COMPOSITIO MATHEMATICA

ANDRÉ MARCHAUD

Sur les champs continus de demi-cônes convexes et leurs intégrales

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 89-127

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__89_0>

Sur les champs continus de demi-cônes convexes et leurs intégrales

par

André Marchaud

Marseille

Introduction.

Dans un espace euclidien à trois dimensions, rapporté à trois axes rectangulaires $Oxyz$, considérons la région $(R) = [0 \leqq x \leqq 1]$. A chaque point m de (R) attachons un demi-cône convexe $C(m)$, de sommet m, possédant les propriétés suivantes,

1° toute demi-droite de $C(m)$ fait avec Ox un angle au plus égal à un angle fixe moindre que $\frac{\pi}{2}$,

2° $C(m)$ varie continuement avec m.

On a ainsi défini, dans (R), un *champ borné en direction par rapport à Ox et continu.* Un arc simple $\widehat{ab}$, situé dans (R), sera dit une *intégrale du champ*, issue de a, si en chacun de ses points m toutes ses semi-tangentes à droite sont dans $C(m)$, et toutes ses semi-tangentes à gauche dans le demi-cône opposé — sauf bien entendu en a pour les semi-tangentes à gauche et en b pour les semi-tangentes à droite. Avec la terminologie introduite par M. Georges Bouligand, on dira: une intégrale issue de a est un arc simple $\widehat{ab}$ dont le contingent postérieur en chaque point m est contenu dans $C(m)$, et le contingent antérieur dans le demi-cône opposé — avec les mêmes restrictions pour a et b. Il résulte immédiatement de leur définition que les intégrales de $C(m)$ sont *rectifiables*, et par suite *possèdent une tangente presque partout.*

L'objet du présent Mémoire est l'étude des intégrales des champs tels que $C(m)$. Dans le cas particulier où $C(m)$ se réduit partout à une demi-droite unique on aura des propriétés des intégrales d'un système d'équations différentielles

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z),$$

où les fonctions $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$ sont bornées et continues dans (R). Nous obtiendrons aussi des résultats se rapportant à la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Les principales notions, qui interviendront dans les énoncés, sont celles *d'émission* d'un point ou d'un ensemble, de *frontière latérale* (ordinaire et extérieure) d'une émission, et *d'intégrale frontière.*

L'*émission* d'un ensemble A (de (R)), par le champ $C(m)$, est l'ensemble des points de (R) par chacun desquels il passe au moins une intégrale de $C(m)$ issue d'un point de A; on la représentera par $E[C(m), A]$.

La *frontière latérale* de $E[C(m), A]$ est la fermeture de l'ensemble des points frontières de cette émission dont l'abscisse est inférieure à 1. Cette restriction a simplement pour but d'écarter les points de $x = 1$, qui sont en quelque sorte artificiellement des points frontières, et qui cesseraient de l'être si le champ et l'émission étaient prolongés à droite de $x = 1$.

La *frontière latérale extérieure* de $E[C(m), A]$ est la fermeture des points de la frontière latérale extérieurs à A.

Enfin on appellera *intégrale frontière* de $C(m)$, toute intégrale dont les semi-tangentes à droite et les semi-tangentes à gauche en chacun de ses points m sont toutes respectivement *sur la frontière de* $C(m)$ *et celle du* demi-cône opposé. Lorsque $C(m)$ est le cône élémentaire d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, à laquelle s'appliquent les théories classiques, la courbe d'une caratéristique est une intégrale frontière du champ, mais la réciproque n'a pas forcément lieu.

Avec les définitions précédentes, les principales conclusions du Mémoire peuvent se résumer dans les énoncés qui suivent. La plupart d'entre eux ont été communiqués à l'Académie des Sciences le 3 Décembre 1934. [1])

I. De tout point de (R) part au moins une intégrale d'un champ donné $C(m)$, intégrale qui peut être prolongée jusque dans le plan $x = 1$. [2])

II. Soient $C_1(m)$, $C_2(m)$, ... une suite de champs convergeant uniformément vers le champ $C(m)$, et, pour chaque champ $C_n(m)$, une intégrale $\widehat{a_n b_n}$. Si la suite $a_1, a_2, \ldots$ admet un point d'accumulation a à distance finie, on peut extraire de la suite $\{\widehat{a_n b_n}\}$ une suite partielle ayant pour limite une intégrale $\widehat{ab}$ de $C(m)$.

---

[1]) C. R. **199**, 1278.

[2]) Dans cet énoncé, comme dans les suivants, il s'agira toujours de champs continus dans (R) et bornés en direction par rapport à Ox dans ce domaine.

III. Soient $C_\lambda(m)$ un champ convergeant uniformément vers le champ $C(m)$, et A_μ un ensemble borné et fermé ayant pour limite A, quand λ et μ tendent respectivement vers λ_0 et μ_0. Si, quels que soient λ et μ, $C_\lambda(m)$ et A_μ contiennent respectivement $C(m)$ et A, l'émission $E[C_\lambda(m), A_\mu]$ et sa frontière latérale tendent respectivement vers $E[C(m), A]$ et sa frontière latérale.

Les limites dont il s'agit dans les énoncés qui précèdent sont des *limites métriques*, au sens de M. Hausdorff.

La dernière proposition généralise un résultat de M. Paul Montel, complété par Mlle Marie Charpentier, sur la semi-continuité des intégrales supérieure et inférieure de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

IV. Soient $C(m)$ un champ et A un ensemble borné et fermé. La frontière latérale extérieure de $E[C(m), A]$ est constituée par des intégrales frontières du champ, issues des points frontières de A. De plus, en chaque point m de la frontière latérale extérieure, celle-ci n'a aucune semi-tangente dans $C(m)$ ni dans le demi-cône opposé.

Cet énoncé généralise un Théorème de M. Masuo Fukuhara. Mais son principal intérêt est dans le fait qu'il peut servir d'introduction à l'étude géométrique de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre dont $C(m)$ est le cône élémentaire. Il est immédiat, en effet, que tout morceau d'une frontière latérale extérieure qui est une surface pourvue d'un plan tangent, est une surface intégrale de l'équation.

V. Si A est un continu ou un point, la section de $E[C(m), A]$ par un plan $x = \text{const.}$, laissant A à sa gauche, est un continu ou un point.

C'est l'extension du Théorème de M. Kneser.

VI. Un ensemble fermé vers la gauche [3]), qui possède en chacun de ses points m, sauf peut-être pour ceux d'un ensemble borné A, une semi-tangente au moins dans le demi-cône opposé à $C(m)$, est nécessairement contenu dans $E[C(m), \overline{A}]$, où $\overline{A}$ désigne la fermeture de A.

De cette proposition, qui généralise un résultat que j'ai obtenu antérieurement, on peut déduire de nombreuses conséquences. En voici une, qui donne des conditions strictement suffisantes pour qu'un continu soit une intégrale d'un système d'équations différentielles du premier ordre.

---

[3]) Pour la définition de ces ensembles, voir plus loin [no. 31].

Si $C(m)$ se réduit partout à une demi-droite unique, et si, de plus, l'intégrale issue de a est unique, tout continu admettant partout, sauf en a, la demi-droite opposée à $C(m)$ pour une de ses semi-tangentes est un arc de l'intégrale issue de a.

Il est évident que la restriction relative à l'unicité de l'intégrale issue de a ne peut être levée.

Cette dernière proposition avait été établie par M. Georges Bouligand et par moi-même à partir d'hypothèses de plus en plus larges, mais beaucoup plus restrictives.

Ajoutons enfin que tous les résultats obtenus dans ce Mémoire sont valables pour un espace euclidien quelconque. Dans le cas du plan, on pourra les rapprocher de ceux de M. S. K. Zaremba [4].

I. Notions et résultats préliminaires.

1. Il s'agira ici d'ensembles situés dans un espace euclidien à trois dimensions. Ce choix du nombre des dimensions a seulement pour but de fixer le langage; les résultats obtenus s'étendront d'eux-mêmes au cas d'un espace euclidien quelconque.

Je commencerai par rappeler quelques notions et établir certains résultats dont nous aurons besoin. Nous nous occuperons d'abord des notions d'*écart* (Entfernung) de deux ensembles et de *limite métrique* d'une suite d'ensembles.

Si A désigne un ensemble, on représentera par $U(A, r)$ l'ensemble des sphères de rayon r centrées sur les points de A. Je supposerai ces sphères *fermées* (c'est-à-dire contenant leurs frontières), il en résultera que *si A est fermé, $U(A, r)$ l'est aussi.* D'autre part il est immédiat que tout point extérieur à A est extérieur à $U(A, r)$ dès que r est assez petit. (La construction précédente est celle de Cantor-Minkowski, mais on considère ordinairement les sphères ouvertes.)

Soient A et B deux ensembles *bornés et fermés*, l'écart de ces deux ensembles, $[A, B] = [B, A]$, est la borne inférieure e des nombres r satisfaisant à la double condition.

$$U(A, r) \supset B, \quad U(B, r) \supset A.$$

Les ensembles A et B étant fermés, on a évidemment

$$U(A, e) \supset B, \quad U(B, e) \supset A.$$

---

[4]) S. K. Zaremba, Sur une extension de la notion d'équation différentielle [C. R. **199** (1934), 545]. M. S. K. Zaremba considère des champs de „pinceaux" de droites, et fait intervenir le paratingent.

Le présent Travail était rédigé presqu'entièrement quand a paru la Note de M. S. K. Zaremba.

Les propriétés de l'écart qui nous seront utiles sont les suivantes.

1°. L'écart de deux points est leur distance.

2°. La condition nécessaire et suffisante pour que A et B coincident est que leur écart soit nul.

3°. La double inclusion $A \supset B \supset C$ implique nécessairement les inégalités

$$[A, C] \geqq [B, C], \quad [A, C] \geqq [A, B].$$

4°. On a quels que soient A, B et C,

$$[A, C] \leqq [A, B] + [B, C] \quad \text{(inégalité „du triangle'')}.$$

Il s'agit toujours d'ensembles bornés et fermés.

Les trois premières propriétés sont presqu'évidentes, la quatrième est une conséquence de la relation: $ac \leqq ab + bc$ entre les distances mutuelles de trois points a, b, c; le lecteur l'établira aisément. Il pourra consulter à ce sujet (et aussi sur la notion de limite métrique dont il sera question au numéro suivant) la *Mengenlehre* de M. Hausdorff, pages 145 et suivantes. La définition de l'écart y est formulée d'une manière un peu différente de celle qui précède, mais équivalente.

2. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ une suite d'ensembles *bornés* et *fermés*. On dit qu'un ensemble *fermé* A est la *limite métrique* de la suite, ou de A_n, si l'écart $[A, A_n]$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Lorsque cette limite existe, elle est nécessairement unique. Cela résulte immédiatement du numéro précédent.

D'autre part les énoncés suivants sont presqu'évidents.

1°. Soit B_1, $B_2, \ldots$, $B_n, \ldots$ une deuxième suite d'ensembles bornés et fermés, ayant pour limite métrique B. Si, pour chaque valeur de n, B_n est contenu dans A_n, B est contenu dans A.

2°. La limite métrique d'une suite de continus ne peut être qu'un continu ou un point [5]).

Dans le cas où chacun des ensembles de la suite $\{A_n\}$ contient le suivant, le produit

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots$$

est la limite métrique de A_n. Pour le montrer il suffira de prouver que, r étant choisi $U(A, r)$ contient A_n pourvu que n soit assez grand. En effet, A_n contient A, et d'autre part ce dernier ensemble est évidemment fermé. Supposons qu'il existe une suite infinie

[5]) Un continu est un ensemble fermé connexe (qui ne peut être décomposé en deux ensembles fermés disjoints).

de valeurs de n: $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ telle que chaque A_{n_p} possède un point m_p extérieur à $U(A, r)$. La suite m_p est contenue dans A_1, elle admet donc un point d'accumulation m non intérieur à $U(A, r)$. Mais le point m appartient à chaque A_{n_p}, puisque chacun de ces ensembles est fermé et contient le suivant. m fait donc partie de A, ce qui conduit à une contradiction. (Il pourra arriver que les points m_p, sauf un nombre fini d'entre eux, soient confondus avec un point fixe, celui-ci jouera alors le rôle de point d'accumulation.)

3. Dans ce Mémoire nous considérerons uniquement des *limites métriques*. Pour simplifier le langage, nous supprimerons le qualificatif: métrique. Voici sur ces limites une proposition dont nous aurons à faire usage.

Soit $\{A_n\}$ une suite d'ensembles bornés et fermés ayant une limite A contenue dans chacun d'eux; la frontière de A_n a pour limite celle de A [6]).

Désignons par F et F_n les frontières respectives de A et A_n et par e_n l'écart $[A, A_n]$. e_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Soit f_n un point de F_n n'appartenant pas à F, f_n faisant partie de A_n, la sphère $U(f_n, e_n)$ contient un point de A, et par suite de F, car f_n est extérieur à A. Donc F_n est contenue dans $U(F, e_n)$. Pour achever la démonstration, il suffira d'établir que, r étant donné arbitrairement, on peut choisir n assez grand pour que $U(F_n, r)$ contienne F. Supposons que cette affirmation soit fausse; il existe alors une suite $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$, telle que pour chaque valeur de p on puisse trouver dans F un point μ_p qui soit extérieur à $U(F_{n_p}, r)$. La sphère $U(\mu_p, r)$ ne contient aucun point de F_{n_p}. Soit alors μ un point d'accumulation de la suite μ_p, ce point est sur F. Considérons la sphère $U\left(\mu, \frac{r}{2}\right)$, elle est intérieure à $U(\mu_p, r)$ dès que μ_p lui est intérieur. Nous arrivons donc à la conclusion qu'il existe une infinité de frontières F_n n'ayant aucun point dans $U\left(\mu, \frac{r}{2}\right)$. Or ceci est contradictoire avec le fait que μ est sur F. En effet, il y a nécessairement dans $U\left(\mu, \frac{r}{2}\right)$ un point γ extérieur à A et par suite à A_n, si n est assez grand, donc un point de F (d'après la remarque faite en note à la page précédente). La démonstration est achevée.

---

[6]) La frontière d'un ensemble *fermé* est l'ensemble de ses points non intérieurs. Il est immédiat que tout segment joignant un point de l'ensemble à un point extérieur contient un point de la frontière. La frontière d'un ensemble est évidemment fermée.

Il faut remarquer que la proposition serait fausse sans la restriction: $A_n \supset A$. En effet, prenons pour A une sphère (fermée) de rayon 1, et pour A_n l'ensemble obtenu en retranchant de A l'*intérieur* de la sphère concentrique de rayon $\frac{1}{n}$. On voit immédiatement que

$$[A, A_n] = \frac{1}{n}, \qquad [F, F_n] = 1 - \frac{1}{n}.$$

Quand A_n tend vers A, l'écart des frontières tend vers *un*.

On observera que les considérations des numéros 1, 2 et 3 sont valables dans tout *espace métrique* (c'est-à-dire dans lequel on peut définir une „distance" satisfaisant à l'„inégalité du triangle".

4. Nous allons considérer maintenant des *ensembles fermés de demi-droites ayant même origine O*. Soit C un tel ensemble et α un nombre positif au plus égal à π. Je désignerai par $(C)_\alpha$ l'ensemble des demi-droites d'origine O faisant un angle au plus égal à α avec au moins une demi-droite de C. L'ensemble $(C)_\alpha$ est évidemment *fermé*. Dans le cas où α est inférieur à $\frac{\pi}{2}$ $(C)_\alpha$ est l'ensemble des demi-cônes de révolution d'angle au sommet 2α, ayant pour axes les demi-droites de C.

La construction précédente n'est autre que celle de Cantor-Minkowski dans l'*espace* des demi-droites d'origine O, espace dans lequel la „distance" de deux „points" est l'angle des deux demi-droites correspondantes. Cet espace est borné.

L'*écart* $[C, C'] = [C', C]$ [7]) de deux ensembles fermés (de demi-droites de même origine) C et C' se définira de la même manière que celui de deux ensembles ponctuels; c'est la borne inférieure e des angles α satisfaisant à la double condition

$$(C)_\alpha \supset C', \qquad (C')_\alpha \supset C.$$

Comme pour les ensembles ponctuels on a

$$(C)_e \supset C', \qquad (C')_e \supset C.$$

D'après la remarque faite à la fin du numéro précédent, les propriétés de l'écart sont conservées. En particulier:

1°. l'écart de deux demi-droites est leur angle.

2°. pour que C et C' coincident, il faut et il suffit que leur écart soit nul.

---

[7]) Nous utilisons la même notation que pour désigner l'écart de deux ensembles ponctuels. Il n'y aura pas de confusion possible, car C et C', considérés comme ensembles ponctuels, ne sont pas bornés.

3°. si C'' désigne un troisième ensemble fermé, on a

$$[C, C''] \leqq [C, C'] + [C', C'']$$

Voici encore une propriété qui nous sera utile, c'est celle exprimée par l'inégalité suivante:

$$[(C)_\alpha, (C')_\alpha] \leqq [C, C'].$$

Pour la démontrer, désignons par e l'écart $[C, C']$. On peut écrire

$$(C)_e \supset C', \quad \text{et par suite,}$$

$$[(C)_e]_\alpha \supset (C')_\alpha .$$

Mais $[(C)_e]_\alpha$ et $[(C)_\alpha]_e$ sont identiques [8]). On a donc

$$[(C)_\alpha]_e \supset (C')_\alpha, \quad \text{et de même}$$

$$[(C')_\alpha]_e \supset (C)_\alpha,$$

d'où il résulte la relation à établir.

La notion de *limite métrique* s'étendra d'elle-même et possèdera les mêmes propriétés que dans le cas des ensembles ponctuels. Par exemple, une suite d'ensembles fermés $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ telle que chacun d'eux contienne le suivant admet une limite: le produit $C = C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_n \cdot \ldots$ (il s'agit toujours d'ensembles de demi-droites d'origine O).

5. Les considérations du numéro précédent s'appliquent en particulier aux demi-cônes convexes. Un demi-cône convexe C, de sommet O, est un ensemble fermé de demi-droites d'origine O, ne contenant aucune droite, et tel que si deux points a et b appartiennent à l'ensemble, le segment ab en fait également partie. Un angle plan moindre que π satisfait à cette définition, et aussi une demi-droite unique.

Une demi-droite D, d'origine O, est *intérieure* à C s'il existe un angle α tel que $(D)_\alpha$ soit contenu dans C. Un demi-cône convexe est intérieur à C si toutes ses demi-droites le sont.

La *frontière* d'un demi-cône convexe est l'ensemble de ses demi-droites non intérieures. Un angle plan moindre que π, ou une demi-droite unique sont des demi-cônes convexes réduits à leur frontière. La réciproque est évidente.

Il est immédiat que si les termes de la suite considérée à la fin du numéro 4 sont des demi-cônes convexes, il en est de même de leur limite.

---

[8]) En effet, si $e + \alpha$ est au plus égal à π les deux ensembles coincident avec $(C)_{e+\alpha}$, dans le cas contraire ils remplissent tout l'espace.

6. Je vais rassembler quelques propriétés des demi-cônes convexes dont nous aurons à faire usage. La première est la suivante.

Soit C un demi-cône convexe, si α est assez petit $(C)_\alpha$ est aussi un demi-cône convexe.

En effet, $(C)_\alpha$ est fermé et ne contiendra aucune droite si α est assez petit. Considérons alors deux points a et b de $(C)_\alpha$, il existe deux demi-droites Oa_1 et Ob_1 de C telles que l'on ait

$$Oa \subset (Oa_1)_\alpha, \qquad Ob \subset (Ob_1)_\alpha.$$

Mais l'ensemble γ des demi-cônes de révolution d'angle au sommet 2α ayant pour axes les demi-droites de l'angle $\widehat{a_1Ob_1}$ est évidemment un demi-cône convexe contenu dans $(C)_\alpha$. Or γ contient tout le segment ab [9]).

Les propriétés suivantes feront intervenir l'opération inverse de celle de Cantor-Minkowski. Elles ont pour but de donner une forme et un sens précis à cette propriété intuitive:

deux demi-cônes convexes de même sommet, non réduits à leurs frontières, et très voisins, ont en commun un demi-cône convexe très voisin de chacun d'eux.

Soit C un ensemble fermé de demi-droites d'origine O, et α un angle donné. Je désignerai par $(C)_{-\alpha}$ l'ensemble des demi-droites D, d'origine O, telles que $(D)_\alpha$ appartienne à C. $(C)_{-\alpha}$ ne peut exister que si C contient des demi-droites intérieures et si α est assez petit, $(C)_{-\alpha}$ est alors un ensemble fermé. Il est immédiat que si un ensemble fermé C' contient C, $(C')_{-\alpha}$ contient $(C)_{-\alpha}$, et, d'autre part, que $[(C)_\beta]_{-\alpha}$ existe nécessairement pourvu que α ne surpasse pas β. Enfin si D' est une demi-droite *intérieure* à C, elle sera intérieure à $(C)_{-\alpha}$ pourvu que α soit assez petit. En effet, il existe un angle ε tel que $(D')_\varepsilon$ soit contenu dans C, $(D')_{\frac{\varepsilon}{2}}$ est alors contenu dans $(C)_{-\alpha}$ dès que α est moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$.

Il ne faudrait pas croire que l'opération qui vient d'être définie et celle de Cantor-Minkowski soient réciproques, c'est-à-dire que l'on a

$$[(C)_{-\alpha}]_\alpha = C, \qquad [(C)_\alpha]_{-\alpha} = C.$$

La première relation est fausse même si C est convexe. Il suffit pour le voir de prendre pour C un trièdre et α assez petit pour

[9]) Cette démonstration reproduit à peu près celle que j'ai donné de la même propriété dans mon Mémoire: Sur les champs de demi-droites et les équations différentielles du 1° ordre [Bull. S. M. F. **62** (1934), 7].

que $(C)_{-\alpha}$ existe. Les demi-droites de C voisines des arêtes échappent à $[(C)_{-\alpha}]_{\alpha}$.

La seconde relation est fausse lorsque C n'est pas convexe. En effet, soit D une demi-droite d'origine O et α un angle moindre que $\frac{\pi}{4}$. Prenons pour C l'ensemble des demi-droites de $(D)_{\alpha}$ extérieures à $(D)_{\frac{\alpha}{2}}$ · $(C)_{\alpha}$ n'est autre que $(D)_{2\alpha}$, par suite $[(C)_{\alpha}]_{-\alpha}$ se réduit à $(D)_{\alpha}$, qui est différent de C.

7. Je vais montrer que *si* α *est moindre que* $\frac{\pi}{2}$ *et si* C *est un demi-cône convexe*, on a bien

$$[(C)_{\alpha}]_{-\alpha} = C.$$

Posons $[(C)_{\alpha}]_{-\alpha} = C'$. On a évidemment $C \subset C'$. Il s'agit d'établir que C contient C'. Supposons qu'une demi-droite D' de C' soit extérieure à C. Il existe alors une demi-droite G, de C, faisant avec D' l'angle minimum, puisque C est fermé, et cet angle minimum β est différent de zéro et au plus égal à α (car D' appartient à $(C)_{\alpha}$). C n'a aucun point à l'intérieur du demi-cône de révolution $(D')_{\beta}$. D'autre part $(D')_{\alpha}$ est contenu dans $(C)_{\alpha}$, d'après la définition de C'. Considérons alors, dans le plan (G, D'), une demi-droite D'', d'origine O, faisant avec G un angle aigu γ supérieur à α et telle que D' soit intérieure à l'angle $\widehat{GOD''}$. L'angle $\widehat{D'OD''}$ est égal à $\gamma - \beta$, il sera moindre que α pourvu que γ soit choisi inférieur à $\alpha + \beta$. Dans ces conditions D'' appartient à $(D')_{\alpha}$ et par suite à $(C)_{\alpha}$. Il en résulte que le demi-cône de révolution $(D'')_{\alpha}$ contient au moins une demi-droite G' de C. Comme G est extérieure à $(D'')_{\alpha}$, G' est différent de G. Donc toutes les demi-droites de l'angle $\widehat{GOG'}$ appartiennent à C, d'autre part elles sont contenues dans $(D'')_{\gamma}$. Mais ce demi-cône de révolution contient $(D')_{\beta}$ lequel lui est tangent le long de G. Par suite C contient des demi-droites intérieures à $(D')_{\beta}$, ce qui conduit à une contradiction, car β est le minimum de l'angle de D' avec une demi-droite quelconque de C. La proposition est donc démontrée.

8. Considérons un demi-cône convexe C, de sommet O, non réduit à sa frontière, et α un angle assez petit pour que $(C)_{-\alpha}$ existe. Nous savons déjà que cet ensemble est fermé, je dis que c'est un demi-cône convexe. Comme il ne peut évidemment contenir aucune droite, il suffira de montrer que si deux points a et b, distincts de O, appartiennent à $(C)_{-\alpha}$, il en est de même du segment ab. Pour cela considérons les deux demi-droites Oa

et Ob. Comme elles appartiennent à $(C)_{-\alpha}$, $(Oa)_\alpha$ et $(Ob)_\alpha$ sont contenus dans C, et par suite $(\widehat{aOb})_\alpha$. Soit alors d un point quelconque du segment ab, la demi-droite Od fait partie de $\widehat{aOb}$, $(Od)_\alpha$ appartient donc à C. Il en résulte que Od est une demi-droite de $(C)_{-\alpha}$.

9. Nous pouvons maintenant établir la proposition, importante pour la suite, à laquelle il a été fait allusion au numéro 6.

Soit C un demi-cône convexe et α un angle aigu tel que $(C)_{-\alpha}$ existe, tout demi-cône convexe dont l'écart avec C est au plus égal à α contient $(C)_{-\alpha}$.

Considérons en effet un demi-cône convexe C' satisfaisant à l'hypothèse précédente. D'après la définition de l'écart on peut écrire

$$(C')_\alpha \supset C,$$

d'où l'on déduit [n⁰. 6],

$$[(C')_\alpha]_{-\alpha} \supset (C)_{-\alpha}.$$

Or le premier membre de cette dernière relation n'est autre que C' [n⁰. 7].

10. Jusqu'à présent nous avons considéré des demi-cônes de même sommet. Nous allons étendre les notions et les résultats précédents à des demi-cônes de sommets différents. Pour cela il sera commode d'introduire quelques notations.

Soient C et C' deux demi-cônes convexes (n'ayant pas nécessairement même sommet), C_O et C'_O les demi-cônes de sommet O, qui s'en déduisent respectivement par translations. Les relations

$$\begin{array}{ll} C' = C, & C = C',\ ^{10}) \\ C' \leqq C, & C \geqq C', \\ C' < C, & C > C' \end{array}$$

exprimeront respectivement que

C_O et C'_O sont confondus,
C'_O est contenu dans C_O,
C'_O est intérieur à C_O.

Elles sont évidemment indépendantes du point O.

Enfin pour exprimer que C et C' sont inversement homothétiques, on écrira:

$$C' = -C \quad \text{ou} \quad C = -C'.$$

---

[10]) Les signes $\supset$ et $\subset$ seront réservés pour l'inclusion.

Ceci posé, nous appellerons *écart* de C et C' celui de C_O et C'_O. Nous le désignerons par $[C, C']$, il est indépendant de O. On a évidemment

$$(1) \qquad [-C, -C'] = [C, C'].$$

D'autre part les inégalités établies au numéro 4 subsistent

$$(2) \qquad [(C)_\alpha, (C')_\alpha] \leqq [C, C'],$$

$$(3) \qquad [C, C''] \leqq [C, C'] + [C', C''].$$

Enfin le résultat établi au numéro précédent devient:

Soient C un demi-cône convexe non réduit à sa frontière, et α un angle aigu assez petit pour que $(C)_{-\alpha}$ existe; tout demi-cône convexe C', dont l'écart avec C est au plus égal à α, satisfait à la relation $(C)_{-\alpha} \leqq C'$.

11. Je terminerai ces considérations préliminaires par trois propositions, que j'ai déjà utilisées ailleurs et dont nous aurons à faire usage ici.

Comme plus haut désignons par C_m le demi-cône de sommet m déduit de C par translation et par $-C_m$ son opposé par le sommet.

1°. Si m' appartient à C_m, $C_{m'}$ y est contenu tout entier.

2°. Si m' est dans [intérieur à] C_m, m est dans [intérieur à] $-C_{m'}$.

3°. Un arc simple $\widehat{ab}$ possèdant en chacun de ses points intérieurs m une semi-tangente[11]) à droite dans C_m, est contenu tout entier dans C_a et dans $-C_b$.

Les deux premiers énoncés sont des remarques presqu'évidentes, que j'avais formulées, sous une forme un peu différente, dans un travail précédent[12]). Considérons le premier, soit I le symétrique de m par rapport à m'. Ce point est dans C_m. D'autre part $C_{m'}$ est l'homothétique de C_m par rapport au point I, dans le rapport $\frac{1}{2}$. Donc I appartient à $C_{m'}$. Soit alors q' un point quelconque de $C_{m'}$, et q son homothétique par rapport à I dans le rapport 2. q appartient à C_m, donc tout le segment Iq (puisque C est convexe), et par suite le point q'.

---

[11]) En un point d'accumulation m d'un ensemble E, une demi-droite mt est une *semi-tangente* en m si tout demi-cône de révolution de sommet m et d'axe mt contient des points de E aussi voisins de m que l'on veut. (L'ensemble des semi-tengentes est le contingent de M. G. Bouligand.)

Les expressions: semi-tangente à droite, semi-tangente à gauche en un point d'un arc simple, ont, d'après ce qui précède, un sens évident. Lorsque les semi-tangentes pour un côté déterminé se réduisent à une demi-droite *unique*, c'est *la demi-tangente* pour le côté considéré.

[12]) A. Marchaud, Sur les demi-sécantes et les semi-tangentes aux ensembles [Journ. de Math. (9) **12** (1933), 418].

Pour justifier le second énoncé, il suffit de remarquer que C_m et $-C_{m'}$, sont symétriques par rapport au milieu de mm' [13]).

12. Considérons maintenant le troisième énoncé. Il reproduit un Lemme, que j'ai utilisé récemment [14]). Je l'avais déduit d'un proposition générale sur laquelle nous reviendrons plus loin [n⁰. 31]. En voici une démonstration directe.

Soit ε un angle assez petit pour que $(C)_\varepsilon = \Gamma$ soit un demi-cône convexe. L'hypothèse peut alors se traduire ainsi: m étant un point intérieur à un arc $\widehat{a'b'}$ de $\widehat{ab}$ $(a < a' < b' < b)$, il y a dans Γ_m, en dehors de m, des points de $\widehat{mb'}$. Ceci posé, supposons que $\widehat{a'b'}$ possède un point m_0, compris entre a' et b', extérieur à $-\Gamma_{b'}$. Alors b' est extérieur à Γ_{m_0} [n⁰. 11, 2⁰]. Considérons l'ensemble E des points de $\widehat{m_0b'}$ non extérieurs à Γ_{m_0}. Par hypothèse cet ensemble n'est pas vide, d'autre part, il est évidemment fermé sur $\widehat{a'b'}$. Soit m_1 la borne à droite de E sur cet arc; m_1 est dans Γ_{m_0}, il est donc distinct de b'. Par suite Γ_{m_1} contient des points de $\widehat{m_1b'}$. Comme Γ_{m_1} est contenu dans Γ_{m_0} [n⁰. 11, 1⁰], il y a contradiction. Nous avons donc établi que tout point de $\widehat{ab'}$, distinct de a, est dans $-\Gamma_{b'}$; il en est de même de a puisque $\widehat{ab}$ est un ensemble fermé. Mais a faisant partie de $-\Gamma_{b'}$, b' est dans Γ_a [n⁰. 11, 2⁰]. Ceci ayant lieu quel que soit b', l'arc $\widehat{ab}$ est tout entier dans Γ_a. Le même raisonnement montre que $\widehat{a'b}$ est dans Γ_a, il en résulte que a' est dans $-\Gamma_b$. Ceci ayant lieu quel que soit a', tout l'arc $\widehat{ab}$ est dans ce demi-cône. En définitive, aussi petit que soit ε, l'arc $\widehat{ab}$ est dans Γ_a et $-\Gamma_b$, il est donc dans C_a et $-C_b$. La démonstration est achevée.

II. Integrales d'un champ borné et continu de demi-cônes convexes.

13. Considérons, par rapport à trois axes rectangulaires $Oxyz$, le domaine $(R) = \{0 \leqq x \leqq 1\}$. A tout système d'équations différentielles

---

[13]) On observera que la convexité n'intervient pas dans cette démonstration, tandis qu'elle est indispensable à l'exactitude du premier énoncé.

[14]) A. Marchaud, Sur les champs de demi-droites et les équations différentielles du 1⁰ ordre [Bull. Soc. Math. de France **62** (1934), 2—38]. On trouvera dans ce Travail un exemple montrant que la proposition serait fausse pour des demi-cônes non convexes.

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z),$$

où $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$ sont des fonctions *bornées et continues* dans (R), correspond dans ce domaine un champ de demi-droites. En effet, à chaque point $m(x, y, z)$ on fait correspondre la demi-droite $D(m)$, d'origine m, et de coefficients angulaires $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$. Suivant une expression que j'ai utilisée dans le Travail cité au numéro précédent, le champ $D(m)$ est borné en direction par rapport à Ox et continu dans (R). Une intégrale à droite du système (4), issue d'un point a, est un arc simple $\widehat{ab}$ admettant partout, sauf en b, la demi-droite du champ comme demi-tangente à droite, et partout, sauf en a, la demi-droite opposée comme demi-tangente à gauche.

Attachons à chaque point m de (R) non pas une demi-droite, mais un demi-cône convexe bien déterminé $C(m)$, de sommet m, et satisfaisant aux conditions suivantes.

1⁰. Il existe un demi-cône de révolution (non plat) Γ de sommet O et d'axe Ox, tel que l'on ait

$$C(m) \leqq \Gamma,$$

quel que soit m dans (R),

2⁰. $C(m)$ varie continuement avec m, autrement dit, m_0 étant un point quelconque de (R), l'écart $[C(m_0), C(m)]$ tend vers zéro quand m tend vers m_0 [en restant dans (R)].

Je dirai que l'on a défini dans (R) un *champ de demi-cônes convexes, borné en direction par rapport à Ox et continu.* Le cas où $C(m)$ se réduit à une demi-droite unique, soit en certains points, soit partout n'est pas exclu.

Il est naturel d'appeler *intégrale du champ, issue du point a,* tout arc simple $\widehat{ab}$ dont les semi-tangentes à droite en chaque point m sont toutes dans $C(m)$, et les semi-tangentes à gauche dans $-C(m)$, sauf bien entendu en b pour les semi-tangentes à droite et en a pour les semi-tangentes à gauche.

Une *intégrale* sera nécessairement un *arc rectifiable,* et par suite possèdera une tangente presque partout. Cette rectificabilité est facile à établir directement. On peut aussi la déduire de la proposition suivante: Une courbe de Jordan, qui possède en chaque point, sauf peut-être aux extrémités, une semi-tangente faisant avec un axe fixe un angle au plus égal à une constante moindre que $\frac{\pi}{2}$, est rectifiable [15]).

[15]) A. Marchaud, Sur les demi-sécantes et les semi-tangentes aux ensembles [Journ. de Math. (9) **12** (1933), n⁰. 15].

14. M. Masuo Fukuhara [16]) a déjà considéré des champs tels que $C(m)$ dans le cas particulier où ce demi-cône est une pyramide dont les faces sont parallèles aux axes Ox et Oy. M. Fukuhara avait en vue le théorème suivant, dont on trouvera plus loin l'extension aux intégrales d'un champ de demi-cônes convexes [n⁰. 28]:

Soit G la région remplie par les intégrales de (4) issues de O, tout point de la frontière de G est sur une intégrale issue de O située toute entière sur la frontière de G.

C'est un autre problème qui m'a conduit à étudier les intégrales d'un champ de demi-cônes convexes: Une intégrale à droite du système (4), issue de a, est un continu admettant en chacun de ses points, distincts de a, la demi-droite opposée à $D(m)$ pour une de ses semi-tangentes. A quelle condition un continu possédant cette propriété sera-t-il nécessairement une intégrale? Il est remarquable que la condition se réduise à celle-ci (évidemment nécessaire): *l'intégrale à droite issue de a est unique.*

Pour résoudre ce problème, on aurait pu se borner à des champs de demi-cônes particuliers, de révolution par exemple. Les démonstrations auraient été à peine plus simples. Par contre, en considérant des demi-cônes convexes quelconques, nous aurons l'avantage d'obtenir des résultats intéressants se rattachant à la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Dans le but de généraliser plus encore, on pourrait avoir l'idée de faire intervenir des demi-cônes non convexes. Nous verrons par la suite qu'une telle généralisation ne donnerait rien [n⁰. 28].

Il y a pourtant une généralisation intéressante possible. Dans mon Mémoire cité plus haut „Sur les Champs de demi-droites et les équations différentielles du premier ordre", j'ai montré que le système (4) peut admettre des intégrales continues sans que le champ $D(m)$ soit continu. Il suffit que ce dernier possède une certaine propriété, beaucoup moins restrictive que la continuité, que j'appelle la „régularité". On pourrait faire un étude analogue pour les champs de demi-cônes convexes. Il m'a semblé préférable de traiter d'abord le cas beaucoup plus simple des champs continus.

Propriétés des intégrales.

15. Je commencerai par établir un résultat important, qui nous donnera une condition suffisante pour qu'un arc simple soit une intégrale du champ $C(m)$. C'est le suivant:

---

[16]) M. Fukuhara, Sur les systèmes d'équations différentielles ordinaires [Jap. Journ. of Math. 6 (1930), 269—299].

$C(m)$ étant un champ continu, satisfaisant aux conditions du numéro 13, *si un arc simple* $\widehat{ab}$ *admet en tout point intérieur* m *au moins une semi-tangente à droite dans le demi-cône* $C(m)$, *alors en chaque point* $\bar{m}$, *distinct de* b, *toutes les semi-tangentes à droite sont dans le demi-cône* $C(\bar{m})$, *et en tout point* $\bar{m}$, *distinct de* a, *toutes les semi-tangentes à gauche sont dans* $-C(\bar{m})$.

En effet, donnons-nous un point m_0 de $\widehat{ab}$, intérieur à l'arc. A tout nombre positif ε on peut faire correspondre un arc partiel $\widehat{m_1 m_2}$ de $\widehat{ab}$, $(m_1 \leqq m_0 < m_2)$, tel que pour chacun point m de $\widehat{m_1 m_2}$, l'écart $[C(m_0), C(m)]$ soit moindre que ε. On aura alors

$$C(m) \leqq [C(m_0)]_\varepsilon,$$

quel que soit m sur $\widehat{m_1 m_2}$. Nous supposerons ε assez petit pour que $[C(m_0)]_\varepsilon$ soit un demi-cône convexe — ce qui est possible en vertu de l'hypothèse 1° du numéro 13 —, on déduit alors de la proposition 3° du numéro 11, que $\widehat{m_0 m_2}$ est tout entier dans $[C(m_0)]_\varepsilon$ et que $\widehat{m_1 m_0}$ est tout entier dans $-[C(m_0)]_\varepsilon$. Il en résulte que toutes les semi-tangentes à droite en m_0 sont dans $[C(m_0)]_\varepsilon$ et toutes les semi-tangentes à gauche dans $-[C(m_0)]_\varepsilon$. Comme ceci a lieu quel que soit ε, toutes ces semi-tangentes sont respectivement dans $C(m_0)$ et $-C(m_0)$.

Avec des modifications évidentes la démonstration est valable lorsque m est en a ou en b. La proposition est donc bien établie.

Du théorème précédent il résulte qu'un arc simple $\widehat{ab}$ sera une intégrale pourvu seulement qu'il possède en chaque point intérieur *au moins une semi-tangente* à droite dans le demi-cône du champ en ce point. De plus, si $\widehat{ab}$ est une intégrale du champ $C(m)$, issue de a, $\widehat{ba}$ est une intégrale du champ $-C(m)$, issue de b.

16. Avant d'aller plus loin, il sera commode d'introduire les notions de *module de continuité* d'un champ et de suites *uniformément convergentes* de champs continus. Considérons d'abord un champ $C(m)$, borné en direction par rapport à Ox et continu dans (R). Soit D un domaine *borné et fermé*, contenu dans (R) — par exemple l'ensemble des points de (R) contenus dans un cylindre de révolution d'axe Ox — le Lemme de Borel-Lebesgue et la propriété de l'écart exprimée par l'inégalité (3) du numéro 10 permettent d'affirmer que le champ est uniformément continu dans D, c'est-à-dire que, ε étant donné, on peut trouver η de manière que l'inégalité $mm' < \eta$ entraine l'inégalité

$$[C(m),\ C(m')] < \varepsilon,$$

quels que soient m et m' dans D. Ceci posé, désignons par $\omega(\delta)$ la borne supérieure de $[C(m), C(m')]$ pour l'ensemble des couples mm' de D tels que la distance mm' soit au plus égale à δ. Par analogie avec le module de continuité d'une fonction de variables réelles, on appellera $\omega(\delta)$ module de continuité du champ dans D. Il est immédiat que $\omega(\delta)$ est une fonction non décroissante, qui tend vers zéro avec δ.

Considérons maintenant une suite de champs définis dans (R),

$$C_1(m),\ C_2(m),\ \ldots,\ C_p(m),\ \ldots$$

On dira qu'elle converge uniformément vers le champ $C(m)$, si l'écart $[C(m), C_p(m)]$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{p}$. Des propriétés de l'écart, on déduit aisément que si les champs de la suite sont, dans leur ensemble, bornés en direction par rapport à Ox et continus, le champ limite $C(m)$ sera lui-même borné en direction par rapport à Ox et continu. En effet, s'il existe un demi-cône de révolution Γ tel que l'on ait $C_p(m) \leqq \Gamma$, quels que soient m et p, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, on peut écrire

$$C(m) \leqq [C_p(m)]_\varepsilon \leqq (\Gamma)_\varepsilon,$$

quel que soit m, pourvu que p soit assez grand.

Pour établir la continuité, il suffit de calquer la démonstration classique, relative à la continuité de la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues.

Voici encore une remarque, que nous utiliserons plusieurs fois. Soit $C(m)$ borné en direction par rapport à Ox et continu dans (R). Donnons-nous une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p, \ldots$ ayant pour limite zéro, et posons

$$C_p(m) = [C(m)]_{\varepsilon_p}.$$

Nous supposerons les ε_p assez petits pour que les $C_p(m)$ soient des demi-cônes convexes — ce qui est possible, puisque $C(m)$ est borné en direction. Je dis que chaque $C_p(m)$ est borné en direction par rapport à Ox et continu dans (R), et que la suite $C_1(m)$, $C_2(m), \ldots, C_p(m), \ldots$ converge uniformément vers $C(m)$. Cela résulte immédiatement des inégalités (2) et (3) du numéro 10. On en effet,

$$\text{écart } \{[C(m)]_{\varepsilon_p},\ [C(m)]\} = \varepsilon_p,$$

et

$$\text{écart } \{[C(m')]_{\varepsilon_p},\ [C(m)]_{\varepsilon_p}\} \leqq [C(m'),\ C(m)].$$

17. Nous allons établir maintenant un résultat fondamental, dont nous déduirons l'existence et les propriétés des intégrales. Soit $C_1(m), C_2(m), \ldots, C_p(m), \ldots$ une suite uniformément convergente de champs bornés en direction par rapport à Ox et continus dans (R), cette suite ayant pour limite le champ $C(m)$ — forcément borné en direction et continu. Supposons connue pour chaque champ $C_p(m)$ une intégrale $\widehat{a_p b_p}$, ayant son extrémité b_p dans le plan $x = 1$; supposons enfin que la suite $a_1, a_2, \ldots, a_p, \ldots$ ait pour limite un point a. Je vais montrer que l'on peut extraire de la suite des intégrales une suite partielle convergeant uniformément vers une intégrale $\widehat{ab}$ du champ $C(m)$.

En effet, prolongeons chaque intégrale $\widehat{a_p b_p}$ vers la gauche jusqu'au plan $x = 0$ par le segment de droite $a_p a'_p$ parallèle à Ox. Chaque arc $a'_p a_p + a_p b_p$ est représenté par des fonctions $y = y_p(x)$, $z = z_p(x)$, continues dans l'intervalle $(0, 1)$. Ces fonctions sont à nombres dérivés bornés et de plus sont bornées dans leur ensemble. On peut donc extraire de la suite $\{a'_p b_p\}$ une suite partielle convergeant vers une limite $\widehat{a'b}$. Il est toujours permis de supposer que la suite partielle est la suite donnée. Comme a_p est sur $\widehat{a'_p b_p}$ et tend vers a, il faut que ce dernier point soit sur $\widehat{a'b}$. Soit $\widehat{ab}$ la partie de $\widehat{a'b}$ située à droite et dans la plan mené par a parallèment à $x = 0$. Je dis que $\widehat{ab}$ est une intégrale du champ $C(m)$, issue de a. Pour le prouver, nous établirons que $\bar{m}$ étant un point quelconque intérieur à $\widehat{ab}$, l'une au moins des semi-tangentes à droite en $\bar{m}$ est dans $C(\bar{m})$ [n⁰. 15].

Donnons-nous un nombre positif ε; on peut trouver une sphère S, centrée sur $\bar{m}$, telle que l'écart $[C(\bar{m}), C(m)]$ soit moindre que ε pour tout point m situé dans S. D'autre part, la suite $\{C_p(m)\}$ étant uniformément convergente, l'écart $[C(m), C_p(m)]$ sera moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$ quel que soit m pourvu que p surpasse une certaine valeur P. Dans ces conditions on aura, quels que soient m dans S et p supérieur à P,

$$C_p(m) \leqq [C(\bar{m})]_\varepsilon.$$

Ceci posé, on peut trouver sur $\widehat{ab}$, à droite de $\bar{m}$, un arc $\widehat{\bar{m}\mu}$ intérieur à S, soient $\bar{x}$ et ξ les abscisses de ses extrémités. En vertu de la convergence uniforme de $\widehat{a'_p b_p}$ vers $\widehat{a'b}$, l'arc $\widehat{\bar{m}_p \mu_p}$ de $\widehat{a'_p b_p}$ limité aux points d'abscisses $\bar{x}$ et ξ, sera lui aussi intérieur à S, si P est choisi assez grand. Comme $\bar{m}$ est intérieur à $\widehat{ab}$, et que a_p tend vers a, l'arc $\widehat{\bar{m}_p\mu_p}$ fait partie de $\widehat{a_p b_p}$ dès que p est assez grand; c'est donc une intégrale du champ $C_p(m)$ issue de $\bar{m}_p$. Il résulte alors de la proposition 3° du numéro 11, et de l'inégalité précédente, que l'arc $\widehat{\bar{m}_p\mu_p}$ est contenu dans le demi-cône $[C(\bar{m})]_\varepsilon$ de sommet $\bar{m}_p$. Mais $\bar{m}_p$ tendant vers $\bar{m}$, la limite $\widehat{\bar{m}\mu}$ de $\widehat{\bar{m}_p\mu_p}$ est nécessairement dans le demi-cône $[C(\bar{m})]_\varepsilon$, qui se déduit du précédent par la translation $\bar{m}_p\bar{m}$. En définitive, toutes les semi-tangentes à droite en $\bar{m}$ sont dans $C(\bar{m})$, car ε est aussi petit que l'on veut. Ainsi il est bien établi que l'arc $\widehat{ab}$ est une intégrale du champ $C(m)$.

On remarquera que la conclusion subsiste si a_p est constamment confondu avec a, ou si $C_p(m) = C\,(m)$ quel que soit p, ou bien si ces deux conditions sont réalisées simultanément. Enfin $\widehat{ab}$ est évidemment la limite métrique de la suite $\{\widehat{a_p b_p}\}$.

Comme il a été dit plus haut, le résultat du numéro précédent est fondamental. Nous allons en déduire d'abord l'existence des intégrales, en utilisant la méthode classique des lignes polygonales de Cauchy-Lipschitz. Soit toujours $C(m)$ le champ donné, satisfaisant aux hypothèses du numéro 13, et désignons par k le demi-angle au sommet de Γ. Donnons-nous un angle α, moindre que $\frac{\pi}{2} - k$, et posons $\Gamma' = (\Gamma)_\alpha$, ce dernier ensemble est alors un demi-cône de révolution. Soit a un point de (R), le champ $C(m)$ est uniformément continu dans le domaine D, borné et fermé, commun à (R) et Γ'_a (demi-cône déduit de Γ' par translation). Désignons par $\omega(\delta)$ le module de continuité du champ dans D. Ceci posé, choissons δ de manière que $\omega(\delta)$ soit moindre que α, et $\delta' > 0$ moindre que δ. Menons par a un vecteur $\overrightarrow{am_1}$ appartenant à $C(a)$ de longueur comprise entre δ' et δ, de même par m_1 un vecteur $\overrightarrow{m_1m_2}$ appartenant à $C(m_1)$ de longueur comprise entre δ' et δ, et ainsi de suite. Au bout d'un nombre fini d'opérations un des vecteurs atteindra, ou traversera le plan $x = 1$. Nous formerons de la sorte une ligne polygonale L, d'origine a et d'extrémité dans le plan $x = 1$. La ligne L est dans D, car elle possède en tout point intérieur une demi-tangente à droite parallèle à une demi-droite de Γ et a fortiori de Γ'. Je dis que L est une intégrale du champ $[C(m)]_{\omega(\delta)}$. En effet, soit m un point intérieur de L, il appartient à un vecteur $\overrightarrow{m_p m_{p+1}}$, $(m_p \leqq m < m_{p+1})$.

Les points m_p et m appartenant à D, l'écart $[C(m_p), C(m)]$ est au plus égal à $\omega(\delta)$, puisque $m_p m$ ne surpasse pas δ. On a donc

$$C(m_p) \leqq [C(m)]_{\omega(\delta)}.$$

Or, par construction, la demi-droite $m_p m_{p+1}$ appartient à $C(m_p)$, et c'est la demi-tangente à droite à L en m. La ligne L admettant en chaque point intérieur une demi-tangente à droite dans le demi-cône du champ $[C(m)]_{\omega(\delta)}$ est bien une intégrale de celui-ci.

Il suffit alors de considérer une suite de lignes $L_1, L_2, \ldots$ correspondant à des longueurs $\delta_1, \delta_2, \ldots$ ayant pour limite zéro. D'après le résultat du numéro précédent on pourra extraire de la suite $L_1, L_2, \ldots$ une suite partielle ayant pour limite une intégrale de $C(m)$ issue de a, car les champs $C_p = [C(m)]_{\omega(\delta_p)}$ convergent uniformément vers $C(m)$.

19. Ainsi qu'on la spécifié plus haut, il s'agira uniquement dans ce Travail de *champs continus dans* (R) *et bornés en direction par rapport à* Ox *dans ce domaine.* Pour simplifier les énoncés, ces hypothèses ne seront plus rappelées. Nous ne rappellerons pas non plus que *les intégrales sont toujours rectifiables, et possèdent presque partout une tangente.* Si nous rassemblons les résultats obtenus dans les deux derniers numéros, nous pouvons énoncer les propositions suivantes.

THEOREME I. (Théorème d'existence). *De tout point de* (R) *part au moins une intégrale d'un champ donné* $C(m)$, *intégrale qui peut être prolongée jusque dans le plan* $x = 1$.

THEOREME II. (Théorème de compacité). *Soient* $C_1(m)$, $C_2(m), \ldots,$ *une suite de champs convergeant uniformément vers le champ* $C(m)$, *et, pour chaque champ* $C_p(m)$, *une intégrale* $\widehat{a_p b_p}$. *Si la suite* $a_1, a_2, \ldots,$ *admet un point d'accumulation* a *à distance finie, on peut extraire de la suite* $\{\widehat{a_p b_p}\}$ *une suite partielle ayant pour limite une intégrale* $\widehat{ab}$ *de* $C(m)$.

Lorsque $C(m)$ se réduit partout à une demi-droite unique, les deux résultats précédents sont bien connus.

Emission d'un point, émission d'un ensemble, par un champ.

20. Soit $C(m)$ un champ donné et un point a de (R). *L'émission de* a *par le champ* $C(m)$ est l'ensemble $E[C(m), a]$ des points de (R) situés sur une intégrale au moins issue de a. De même *l'émission d'un ensemble* A *par le champ* $C(m)$ sera l'ensemble des points de (R) pouvant être atteints par des intégrales issues de points de A — ou encore l'ensemble des émissions des points de A —

on la désignera par $E[C(m), A]$. Dans le cas particulier où $C(m)$ se réduit partout à une demi-droite unique, l'émission de a est appelée „région" ou „zone d'émission" de a, suivant les auteurs. Lorsque $C(m)$ se déduit partout par translation d'un demi-cône C, l'émission d'un point a est évidemment la partie de $C(a)$ contenue dans (R).

Il résulte immédiatement de la proposition 3^0 du numéro 11, et du théorème de compacité, que *l'émission d'un ensemble borné et fermé est elle-même un ensemble borné et fermé.*

Voici d'autre part, deux propriétés qui sont des conséquences directes de la définition de l'émission.

Si A' appartient à $E[C(m), A]$, $E[C(m), A']$ en fait partie toute entière.

Proposition tout-à-fait semblable à celle du numéro 11, 1^0.

Soient A_1 un ensemble contenant A, et $C_1(m)$ un champ dont le demi-cône contient partout $C(m)$; on a:

$$E[C_1(m), A_1] \supset E[C(m), A].$$

Champs opposés. Nous aurons à considérer simultanément des champs qu'il est naturel d'appeler opposés. Le *champ opposé* à un champ $C(m)$ est celui dont le demi-cône, en chaque point m, est $-C(m)$. Si le premier est borné en direction par rapport à Ox et continu, le second est borné en direction par rapport à la direction opposée et continu.

Une intégrale du champ $-C(m)$, issue d'un point a', est un arc simple $\widehat{a'b'}$ dont les semi-tangentes postérieures, en chaque point m, sont toutes dans $-C(m)$ et les semi-tangentes antérieures [17]) dans $C(m)$ — sauf bien entendu en b' pour les postérieures et en a' pour les antérieures. Une intégrale d'un champ donné, parcourue en sens inverse, est une intégrale du champ opposé.

L'émission d'un ensemble A par le champ $-C(m)$ se définira comme celle par le champ $C(m)$, c'est l'ensemble des points de (R), qui peuvent être atteints par les intégrales de $-C(m)$ issues des points de A. Nous la désignerons par $E[-C(m), A]$.

De ces définitions, on déduit immédiatement que *si un point b*

---

[17]) Nous ne disons pas „à droite" ou „à gauche" pour éviter toute confusion avec le sens des x croissants et le sens opposé. Dans le cas où $C(m)$ se réduit partout à une demi-droite unique, de coefficients angulaires f et g, [no. 13], les intégrales de $C(m)$ sont des intégrales à droite du système (4), celles de $-C(m)$ des intégrales à gauche.

appartient à $E[C(m), a]$, *le point a appartient* à $E[-C(m), b]$. Nous verrons plus loin [n⁰. 24, en note], qu'il n'est pas possible de remplacer „appartient" par „intérieur", comme dans l'énoncé analogue du numéro 2, [2⁰].

Dans la suite, pour éviter toute confusion, je désignerai toujours par la notation $C(m)$ les champs bornés en direction par rapport à Ox, et par la notation $-C(m)$ les champs bornés en direction par rapport à la direction opposée.

21. Je vais maintenant établir une propriété importante des émissions. Soient un champ $C(m)$ et un ensemble A, borné et fermé situé dans (R). Posons

$$\mathcal{C}_p(m) = [C(m)]_{\frac{\pi}{2p}}, \quad \mathcal{A}_p = (A)_{\frac{1}{p}}.$$

Le champ $\mathcal{C}_p(m)$ tend uniformément vers le champ $C(m)$, et $\mathcal{A}_p$, déduit de A par la construction de Cantor-Minkowski avec des sphères de rayon $\frac{1}{p}$ est un ensemble fermé, qui tend vers A. Si $\mathcal{A}_p$ a des points extérieurs à (R), on le réduira à sa partie non extérieure à (R).

Je vais montrer que l'émission $E[\mathcal{C}_p(m), \mathcal{A}_p]$ tend vers l'émission $E[C(m), A]$, quand p augmente indéfiniment.

En chaque point le demi-cône $\mathcal{C}_p(m)$ contient $\mathcal{C}_{p+1}(m)$ et $C(m)$, quel que soit p, de même, chaque $\mathcal{A}_p$ contient le suivant et A. Il résulte alors de la première remarque faite au numéro précédent que chaque émission $E[\mathcal{C}_p(m). \mathcal{A}_p]$ contient la suivante et $E[C(m), A]$. La limite de $E[\mathcal{C}_p(m), \mathcal{A}_p]$, le produit

$$H = E[\mathcal{C}_1(m), \mathcal{A}_1] \cdot E[\mathcal{C}_2(m), \mathcal{A}_2] \cdot \ldots \cdot E[\mathcal{C}_p(m), \mathcal{A}_p] \cdot \ldots,$$

contient donc $E[C(m), A]$. Il suffira par suite d'établir que tout point m de H appartient à $E[C(m), A]$. Le point m faisant partie de chaque $E[\mathcal{C}_p(m), \mathcal{A}_p]$, il existe, pour chaque valeur de p, une intégrale $\widehat{a_p m}$ du champ $\mathcal{C}_p(m)$, issue d'un point a_p de A. De la suite $\{a_p\}$ on peut extraire une suite partielle $a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots$, ayant pour limite un point a de A, puisque cet ensemble est fermé. Mais, d'après le résultat du numéro 17, la suite $\{a_{p_n} m\}$ contient une suite partielle convergeant vers une intégrale $\widehat{am}$ du champ $C(m)$. Le point m fait donc partie de $E[C(m), A]$. La propriété annoncée est donc bien établie. Nous allons en déduire un résultat un peu plus général.

Considérons un champ $C_\lambda(m)$ et un ensemble borné et fermé A_μ, qui tendent respectivement vers le champ $C(m)$ et A, quand

λ et μ tendent vers λ_0 et μ_0, la convergence du champ étant uniforme. Supposons de plus que A_μ contienne A et que, en tout point m de (R), le demi-cône $C_\lambda(m)$ contienne $C(m)$. Je dis que l'émission $E[C_\lambda(m), A_\mu]$ tend vers $[C(m), A]$ quand λ et μ tendent vers λ_0 et μ_0. En effet, donnons-nous p, on peut choisir λ et μ de manière à avoir

$$\mathcal{C}_p(m) \geqq C_\lambda(m) \geqq C(m), \quad \mathcal{A}_p \supset A_\mu \supset A,$$

et, par suite,

$$E[\mathcal{C}_p(m), \mathcal{A}_p] \supset E[C_\lambda(m), A_\mu] \supset E[C(m), A].$$

Mais, d'après la propriété 3° du numéro 1, l'écart des deux derniers termes des relations précédentes est au plus égal à celui des extrêmes, lequel est aussi petit que l'on veut.

Si l'on remarque enfin que la frontière de $E[C_\lambda(m), A_\mu]$ tend vers celle de $E[C(m), A]$, [n° 3], on obtient en définitive le résultat suivant.

Soient $C_\lambda(m)$ un champ convergeant uniformément vers le champ $C(m)$, A_μ un ensemble borné et fermé ayant pour limite A. Si l'on a, quels que soient m, λ et μ,

$$C_\lambda(m) \geqq C(m), \quad \text{et} \quad A_\mu \supset A,$$

l'émission $E[C_\lambda(m), A_\mu]$ et sa frontière tendent respectivement vers $E[C(m), A]$ et sa frontière.

On peut ajouter que $E[C_\lambda(m), A_\mu]$ contient sa limite.

22. Je vais montrer que le résultat précédent subsiste lorsque l'on considère seulement les *frontières latérales* des émissions. Définissons d'abord cette expression. Soient $C(m)$ un champ et A un ensemble borné et fermé. D'après la définition de l'émission, *tous* les points de $E[C(m), A]$ situés dans $x = 1$ sont sur sa frontière. Mais, dans le cas général, la plupart de ces points sont des points frontières en quelque sorte artificiellement: ils cesseraient de l'être si le champ et l'émission étaient prolongés à droite de $x = 1$. Considérons le domaine $(R_h) = \{0 \leqq x \leqq 1 + h\}$, $(h > 0)$, et prolongeons le champ $C(m)$ dans ce domaine, en y conservant les hypothèses du numéro 13 [18]). Désignons par $E_h[C(m), A]$ l'émission de A dans (R_h). Elle coïncide avec $E[C(m), A]$ dans (R).

J'appelerai *frontière latérale* de $E[C(m), A]$ la partie de la

[18]) Ceci est possible d'une infinité de manières. On pourra, par exemple procéder ainsi: soit m un point de (R_h) extérieur à (R); projetons m en m_1, orthogonalement sur $x = 1$, on prendra $C(m) = C(m_1)$.

frontière de E_h contenue dans (R). Il s'agit de montrer que cette définition est indépendante de la manière dont le champ a été prolongé. Pour cela il suffira évidemment de caractériser les points frontières de $E[C(m), A]$, situés en dehors de $x = 1$, par une propriété ne faisant pas intervenir ce qui se passe à leur droite. Cette propriété est la suivante: *pour qu'un point $\bar{m}$ de $E[C(m), A]$ d'abscisse $\bar{x} < 1$, soit un point frontière, il faut et il suffit que toute sphère centrée sur $\bar{m}$ renferme des points d'abscisse $\leqq \bar{x}$ extérieurs à l'émission.*

La condition est évidemment nécessaire. Je dis qu'elle est suffisante. En effet, supposons qu'il existe une sphère S, de centre $\bar{m}$, telle que tous ses points d'abscisse au plus égale à $\bar{x}$ appartiennent à $E[C(m), A]$. Je vais montrer que $\bar{m}$ est un point intérieur. On a, quel que soit m, $C(m) \leqq \Gamma$, où Γ est un demi-cône de révolution d'axe Ox [n⁰. 13]. Considérons le demi-cône γ, inversement homothétique à Γ, qui passe par le grand cercle de S situé dans le plan $\bar{P}$ d'abscisse $\bar{x}$. On peut supposer S assez petite pour que le sommet de γ soit dans (R). Il est presqu' évident que la partie de γ, située à droite de $\bar{P}$, fait partie de $E[C(m), A]$. En effet, soit m' un point de γ satisfaisant à cette condition. Il part de m' au moins une intégrale du champ $-C(m)$, cette intégrale est située dans le demi-cône $-\Gamma_{m'}$, de sommet m', [n⁰. 11, 3⁰], lequel est lui-même dans γ [n⁰. 11, 1⁰]. L'intégrale en question coupe par suite $\bar{P}$ en un point de S, donc de $E[C(m), A]$. Il en résulte que m' fait partie de cette émission.

Pour étendre le résultat obtenu à la fin du numéro précédent aux frontières latérales, il sera commode de faire une remarque préliminaire. Soit m_1 un point de la frontière latérale de E_h, situé à droite de $x = 1$, la partie commune à ce plan et au demi-cône $-\Gamma_{m_1}$ contient au moins un point de la frontière latérale de E_h [$-\Gamma_{m_1}$ désigne toujours le demi-cône, de sommet m_1, inversement homothétique à Γ].

En effet, il y a au moins une intégrale de $-C(m)$, issue de m_1, aboutissant à un point de A. Cette intégrale est dans $-\Gamma_{m_1}$ [n⁰. 11, 3⁰]. Il existe donc un point μ_1 de $-\Gamma_{m_1}$, dans $x = 1$, appartenant à E_h. D'autre part, comme m_1 est sur la frontière latérale de E_h, on peut trouver des points m_1' extérieurs à E_h, aussi voisins de m_1 que l'on veut. De chaque point m_1' part au moins une intégrale de $-C(m)$ n'ayant aucun point commun avec E_h, sans quoi m_1' en ferait partie. Soit μ_1' le point de cette intégrale situé dans $x = 1$, μ_1' est dans $-\Gamma_{m_1'}$. Le segment $\mu_1'\mu_1$ ayant un point dans E_h et un point extérieur à cet ensemble, possède un point sur sa frontière. Comme m_1' est aussi près qu'on veut de m_1, on en déduit l'existence d'un point frontière pour E_h dans $x=1$ et $-\Gamma_{m_1}$.

23. Revenons au résultat établi à la fin du numéro 21, et désignons par L et L' les frontières latérales de $E[C(m), A]$ et $E[C_\lambda(m), A_\mu]$. Je dis que L' tend vers L.

Prolongeons les champs $C(m)$ et $C_\lambda(m)$, dans (R_h), en utilisant le procédé indiqué en note au numéro précédent. Les hypothèses faites sur $C(m)$ et $C_\lambda(m)$ dans (R) seront conservées dans (R_h). Désignons par F et F' les frontières respectives (au sens ordinaire) de $E_h[C(m), A]$ et $E_h[C_\lambda(m), A_\mu]$. L'écart $[F, F'] = e'$ tend vers zéro quand λ et μ tendent respectivement vers λ_0 et μ_0. D'autre part, comme $C_\lambda(m)$ tend vers $C(m)$ uniformément, on peut trouver un demi-cône de révolution Γ', d'axe Ox, tel que l'on ait

$$C(m) \leqq C_\lambda(m) \leqq \Gamma',$$

quels que soient m dans (R_h) et λ assez voisin de λ_0.

Soit m_0 un point de L. C'est un point de F. Il existe donc un point m_1 de F' dans la sphère S de centre m_0 et de rayon e'. Supposons que m_1 n'appartienne pas à L', il est alors à droite de $x=1$, et en dehors de $x = 1+h$, si e' est inférieur à h — ce que nous supposerons. Il existe alors dans $-\Gamma'_{m_1}$, et dans $x=1$, un point m_2 de F' [n^0. 22], qui fait partie de L'. Mais la distance de m_1 à $x=1$ ne peut dépasser e', on a donc

$$m_1m_2 \leqq \frac{e'}{\cos k'}$$

en désignant par K' le demi-angle au sommet de Γ'. On en déduit

$$m_0m_2 \leqq e' + \frac{e'}{\cos k'} = e''.$$

Comme cette dernière longueur est supérieure à e', on peut affirmer que tout point de L est à une distance de L' au plus égale à e'' pourvu que e' soit moindre que h.

Un raisonnement identique au précédent montre que tout point de L' est, dans les mêmes conditions, à une distance de L au plus égale à e''. On en déduit: $[L, L'] < e''$, d'où il résulte que L' tend vers L.

En définitive, le résultat énoncé à la fin du numéro 21 devient le

Theoreme III. (Théorème de semi-continuité des émissions et de leurs frontières latérales.)

Soient $C_\lambda(m)$ un champ convergeant uniformément vers le champ $C(m)$, et A_μ un ensemble borné et fermé ayant pour limite A, quand λ et μ tendent respectivement vers λ_0 et μ_0. Si l'on a

$$C_\lambda(m) \geqq C(m), \quad \textit{et} \quad A_\mu \supset A,$$

quels que soient m, λ et μ, l'émission $E[C_\lambda(m), A_\mu]$ et sa frontière latérale tendent respectivement vers $E[C(m), A]$ et sa frontière latérale. (On peut ajouter que la première émission contient sa limite.)

Les conclusions subsistent évidemment si $C_\lambda(m) = C(m)$, ou bien $A_\mu = A$.

24. La proposition précédente généralise un résultat de M. Paul Montel, complété par Mlle Marie Charpentier, relatif à la semi-continuité des intégrales supérieure et inférieure de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ [19]).

Je vais montrer, par un exemple, que les restrictions

$$C_\lambda(m) \geqq C(m) \quad \text{et} \quad A_\mu \supset A,$$

sont indispensables à l'exactitude du Théorème [20]).

Pour simplifier, nous nous placerons dans l'espace à deux dimensions. On a défini, dans le domaine $(R) = [0 \leqq x \leqq 1]$, un champ borné en direction par rapport à Ox et continu, si l'on s'est donné, en chaque point $m(x, y)$, deux demi-droites d'origine m, dirigées vers la droite, et de pentes respectives $F(x, y)$ et $f(x, y)$, où les fonctions $F(x, y) \geqq f(x, y)$ sont bornées et continues dans (R). L'émission d'un point a est le triangle mixtiligne limité par les intégrales supérieure droite de l'équation $y' = F(x, y)$ et inférieure droite de l'équation $y' = f(x, y)$, issues de a, et la droite $x = 1$. La frontière latérale de l'émission est constituée par ces intégrales.

Nous allons définir un champ $C(m)$ de la manière suivante. Considérons l'arc de parabole $y = (x+1)^2$, $(-1 \leqq x \leqq 0)$, et

---

[19]) P. Montel, Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle [Bull. Sc. Math. **50** (1926), 207].

Mlle M. Charpentier, Thése, p. 13.

[20]) Dans certains cas simples la dernière restriction peut être remplacée par une autre, équivalente pour notre objet, dans laquelle A_μ ne contient pas forcément A. Voici un exemple: prenons pour *A un point et supposons $C(A)$ non réduit à sa frontière, il suffira que A_μ soit un point tendant vers A par l'intérieur de* $-C(A)$. En effet, limitons, l'émission $E[C_\lambda(m), A_\mu]$ par un plan situé à droite de A; soit B_μ l'ensemble obtenu, il contient A, et tend vers ce point si la distance du plan à A tend vers zéro. Or l'émission de B_μ par $C_\lambda(m)$ est la même que celle de A_μ.

la demi-tangente à droite à cette parabole au point $x = 1$. Nous formons ainsi une ligne L. Par tout point m d'ordonnée positive il passe une seule courbe $L(m)$, déduite de L par translation parallèle à Ox. La demi-droite supérieure de $C(m)$, soit $D(m)$, est la demi-tangente à droite en m à cet arc. Pour les points d'ordonnée négative ou nulle, nous prendrons $D(m)$ parallèle à Ox. Enfin la demi-droite inférieure $d(m)$, de $C(m)$, aura partout

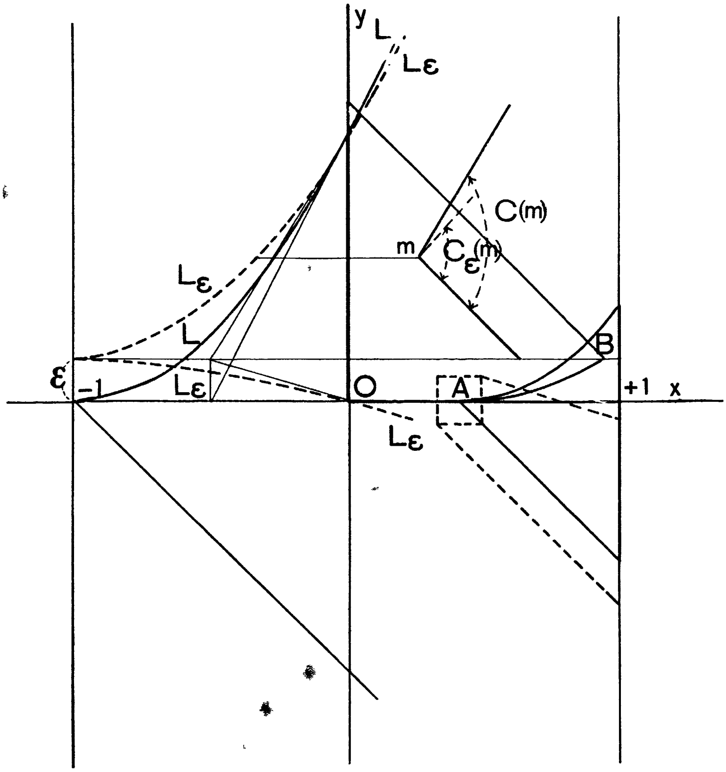

Fig. 1.

pour pente -1. Le champ $C(m)$ est évidemment borné en direction par rapport à Ox et continu. L'émission d'un point A de Ox est limitée par la ligne $L(A)$, la demi-droite de pente -1, issue de A vers la droite, et $x = 1$ [21]). [Fig. 1.]

Nous allons définir un champ voisin $C_\varepsilon(m)$, dont la demi-droite supérieure $D_\varepsilon(m)$ aura partout une pente moindre que celle

---

[21]) Cet exemple montre qu'un point B peut être *intérieur* à $E[C(m), A]$ sans que A soit *intérieur* à $E[-C(m), B]$. Il suffit de prendre B entre Ax et $L(A)$. (Figure 1).

de $D(m)$. Considérons le point $(-1, \varepsilon)$, $(0 \leqq \varepsilon \leqq \frac{1}{2})$, et construisons l'arc L' passant par ce point, et déduit de L par une affinité droite d'axe $y = 1$, et l'arc L'', passant par l'origine et déduit de L' par une affinité droite d'axe $y = \varepsilon$. Posons $L' + L'' = L_\varepsilon$. Par tout point m de (R) il passe une ligne $L_\varepsilon(m)$ et une seule, déduite de L_ε par translation parallèle à Ox. Nous prendrons pour $D_\varepsilon(m)$ la demi-tangente à droite en m à $L_\varepsilon(m)$, et pour $d(m)$ la demi-droite de pente -1. (L_ε a été figurée en trait discontinu sur la figure). Il est immédiat que la champ $C_\varepsilon(m)$ est borné en direction par rapport à Ox et continu et, de plus, qu'il converge uniformément vers $C(m)$, quand ε tend vers zéro.

Ceci posé, considérons le carré A_ε, de côtés égaux à ε, parallèles aux axes et centré sur A. L'émission de A_ε se construit aisément, elle a été représentée en traits discontinus. On voit immédiatement que cette émission a pour limite un triangle dont le côté supérieur est sur Ox.

Dans cet exemple $E[C_\varepsilon(m), A_\varepsilon]$ n'a pas pour limite $E[C(m), A]$; et pourtant A est intérieur à A_ε, mais la restriction $C_\varepsilon(m) \geqq C(m)$ n'est pas respectée.

Pour montrer que la restriction $A_\varepsilon \supset A$ est elle aussi indispensable, il suffit de prendre pour A un segment de Oy, limité par les points d'ordonnées -1 et ε. Si ε tend vers zéro en prenant alternativement des valeurs positives et des valeurs négatives, $E[C(m), A_\varepsilon]$ n'a pas de limite. La conclusion subsisterait avec un champ contenant partout $C(m)$, et convergeant uniformément vers ce dernier.

Propriétés des frontières latérales des émissions.

25. Nous allons maintenant nous occuper des propriétés des frontières latérales. Soit toujours $C(m)$ un champ donné et A un ensemble borné et fermé situé dans (R). Considérons un point m_0 de la frontière latérale de $E[C(m), A]$, et supposons que $C(m_0)$ *ne se réduise pas à sa frontière.* De cette dernière hypothèse il résulte que $[C(m_0)]_{-\varepsilon}$ est un demi-cône convexe, pourvu que ε soit assez petit [n^0. 6]. Choisissons ε de manière à satisfaire à cette condition et désignons par S_ε la sphère centrée sur m_0 telle que l'écart $[C(m_0), C(m)]$ soit au plus égal à ε, pour tout point m de S_ε. D'après le résultat du numéro 10, on aura

$$[C(m_0)]_{-\varepsilon} \leqq C(m),$$

quel que soit m dans S_ε. D'où l'on déduit immédiatement que pour tout point $\bar{m}$ de S_ε, l'ensemble commun à S_ε et au demi-cône $[C(m_0)]_{-\varepsilon}$ de sommet $\bar{m}$ est contenu dans $E[C(m), \bar{m}]$. Cette dernière remarque va nous conduire à deux résultats importants. Le premier est que *la frontière latérale* de $E[C(m), A]$ *n'a en* m_0 *aucune semi-tangente intérieure à* $C(m_0)$ (en effet, m_0 faisant partie de $E[C(m), A]$, la frontière de cet ensemble n'a aucune semi-tangente intérieure à $[C(m_0)]_{-\varepsilon}$ aussi petit que soit ε). Le second est de même nature, mais un peu moins évident. Je dis que $E[C(m), A]$ *ne contient dans* S_ε *aucun point intérieur au demi-cône* $-[C(m_0)]_{-\varepsilon}$ *de sommet* m_0. En effet, s'il existait un tel point m_1, d'après la proposition 2^0 du numéro 11, m_1 étant intérieur au demi-cône $-[C(m_0)]_{-\varepsilon}$ de sommet m_0, m_0 serait intérieur au demi-cône $[C(m_0)]_{-\varepsilon}$ de sommet m_1, donc à $E[C(m), m_1]$, en vertu de la remarque précédente. En définitive m_0 serait intérieur à $E[C(m), A]$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Mais ε pouvant être pris aussi petit que l'on veut, le résultat précédent montre que $E[C(m), A]$ *n'a en* m_0 *aucune semi-tangente intérieure à* $-C(m_0)$.

En résumé, nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Soient A *un ensemble borné et fermé et* m_0 *un point de la frontière latérale de* $E[C(m), A]$; *cette frontière latérale n'a, en* m_0, *aucune semi-tangente intérieure à* $C(m_0)$ *ou à* $-C(m_0)$.

La conclusion est en effet évidente lorsque $C(m_0)$ n'a pas de demi-droites intérieures.

26. Voici une conséquence des considérations précédentes, qui nous sera utile dans un instant. Les notations étant les mêmes, considérons un deuxième champ $C'(m)$ satisfaisant partout à la condition $C'(m) > C(m)$, et supposons toujours $C(m_0)$ *non réduit à sa frontière*. Prenons un segment de droite m_0m_1, intérieur au demi-cône $-[C(m_0)]_{-\varepsilon}$ de sommet m_0 et à S; c'est un arc d'intégrale du champ $-C(m)$, n'ayant dans $E[C(m), A]$ que le point m_0. D'autre part, il existe une intégrale $\widehat{am_0}$ de $C(m)$ issue d'un point a de A. Cette intégrale a toutes ses semi-tangentes à gauche en m_0 situées dans $-C(m_0)$, donc à l'intérieur de $-C'(m_0)$. Comme $\widehat{am_0}$ est a fortiori une intégrale de $C'(m)$, m_0 n'est pas sur la frontière latérale de $E[C'(m), A]$. Par suite, si m_1 est assez voisin de m_0; le segment m_0m_1 sera tout entier dans $E[C'(m), A]$. Mais ce segment étant une intégrale de $-C(m)$ est a fortiori une intégrale de $-C'(m)$. Si alors nous désignons par G l'ensemble des points de $E[C'(m), A]$ non intérieurs à $E[C(m), A]$, nous pouvons énoncer le résultat suivant. De tout point m_0 de la frontière latérale de $E[C(m), A]$ où $C(m_0)$ ne se réduit pas à sa frontière, part au moins une intégrale de $-C'(m)$ contenue dans G. Je dis que l'une au moins de ces intégrales peut être prolongée jusqu'à la frontière de A sans sortir de G, pourvu que $C(m)$ ne soit nulle part réduit à sa frontière. En effet, soit $\bar{x}$ la borne inférieure des abscisses des points de G pouvant être atteints sans sortir de G par des intégrales de $-C'(m)$, issues de m_0. Il existe une suite $\{\widehat{m_0\bar{m}_p}\}$ de ces intégrales telles que l'abscisse $\bar{x}_p$ de $\bar{m}_p$ tende vers $\bar{x}$. De cette suite, on peut extraire une suite partielle dans laquelle les $\bar{m}_p$ ont une limite $\bar{m}$ d'abscisse $\bar{x}$, et, de cette suite, une autre suite partielle dans laquelle les intégrales tendent vers une intégrale du champ $-C'(m)$ [Théorème II]. Il existe donc une intégrale $\widehat{\bar{m}_0\bar{m}}$ de $-C'(m)$ appartenant à G et qui ne peut être prolongée sans sortir de G. Je dis que $\bar{m}$ appartient à la frontière de A. En effet, tout d'abord, il ne peut être extérieur à $E[C(m), A]$, car on pourrait prélever sur une des intégrales du champ $C'(m)$ issues de points de A et aboutissant en $\bar{m}$ un arc $\widehat{\bar{m}'\bar{m}}$ extérieur à $E[C(m), A]$, et par suite $\widehat{m_0\bar{m}}$ pourrait être prolongé sans sortir de G. Il faut donc que $\bar{m}$ soit sur la frontière de $E[C(m), A]$. Mais le raisonnement fait au début montre que si $\bar{m}$ était en dehors de A, l'intégrale $\widehat{m_0\bar{m}}$ pourrait encore être prolongée sans sortir de G. Comme $\bar{m}$ n'est pas intérieur à A, c'est un point frontière de cet ensemble. Il existe donc bien une intégrale du champ $C'(m)$ joignant la frontière de A au point m_0, cette intégrale n'ayant aucun point intérieur à $E[C(m), A]$.

27. Ce dernier résultat va nous conduire tout naturellement à une propriété importante des frontières latérales. Soient $C(m)$ un champ et A un ensemble borné et fermé. Je vais montrer que tout point m_0 de la frontière latérale de $E[C(m), A]$ est sur une intégrale, issue d'un point frontière de A, et située toute entière sur la frontière latérale de l'émission.

Comme $C(m)$ n'a pas forcément partout des demi-droites intérieures, on ne peut pas appliquer directement le résultat du numéro précédent. Donnons-nous une suite de nombres positifs, *décroissants* au sens strict, ayant pour limite zéro: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p, \ldots$. Posons $C_p(m) = [C(m)]_{\varepsilon_p}$, on a

$$C_1(m) > C_2(m) > \ldots > C_p(m) > \ldots.$$

Si ε_1 est assez petit — ce que nous supposerons — les $C_p(m)$ sont, dans leur ensemble, bornés en direction par rapport à Ox, ils sont d'autre part continus; enfin $C_p(m)$ tend uniformément vers $C(m)$.

Désignons par e_p l'écart des frontières latérales de $E[C(m), A]$ et de $E[C_p(m), A]$, cet écart tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$.

Ceci posé, pour chaque valeur de p, $(p > 1)$, on peut trouver sur la frontière latérale de $E[C(m), A]$ un point m_0^p dont la distance à m_0 est au plus égale à e_p. Comme $C_p(m)$ n'est nulle part réduit à sa frontière, il existe [n⁰. 27] une intégrale du champ $C_p(m)$, n'ayant aucun point intérieur à $E[C_p(m), A]$, et par conséquent à $E[C(m), A]$, cette intégrale $\widehat{a_p m_0^p}$, étant issue d'un point a_p de la frontière de A. En raisonnant comme plus haut, on voit qu'il est possible d'extraire de la suite $\widehat{a_p m_0^p}$ une suite partielle convergeant vers une intégrale $\widehat{am_0}$, de $C(m)$, issue d'un point a de la frontière de A (car cette frontière est fermée). L'intégrale $\widehat{am}$ n'ayant aucun point intérieur à $E[C(m), A]$ est nécessairement sur la frontière latérale de cette émission.

28. On a vu au numéro 25 que la frontière latérale de $E[C(m), A]$ n'a, en chacun de ses points $\bar{m}$, aucune semi-tangente intérieure à $C(\bar{m})$ ou à $-C(\bar{m})$. Appelons *intégrale frontière* de $C(m)$, toute intégrale de ce champ dont les semi-tangentes à droite et les semi-tangentes à gauche en chacun de ses points $\bar{m}$ *sont toutes respectivement sur la frontière de* $C(\bar{m})$ *et celle de* $-C(\bar{m})$. Nous venons de voir qu'il existe de telles intégrales issues de tout point donné a (il suffit de supposer que A se réduit à a) [22]).

Les conclusions du numéro précédent supposent le point m_0 extérieur à A. Pour leur donner une forme plus condensée, il sera commode d'appeler *frontière latérale extérieure* la fermeture de l'ensemble des points de la frontière latérale extérieurs à A. (La fermeture d'un ensemble est la somme de cet ensemble et de son dérivé.)

Les notions d'intégrale frontière et de frontière latérale extérieure permettent de résumer le dernier résultat obtenu sous la forme du

Theoreme IV. *Soient $C(m)$ un champ et A un ensemble borné et fermé. La frontière latérale extérieure de $E[C(m), A]$ est constituée par des intégrales frontières du champ issues des points frontières de A. De plus, en chaque point m de la frontière latérale extérieure, celle-ci n'a aucune semi-tangente dans $C(m)$ ni dans $-C(m)$.*

Il y a lieu de faire ici quelques remarques sur les frontières latérales. Dans le cas où A est un point unique, la frontière latérale et la frontière latérale extérieure sont confondues. Dans

---

[22]) Le lecteur verra aisément que toute intégrale limite d'une suite d'intégrales frontières est elle-même une intégrale frontière.

le cas contraire les choses sont moins simples. La frontière latérale peut contenir des intégrales frontières situées sur la frontière de A. Pour éviter d'avoir à distinguer entre la frontière latérale et la frontière latérale extérieure, on pourrait avoir l'idée d'appeler frontière latérale ou bien

a) ce que nous avons appelé la frontière latérale extrérieure, ou bien

b) l'ensemble des intégrales frontières situées sur la frontière (au sens ordinaire).

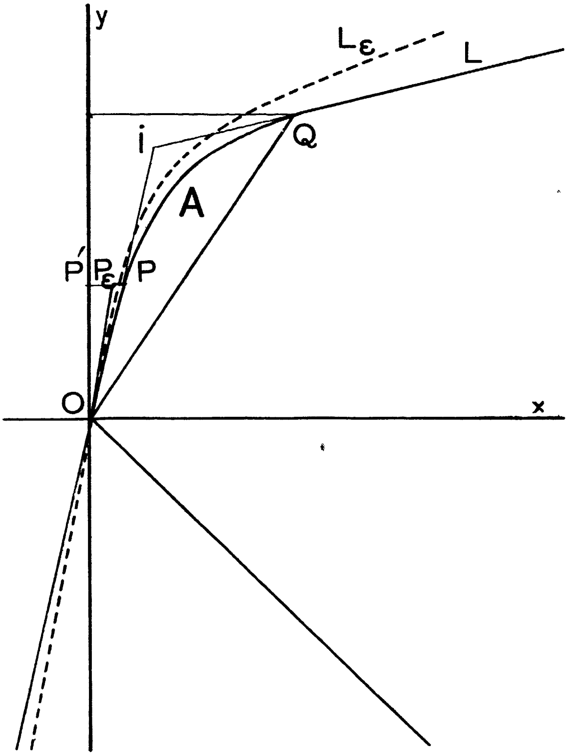

Fig. 2.

Je vais montrer par un exemple que le Théorème sur la continuité des frontières latérales ne subsisterait avec aucune de ces deux définitions. Comme au numéro 24, nous nous placerons, pour simplifier, dans l'espace à deux dimensions.

Soit I le point de coordonnées $\frac{1}{4}$ et 1 (fig. 2). Menons les demi-droites IO et IJ, cette dernière de pente $\frac{1}{4}$, et dirigée vers la droite. Par le milieu P de OI, menons un arc de cercle $\widehat{PQ}$ tangent aux deux demi-droites. Considérons alors la ligne L formée par les demi-droites PO et QJ et l'arc $\widehat{PQ}$. Par tout point m passe une ligne $L(m)$, et une seule, déduite de L par translation parallèle à Ox. Le champ $C(m)$ aura pour demi-droite supérieure en m la demi-tangente à droite à $L(m)$, et pour demi-droite inférieure la demi-droite de pente -1, dirigée vers la droite. Enfin nous prendrons pour A le domaine limité par l'arc $\widehat{OQ}$ de L et sa corde.

Il s'agit maintenant de définir un champ $C_\varepsilon(m)$ et un ensemble A_ε, satisfaisant aux hypothèses du Théorème III. Projetons orthogonalement P en P' sur Oy, et prenons un point P_ε sur le segment $P'P$, à droite de son milieu. Désignons par L_ε la ligne, passant par le milieu de PP_ε, déduite de L par une affinité droite d'axe Oy, et par $L_\varepsilon(m)$ la ligne passant par m obtenue à partir de L_ε par translation parallèle à Ox. La demi-droite supérieure de $C_\varepsilon(m)$ sera la demi-tangente à droite en m à $L_\varepsilon(m)$, la demi-droite inférieure sera celle de $C(m)$. Il est immédiat que $C_\varepsilon(m)$ est borné en direction par rapport à Ox et continu et, de plus, qu'il converge uniformément vers $C(m)$, quand P_ε tend vers P. Enfin nous prendrons pour A_ε la somme de A et du triangle OPP_ε.

Ceci posé, désignons par F_a l'arc supérieur de la frontière latérale de $E[C(m), A]$ selon la définition a), et par F_a^ε l'arc supérieur de la frontière latérale de $E[C_\varepsilon(m), A_\varepsilon]$ selon la même définition. Désignons de même par F_b et F_b^ε les arc supérieurs des frontières latérales des émissions correspondantes selon la définition b). On voit immédiatement que l'arc $\widehat{PQ}$ de L appartient à la limite de F_a^ε sans faire partie de F_a, et que l'arc $\widehat{OP}$ appartient à F_b, mais pas à la limite de F_b^ε.

28bis. Dans le cas particulier où $C(m)$ se réduit partout à une demi-droite unique, on retrouve un résultat obtenu autrement par M. Masuo Fukuhara [23]). Bien entendu, dans ce cas toutes les intégrales sont des intégrales frontières. Cela prouve en passant que les intégrales frontières constituant la frontière latérale de l'émission d'un point n'épuisent pas nécessairement toutes les intégrales frontières issues de ce point. D'ailleurs nous allons voir dans un instant que les intégrales frontières susceptibles de former des frontières latérales sont d'une catégorie spéciale.

Le principal intérêt du Théorème précédent n'est pas dans la généralisation d'un résultat de M. Fukuhara, mais dans le fait

---

[23]) M. Fukuhara, Sur les systèmes d'équations différentielles ordinaires [Japan. Journ. of Math. **6** (1930), 269—299].

qu'il constitue une introduction à l'étude géométrique de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre dont le cône élémentaire est $C(m)$. Il est en effet immédiat que *si un morceau* Σ *d'une frontière latérale extérieure est une surface pourvue d'un plan tangent — et si* $C(m)$ *a lui-même partout un plan tangent —* Σ *est une intégrale de l'équation aux dérivées partielles dont* $C(m)$ *est le cône élémentaire* [en chaque point μ de Σ, le plan tangent doit contenir au moins une demi-droite frontière de $C(\mu)$, mais aucune demi-droite intérieure, il est donc tangent à $C(\mu)$]. On observera que l'émission d'un arc de courbe donné fournit les intégrales passant par cet arc, sous la condition évidente qu'il ne soit pas intérieur à son émission. Il serait intéressant de déterminer à quelles conditions doivent satisfaire le champ et la courbe pour que la frontière latérale extérieure de l'émission soit une surface. Nous n'aborderons pas cette question ici [24]).

Je vais cependant montrer par un exemple que le Théorème précédent ne serait d'aucune utilité pour l'étude des équations aux dérivées partielles dont le cône élémentaire n'est pas convexe. Prenons $C(m) = C$, où C est un demi-cône de sommet O, dont la section par $x = 1$ est une hypocycloïde à trois rebroussements b_1, b_2, b_3. L'émission de O, comme on le voit aisément, est le trièdre défini par Ob_1, Ob_2 et Ob_3, c'est-à-dire l'enveloppante convexe de C. D'autre part, la frontière latérale de l'émission ne contient pas d'autres intégrales frontières que les arêtes du trièdre.

Pour terminer sur ce sujet, je vais faire une remarque relative aux intégrales frontières. Revenons au cas où $C(m)$ est le cône élémentaire (*convexe*) d'une équation aux dérivées partielles $F(x, y, z, p, q) = 0$, et supposons F algébrique, par exemple. La frontière latérale de l'émission d'un point n'est autre que le

---

[24]) Si l'on suppose seulement que Σ est une surface (sans lui prêter partout un plan tangent), c'est une *intégrale contingente*, au sens de M. Georges Bouligand: une surface telle qu'en chacun de ses points l'ensemble des demi-tangentes ne contient aucun rayon intérieur au cône élémentaire, mais contient au moins un rayon situé sur sa surface. (Cf. G. Bouligand, Problèmes connexes de la notion d'enveloppe de M. G. Durand [C. R. 189 (1929), 447—448] et G. Bouligand, Applications de notions infinitésimales directes à la Mécanique [Bull. Soc. Liège, (1935), 52—59].) Ce qui importe, à mon sens, ce n'est pas tant de généraliser la notion élémentaire de surface intégrale — on pourrait dire que les frontières latérales extérieures sont des intégrales généralisées — ce qui importe, c'est de déterminer des conditions aussi larges que possible pour que ces frontières soient nécessairement des surfaces. Et cette question reste à résoudre, sauf peut-être dans quelques cas très particuliers.

faisceau des caractéristiques issues de ce point. Or toutes les intégrales frontières ne peuvent être des caractéristiques [25]). D'une manière générale, les intégrales frontières tracées sur une surface intégrale sont des caractéristiques. On voit donc bien que les intégrales frontières, qui interviennent dans l'énoncé du Théorème IV, forment une famille particulière: on pourrait les appeler des caractéristiques du champ.

29. Revenons aux propriétés des émissions. Lorsque $C(m)$ se réduit partout à une demi-droite unique, il est bien connu que la section de l'émission d'un point, par un plan $x = cste$, est un continu ou un point [26]). Cette propriété peut elle aussi être étendue. Je vais montrer que *si A est un continu ou un point, la section de $E[C(m), A]$ par un plan $x = cste$, laissant A à sa gauche, est un continu ou un point.*

Comme au numéro 27, nous considérerons les champs $C_p(m)$. Si la propriété est vraie pour chacun d'eux, elle sera vraie pour $C(m)$. En effet, la limite de la section de $E[C_p(m), A]$, par $x = x_0$, est évidemment la section de $E[C(m), A]$ par ce plan; d'autre part, la limite d'une suite de continus est un continu (en considérant un point unique comme un cas particulier d'un continu).

Il sera commode d'établir d'abord un résultat préliminaire. Considérons un domaine borné D, contenant $E[C_1(m), A]$ — et par suite toutes les autres émissions — et désignons par $\omega(\delta)$ le module de continuité de $C(m)$ dans D. On peut trouver une longueur l_p, satisfaisant à la condition $\omega(l_p) < \frac{1}{2}\varepsilon_p$. Soient m et m' deux points quelconques de D, tels que mm' soit moindre que l_p. Comme l'écart de $C_p(m)$ et $C_p(m')$ est au plus égal à celui de $C(m)$ et $C(m')$, [n^0. 10], on aura, d'après la propriété énoncée à la fin de ce numéro:

$$C_p(m) \geqq [C_p(m')]_{-\frac{1}{2}\varepsilon_p}.$$

Prenons dans $C(m')$ une demi-droite $\Delta(m')$. On a:

$$C_p(m') = [C(m')]_{\varepsilon_p} \geqq [\Delta(m')]_{\varepsilon_p}, \text{ d'où}$$

$$[C_p(m')]_{-\frac{1}{2}\varepsilon_p} \geqq \{[\Delta(m')]_{\varepsilon_p}\}_{-\frac{1}{2}\varepsilon_p} = [\Delta(m')]_{\frac{1}{2}\varepsilon_p},$$

---

[25]) Pour l'équation $p^2 - q^2 - 1 = 0$, dont le cône élémentaire se déduit par translation du cône $x^2 - y^2 - z^2 = 0$, toute intégrale du système

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\cos u} = \frac{dz}{\sin u},$$

où u désigne une fonction continue arbitraire de x, y, z, est une intégrale frontière. Les caractéristiques sont les droites parallèles aux génératrices du cône.

[26]) H. Kneser, Über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen [Sitzungsber. Berlin **1923**, 171—174].

quel que soit m dans la sphère S, de rayon l_p, centrée sur m' — pourvu que cette sphère soit dans D. Prenons dans S un second point m''. Les émissions de m' et m'' contiennent respectivement les portions, contenues dans S, des demi-cônes de sommets m' et m'' déduits de $[\Delta(m')]_{\frac{1}{2}\varepsilon_p}$ par translations. Or ces demi-cônes de révolution ont, dans le plan parallèle à $\Delta(m')$ passant par $m'm''$, un point commun m'', et l'angle $m'm'''m''$ est égal à ε_p. On en déduit: $m'm''' < \frac{m'm''}{\sin\varepsilon_p}$. Le point m''' sera donc dans S si $m'm''$ est moindre que $l_p \cdot \sin\varepsilon_p$. En définitive, quels que soient m' et m'' tels que $m'm''$ soit moindre que $l_p \cdot \sin\varepsilon_p$, les émissions de m' et de m'' ont au moins un point commun dont la distance à m' est inférieure à $\frac{m'm''}{\sin\varepsilon_p}$, sous la seule condition que la sphère de rayon $\frac{m'm''}{\sin\varepsilon_p}$, centrée sur m' appartienne à D.

30. Ceci posé, considérons $E[C_p(m), A]$, et donnons-nous un plan $x = x_0$, de (R), n'ayant aucun point de A à sa droite. La section de l'émission par le plan est un ensemble fermé. Je dis que c'est un continu. Supposons le contraire, alors la section peut être décomposée en deux ensembles fermés disjoints H_1 et H_2. Considérons les produits

$$G_1 = E[C_p(m), A] \cdot E[-C_p(m), H_1],$$
$$G_2 = E[C_p(m), A] \cdot E[-C_p(m), H_2].$$

Les ensembles G_1 et G_2, produits d'ensembles fermés, sont eux-mêmes fermés. D'autre part, la somme $G_1 + G_2$ représente l'ensemble des points de $E[C_p(m), A]$ d'abscisses inférieures ou égales à x_0. Par suite $G_1 + G_2$ contient A.

Désignons par ϱ la distance de H_1 et H_2, et considérons un point μ commun à G_1 et G_2. Il existe deux intégrales $\widehat{\mu m_1}$ et $\widehat{\mu m_2}$, aboutissant respectivement en des points de H_1 et H_2. Ces intégrales sont dans un demi-cône de révolution de sommet μ (puisque les $C(m)$ sont bornés en direction dans leur ensemble); soit k' le demi-angle au sommet de ce demi-cône. On a donc, en désignant par μ_0 la projection orthogonale de μ sur $x = x_0$:

$$\varrho \leqq m_1 m_2 \leqq 2 \cdot \mu\mu_0 \cdot \operatorname{tg} k'.$$

Ce qui exige

$$\mu\mu_0 > \frac{\varrho}{2 \operatorname{tg} k'} \cdot$$

Il existe donc des nombres $\xi < x_0$, tels que G_1 et G_2 n'aient pas de point commun d'abscisse $\geqq \xi$. Deux cas seulement sont par suite possibles: ou bien G_1 et G_2 n'ont aucun point commun, ou bien ils ont au moins un point commun d'abscisse ξ_0, $0 \leqq \xi_0 < x_0$. La première alternative conduit à une contradiction. En effet, G_1 et G_2 sont deux ensembles fermés disjoints, donc $G_1 \cdot A$ et $G_2 \cdot A$. Comme $G_1 + G_2$ contient A, les deux produits précédents sont une décomposition de A en deux ensembles fermés disjoints. Ceci est impossible puisque A est un continu.

Considérons la seconde. Dans ce cas, les nombres ξ tels que G_1 et G_2 n'aient pas de point commun d'abscisse comprise entre ξ et x_0, ont une borne inférieure $\bar{x}$ positive ou nulle, et il y a au moins un point $\bar{m}$, d'abscisse $\bar{x}$, commun à G_1 et G_2. Du point $\bar{m}$ partent deux intégrales $\overset{\frown}{\bar{m}m_1}$ et $\overset{\frown}{\bar{m}m_2}$, n'ayant en commun que $\bar{m}$, et appartenant respectivement à G_1 et G_2. Mais un plan parallèle à $x = 0$, d'abscisse comprise entre $\bar{x}$ et x_0, coupera ces intégrales en des points m_1' et m_2', dont la distance sera aussi petite que l'on voudra, pourvu que le plan sécant soit assez voisin de $\bar{m}$. D'après le résultat obtenu au numéro précédent, on pourra choisir ce plan de manière que $E[C_p(m), m_1']$ et $E[C_p(m), m_2']$ aient un point commun $\bar{\bar{m}}$, d'abscisse moindre que x_0. De $\bar{\bar{m}}$ part au moins une intégrale qui aboutit dans le plan $x = x_0$, en un point de H_1, par exemple. Mais alors cet arc, ajouté à $\overset{\frown}{m_2'\bar{\bar{m}}}$, donne un arc de G_1, ayant en commun avec G_2 un point m_2' d'abscisse supérieure à $\bar{x}$, ce qui est impossible. La démonstration est achevée, et nous pouvons énoncer le

THEOREME V. *Si A est un continu ou un point, la section de $E[C(m), A]$, par un plan parallèle à $x = 0$, laissant A à sa gauche, est un continu ou un point.*

Avant d'abandonner cette question des sections des émissions par les plans parallèles à $x = 0$, je ferai une dernière remarque. Soit toujours A un ensemble borné et fermé. *Tout point frontière de la section de $E[C(m), A]$ par un plan $x = x_0$, est un point de la frontière latérale de l'émission, mais la réciproque n'a pas forcément lieu.* Bien entendu, pour la section de l'émission, on se place dans un espace à deux dimensions: le plan $x = x_0$. Prenons $C(m) = C$, où C désigne un demi-cône de révolution d'axe Ox, et pour A un système de trois points a_1, a_2, a_3, du plan $x = 0$, formant un triangle équilatéral. Si le triangle est assez petit, $C(a_1)$, $C(a_2)$ et $C(a_3)$ auront le point b, commun à leurs frontières respectives dans (R). L'émission de A est la somme $C(a_1) + C(a_2) + C(a_3)$, réduite à sa partie contenue dans (R). Le point b est un point de la frontière latérale, mais c'est un point intérieur pour la section de l'émission par le plan mené par b parallèlement à $x = 0$.

31. Pour terminer, je vais donner une application du Théorème III qui nous conduira en particulier à la proposition annoncée au numéro 14. Cette application est l'extension d'un résultat que j'avais déduit des remarques 1⁰ et 2⁰ du numéro 11, dans un travail antérieur [27]). Nous utiliserons les remarques faites au numéro 20, qui sont elles-mêmes des extensions de celles qui viennent d'être rappelées.

Soient $C(m)$ un champ (satisfaisant toujours aux hypothèses du numéro 13), et F un ensemble borné et fermé situé dans (R). Supposons que F possède en chacun de ses points $\bar{m}$ au moins une semi-tangente dans $-C(\bar{m})$, sauf peut-être aux points d'un ensemble A. Je vais montrer que F est tout entier dans l'émission $E[C(m), \bar{A}]$, où $\bar{A}$ désigne la fermeture de A (somme de A et de son dérivé).

Donnons-nous, comme au numéro 27, une suite de champs $\{C_p(m) = [C(m)]_{\varepsilon_p}\}$, où les ε_p tendent vers zéro en décroissant (au sens strict). Si en un point $\bar{m}$ de F, cet ensemble possède au moins une semi-tangente dans $-C(\bar{m})$, l'émission $E[-C_p(m), \bar{m}]$ contient des points de F en dehors de $\bar{m}$ — et ceci quel que soit p. Ceci posé, supposons que F ait un point m_0 extérieur à $E[C(m), \bar{A}]$. Comme cette émission est la limite de $E[C_p(m), \bar{A}]$, on pourra choisir p assez grand pour que m_0 soit extérieur à $E[C_p(m), \bar{A}]$. Supposons p choisi de manière à remplir cette condition, et considérons $E[-C_p(m), m_0]$. Cette émission n'a aucun point commun avec $E[C_p(m), \bar{A}]$ — sans quoi m_0 ferait partie de cette émission [n⁰. 20]. Soit alors le produit $F \cdot E[-C_p(m), m_0]$, c'est un ensemble borné et fermé, dans lequel par conséquent il y a au moins un point m_1, d'abscisse minimum, appartenant à F. Mais ce point m_1 ne peut être un point de A. Il y a donc, en dehors de m_1, des points de F dans $E[-C_p(m), m_1]$, ce qui est impossible, car cette émission est contenue dans $E[-C_p(m), m_1]$ [n⁰. 20]. L'ensemble F n'a donc pas de point extérieur à $E[C(m), \bar{A}]$.

On remarquera que l'hypothèse: *F est borné et fermé* n'a pas été complètement utilisée. La démonstration reste valable si A est *borné*, et si F remplit les conditions suivantes: *F a tous ses points à distance finie, et toute suite de points de F d'abscisses non*

---

[27]) A. Marchaud, Sur les demi-sécantes et les semi-tangentes aux ensembles [Journ. de Math. (9) 12 (1933), 415-—443].

croissantes admet au moins un point d'accumulation sur F. Dans le Travail cité au début de ce numéro, j'ai appelé *ensembles fermés vers la gauche* (par rapport à la direction $x = 0$), les ensembles possèdent les propriétés précédentes [28]). (Un ensemble fermé au sens ordinaire est fermé vers la gauche, mais la réciproque n'a pas forcément lieu).

En définitive, nous avons obtenu la proposition suivante.

THEOREME VI. *Un ensemble fermé vers la gauche (par rapport à la direction $x = 0$), qui possède en chacun de ses points $\bar{m}$, sauf peut-être pour ceux d'un ensemble borné A, une semi-tangente au moins dans $-C(\bar{m})$, est nécessairement contenu dans $E[C(m), \bar{A}]$, où $\bar{A}$ désigne la fermeture* de A.

Lorsque $C(m)$ se déduit partout par translation d'un demi-cône C, le Théorème se réduit à peu près au Théorème B du Mémoire cité [29]). A peu près, car dans ce dernier le demi-cône C peut se réduire à un dièdre, d'arête contenue dans $x = 0$.

32. Du Théorème VI on peut déduire de nombreuses conséquences intéressantes. En voici une, qui donne la solution complète d'un problème abordé, dans cas particuliers, par M. Georges Bouligand et par moi-même.

Si $C(m)$ se réduit partout à une demi-droite unique, et si, de plus, l'intégrale issue de a est unique, tout continu admettant partout, sauf en a, la demi-droite $-C(m)$ pour une de ses semi-tangentes, est un arc de l'intégrale issue de a.

Il est bien évident que la restriction relative à l'unicité de l'intégrale issue de a ne peut être levée.

La proposition précédente avait été établie par M. Bouligand, pour le système (4) [n°. 13], dans l'hypothèse où *le continu est un arc simple*, les fonctions $f(x, y, z)$ et $g(x, g, z)$ admettant des dérivées partielles continues [30]). J'en avais donné une démonstration valable pour un continu dans le cas où les fonctions f et g satisfont à des conditions de Lipschitz par rapport à y et z — ce qui assure l'unicité des intégrales [31]).

33. Le lecteur verra sans peine que les résultats du présent Mémoire s'étendent sans modification au cas d'un espace euclidien quelconque. Mais, comme on l'a vu, ils ne peuvent être étendus à des champs de demi-cônes non convexes.

(Reçu le 27 juillet 1935.)

---

28) A. M. [Mémoire cité], 420. Voir aussi C. R. **194** (1933), 948.

29) p. 424.

30) G. BOULIGAND, Introduction à la Géométrie infinitésimale directe, 215.

31) A. MARCHAUD [Mémoire cité], 442.