S. STOÏLOW

Sur les transformations intérieures et la caractérisation topologique des surfaces de Riemann

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 435-440
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__435_0>

Sur les transformations intérieures et la caractérisation topologique des surfaces de Riemann

par

S. Stoïlow

Cernauti (Roumanie)

---

1. Un espace topologique [1]) sera dit *variété à n dimensions* s'il satisfait aux conditions suivantes:

a) Il est connexe, c'est-à-dire indécomposable en deux ensembles ouverts, dans l'espace, (ou deux ensembles fermés) sans point commun.

b) Quel que soit l'élément p de l'espace, il existe un ensemble ouvert contenant p qui est homéomorphe à l'espace euclidien à n dimensions.

Considérons une variété (V) à deux dimensions. Cette variété peut encore être considérée au sens de la topologie combinatoire si elle est somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, à chacun desquels est attachée une correspondance biunivoque et bicontinue avec un triangle ordinaire du plan euclidien, ces ensembles et ces correspondances satisfaisant aux conditions de triangulation bien connues (voir L. E. J. Brouwer: Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten [Math. Ann. **71**]). La variété est alors dite *triangulable.*

Si, dans (V), on peut définir, sans ambiguïté, un sens de parcours positif pour les contours des „triangles" qui la composent, on dit que la variété est *orientable.*

En théorie des fonctions, les variétés à deux dimensions qui sont à la fois triangulables et orientables jouent un rôle important: elles sont en effet, comme on sait, topologiquement équivalentes aux surfaces de Riemann des fonctions analytiques. D'une façon précise cela veut dire que chacune de ces variétés est homéomorphe à une surface de Riemann formée de feuillets plans (ou

---

[1]) Nous entendons par là un ensemble d'éléments abstraits dont tout sous-ensemble satisfait aux trois axiomes de *fermeture* (voir C. Kuratowski, Topologie p. 15).

sphériques) superposés et que, réciproquement, tout ensemble homéomorphe à une telle surface est une variété de l'espèce indiquée.

Dans un travail remarquable, M. Tibor Radó [1]) a donné une condition analytique pour qu'une variété à deux dimensions soit une surface de Riemann, en se rapportant à la définition connue de M. Weyl.

Le but de ces pages est de montrer comment la notion de transformation intérieure (notion que j'ai définie et étudiée dans plusieurs Mémoires antérieurs) permet de formuler une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété à deux dimensions — au sens défini plus haut — soit, à la fois, triangulable et orientable. Cette notion conduit, ainsi, à une caractérisation topologique des surfaces de Riemann [2]).

2. Une transformation univoque et continue qui représente une variété (V) sur une autre variété (W) ou sur une partie de (W), est dite *transformation intérieure de* (V) *à* (W), si elle satisfait aux deux conditions suivantes:

1°. Elle transforme tout ensemble ouvert dans (V) en un ensemble ouvert dans (W).

2°. Elle ne transforme aucun continu de (V) en un point unique de (W).

Cette définition [3]) rappelée, voici maintenant l'énoncé de la proposition que nous allons établir:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété quelconque à deux dimensions soit, à la fois, triangulable et orientable, est qu'il existe une transformation intérieure de cette variété à la sphère euclidienne à deux dimensions, transformation qui représente la variété sur la sphère entière ou sur une partie de celle-ci.

3. Tout d'abord il est aisé de voir que la condition est nécessaire. Toute variété à deux dimensions (V) triangulable et orientable est, en effet, homéomorphe à une surface de Riemann formée de feuillets plans superposés. Pour le voir il suffit de ranger, sur le plan, les triangles qui sont en correspondance bicontinue avec les ensembles de triangulation de (V) [ensembles que nous appelerons dorénavant *triangles de* (V)] et cela de façon à transporter sur l'ensemble des triangles plans, l'orientation et la contiguïté des triangles de (V). Or il existe, comme on sait, une fonction

---

[1]) Acta Szeged **2** (1925), 101—121.

[2]) cf. C. R. **200** (1935), 189—190.

[3]) Annales de l'Ecole Norm. **45** (1928), 348.

analytique correspondant à cette surface de Riemann. Il résulte des propriétés élémentaires des fonctions analytiques que cette fonction est une transformation intérieure de sa surface de Riemann à la sphère (S) sur laquelle on porte les valeurs complexes de la fonction. Quand on passe de la surface de Riemann à (V), par une transformation topologique (homéomorphie), cette fonction cesse en général d'être une fonction analytique, mais la transformation ainsi obtenue de (V) à (S) reste une transformation intérieure; car toute transformation topologique est une transformation intérieure [1]) et, d'autre part, en effectuant l'une après l'autre deux transformations intérieures on obtient évidemment une transformation de la même espèce.

4. La condition est suffisante: s'il existe une transformation intérieure de la variété (V) à la sphère (S), cette variété est triangulable et orientable.

Pour le démontrer nous allons d'abord rappeler deux propositions établies ailleurs [2]) et valables pour les transformations intérieures des variétés quelconques (V) à deux dimensions.

Etant donnés une transformation intérieure

$$P = F(p) \tag{1}$$

de (V) à (S), p un point quelconque de (V) dont l'image sur (S) par (1) est P, et un domaine fermé (D) sur (S) contenant P à son intérieur, nous désignerons par

$$\Delta(D, p)$$

le domaine constitué par l'ensemble des points de (V) accessibles, à partir de p, par des chemins continus situés sur (V) dont l'image reste à l'intérieur de (D) et par sa frontière dans (V). On peut démontrer [2]):

I. Si (D) est compris dans un voisinage convenable de P sur (S) et si P est à l'intérieur de (D), le domaine $\Delta(D, p)$ est compact dans (V), sa frontière se transforme, par (1), en la frontière de (D) et l'image de $\Delta(D, p)$ est (D) tout entier. Si (D) est, de plus, un domaine de Jordan, il en est de même de $\Delta(D, p)$ [3]).

II. Dans tout voisinage de p sur (V) [c'est-à-dire dans tout

---

[1]) Cela résulte du théorème classique de M. Brouwer sur *l'invariance des ensembles ouverts* par les transformations topologiques, dans les espaces euclidiens.

[2]) Annales de l'Institut Henri Poincaré **2** (1932), 246 et 251, et Annales de l'Ecole Norm. l. c., 367.

[3]) Un „domaine de Jordan" sur (V) est, par définition, un domaine homéomorphe à un domaine de Jordan plan.

ensemble ouvert dans (V) contenant p] on peut déterminer un domaine de Jordan (δ), contenant p à son intérieur, et dans lequel on a la propriété suivante: Il existe n arcs simples (σ_1), (σ_2), ..., (σ_n) dans (δ), partant tous de p et aboutissant tous à la courbe frontière (γ) de (δ), sans autre point commun deux à deux que p; ils divisent (δ) en n secteurs [chacun étant un domaine de Jordan limité par deux des arcs (σ_i) et par un segment de (γ)]; sur chacun des arcs (σ_i) la transformation (1) est topologique et tous les (σ_i) ont pour image, sur (S), le même arc simple; à l'intérieur de chacun des secteurs, et sur le segment de (γ) correspondant, la transformation est encore topologique et l'image de chaque secteur est un même cercle de centre P situé sur (S), dont la circonférence est l'image de (γ).

Cette proposition peut se résumer en disant que, autour de chaque point p, une transformation intérieure se comporte, quant à l'inversion, comme une fonction analytique autour d'un point ordinaire; au moins pour ce qui est des propriétés topologiques de cette inversion.

Le cas $n \neq 1$ correspond, comme on voit, aux zéros de la dérivée d'une fonction analytique. Ces points sont, d'après notre proposition, isolés pour toute transformation intérieure d'une variété quelconque (V).

5. Ces propositions rappelées, considérons un point quelconque p de (V) et son image P sur (S) par la transformation intérieure (1) qui, par hypothèse, existe de (V) à (S).

Soient $(\varGamma)$ les cercles tracés sur (S) qui ont pour centre un point quelconque d'un certain ensemble dénombrable dense sur (S) et un rayon rationnel. Ces cercles forment une famille dénombrable.

D'après la proposition I du paragraphe précédent, on pourra choisir un cercle $(\varGamma)$ tel que le point P soit à son intérieur et que le domaine

$$\varDelta(\varGamma, p)$$

satisfasse aux conditions exprimées par cette proposition. Soit A le centre de ce $(\varGamma)$. D'après la même proposition, il existe dans $\varDelta(\varGamma, p)$ au moins un point a qui a pour image A et cet a est *à l'intérieur* de $\varDelta(\varGamma, p)$; or, d'après la définition même de $\varDelta(\varGamma, p)$, le domaine

$$\varDelta(\varGamma, a) \tag{2}$$

lui est identique. Il résulte de là que *tout point p de (V) est compris à l'intérieur d'un domaine tel que* (2), où a est l'un des points de (V) qui ont pour image le centre A de $(\varGamma)$.

Il y a une infinité dénombrable de (Γ). Nous allons montrer aussi qu'il y a seulement une infinité dénombrable de domaines (2) distincts. Pour abréger, nous désignerons ces domaines par (Δ).

Considérons, à cet effet, un domaine (Δ) fixe (Δ_0) et soit (Δ_1) un domaine (Δ) quelconque déterminé. Comme (V) est connexe et que, d'autre part, chacun de ses points est compris dans un ensemble ouvert homéomorphe au plan euclidien, deux points quelconques de (V) peuvent toujours être joints par un chemin continu situé sur cette variété. Mais tout point de (V), donc tout point de ce chemin continu, est intérieur à un domaine (Δ). Le théorème de Borel-Lebesgue montre dès lors que l'on peut aller de (Δ_0) à (Δ_1) par une chaîne formée d'un nombre fini de (Δ), le premier étant (Δ_0), le dernier (Δ_1), et telle que, dans cette chaîne, deux (Δ) consécutifs aient toujours des points intérieurs communs. Pour démontrer que les (Δ) ne forment qu'une infinité dénombrable, il suffit de montrer qu'il y a seulement une infinité dénombrable de ces chaînes. Or cela est évident si chacun des (Δ) n'a de points intérieurs communs qu'avec une infinité dénombrable d'entre eux. C'est ce dernier fait que nous allons donc établir.

Remarquons, pour cela, que parmi tous les (Δ) qui ont des points intérieurs communs avec l'un d'eux: (Δ_0), il n'y en a qu'un nombre fini qui proviennent *du même* cercle (Γ). En effet, deux (Δ) qui correspondent au même (Γ) ne peuvent avoir des points intérieurs communs sans se confondre. Tous ceux qui empiètent sur (Δ_0) sont donc extérieurs les uns aux autres et il en est de même des arcs que chacun d'entre eux découpe sur le contour de (Δ_0). Or tous ces arcs ont la même image par (1): un même arc de la circonférence de (Γ_0). Si donc ils étaient en nombre infini, il devrait y avoir, sur le contour de (Δ_0), une infinité de points distincts ayant tous pour image le même point. Comme cet contour est, d'après la proposition I, compact dans (V), il y aurait, sur lui, un point d'accumulation ayant la même image; ce qui, d'après la proposition II, est impossible. Les (Δ) qui empiètent sur (Δ_0) et qui proviennent du même (Γ) sont donc en nombre *fini*.

Mais les cercles (Γ) sont en infinité dénombrable. Il en résulte que tous les (Δ) qui empiètent sur (Δ_0) forment une infinité dénombrable et donc qu'*il n'y a qu'une infinité dénombrable de* (Δ) *distincts.*

Cela étant, considérons un nombre fini quelconque de (Δ). Les contours de ces (Δ) ne peuvent se couper deux à deux qu'en un nombre fini de points, car les contours des (Γ) correspondants sont des circonférences et sur chaque contour d'un (Δ) il n'y a qu'un nombre fini de points ayant la même image, comme on l'a déjà fait remarquer. Il est donc possible de compléter l'ensemble des contours de ces (Δ) par des arcs simples tracés à l'intérieur de ces (Δ) de façon que la partie de (V) couverte par les mêmes (Δ) se trouve triangulée. Soit (V_0) la partie de (V) ainsi divisée en triangles. Dans la suite des (Δ) on continuera à considérer de nouveaux (Δ) en laissant de côté ceux qui ne contiennent que des points de (V_0). Le contour de chaque nouveau (Δ) coupera les précedents contours en un nombre fini de points. On pourra donc trianguler les parties de ces nouveaux domaines qui seront extérieures à (V_0) en respectant la triangulation déjà effectuée dans celui-ci et, en continuant ainsi, on finira par établir une triangulation de (V) toute entière. (V) *est donc triangulable.*

6. Pour montrer que (V) est aussi orientable modifions la triangulation précedemment obtenue, de telle manière que dans chacun des nouveaux triangles, (1) soit topologique et que, de plus, les images de deux triangles contigus quelconques de (V) soient, sur (S), des domaines de Jordan sans points intérieurs communs. Le choix d'une telle modification de la triangulation est possible grâce aux propriétés de (1) exprimées par la proposition II du n⁰ 4.

Si maintenant les contours de deux triangles contigus de (V) sont parcourus dans le même sens (c'est-à-dire dans le sens transmis du premier au second par cette contiguïté) les courbes de Jordan correspondantes sont parcourues également dans un même sens sur (S). Une chaîne fermée de triangles sur (V), le long de laquelle se transmet, d'un triangle au triangle suivant, un sens de parcours, ne pourra donc conduire, pour le même triangle, d'un sens de parcours au sens opposé, car cela ne saurait se produire sur la sphère. La variété (V) *est donc orientable.*

Notre théorème se trouve ainsi complètement démontré.

7. On aurait pu, dans l'énoncé et dans la démonstration précédente, remplacer (S) par une surface triangulable quelconque donnée (W). La condition exprimée par le théorème serait alors la condition nécessaire et suffisante pour que (V) soit *homéomorphe à une surface de recouvrement de* (W), *ou d'une partie de* (W).

D'une manière générale (V) est orientable si (W) est orientable.

(Reçu le 8 Juillet 1935.)