László Kalmár

Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen, binären, Funktionsvariablen

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 137-144
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__137_0>

Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen, binären, Funktionsvariablen

von

László Kalmár
Szeged

In Verschärfung eines Löwenheimschen Satzes [1]) hat Herbrand [2]) bewiesen, daß man sich beim Entscheidungsproblem [3]) ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf solche Formeln [4]) beschränken kann, die *drei binäre* (und keine sonstigen) Funktionsvariable enthalten; oder aber auf solche Formeln, die *eine* einzige, und zwar *ternäre*, Funktionsvariable enthalten.

An dem internationalen Mathematikerkongreß zu Zürich (1932) habe ich die folgenden beiden Verschärfungen dieser Herbrandschen Sätze bewiesen:

I. *Das Entscheidungsproblem läßt sich auf die Frage der Erfüllbarkeit von Formeln mit einer einzigen, ternären, Funktionsvariablen und mit einem Präfix* [5]) *der Form*

$$(1) \qquad (\mathrm{E}x_1)(\mathrm{E}x_2)\ldots(\mathrm{E}x_m)(y_1)(y_2)(\mathrm{E}z)(u_1)(u_2)\ldots(u_n)$$

zurückführen.

II. *Das Entscheidungsproblem läßt sich auf die Frage der Er-*

---

[1]) L. Löwenheim, Über Möglichkeiten im Relativkalkül [Math. Annalen **76** (1915), 447—470], insb. § 4. Für einen einfachen Beweis vgl. meine Arbeit: Über einen Löwenheimschen Satz [Acta Szeged **7** (1934/35), 112—121].

[2]) J. Herbrand, Sur le problème fondamental de la logique mathématique [Sprawozdania z posiedzeń Towarz. Nauk. Warszawskiego (Wydział III) **24** (1931), 12—56], insb. 39—41.

[3]) Unter „Entscheidungsproblem" wird durchwegs das Entscheidungsproblem des engeren logischen Funktionenkalküls (Prädikatenkalküls) verstanden. S. z.B. D. Hilbert & P. Bernays, Grundlagen der Mathematik I [Berlin, 1934], 130.

[4]) Mit „Formel" wird durchwegs Formel des engeren Funktionenkalküls ohne freie Variable (Zählausdruck in der Terminologie Löwenheims) gemeint.

[5]) Unter dem Präfix einer pränexen Formel (vgl. a. a. O. [3]), 141) versteht man die Folge der darin figurierenden Quantoren. Falls ich bei einer Formel von Präfix spreche, so meine ich stillschweigend eine pränexe Formel.

füllbarkeit von Formeln mit einer einzigen, binären, Funktionsvariablen und mit einem Präfix der Form

$$(2)\qquad (\mathrm{E}x_1)(\mathrm{E}x_2)\ldots(\mathrm{E}x_m)(y_1)(y_2)(\mathrm{E}z_1)(\mathrm{E}z_2)(u_1)(u_2)\ldots(u_n)$$

zurückführen.

Der Auszug meines Vortrags [6]) enthält eine Skizze des Beweises von I; bei II hatte ich mich auf Andeutungen beschränkt, und ich hatte den Absicht, den Beweis anderswo zu publizieren. Diese Publikation habe ich aber verzögert, da ich vermutete, daß man auch in II das Präfix (1) erreichen kann. Hier werde ich nun zeigen, daß dies in der Tat zutrifft, ich werde also die folgende gemeinsame Verschärfung von I und II beweisen:

III. *Zu jeder Formel $\mathfrak{A}$ kann man eine gleichwertige* [7]) *Formel $\mathfrak{B}$ mit einer einzigen, binären, Funktionsvariablen und mit einem Präfix von der Form* (1) *konstruieren* [8]).

In methodischer Hinsicht stelle ich mich auf den mengentheoretischen Standpunkt [9]); ich bemerke aber, daß der Beweis, unter Anwendung der Herbrandschen Methoden [10]), sich leicht in einen finiten Beweis umformen läßt.

---

[6]) L. Kalmár, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik [Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich, 1932, 2, 337—338].

[7]) Zwei Formeln heißen gleichwertig, falls entweder beide erfüllbar, oder beide unerfüllbar sind.

[8]) Kurz vor Einreichung vorliegender Arbeit bei der Redaktion erfuhr ich aus der Arbeit: W. Ackermann, Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik [Math. Annalen **112** (1936), 419—432], daß man sogar zu jeder Formel $\mathfrak{A}$ eine gleichwertige Formel $\mathfrak{B}$ mit einem Präfix der Form

$$(\mathrm{E}x)(y)(\mathrm{E}z)(u_1)(u_2)\ldots(u_n)$$

konstruieren kann. Dieser schöne Ackermannsche Satz bedeutet, hinsichtlich des Präfixes, eine wesentliche Verschärfung meiner diesbezüglichen Ergebnisse, nicht aber hinsichtlich der Anzahl und Stellenzahl der Funktionsvariablen. In der Tat erfordert die Ackermannsche Konstruktion von $\mathfrak{B}$, falls $\mathfrak{A}$ ein Präfix der Form (1) besitzt, die Vermehrung der Anzahl der in $\mathfrak{A}$ figurierenden Funktionsvariablen um drei: es kommen nämlich eine binäre und zwei ternäre Hilfsfunktionen hinzu (die in einem gewissen Sinne den arithmetischen Beziehungen $y = x + 1$, $z = x + y$ und $z = x \cdot y$ entsprechen). Zwar sieht man unmittelbar ein, daß man auch mit einer binären und einer ternären (den Beziehungen $y = x^2$ bzw. $z = x + y$ entsprechenden) Hilfsfunktionen auskommen könnte; eine weitere Reduktion scheint mir aber nicht möglich zu sein.

[9]) Vgl. a. a. O. [3]), 125.

[10]) Vgl. a. a. O. [2]), 34—39, ferner J. Herbrand, Recherches sur la théorie de la démonstration [Prace Towarz. Nauk. Warszawskiego (Wydział III), Nr. 33 (1930)], insb. Chap. 5, p. 85—128. Für eine beweistheoretische Wendung der

1. Wie ich bereits bewiesen habe [11]), darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Formel $\mathfrak{A}$ bereits ein Präfix von der Form (1) besitzt [12]) und keine anderen als binäre [13]) Funktionsvariable enthält. Es sei also [14])

$$\mathfrak{A} = (\mathrm{E}x_\mu)_1^m (x_{m+1})(x_{m+2})(\mathrm{E}x_{m+3})(x_\nu)_{m+4}^n \,\mathfrak{K},$$

wobei $\mathfrak{K}$ sich aus binären Funktionsvariablen $F_1, F_2, \ldots, F_l$ und aus den Individuenvariablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit Hilfe von Einsetzungen (von Individuenvariablen in den Leerstellen der Funktionsvariablen) und Operationen des Aussagenkalküls zusammensetzt, also die Form

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{L}[F_\lambda(x_\mu, x_\nu)]$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, l;\ \mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

besitzt, wobei $\mathfrak{L}$ eine Wahrheitsfunktion von $l \cdot n^2$ Argumenten ist, von denen der Kürze halber nur ein (das „allgemeine") Argument ausgeschrieben wird.

Ich gebe nun die Konstruktion der Formel $\mathfrak{B}$ an. Zu diesem Zweck wähle ich eine binäre Funktionsvariable G, ferner $l+2+n^2$, von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und von einander verschiedene Individuenvariable $y_1, y_2, \ldots, y_l;\ u, v;\ z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{nn}$ und definiere [15])

Methode der Paarbildung ohne Anwendung des tiefen Herbrandschen Fundamentalsatzes (a. a. O. [10]), 112—113) vgl. meine Arbeit a. a. O. [1]), 116—118.

[11]) L. Kalmár, Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem [Acta Szeged 5 (1930/32), 222—236]. Vgl. auch Fußnote [5]) meiner Arbeit, a. a. O. [1]), 113.

[12]) Ich nehme an, es sei $m \neq 0$; sonst hätte man ein Seinszeichen mit einer in $\mathfrak{A}$ nicht vorkommenden Variablen voranzustellen, was, falls (wie hier stillschweigend) der leere Individuenbereich ausgeschlossen wird, zulässig ist.

[13]) Die etwaigen einstelligen Funktionsvariablen darf man offenbar durch binäre ersetzen, indem man etwa $F(x, x)$ statt $F(x)$ einsetzt.

[14]) $(\mathrm{E}x_\mu)_1^m$ steht für $(\mathrm{E}x_1)(\mathrm{E}x_2)\ldots(\mathrm{E}x_m)$, $(x_\nu)_{m+4}^n$ für $(x_{m+4})(x_{m+5})\ldots(x_n)$ zur Abkürzung; desgleichen weiter unten mit anderen „Indexgrenzen" und auch mit Doppelindices; z.B. steht $(z_{\mu\nu})_{1,1}^{n,n}$ statt $(z_{11})(z_{12})\ldots(z_{1n})(z_{21})(z_{22})\ldots(z_{2n})\ldots(z_{n1})(z_{n2})\ldots(z_{nn})$.

[15]) Durch das Summenzeichen wird die Konjunktion der entsprechenden Glieder angedeutet. Zur Ersparung von Klammern soll festgesetzt werden, daß $\rightarrow$ stärker trennt als &; z.B. bedeutet also $G(u, u) \,\&\, G(v, v) \rightarrow G(u, x_{m+3}) \,\&\, G(x_{m+3}, v)$ dasselbe wie $\big(G(u, u) \,\&\, G(v, v)\big) \rightarrow \big(G(u, x_{m+3}) \,\&\, G(x_{m+3}, v)\big)$. — Man könnte offenbar das Glied $\nu = m+3$ der zweiten „Summe" weglassen; dadurch würde aber die Schreibweise komplizierter. Das Gleiche gilt auch für die „Vereinfachung", die darin besteht, daß man das Glied $\mu = m+1$, $\nu = m+2$ der dritten Summe wegläßt, $z_{m+1,\, m+2}$ in $\mathfrak{L}[G(y_\lambda, z_{\mu\nu})]$ durch u ersetzt und auch in (4) das Allzeichen $(z_{m+1,\, m+2})$ streicht; vgl. Fußnoten [18]) und [19]).

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{R}' = \overline{G}(y_1, y_1) \,\&\, \sum_{\mu=1}^{m} G(x_\mu, x_\mu) \,\&\, & \\
& \& \big(G(u, u) \,\&\, G(v, v) \to G(u, x_{m+3}) \,\&\, G(x_{m+3}, v)\big) \,\&\, \\
& \& \big(\overline{G}(v, v) \to G(x_{m+3}, x_{m+3})\big) \,\&\, \\
& \& \Big(\overline{G}(v, v) \,\&\, \sum_{\nu=m+1}^{n} G(x_\nu, x_\nu) \,\&\, G(x_{m+1}, u) \,\&\, G(u, x_{m+2}) \,\&\, \\
& \& \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \big(G(x_\mu, z_{\mu\nu}) \,\&\, G(z_{\mu\nu}, x_\nu)\big) \to \mathfrak{L}[G(y_\lambda, z_{\mu\nu})]\Big)
\end{aligned} \tag{3}
$$

und

$$
\mathfrak{B} = (\mathbf{E}x_\mu)_1^m (\mathbf{E}y_\lambda)_1^l (u)(v)(\mathbf{E}x_{m+3})(x_{m+1})(x_{m+2})(x_\nu)_{m+4}^n (z_{\mu\nu})_{1,1}^{n,n} \mathfrak{R}'. \tag{4}
$$

$\mathfrak{B}$ ist offenbar eine Formel von der verlangten Gestalt; ich zeige, daß sie mit $\mathfrak{A}$ gleichwertig ist.

2. Es sei die Formel $\mathfrak{A}$ erfüllbar und zwar im Individuenbereich $\mathfrak{J}$ durch die Wahl $F_1 = \Phi_1$, $F_2 = \Phi_2, \ldots, F_l = \Phi_l$ von in $\mathfrak{J}$ definierten logischen Funktionen erfüllt. Es gibt also m Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_m$ von $\mathfrak{J}$, ferner eine in $\mathfrak{J}$ definierte binäre mathematische Funktion [16]) $\varphi(a, b)$, so daß für beliebige a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+4}, $a_{m+5}, \ldots, a_n \in \mathfrak{J}$ und für $a_{m+3} = \varphi(a_{m+1}, a_{m+2})$

$$
\mathfrak{L}[\Phi_\lambda(a_\mu, a_\nu)] \tag{5}
$$

wahr ausfällt.

Ich betrachte nun $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}^2 + \{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_l\}$ als neuen Individuenbereich, wobei $\mathfrak{J}^2$ die Menge der geordneten Paare (a', a'') mit $a', a'' \in \mathfrak{J}$ bezeichnet [17]). Ich definiere die binäre logische Funktion $\Psi(a, b)$ in $\mathfrak{J}'$ wie folgt. Ist $a, b \in \mathfrak{J}^2$, also $a = (a', a'')$, $b = (b', b'')$, $a', a'', b', b'' \in \mathfrak{J}$, so sei $\Psi(a, b)$ dann und nur dann wahr, falls $a' = a'' = b'$ oder $a'' = b' = b''$. Ist $a = \Phi_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots,$ oder $l)$, $b \in \mathfrak{J}^2$, also $b = (b', b'')$, $b', b'' \in \mathfrak{J}$, so sei $\Psi(a, b)$ mit $\Phi_\lambda(b', b'')$ gleichwertig. In allen übrigen Fällen (d.h. falls b kein Element von $\mathfrak{J}^2$ ist) sei $\Psi(a, b)$ falsch.

Aus der Definition gewinnt man unmittelbar folgende Eigenschaften der Funktion $\Psi(a, b)$:

A. $\Psi(a, a)$ ist dann und nur dann wahr, falls a ein „Diagonalpaar" ist, d.h. falls $a = (a', a')$, $a' \in \mathfrak{J}$.

B. Ist $\Psi(a, a) \,\&\, \Psi(b, b)$ wahr, ist also $a = (a', a')$, $b = (b', b')$, $a', b' \in \mathfrak{J}$, so ist $\Psi(a, c) \,\&\, \Psi(c, b)$ dann und nur dann wahr, falls $c = (a', b')$.

---

[16]) D. h. eine Funktion, deren Argumente die Menge $\mathfrak{J}$ durchlaufen, und deren Werte ebenfalls $\mathfrak{J}$ angehören.

[17]) $\mathfrak{J}^2$ und $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_l\}$ sind natürlich fremde Mengen.

Ferner definiere ich eine binäre mathematische Funktion $\psi(a, b)$ in $\mathfrak{J}'$ wie folgt. Sind a, b Diagonalpaare, also $a = (a', a')$, $b = (b', b')$, $a', b' \in \mathfrak{J}$, so sei $\psi(a, b)$ das Paar (a', b'). Ist $a \in \mathfrak{J}^2$, also $a = (a', a'')$, $a', a'' \in \mathfrak{J}$, und b kein Diagonalpaar (also $b = \Phi_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots$, oder l, oder aber $b = (b', b'')$, $b', b'' \in \mathfrak{J}$, $b' \neq b''$), so sei $\psi(a, b)$ das Diagonalpaar $(\varphi(a', a''), \varphi(a', a''))$. Ist endlich $a = \Phi_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \ldots$, oder l), b beliebig, oder $a \in \mathfrak{J}^2$, aber kein Diagonalpaar und b ein Diagonalpaar, so sei $\psi(a, b) = (a_1, a_1)$.

Aus A, B und der Definition von $\psi(a, b)$ folgt unmittelbar für beliebige $c, d \in \mathfrak{J}$

$$(6) \qquad \Psi(c, c) \mathbin{\&} \Psi(d, d) \rightarrow \Psi(c, \psi(c, d)) \mathbin{\&} \Psi(\psi(c, d), d)$$

und

$$(7) \qquad \overline{\Psi}(d, d) \rightarrow \Psi(\psi(c, d), \psi(c, d)).$$

Es bezeichne b_μ, für $\mu = 1, 2, \ldots, m$, das Diagonalpaar (a_μ, a_μ). Dann gilt wegen A

$$(8) \qquad \sum_{\mu=1}^{m} \Psi(b_\mu, b_\mu).$$

Es seien ferner $c, d, b_{m+1}, b_{m+2}, b_{m+4}, b_{m+5}, \ldots, b_n, e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1n}, e_{21}, e_{22}, \ldots, e_{2n}, \ldots, e_{n1}, e_{n2}, \ldots, e_{nn}$ beliebige solche Elemente von $\mathfrak{J}'$, für welche,

$$(9) \qquad b_{m+3} = \psi(c, d)$$

gesetzt, [18])

$$(10) \qquad \overline{\Psi}(d, d) \mathbin{\&} \sum_{\nu=m+1}^{n} \Psi(b_\nu, b_\nu) \mathbin{\&} \Psi(b_{m+1}, c) \mathbin{\&} \Psi(c, b_{m+2}) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} (\Psi(b_\mu, e_{\mu\nu}) \mathbin{\&} \Psi(e_{\mu\nu}, b_\nu))$$

gültig ist. Dann gibt es wegen A $n - m$ Elemente $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$ von $\mathfrak{J}$, so daß

$$(11) \qquad b_\nu = (a_\nu, a_\nu)$$

für $\nu = m+1, m+2, \ldots, n$, also für $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Wegen B folgt hieraus

$$(12) \qquad c = (a_{m+1}, a_{m+2})$$

und, [19]) für $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n$,

$$(13) \qquad e_{\mu\nu} = (a_\mu, a_\nu).$$

[18]) Das Glied $\Psi(b_{m+3}, b_{m+3})$ der zweiten Summe ist wegen (7) und (9) überflüssig; es wurde bloß zur Vereinfachung der Schreibweise beibehalten.

[19]) Also ist $e_{m+1,\, m+2} = c$.

Da nun d wegen A kein Diagonalpaar ist, so folgt aus (9) und (12) gemäß der Definition von ψ

$$b_{m+3} = (\varphi(a_{m+1}, a_{m+2}), \varphi(a_{m+1}, a_{m+2})),$$

also wegen (11) $(\nu = m+3)$

$$a_{m+3} = \varphi(a_{m+1}, a_{m+2}),$$

woraus sich wegen (5), (13) und Definition von Ψ

$$\mathfrak{L}[\Psi(\Phi_\lambda, e_{\mu\nu})]$$

ergibt. Also ist, falls (9) besteht,

$$(14) \quad \overline{\Psi}(d, d) \mathbin{\&} \sum_{\nu=m+1}^{n} \Psi(b_\nu, b_\nu) \mathbin{\&} \Psi(b_{m+1}, c) \mathbin{\&} \Psi(c, b_{m+2}) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \sum_{\mu, \nu=1}^{n} (\Psi(b_\mu, e_{\mu\nu}) \mathbin{\&} \Psi(e_{\mu\nu}, b_\nu)) \to \mathfrak{L}[\Psi(\Phi_\lambda, e_{\mu\nu})]$$

für beliebige Elemente c, d, b_{m+1}, b_{m+2}, b_{m+4}, b_{m+5}, $\ldots$, b_n, $e_{11}, \ldots, e_{nn}$ von $\mathfrak{J}'$ wahr (offenbar auch für solche, für welche (10) falsch ausfällt).

Da noch wegen A

$$\overline{\Psi}(\Phi_1, \Phi_1)$$

gilt, so folgt aus (8), (6), (7) und (14), mit (3) und (4) verglichen, daß die Formel $\mathfrak{B}$ erfüllbar, nämlich im Individuenbereich $\mathfrak{J}'$ durch die Wahl $G = \Psi$ erfüllt ist.

3. Ich habe also nur noch zu zeigen, daß auch umgekehrt aus der Erfüllbarkeit von $\mathfrak{B}$ die von $\mathfrak{A}$ folgt. Es sei also $\mathfrak{B}$ erfüllbar und zwar in einem Individuenbereich $\mathfrak{J}$ durch die Wahl $G = \Psi$, wo Ψ eine in $\mathfrak{J}$ definierte binäre logische Funktion ist, erfüllt. Dann gibt es $m + l$ Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_m, f_1, f_2, \ldots, f_l$ von $\mathfrak{J}$, ferner eine in $\mathfrak{J}$ definierte mathematische Funktion $\psi(a, b)$, so daß

$$(15) \qquad \overline{\Psi}(f_1, f_1),$$

$$(16) \qquad \sum_{\mu=1}^{m} \Psi(a_\mu, a_\mu),$$

ferner, für beliebige $c, d \in \mathfrak{J}$, (6) und (7), endlich, für beliebige c, d, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+4}, $a_{m+5}, \ldots, a_n$, e_{11}, $e_{12}, \ldots, e_{1n}$, e_{21}, $e_{22}, \ldots, e_{2n}, \ldots, e_{n1}, e_{n2}, \ldots, e_{nn} \in \mathfrak{J}$,

$$(17) \qquad a_{m+3} = \psi(c, d)$$

gesetzt,

$$(18)\quad \overline{\Psi}(d, d)\ \&\ \sum_{\nu=m+1}^{n} \Psi(a_\nu, a_\nu)\ \&\ \Psi(a_{m+1}, c)\ \&\ \Psi(c, a_{m+2})\ \&$$
$$\&\ \sum_{\mu,\,\nu=1}^{n} \left(\Psi(a_\mu, e_{\mu\nu})\ \&\ \Psi(e_{\mu\nu}, a_\nu)\right) \to \mathfrak{L}[\Psi(f_\lambda, e_{\mu\nu})]$$

gültig sind.

Es bezeichne nun $\mathfrak{J}'$ die Menge derjenigen Elemente a von $\mathfrak{J}$, für die $\Psi(a, a)$ wahr ist. Wegen (16) gehören $a_1, a_2, \ldots, a_m$ zu $\mathfrak{J}'$. Es seien $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+4}, a_{m+5}, \ldots, a_n$ beliebige weitere Elemente von $\mathfrak{J}'$,

$$(19)\qquad c = \psi(a_{m+1}, a_{m+2}),$$

$$(20)\qquad d = f_1$$

und a_{m+3} durch (17) definiert. Wegen (15) und (7) ist dann $\Psi(a_{m+3}, a_{m+3})$ wahr, d. h. auch a_{m+3} gehört zu $\mathfrak{J}'$ und es gilt auch

$$(21)\qquad \sum_{\nu=m+1}^{n} \Psi(a_\nu, a_\nu).$$

Setzt man ferner $e_{\mu\nu} = \psi(a_\mu, a_\nu)$ für $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n$, so gilt wegen (6)

$$(22)\qquad \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left(\Psi(a_\mu, e_{\mu\nu})\ \&\ \Psi(e_{\mu\nu}, a_\nu)\right),$$

also insbesondere, da wegen (19) $c = e_{m+1,\ m+2}$,

$$(23)\qquad \Psi(a_{m+1}, c)\ \&\ \Psi(c, a_{m+2}).$$

Aus (20), (15), (21), (23), (22) und (18) folgt aber, daß auch

$$\mathfrak{L}[\Psi(f_\lambda, e_{\mu\nu})] = \mathfrak{L}[\Psi(f_\lambda, \psi(a_\mu, a_\nu))]$$

wahr ist. Dies bedeutet aber, da a_{m+3} wegen (17), (19), (20) nur von a_{m+1} und a_{m+2} abhängt, von $a_{m+4}, a_{m+5}, \ldots, a_n$ aber unabhängig ist, daß die Formel $\mathfrak{A}$ im Individuenbereich $\mathfrak{J}'$ durch die Wahl

$$F_\lambda(a, b) = \Psi(f_\lambda, \psi(a, b)) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

erfüllt wird. Hiermit ist bewiesen, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in der Tat gleichwertig sind.

4. Aus dem Vorangehenden ergibt sich, daß die Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auch in dem Sinne gleichwertig sind, daß sie entweder beide im Endlichen erfüllbar sind, oder beide nicht. Bedeuten ferner $\mathfrak{m}_{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{m}_{\mathfrak{B}}$ die minimale Kardinalzahl derjenigen Individuenbereiche, in denen $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ erfüllbar ist, so folgt aus dem

Vorangehenden

$$\mathfrak{m}_{\mathfrak{A}} \leqq \mathfrak{m}_{\mathfrak{B}} \leqq \mathfrak{m}_{\mathfrak{A}}^2 + l.$$

Zufolge dieser Ungleichung läßt sich $m_{\mathfrak{A}}$, falls $m_{\mathfrak{B}}$ bekannt ist, in endlich vielen Schritten bestimmen.

(Eingegangen den 22. Mai 1936.)