie man aus

$$|\mathfrak{U}(\mathfrak{x}_{\alpha_\nu}, t_{\alpha_\nu}) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}_{\alpha_\mu}, t_{\alpha_\mu})| \leqq$$
$$|\mathfrak{U}(\mathfrak{x}_{\alpha_\nu}, t_{\alpha_\nu}) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}_{\alpha_\nu}, t_{\bar{\nu}})| +$$
$$+ |\mathfrak{U}(\mathfrak{x}_{\alpha_\nu}, t_{\bar{\nu}}) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}_{\alpha_\mu}, t_{\bar{\nu}})| + |\mathfrak{U}(\mathfrak{x}_{\alpha_\mu}, t_{\bar{\nu}}) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}_{\alpha_\mu}, t_{\alpha_\mu})|$$

unter Beachtung von (2.16) und (2.17) erkennt.

Um nunmehr die ursprüngliche Behauptung zu beweisen, betrachten wir eine Folge positiver gegen Null konvergierender Zahlen $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ und wählen auf Grund des Bewiesenen eine Teilfolge $\mathfrak{x}^1_\nu, t^1_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ aus der Folge $\mathfrak{x}_\alpha, t_\alpha$ so aus, daß $|\mathfrak{U}(\mathfrak{x}^1_\nu, t^1_\nu) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}^1_\mu, t^1_\mu)| < \eta_1$ ist für alle ν, $\mu = 1, 2, \ldots$; aus dieser wählen wir eine Teilfolge $\mathfrak{x}^2_\nu, t^2_\nu$ aus, so daß $|\mathfrak{U}(\mathfrak{x}^2_\nu, t^2_\nu) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}^2_\mu, t^2_\mu)| < \eta_2$ ist u.s.f. Für die Diagonalfolge $\mathfrak{x}^\nu_\nu, t^\nu_\nu$ ist dann die Folge $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}^\nu_\nu, t^\nu_\nu)$ konvergent. Ist in der Tat ε eine gegebene positive Zahl und ist ν_0 so gewählt, daß $\eta_{\nu_0} < \varepsilon$ ist, so ist

$$|\mathfrak{U}(\mathfrak{x}^\nu_\nu, t^\nu_\nu) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}^\mu_\mu, t^\mu_\mu)| < \eta_{\nu_0} < \varepsilon$$

für alle ν, $\mu \geqq \nu_0$; denn sowohl $\mathfrak{x}^\nu_\nu, t^\nu_\nu$ wie $\mathfrak{x}^\mu_\mu, t^\mu_\mu$ gehören der Folge $\mathfrak{x}^{\nu_0}_1, t^{\nu_0}_1$; $\mathfrak{x}^{\nu_0}_2, t^{\nu_0}_2, \ldots$ an und je zwei Glieder der Folge $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}^{\nu_0}_1, t^{\nu_0}_1)$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}^{\nu_0}_2, t^{\nu_0}_2), \ldots$ haben eine Differenz vom Betrage $< \eta_{\nu_0}$.

Hilfssatz 3.

$$(2.18) \qquad \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x}), \quad \mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{z} = \mathfrak{x} + \mathfrak{G}(\mathfrak{x})$$

seien zwei Abbildungen mit vollstetiger Verschiebung der S^∞ in sich. Der sphärische Abstand [11]) der Punkte $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ sei stets $< \pi$. $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ gehören dann zur gleichen Abbildungsklasse und die die Funktionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ ineinander überführende Überführungsfunktion $\mathfrak{U}$ kann so gewählt werden, daß sie den Voraussetzungen a und b von Hilfssatz 2 genügt.

---

[11]) Durch zwei nicht zusammenfallende Punkte $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ der S^∞ geht genau ein Großkreis; man erhält ihn als Schnitt der S^∞ mit der durch den Kugelmittelpunkt, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ gelegten zweidimensionalen Ebene.

Beweis. Für $0 \leqq t \leqq 1$ sei

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{x}, t) = \mathfrak{x} + \mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t) \tag{2.19}$$

derjenige eindeutig bestimmte auf dem kürzeren der beiden $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ verbindenden Großkreisbögen gelegene Punkt, für den

$$\mathfrak{u} - \mathfrak{y} = t(\mathfrak{z} - \mathfrak{y}) \tag{2.20}$$

gilt. Auf Grund von Hilfssatz 2 genügt es für den Beweis der ausgesprochenen Behauptungen, zu zeigen, daß $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$ den Voraussetzungen dieses Satzes genügt. Zum Beweise von a wollen wir (2.14) mit

$$\delta = \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^2 \tag{2.21}$$

beweisen. Zu diesem Zweck betrachten wir unter der Annahme $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{y}$ [12]) die durch $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{y}$ bestimmte Großkreisebene, setzen für $\nu = 1, 2$ $\mathfrak{u}(\mathfrak{x}, t_\nu) = \mathfrak{u}_\nu$ und bezeichnen den Winkel zwischen dem durch $\mathfrak{y}$ gehenden Durchmesser und dem Vektor $\mathfrak{u}_\nu - \mathfrak{y}$ mit γ_ν. Da der Durchmesser die Länge 2 hat, so ist $\cos \gamma_\nu = \frac{1}{2} | \mathfrak{u}_\nu - \mathfrak{y} | = \frac{1}{2} t_\nu | \mathfrak{z} - \mathfrak{y} |$ und

$$|\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t_1) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t_2)| = |\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_2| = 2 |\sin(\gamma_2 - \gamma_1)|$$

$$= 2 |\sin\gamma_1 \cos\gamma_2 - \cos\gamma_1 \sin\gamma_2| =$$

$$= \frac{|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|}{2} \left| t_2 \sqrt{4 - |\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|^2 t_1^2} - t_1 \sqrt{4 - |\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|^2 t_2^2} \right|$$

$$= \frac{|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|}{2} \Big| (t_2 - t_1) \sqrt{4 - |\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|^2 t_1^2} +$$

$$+ t_1 \left(\sqrt{4 - |\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|^2 t_1^2} - \sqrt{4 - |\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|^2 t_2^2} \right) \Big| .$$

Beachtet man, daß $|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}| < 2$ ist, und daß für irgend zwei positive Zahlen α_1, α_2 die Abschätzung

$$\left| \sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_2} \right| = \frac{|\alpha_2 - \alpha_1|}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}} \leqq \frac{|\alpha_2 - \alpha_1|}{\sqrt{\alpha_1}}$$

gilt, so folgt unter der Annahme $0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq 1$

$$|\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t_1) - \mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t_2)| \leqq 2(t_2 - t_1) + \frac{(t_2^2 - t_1^2) |\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|^2}{\sqrt{4 - |\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|^2 t_1^2}}$$

$$\leqq 2(t_2 - t_1) + \frac{(t_2^2 - t_1^2) |\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|^2}{\sqrt{|\mathfrak{z} - \mathfrak{y}|^2 (t_2^2 - t_1^2)}} < 2\sqrt{t_2 - t_1}\,(1 + \sqrt{2}),$$

[12]) Für die $\mathfrak{x}$, für die $\mathfrak{z} = \mathfrak{y}$ ist, wird $\mathfrak{U}$ von t unabhängig, und die behauptete Ungleichung (2.14) ist für sie gewiß erfüllt.

woraus sich nach (2.21) für $|t_2-t_1|<\delta$ die behauptete Ungleichung (2.14) ergibt.

Da $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$ gewiß stetig in $\mathfrak{x}$ ist, so ist zum Beweise der Voraussetzung b des Hilfssatz 2 zu zeigen, daß jede Folge von Punkten $\mathfrak{U}_\nu = \mathfrak{U}(\mathfrak{x}_\nu, t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ eine konvergente Teilfolge enthält. Da nun $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ vollstetig sind, können wir aus den $\mathfrak{x}_\nu$ eine Teilfolge auswählen, die wir unter Änderung der Bezeichnung wieder $\mathfrak{x}_\nu$ nennen, so daß sowohl die Folge $\mathfrak{F}_\nu = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_\nu)$ wie die Folge $\mathfrak{G}_\nu = \mathfrak{G}(\mathfrak{x}_\nu)$ konvergiert. Aus (2.18), (2.19) und (2.20) folgt aber

$$\mathfrak{U}_\nu = \mathfrak{F}_\nu + t(\mathfrak{G}_\nu - \mathfrak{F}_\nu).$$

Aus der Konvergenz der $\mathfrak{F}_\nu$ und $\mathfrak{G}_\nu$ folgt daher die der $\mathfrak{U}_\nu$.

Hilfssatz 4. Zu jeder Abbildung mit vollstetiger Verschiebung gibt es eine mit ihr in der gleichen Abbildungsklasse gelegene Schichtenabbildung.

Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt unmittelbar aus den Hilfssätzen 1 und 3, wenn man im erstgenannten für ε eine positive Zahl < 2 wählt.

Hilfssatz 5. Zu jeder Abbildung $\mathfrak{f}$ mit vollstetiger Verschiebung gibt es eine mit ihr in der gleichen Klasse befindliche *isomorphe* Schichtenabbildung.

Zum Beweise dürfen wir auf Grund von Hilfssatz 4 annehmen, daß $\mathfrak{f}$ eine Schichtenabbildung ist. Sei also A^n ein Äquator, in Bezug auf den $\mathfrak{f}$ Schichtenabbildung ist, und B^n eine der zugehörigen Breitenkugeln mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{b}$. Für $0 \leqq t \leqq 1$ sei dann B_t^n die zugehörige Breitenkugel mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{b}(1-t)$, so daß $B^n = B_0^n$ und $A^n = B_1^n$ ist. Mit $\mathfrak{f}_t$ werde die durch die Schichtenabbildung $\mathfrak{f}$ gegebene Abbildung von B_t^n in sich bezeichnet. Ferner sei φ_t diejenige umkehrbar eindeutige Abbildung von $B_0^n = B^n$ auf B_t^n, die die *entsprechenden* Punkte dieser Breitenkugeln (im Sinne der Definition von § 1, S. [3] 296) einander zuordnet. Die Abbildung $\varphi_t^{-1}\,\mathfrak{f}_t\,\varphi_t$ liefert nun, wenn t von 0 nach 1 läuft, eine stetige Überführung der durch $\mathfrak{f}$ gegebenen Abbildung $\mathfrak{f}_0$ von B^n in sich in eine solche Abbildung von B^n in sich, die isomorph ist zu der durch $\mathfrak{f}$ gegebenen Abbildung des Äquators A^n in sich. Führen wir diese Konstruktion für jede Breitenkugel aus, so erhalten wir eine eindeutige in $(\mathfrak{x}, t)$ stetige Abbildung $\mathfrak{u}(\mathfrak{x}, t)$, die für $t = 0$ mit $\mathfrak{f}$ übereinstimmt, für jedes t des Intervalles $0 \leqq t \leqq 1$ eine Schichtenabbildung mit A^n als Äquator darstellt und für $t = 1$ eine isomorphe Schichtenabbildung ist. Setzt man $\mathfrak{u}(\mathfrak{x}, t) = \mathfrak{x} + \mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$, so bilden die Punkte $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$ für $\mathfrak{x} \subset S^\infty$, $0 \leqq t \leqq 1$ eine beschränkte Menge der $(n+1)$-dimensionalen Äquatorebene, die also kompakt ist. $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$ ist daher eine Überführungsfunktion, und $\mathfrak{u}$ führt $\mathfrak{f}$ im Sinn der früher (§ 1, S. [4] 297) gegebenen Definition stetig in eine isomorphe Schichtenabbildung über.

Hilfssatz 6. A^n sei der Schnitt der $(n+1)$-dimensionalen, den Kugelmittelpunkt enthaltenden Ebene E^{n+1} mit S^∞. $\mathfrak{u}^n(\mathfrak{x}, t) = \mathfrak{x} + \mathfrak{U}^n(\mathfrak{x}, t)$ sei für jedes t des Intervalles $0 \leqq t \leqq 1$ eine in $(\mathfrak{x}, t)$ stetige Abbildung von A^n in sich.

$\mathfrak{u}(\mathfrak{x}, t) = \mathfrak{x} + \mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$ sei die durch $\mathfrak{u}^n$ *erzeugte* isomorphe Schichtenabbildung (§ 1, S. [4] 297). Dann erfüllt $\mathfrak{U}$ die Voraussetzungen des Hilfssatz 2.

Da $\mathfrak{u}$ eindeutige Schichtenabbildung ist, erfüllt nämlich $\mathfrak{U}$ gewiß die Voraussetzung b des genannten Satzes. Zum Beweise von a sei $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punkt von S^∞, B^n die durch ihn gehende Kugel, die Breitenkugel in Bezug auf A^n als Äquator ist, und $\mathfrak{x}'$ der entsprechende Äquatorpunkt [13]). Wegen der Isomorphie sind dann auch $\mathfrak{u}(\mathfrak{x}, t)$ auf B^n und $\mathfrak{u}(\mathfrak{x}', t)$ auf dem Äquator entsprechende Punkte. Aus der Konstruktion entsprechender Punkte folgt daher, daß sich der Betrag von $\mathfrak{u}(\mathfrak{x}, t_1) - \mathfrak{u}(\mathfrak{x}, t_2)$ zu dem von $\mathfrak{u}(\mathfrak{x}', t_1) - \mathfrak{u}(\mathfrak{x}', t_2) = \mathfrak{u}^n(\mathfrak{x}', t_1) - \mathfrak{u}^n(\mathfrak{x}', t_2)$ verhält wie der Radius der durch $\mathfrak{x}$ gehenden Breitenkugel zu dem Äquatorradius. Da dies Verhältnis $\leqq 1$ ist, so folgt die zu beweisende Ungleichung (2.14) aus der entsprechenden für die Funktion $\mathfrak{u}^n(\mathfrak{x}', t)$, welch letztere ja in ihrem Definitionsbereich A^n gleichmäßig stetig ist.

§ 3. Die Normalabbildungen. Der Hauptsatz.

Satz I. Für $\gamma = \delta$ gehören die beiden Normalabbildungen (§ 1, S. [4] 297) $\mathfrak{n}_\gamma$, $\mathfrak{n}'_\delta$ zur gleichen Abbildungsklasse.

Beweis. E^2, E'^2 seien je eine zweidimensionale Äquatorebene für $\mathfrak{n}_\gamma$ bzw. $\mathfrak{n}'_\delta$. E^{n+1} ($n \leqq 3$) sei eine E^2 und E'^2 enthaltende $(n+1)$-dimensionale Ebene. Dann sind sowohl $\mathfrak{n}_\gamma$ wie $\mathfrak{n}'_\delta$ isomorphe Schichtenabbildungen auch in Bezug auf E^{n+1} als Äquatorebene (vgl. § 1, S. [4] 297). Die somit durch $\mathfrak{n}_\gamma$ und $\mathfrak{n}'_\delta$ gelieferten Abbildungen in sich der Äquatorkugel A^n, die man als Schnitt von E^{n+1} mit der S^∞ erhält, bezeichnen wir bzw. mit $\mathfrak{n}^n_\gamma$, $\mathfrak{n}'^n_\delta$. Diese Abbildungen

---

[13]) Dabei ist angenommen, daß $\mathfrak{x}$ kein Polpunkt ist. Für einen Polpunkt γ ist (2.14) erfüllt wegen $\mathfrak{U} = 0$.

haben beide den Grad $\gamma = \delta$, da bei ihnen (mit Ausnahme der Punkte von A^n, die Polpunkte in Bezug auf E^2 und E'^2 sind) jeder Punkt $\gamma = \delta$ mal eineindeutig überdeckt wird. Sie lassen sich daher [14]) stetig ineinander überführen, d.h. es existiert eine für $\mathfrak{x} \subset A^n$, $0 \leqq t \leqq 1$ definierte in $(\mathfrak{x}, t)$ stetige Funktion, $\mathfrak{u}^n(\mathfrak{x}, t)$ mit

$$(3.1) \qquad \mathfrak{u}^n(\mathfrak{x}, 0) = \mathfrak{n}_\gamma^n, \quad \mathfrak{u}^n(\mathfrak{x}, 1) = \mathfrak{n}_\delta'^n,$$

$\mathfrak{u}(\mathfrak{x}, t)$ sei die durch $\mathfrak{u}^n(\mathfrak{x}, t)$ *erzeugte* isomorphe Schichtenabbildung der S^∞. Da eine isomorphe Schichtenabbildung eindeutig durch die Äquatorabbildung bestimmt ist, so folgt aus (3.1) für alle $\mathfrak{x} \subset S^\infty$

$$(3.2) \qquad \mathfrak{u}(\mathfrak{x}, 0) = \mathfrak{n}_\gamma, \quad \mathfrak{u}(\mathfrak{x}, 1) = \mathfrak{n}_\delta'.$$

Aus Hilfssatz 6 in Verbindung mit Hilfssatz 2 folgt nunmehr, daß $\mathfrak{u}(\mathfrak{x}, t)$ die Abbildungen $\mathfrak{n}_\gamma$ und $\mathfrak{n}_\delta'$ stetig ineinander überführt, diese also in der gleichen Klasse liegen.

Satz II. Für $\gamma \neq \delta$ gehören die Normalabbildungen $\mathfrak{n}_\gamma$ und $\mathfrak{n}_\delta'$ nicht zur gleichen Abbildungsklasse.

Wir nehmen an, daß die Behauptung nicht richtig ist. Dann gibt es eine Überführungsfunktion $\mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$, so daß mit $\mathfrak{u}(\mathfrak{x}, t) = \mathfrak{x} + \mathfrak{U}(\mathfrak{x}, t)$ die Gleichungen (3.2) gelten. Wir konstruieren dann nach dem Zusatz zu Hilfssatz 1 mit $\varepsilon < 2$ eine Schichtenabbildung $\mathfrak{u}_\varepsilon(\mathfrak{x}, t)$ in Bezug auf eine von t unabhängigen Äquatorebene, für die

$$(3.3) \qquad |\mathfrak{u}_\varepsilon(\mathfrak{x}, t) - \mathfrak{u}(\mathfrak{x}, t)| < \varepsilon$$

gilt. Unter E^{n+1} verstehen wir eine Ebene, welche sowohl die genannte Äquatorebene wie die Äquatorebenen E^2 und E'^2 von $\mathfrak{n}_\gamma$, $\mathfrak{n}_\delta'$ enthält. Dann sind $\mathfrak{u}_\varepsilon$, $\mathfrak{n}_\gamma$, $\mathfrak{n}_\delta'$ auch Schichtenabbildungen in Bezug auf E^{n+1}. Die Schnittkugel A^n von S^∞ und E^{n+1} erfährt also bei $\mathfrak{u}_\varepsilon$, $\mathfrak{n}_\gamma$, $\mathfrak{n}_\delta'$ Abbildungen in sich, die mit $\mathfrak{u}_\varepsilon^n$, $\mathfrak{n}_\gamma^n$, $\mathfrak{n}_\delta'^n$ bezeichnet seien. Wegen (3.1) und (3.3) können wir nun $\mathfrak{n}_\gamma^n = \mathfrak{u}^n(\mathfrak{x}, 0)$ stetig in $\mathfrak{u}_\varepsilon^n(\mathfrak{x}, 0)$ überführen; $\mathfrak{u}_\varepsilon^n(\mathfrak{x}, 0)$ wird, wenn t von 0 bis 1 läuft, durch $\mathfrak{u}_\varepsilon^n(\mathfrak{x}, t)$ stetig in $\mathfrak{u}_\varepsilon^n(\mathfrak{x}, 1)$ übergeführt und $\mathfrak{u}_\varepsilon^n(\mathfrak{x}, 1)$ läßt sich wiederum auf Grund von (3.3) und (3.1) stetig in $\mathfrak{u}^n(\mathfrak{x}, 1) = \mathfrak{n}_\delta'^n$ überführen. Damit ist gezeigt, daß sich unter der gemachten Annahme $\mathfrak{n}_\gamma^n$ und $\mathfrak{n}_\delta'^n$ stetig ineinander überführen lassen. Das steht aber im Widerspruch zu der Tatsache, daß $\mathfrak{n}_\gamma^n$ und $\mathfrak{n}_\delta'^n$ die von einander verschiedenen Grade γ und δ haben.

Nach den Sätzen I und II gehören zwei Normalabbildungen

[14]) H. Hopf, loc.cit.

$\mathfrak{n}_\gamma$, $\mathfrak{n}'_\delta$ dann und nur dann zur gleichen Klasse, wenn $\gamma = \delta$ ist. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_\gamma$ die durch $\mathfrak{n}_\gamma$ bestimmte Abbildungsklasse, so erhalten wir also in $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_{-1}$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_{-2}$, . . . lauter verschiedene Klassen. Es gilt nun der

Hauptsatz. Jede Abbildung $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$ mit vollstetiger Verschiebung gehört zu genau einer Klasse $\mathfrak{K}_\gamma$.

Daß $\mathfrak{f}$ nicht zu zwei verschiedenen Klassen $\mathfrak{K}_\gamma$ gehören kann, ist nach dem Vorstehenden klar. Um zu zeigen, daß $\mathfrak{f}$ wirklich einer der Klassen $\mathfrak{K}_\gamma$ angehört, genügt es auf Grund von Hilfssatz 5, $\mathfrak{f}$ als eine isomorphe Schichtenabbildung vorauszusetzen. Es sei nun E^{n+1} eine Äquatorebene in Bezug auf $\mathfrak{f}$, und $\mathfrak{f}^n$ die durch $\mathfrak{f}$ gelieferte Abbildung der Kugel A^n in sich, in der sich S^∞ und E^{n+1} schneiden. Der Abbildungsgrad von $\mathfrak{f}^n$ sei γ. Wir legen nun durch den Mittelpunkt der Kugel irgend eine zweidimensionale in E^{n+1} enthaltene Ebene und stellen mit dieser als Äquatorebene eine Normalabbildung $\mathfrak{n}_\gamma$ her. $\mathfrak{n}_\gamma$ ist isomorphe Schichtenabbildung auch in Bezug auf A^n und führt also A^n in sich über. Diese Abbildung von A^n in sich werde mit $\mathfrak{n}^n_\gamma$ bezeichnet. Da $\mathfrak{n}^n_\gamma$ ebenfalls den Grad γ hat, lassen sich $\mathfrak{n}^n_\gamma$ und $\mathfrak{f}$ stetig ineinander überführen. Hieraus folgt aber, daß sich auch $\mathfrak{n}_\gamma$ und $\mathfrak{f}$ stetig ineinander überführen lassen in der gleichen Weise, in der beim Beweise von Satz I aus der Überführbarkeit von $\mathfrak{n}^n_\gamma$ in $\mathfrak{n}'^n_\delta$ auf die Überführbarkeit von $\mathfrak{n}_\gamma$ in $\mathfrak{n}_\delta$ geschlossen wurde.

Auf Grund des eben bewiesenen Hauptsatzes können wir nun folgende *Definition des Abbildungsgrades* einer Abbildung $\mathfrak{f}$ mit vollstetiger Verschiebung der S^∞ in sich aufstellen: wir verstehen darunter den Index γ der Klasse $\mathfrak{K}_\gamma$, zu der $\mathfrak{f}$ gehört.

Über diese Zahl machen wir noch folgende Bemerkung: ist $\mathfrak{f}$ eine Schichtenabbildung und A^n ein Äquator in Bezug auf $\mathfrak{f}$, so wird durch $\mathfrak{f}$ eine Abbildung von A^n in sich sowie auch jeder Breitenkugel in sich gegeben. Wir behaupten, daß die Grade aller dieser Abbildungen gleich und zwar gleich dem Grade γ von $\mathfrak{f}$ sind. Aus dem Beweise zu Hilfssatz 5 geht nämlich hervor, daß alle Breitenkreisabbildungen den gleichen Grad haben wie die Äquatorabbildung. Führt man weiter nach dem beim Beweise des Hilfssatz 5 angewandten Verfahren $\mathfrak{f}$ in eine isomorphe Schichtenabbildung über, so ändert sich weder der Grad von $\mathfrak{f}$ noch der Grad der Äquatorabbildung, da dabei die letztere selbst ungeändert bleibt. Aus dem Beweise des Hauptsatzes geht aber hervor, daß der Grad γ einer isomorphen Schichtenabbildung gleich dem der Äquatorabbildung ist.

(Eingegangen den 6. November 1936.)