COMPOSITIO MATHEMATICA

W. STERNBERG

Anwendung der Integralgleichungen in der elektromagnetischen Lichttheorie

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 254-275

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__254_0>

Anwendung der Integralgleichungen in der elektromagnetischen Lichttheorie [1])

von

W. Sternberg

Jerusalem

Einleitung.

Diese Arbeit hat Beugungserscheinungen und Eigenschwingungen der elektromagnetischen Lichttheorie zum Gegenstande. Sie sollte ursprünglich schon im Jahr 1930 in den Math. Ann. erscheinen. Einige Ungenauigkeiten in der Beweisführung aber verzögerten die Publikation, so daß nach Beseitigung dieser Ungenauigkeiten die Arbeit erst jetzt veröffentlicht wird. Im Jahr 1930 erschien bereits in der Zs. f. Physik **64** eine Arbeit von mir [2]), für welche die vorliegende die mathematische Grundlage bildet. In dieser für Physiker bestimmten Arbeit, welche numerische Lösungen bringt, wird die vorliegende Arbeit zitiert. Es muß also zur Vermeidung von Mißverständnissen hervorgehoben werden, daß die vorliegende mathematische Abhandlung erst zirka fünf Jahre nach der physikalischen erscheint.

Teil I. Beugungsprobleme.

§ 1. *Stellung des Problems.*

Es handelt sich um die Lösung des folgenden Beugungsproblems: Gegeben ist irgendeine im Vakuum einfallende elektromagnetische Welle, deren elektrischer bzw. magnetischer Vektor mit $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ bezeichnet werden. Ihr ist ein Körper von gegebener Form, dessen Materialkonstanten ε (Dielektrizitätskonstante) und σ (Leitfähigkeit) bekannt sind, in den Weg gestellt. Welches sind die Werte der elektrischen und der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{H}$?

---

[1]) Ein Teil dieser Arbeit war der Inhalt eines von mir auf dem Prager Mathematiker- und Physikerkongreß (1929) gehaltenen Vortrages, von dem eine kurze Inhaltsangabe im Jahresbericht DMV **39** (1930), *62—64* erschienen ist.

[2]) „Anwendung der Integralgleichungen auf Beugung und Eigenschwingungen in der elektromagnetischen Lichttheorie.“

Derartige Probleme sind bisher nur in einigen besondern Fällen und zwar mit der „Methode der krummlinigen Koordinaten" gelöst worden. Vgl. Enc. d. math. Wiss. V, 24, „Wellenoptik" von M. von Laue und „Spezielle Beugungsprobleme" von P. S. Epstein. Was den Anwendungsbereich dieser Methode betrifft, so heißt es in der Enc. (S. 489): „Die mathematischen Schwierigkeiten der ... Beugungsaufgabe bringen es indessen mit sich, daß sie bis jetzt nuı für eine sehr beschränkte Anzahl von speziellen Formen der beugenden Begrenzung durchgeführt werden konnte" und an einer andern Stelle (S. 491): „Leider ist die Anwendbarkeit der Methode eine beschränkte und die Zahl der Fälle, deren Behandlung bisher gelungen ist, gering."

Daher kam es mir darauf an, eine Methode von möglichst großer Allgemeinheit zu finden, was auch tatsächlich gelungen ist. Es ist die Methode der Integralgleichungen.

Da die Beugungserscheinung zum Typus der erzwungenen Schwingungen gehört, erhält man eine unhomogene Integralgleichung. Die in Teil II behandelten Eigenschwingungen führen zu homogenen Integralgleichungen.

Beim Beugungsproblem wird angenommen, daß die gegebene einfallende Welle ungedämpft und zeitlich periodisch mit der Periode $\frac{2\pi}{n}$ ist, so daß man

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{Re}(A e^{int}), \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{Re}(B e^{int})$$

und auch

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{Re}(E e^{int}), \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{Re}(H e^{int})$$

setzen kann, wo A, B, E, H nur noch von den Raumkoordinaten x, y, z abhängen und t die Zeit bedeutet. Mit $\mathfrak{Re}$ bezeichnen wir den reellen Teil einer Größe.

Die Frequenz n muß eine reelle Konstante sein, die man als positiv annehmen kann; denn ein komplexes n würde zu gedämpften Schwingungen führen, worauf wir hier nicht weiter eingehen.

Ferner wird vorausgesetzt, daß die auftretenden Vektoren sämtlich von der z-Koordinate unabhängig sind. Das ist der Fall, wenn der beugende Körper ein in Richtung der z-Achse unendlich ausgedehnter Zylinder und die einfallende Welle von z unabhängig ist. Dann ergibt sich ein zweidimensionales oder ebenes Problem [3]).

---

[3]) Eine zusammenfassende Darstellung der bisherigen Resultate ersieht man aus dem Handbuch der Experimentalphysik von Wien-Harms, Artikel von Laue. Bisher sind hauptsächlich die zweidimensionalen Probleme untersucht worden.

Die Beugung am Kreiszylinder [4]), am elliptischen [5]) und am parabolischen [6]) Zylinder ist bereits behandelt worden. Hier wird die Beugung an einem beliebigen Zylinder untersucht. In dieser Allgemeinheit ist das Problem der sog. „Methode der krummlinigen Koordinaten" unzugänglich.

Die Lösung des Beugungsproblems für einen beliebigen Körper, d.h. die Lösung des dreidimensionalen Problems behalte ich einer weiteren Arbeit vor. Die Methode der Integralgleichungen führt auch hier zum Ziele.

Beim zweidimensionalen Problem, das hier behandelt wird, nehmen die Maxwellschen Gleichungen für die Vektorkomponenten E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, da alle Ableitungen nach z verschwinden, folgende einfache Form an

$$\text{(1a)}\quad \begin{aligned} &\frac{in\varepsilon+\sigma}{c}\cdot E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ &\frac{in\varepsilon+\sigma}{c}\cdot E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ &\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+k^2 H_z = 0. \end{aligned} \qquad \text{(1b)}\quad \begin{aligned} &-\frac{in}{c}H_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ &-\frac{in}{c}H_y = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \\ &\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+k^2 E_z = 0. \end{aligned}$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und

$$k^2 = \frac{n^2\varepsilon - in\sigma}{c^2}$$

die komplexe „Schwingungskonstante". Sie wird nur im Falle eines reinen Dielektrikums ($\sigma=0$) reell und zwar

$$k = \frac{n\sqrt{\varepsilon}}{c} = \frac{n}{a} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

wobei a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, λ die Wellenlänge bedeutet. Im Vakuum hat man einfach $k = \frac{n}{c}$.

Der Querschnitt des beugenden Zylinders ist von einer beliebigen geschlossenen Kurve C begrenzt und wird mit T_i, das Außengebiet von C wird mit T_a bezeichnet. Von der Kurve C

[4]) W. Seitz [Ann. der Phys. **16** (1905), **19** (1905), **21** (1906)].
W. von Ignatowsky [Ann. der Phys. **18** (1905), **23** (1907)].
Cl. Schaefer [Sitzungsber. Akad. Berlin. **11** (1909), ferner insbesondere Ann. der Phys. **31** (1910) und Zs. f. Phys. **13** (1923)].

[5]) B. Sieger [Ann. der Phys. **27** (1908)].
K. Aichi [Proc. Math. Phys. Soc. Japan (2) **4** (1908)].

[6]) Wien-Harms l. c.

wird lediglich vorausgesetzt, daß sie eine im allgemeinen stetige Krümmung besitzt, wobei aber eine endliche Anzahl von Ecken zulässig ist. Diese Voraussetzungen werden gemacht, damit der Greensche Satz auf T_i angewandt werden kann.

Nach den Maxwellschen Grenzbedingungen sind beim Durchgang durch C

$$(2) \qquad E_z,\ \frac{\partial E_z}{\partial n}\ \text{(Normalableitung)},\ H_z,\ \frac{1}{k^2}\,\frac{\partial H_z}{\partial n}\ \text{stetig.}$$

(In der Encyklopädie l.c., 505, ist versehentlich $\frac{1}{k}\,\frac{\partial H_z}{\partial n}$ statt $\frac{1}{k^2}\,\frac{\partial H_z}{\partial n}$ geschrieben.)

Außerdem muß die durch die Beugung hervorgerufene Abweichung von der einfallenden Welle eine vom Zylinder nach außen divergierende Welle darstellen. Hierüber wird später das Nötige gesagt werden. — Schließlich gilt noch die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung

$$(3) \qquad \frac{\partial}{\partial r}\,(E_z - A_z) + ika(E_z - A_z) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^{7)} \qquad [r = \sqrt{x^2+y^2}].$$

Offenbar genügt es, E_z und H_z zu berechnen, da sich die andern Komponenten dann aus (1a) und (1b) durch bloße Differentiation ergeben. Für $H_z - B_z$ gilt die zu (3) analoge Bedingung.

Es sei noch bemerkt, daß bei unserem zweidimensionalen Problem die beiden Tripel (1a) und (1b) von einander unabhängig sind, da in (1a) nur E_x, E_y, H_z und in (1b) nur H_x, H_y, E_z auftreten. Physikalisch bedeutet dies, daß die Schwingungserscheinung durch Superposition zweier unabhängiger Schwingungen entsteht. Die eine derselben erhält man, indem man $E_z \equiv 0$ setzt, so daß auch H_x und H_y verschwinden. Die andere ergibt sich mittels $H_z \equiv 0$. Die erstere ist parallel, die letztere senkrecht zur z-Achse polarisiert (Enc. l.c., 490).

Im folgenden bestimmen wir E_z und H_z durch eine Integralgleichung. Die Gleichung für E_z gehört zum Fredholmschen Typus, die für H_z kann durch eine Erweiterung der Fredholmschen Theorie erledigt werden.

---

[7]) Sommerfeld, Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung [Jahresber. D. M. V. **21** (1912)], § 7. Vgl. auch E. Rothe, Integralgleichung des Skineffekts [J. f. d. reine u. angew. Math. **170** (1934), 218—230].

Wir verwenden hier und im folgenden gelegentlich die durch E. Landau eingebürgerten Symbole O und o.

§ 2. *Ableitung der Integralgleichung für E_z.*

Die Vektorkomponente $E_z(x, y)$ ist durch folgende Bedingungen charakterisiert: Sie genügt der Differentialgleichung

$$(4)\qquad \begin{aligned} \varDelta E_z + k_i^2 E_z &= 0 \text{ in } T_i \\ \varDelta E_z + k_a^2 E_z &= 0 \text{ in } T_a \end{aligned} \qquad \left[\varDelta E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}\right].$$

Sie ist in T_i und in T_a nebst Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, beim Durchgange durch C aber nur nebst Normalableitung stetig. Die Abweichung der Komponente E_z von A_z, d.h. die Differenz $E_z - A_z$, stellt eine vom Zylinder nach außen divergierende Welle dar. Endlich gilt noch die Limesgleichung (3).

Bezüglich (4) ist zu beachten, daß die Werte der Schwingungskonstanten k^2 in T_i und T_a verschieden sind und daher als k_i^2 bzw. k_a^2 unterschieden werden. Man hat also

$$(5a)\qquad k_i^2 = \frac{n^2\varepsilon - in\sigma}{c^2} \text{ in } T_i,$$

wo ε und σ vom Material des Zylinders abhängen, sowie

$$(5b)\qquad k_a^2 = \frac{n}{c} \text{ in } T_a,$$

da der Außenraum als Vakuum vorausgesetzt wird.

Die Funktion E_z genügt also in T_i und T_a verschiedenen Differentialgleichungen. Dagegen befriedigt die gegebene Funktion A_z in der ganzen Ebene dieselbe Differentialgleichung

$$(6)\qquad \varDelta A_z + k_a^2 A_z = 0.$$

Die Funktion A_z wird nebst Ableitungen bis zur zweiten Ordnung als stetig in der ganzen Ebene vorausgesetzt.

Was die Forderung der Divergenz der Welle in T_a betrifft, so bemerken wir zunächst, daß der Ausdruck

$$(7)\qquad e^{in\left(t-\frac{r}{c}\right)} = e^{i(nt-k_a r)} \qquad \left[r = \sqrt{x^2+y^2}\right]$$

bzw. der reelle Teil dieses Ausdrucks eine vom Koordinatenursprung aus divergierende, dagegen

$$e^{in\left(t+\frac{r}{c}\right)}$$

eine zum Ursprung hin konvergierende Welle darstellt. In dem ersten Ausdruck muß nämlich, wenn die Zeit t zunimmt, auch r wachsen, damit das Argument $t - \frac{r}{c}$ denselben Wert beibehält.

In dem zweiten Ausdruck müßte im Gegenteil r abnehmen. Die durch (7) gegebene divergierende Welle ist, da die Punkte gleicher Phase auf den Kreisen $r = \text{const.}$ oder, wenn man wieder in den dreidimensionalen Raum zurückkehrt, auf den Kreiszylindern $r = \text{const.}$ liegen, eine Kreiszylinder- oder kurz Zylinderwelle. Ihre Periode ist $\frac{2\pi}{n}$ und ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit c.

Ferner weisen wir darauf hin, daß eine „Grundlösung", d.h. eine mit der bekannten logarithmischen Unstetigkeit behaftete Lösung der Schwingungsgleichung (6) existiert, welche in genügender Entfernung vom Anfangspunkt in eine divergente Zylinderwelle übergeht. Das ist die Hankelsche Funktion nullter Ordnung zweiter Art $H_0^{(2)}(k_a r)$. Sie ist, abgesehen von einem konstanten Faktor, die einzige Grundlösung mit dieser Eigenschaft (vgl. Enc. l.c., 506, 507). Die Funktion $H_0^{(2)}(u)$ kann in folgender Weise definiert werden [8]):

$$H_0^{(2)}(u) = J_0(u) - \frac{i}{\pi} Y_0(u). \tag{8}$$

Dabei ist

$$J_0(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{u}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2} \tag{9}$$

die gewöhnliche Besselsche Funktion und

$$Y_0(u) = 2\left[J_0(u)\log\left(\frac{u}{2}\right) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{u}{2}\right)^{2m} \psi(m+1)}{(m!)^2}\right], \tag{10}$$

wobei

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi(m+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{m} - \gamma$$

[für $m = 1, 2, \dots$],

$$\gamma = \text{Eulersche Konstante}$$

zu nehmen ist.

Nun ist für solche Werte von u, deren Betrag groß ist, und deren arcus den Bedingungen $-2\pi < \operatorname{arc} u < +\pi$ genügt [9]), insbesondere also für großes reelles positives u

---

[8]) Vgl. z.B. Watson „Theory of Bessel Funktions" [Cambridge (1922)], 73, 60 und 64.

[9]) Watson, l. c., 198, Gleich. (2).

$$(11)\qquad H_0^{(2)}(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi u}}\,e^{-i\left(u-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O\left(\frac{1}{u}\right)\right].$$

Daher stellt z.B.

$$e^{int}H_0^{(2)}(k_a r)\backsim\sqrt{\frac{2}{\pi k_a r}}\,e^{\frac{\pi i}{4}}\,e^{i(nt-k_a r)}$$

bei großem r eine divergente Zylinderwelle dar, deren Amplitude übrigens wegen des Faktors $\frac{1}{\sqrt{r}}$ mit wachsendem r gegen 0 abnimmt. Die Hankelsche Funktion $H_0^{(2)}(k_a r)$ wird im folgenden eine große Rolle spielen.

Die Differenz $E_z - A_z$ soll nun für großes r, wobei der Anfangspunkt irgendwo in T_i anzunehmen ist, durch eine divergierende Zylinderwelle oder durch Superposition vieler solcher Wellen darstellbar sein.

Wir werden jetzt beweisen, daß eine etwa existierende Lösung unseres Problems einer bestimmten Integralgleichung genügen muß. Zwecks Ableitung dieser Integralgleichung denken wir uns um den in T_i gelegenen Anfangspunkt O einen Kreis S von beliebigem Radius geschlagen, der T_i in seinem Innern enthält. Denjenigen Teil von T_a, welcher innerhalb S liegt, bezeichnen wir mit T_a', so daß S aus T_i und T_a' besteht. Ferner bezeichnen wir den Aufpunkt mit $P(x, y)$, während der Punkt $Q(\xi, \eta)$ die Integrationsvariablen repräsentiert. Die Entfernung $\overline{PQ}$ habe die Länge r_{PQ}.

Nun wenden wir die Greensche Formel der Potentialtheorie auf die Funktionen $E_z(Q)$ und

$$(12)\qquad G(P, Q)=\frac{H_0^{(2)}(k_a r_{PQ})}{2\pi}$$

an. Als Integrationsgebiete wählen wir ein Mal T_i, das andere Mal T_a'. Außerdem müssen noch jedesmal die Fälle unterschieden werden, daß P in T_i oder T_a' liegt. Im ganzen ergeben sich also vier Formeln. In diesen sind die Randintegrale so zu durchlaufen, daß das begrenzte Gebiet zur Linken liegt, und die Normalableitung wird in Richtung der innern Normalen genommen. Beachtet man, daß E_z in T_i und T_a verschiedenen Differentialgleichungen genügt, während die Funktion $G(P, Q)$, die übrigens in P und Q symmetrisch ist, immer dieselbe Gleichung (6) erfüllt, so erhält man:

I. P in T_i. Integrationsgebiet T_i.

$$E_z(P)=(k_i^2-k_a^2)\iint\limits_{T_i} G(P, Q)E_z(Q)d\sigma+\int\limits_C\left(E_z\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial E_z}{\partial n}\right)ds$$

II) P in T_i. Integrationsgebiet T_a'.

$$0 = \int\limits_S \left(E_z \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E_z}{\partial n}\right) ds + \int\limits_C \left(E_z \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E_z}{\partial n}\right) ds.$$

III) P in T_a'. Integrationsgebiet T_i.

$$0 = (k_i^2 - k_a^2) \iint\limits_{T_i} G(P, Q) E_z(Q) d\sigma + \int\limits_C (\ldots) ds.$$

IV) P in T_a'. Integrationsgebiet T_a'.

$$E_z(P) = \int\limits_C (\ldots) ds + \int\limits_S (\ldots) ds.$$

Addiert man I) und II) bzw. III) und IV), so heben sich in beiden Fällen die über C erstreckten Randintegrale, die ja in entgegengesetztem Sinne zu nehmen sind, auf, wobei man noch berücksichtigen muß, daß beim Durchgange durch C nach (2) sowohl E_z wie $\frac{\partial E_z}{\partial n}$ stetig sind. Man erhält daher, mag P in T_i oder in T_a' liegen, dieselbe Gleichung

$$(13) \quad E_z(P) = (k_i^2 - k_a^2) \iint\limits_{T_i} G(P, Q) E_z(Q) d\sigma + \int\limits_S \left(E_z \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E_z}{\partial n}\right) ds.$$

Jetzt ist das über S erstrekte Integral auf der rechten Seite von (13) umzuformen. Hierzu brauchen wir einerseits die Gleichung

$$(14) \qquad A_z(P) = \int\limits_S \left(A_z \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial A_z}{\partial n}\right) ds,$$

die sich sofort ergibt, wenn man die Greensche Formel auf die Funktionen A_z und G anwendet, wobei der Kreis S das Integrationsgebiet ist, und andrerseits die Limesgleichung

$$(15) \quad \lim_{r=\infty} \int\limits_S \left\{ (E_z(s) - A_z(s)) \frac{\partial G(P, s)}{\partial n} - \right.$$
$$\left. - G(P, s) \frac{\partial}{\partial n} (E_z(s) - A_z(s)) \right\} ds = 0.$$

Wir verstehen hier unter r den Radius von S und unter s den auf der Peripherie von S gelegenen Integrationspunkt. Bei den Normalableitungen ist natürlich s (nicht P) der variable Punkt.

Die Kombination von (14) und (15) ergibt

$$(16) \qquad \lim_{r=\infty} \int\limits_S \left(E_z \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E_z}{\partial n}\right) ds = A_z(P),$$

und schließlich erhält man aus (13) mittels des Grenzüberganges $\lim r = \infty$ unter Hinzunahme von (16):

$$E_z(P) = (k_i^2 - k_a^2) \iint_{T_i} G(P, Q) E_z(Q) d\sigma + A_z(P), \tag{17}$$

wobei der Aufpunkt P nun in der ganzen Ebene variieren darf. Die identisch in P geltende Limesgleichung (15) läßt sich aus der Sommerfeldschen Bedingung (3) unter Berücksichtigung der asymptotischen Eigenschaften von G (s. Gleich. (11)) ableiten. Was die letzteren betrifft, so gilt für $H_0^{(2)}(u)$ neben (11) noch

$$\frac{dH_0^{(2)}(u)}{du} = -i \sqrt{\frac{2}{\pi u}} e^{-i\left(u - \frac{x}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{u^{3/2}}\right), \tag{11*}$$

so daß sich

$$\frac{dH_0^{(2)}(u)}{du} = -i H_0^{(2)}(u) + O\left(\frac{1}{u^{3/2}}\right) \tag{11**}$$

ergibt.

Wegen (12) folgt hieraus

$$\frac{dG(P, s)}{dr_{Ps}} = -ik_a G(P, s) + O\left(\frac{1}{r_{Ps}^{3/2}}\right), \tag{18}$$

wenn die Entfernung der Punkte P und s mit r_{Ps} bezeichnet wird. Hierbei ist P ein beliebiger, aber fester Punkt der Ebene, und der Grenzübergang ist so zu verstehen, daß $\lim r = \infty$ und daher auch $\lim r_{Ps} = \infty$ wird. Offenbar ist

$$O\left(\frac{1}{r_{Ps}}\right) = O\left(\frac{1}{r}\right); \quad O\left(\frac{1}{r_{Ps}^{3/2}}\right) = O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) \quad \text{u.s.w.} \tag{19}$$

Nun hat man

$$\frac{\partial G(P, s)}{\partial n} = \frac{dG(P, s)}{dr_{Ps}} \cdot \frac{\partial r_{Ps}}{\partial n}$$

und

$$-\frac{\partial r_{Ps}}{\partial n} = \frac{\partial r_{Ps}}{\partial r} = \cos\gamma, \quad \text{wo } \gamma = \sphericalangle(r, r_{Ps}) \text{ ist.}$$

Da

$$\cos\gamma = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{20}$$

leicht zu beweisen ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(P, s)}{\partial n} &= -\frac{dG(P, s)}{dr_{Ps}} + \frac{dG(P, s)}{dr_{Ps}} \cdot O\left(\frac{1}{r}\right) \\ &= +ik_a G(P, s) + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Bezeichnet man das in (15) auftretende Integral zur Abkürzung mit J, dann ist

(15*) $$\lim_{r=\infty} J = 0$$

zu beweisen, und es folgt mit Rücksicht auf (21) und (3)

$$J = \int\limits_S \left\{ (E_z - A_z)\left(ik_a G + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right)\right) - \right.$$
$$\left. - \left(ik_a(E_z - A_z) + O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right)\right) G \right\} ds$$
$$= \int\limits_S \left\{ (E_z - A_z) O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) + o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right) G \right\} ds$$
$$= \int\limits_S \left\{ O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) + o\left(\frac{1}{r}\right) \right\} ds,$$

da ja $G(P, s) = O\left(\frac{1}{r_{Ps}^{1/2}}\right) = O\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right)$ ist.

Hieraus ergibt sich unmittelbar (15*).

Damit ist auch (17) bewiesen.

Wir machen hier noch folgende Bemerkung. Wir hatten als Voraussetzung des Beugungsproblems neben den allgemeinen Maxwellschen Bedingungen (1) und (2) die Sommerfeldsche Bedingung (3) genommen, welche die Beziehung zwischen der gegebenen einfallenden und der durch Beugung entstehenden Welle zum Ausdruck bringt. Eine solche Beziehung muß ja vorausgesetzt werden, damit das Problem zu einem eindeutig bestimmten wird. Wir können nun aber auch statt (3) die Gleichung (15) als Voraussetzung wählen. Tun wir dies, so ergibt sich aus (13) und (14) die gesuchte Gleichung (17) unmittelbar.

§ 3. *Diskussion der Integralgleichung. Lösung des Problems.*

In der Gleichung

(17) $$E_z(P) = (k_i^2 - k_a^2) \iint\limits_{T_i} G(P, Q) E_z(Q) d\sigma + A_z(P)$$

kann der Aufpunkt P in T_i und T_a variieren, während Q auf T_i beschränkt ist. Wir beschränken auch P zunächst auf T_i und haben dann eine unhomogene Integralgleichung vom Fredholmschen Typus vor uns.

Es ist zu zeigen, daß diese Integralgleichung eine eindeutig bestimmte Lösung E_z besitzt, daß diese Lösung ins Gebiet T_a fortgesetzt werden kann, und daß die nun in der ganzen Ebene definierte Funktion E_z die Lösung des Beugungsproblems darstellt.

Was Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (17) betrifft, so genügt es, darauf hinzuweisen, daß die zugehörige homogene Gleichung

$$\varphi(P) = (k_i^2 - k_a^2) \iint_{T_i} G(P, Q)\, \varphi(Q) d\sigma \tag{22}$$

unter der über n gemachten Voraussetzung, daß n reell ist, keine Lösung besitzt. Es stellt nämlich (22) die Integralgleichung der Eigenschwingungen dar, wie in Teil II dieser Arbeit auseinandergesetzt werden wird. Die Eigenschwingungen sind aber gedämpfte Schwingungen, so daß (22) nur für gewisse komplexe Werte von n Lösungen besitzt. Hieraus sieht man übrigens, daß es genügen würde, die Frequenz der gegebenen einfallenden Wellen als verschieden von den Eigenfrequenzen vorauszusetzen.

Die zunächst in T_i eindeutig bestimmte Lösung $E_z(P)$ von (17) kann auf die Fredholmsche Art als Quotient zweier ständig konvergenter Potenzreihen von $k_i^2 - k_a^2$ dargestellt werden. Sie ist sicher eine stetige Funktion des Punktes P in T_i. Sie besitzt aber auch in T_i stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung. Dies ist nämlich von $A_z(P)$ vorausgesetzt. Und ferner hat das in (17) auftretende Integral

$$\iint_{T_i} G(P, Q)\, E_z(Q) d\sigma$$

den Charakter eines logarithmischen Flächenpotentials, besitzt also ebenfalls in T_i stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung.

Denkt man sich die in T_i definierte Funktion E_z in dem obigen Integral eingesetzt, so ergibt sich ohne weiteres die Fortsetzung ins Gebiet T_a, da ja $G(P, Q)$ und $A_z(P)$ in der ganzen Ebene definiert sind. Die jetzt ebenfalls in der ganzen Ebene definierte Funktion $E_z(P)$ erfüllt nun tatsächlich alle Bedingungen des Beugungsproblems.

Zunächst hat sie auch in T_a stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung und ist beim Durchgange durch C nebst Ableitungen erster Ordnung, also auch nebst Normalableitung stetig.

Ferner liefert das Analogon zur Laplaceschen bzw. zur Poissonschen Gleichung der Potentialtheorie die Relationen

$$\Delta E_z + k_a^2 E_z = 0 \qquad [P \text{ in } T_a],$$
$$\Delta E_z + k_a^2 E_z = -(k_i^2 - k_a^2) E_z \qquad [P \text{ in } T_i],$$

welche mit (4) übereinstimmen.

Weiter ist leicht einzusehen, daß die mit e^{int} multiplizierte Abweichung

$$E_z - A_z = \frac{k_i^2 - k_a^2}{2\pi} \iint\limits_{T_i} H_0^{(2)}(k_a r_{PQ})\, E_z(Q) d\sigma$$

eine divergente Welle darstellt. Liegt in der Tat der Aufpunkt P weit vom Zylinder entfernt, so ist r_{PQ} groß, wo auch Q in T_i liegen mag. Man kann (vgl. § 2, Gl. (11))

$$H_0^{(2)}(k_a r_{PQ}) \sim i\sqrt{\frac{\pi}{2k_a r_{PQ}}}\, e^{-i\left(r_{PQ} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

setzen, und es stellt

$$e^{int} H_0^{(2)}(k_a r_{PQ})\, E_z(Q) d\sigma$$

als Funktion von P und t eine divergente Elementarwelle dar. Daher ist $e^{int}(E_z - A_z)$ die Superposition unendlich vieler divergenter Elementarwellen.

Schließlich genügt die Lösung E_z von (17) der Bedingung (3). Zum Beweise gehen wir aus von

$$E_z(s) - A_z(s) = (k_i^2 - k_a^2) \iint\limits_{T_i} G(s, Q) E_z(Q) d\sigma.$$

Dabei bedeutet s wie früher einen Peripheriepunkt des Kreises S mit dem Radius r. Einmalige Differentiation unter dem Integralzeichen ist wie beim logarithmischen Flächenpotential gestattet. Daher gilt

$$\frac{\partial(E_z - A_z)}{\partial n} = (k_i^2 - k_a^2) \iint\limits_{T_i} \frac{\partial G(s, Q)}{\partial n} E_z(Q) d\sigma$$

Wir berücksichtigen noch, daß $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$ ist, und folgern weiter

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_i^2 - k_a^2}\left[\frac{\partial(E_z - A_z)}{\partial n} - ik_a(E_z - A_z)\right] &= \\
&= \iint\limits_{T_i} \left(\frac{\partial G(s, Q)}{\partial n} - ik_a G(s, Q)\right) E_z(Q) d\sigma \\
&= \iint\limits_{T_i} O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) E_z(Q) d\sigma \\
&= O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right), \text{ also jedenfalls} \\
&= O\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right), \text{ w.z.b.w.}
\end{aligned}$$

Dabei ist die Gleichung (21) benutzt, die mit entsprechend geänderten Bezeichnungen natürlich auch für $G(s, Q)$ gilt.

Hat man statt (3) als Voraussetzung die Gleichung (15) gewählt (vgl. Schluß von § 2), so muß jetzt bewiesen werden, daß diese letztere Gleichung von E_z befriedigt wird. In der Tat ist, wenn die Bezeichnungen des vorigen § beibehalten werden,

$$\frac{J}{k_i^2 - k_p^2} = \int\limits_S ds \iint\limits_{T_i} \left\{ G(s, Q) \frac{\partial G(P, s)}{\partial n} - \frac{\partial G(s, Q)}{\partial n} G(P, s) \right\} E_z(Q) d\sigma.$$

Aber $\{\ldots\} = G(s, Q) O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) + G(P, s) O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$,

wobei wieder (21) benutzt ist. Mithin

$$\frac{J}{k_i^2 - k_a^2} = \int\limits_S ds \iint\limits_{T_i} O\left(\frac{1}{r^2}\right) E_z(Q) d\sigma,$$

woraus unmittelbar $J = O\left(\frac{1}{r}\right)$, also $\lim\limits_{r=\infty} J = 0$ folgt.

Wir können die Ergebnisse der §§ 2 und 3 in folgendem Satze zusammenfassen: *Das Beugungsproblem besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung E_z, die mit der Lösung der Integralgleichung* (17) *identisch ist.*

§ 4. *Bestimmung von H_z.*

Für die Z-Komponente H_z des Vektors H der magnetischen Feldstärke gelten dieselben Bedingungen wie für E_z (vgl. Anfang des § 2), bloß daß nicht $\frac{\partial H_z}{\partial n}$ selbst, sondern $\frac{1}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial n}$ beim Durchgange durch C stetig ist. Insbesondere gilt auch

$$(3^*) \qquad \frac{\partial}{\partial r}(H_z - B_z) + i k_a (H_z - B_z) = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$$

oder auch die zu (15) analoge Bedingung.

Zuerst zeigen wir nun, daß, wenn eine den obigen Bedingungen genügende Funktion H_z existiert, sie Lösung einer gewissen Integralgleichung sein muß.

Die Formeln I) bis IV) des § 2 bleiben auch für H_z richtig, wenn man in ihnen E_z durch H_z und A_z durch B_z ersetzt. Statt der einfachen Summation muß man aber jetzt

$$\frac{\text{I)}}{k_i^2} + \frac{\text{II)}}{k_a^2} \text{ bzw. } \frac{\text{III)}}{k_i^2} + \frac{\text{IV)}}{k_a^2}$$

bilden. Dann erhält man

$$\text{(23a)} \quad \frac{H_z(P)}{k_i^2} = \frac{k_i^2 - k_a^2}{k_i^2} \iint\limits_{T_i} G H_z d\sigma + \\ + \left(\frac{1}{k_i^2} - \frac{1}{k_a^2}\right) \int\limits_C H_z \frac{\partial G}{\partial n} ds + \frac{1}{k_a^2} \int\limits_S \left(H_z \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial H_z}{\partial n}\right) ds,$$

wenn P in T_i liegt,

$$\text{(23b)} \quad \frac{H_z(P)}{k_a^2} = \ldots,$$

wenn P in T_a liegt.

Die rechte Seite von (23b) stimmt mit der von (23a) überein. In dem über C erstreckten Integrale ist die Normale ins Innere von T_i gerichtet. Die Anwendung der Greenschen Formel auf die Funktionen B_z und G liefert, wenn man den Kreis mit der Peripherie S als Integrationsgebiet nimmt,

$$\text{(24)} \qquad B_z(P) = \int\limits_S \left(B_z \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial B_z}{\partial n}\right) ds.$$

Unter Benutzung von (3*) oder der zu (15) analogen Gleichung ergibt sich jetzt, völlig entsprechend § 2, daß man in (23a) und (23b) nach Ausführung des Grenzüberganges $\lim r = \infty$ ($r =$ Radius von S) das über S erstreckte Integral durch $B_z(P)$ ersetzen kann. Es wird also

$$\text{(25a)} \quad \frac{H_z(P)}{k_i^2} = \frac{k_i^2 - k_a^2}{k_i^2} \iint\limits_{T_i} G H_z d\sigma + \left(\frac{1}{k_i^2} - \frac{1}{k_a^2}\right) \int\limits_C H_z \frac{\partial G}{\partial n} ds + \frac{B_z(P)}{k_a^2}$$

bzw.

$$\text{(25b)} \quad \frac{H_z(P)}{k_a^2} = \ldots$$

Wir untersuchen noch, welcher Gleichung $H_z(P)$ genügt, wenn P auf C fällt. Läßt man P von T_i bzw. von T_a her auf C rücken, so bleibt in (25a) bzw. (25b) das über T_i erstreckte Flächenintegral, sowie auch B_z stetig. Dagegen zeigt das über C erstreckte Kurvenintegral dasselbe Unstetigkeitsverhalten wie das logarithmische Potential einer Doppelschicht. Daraus folgt

(25c) $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_i^2}+\frac{1}{k_a^2}\right) H_z(P) = \ldots,$$

wenn P auf C liegt.

Die rechten Seiten der drei Gleichungen (25) stimmen überein. Wir können diese drei Gleichungen in eine einzige zusammenfassen, wenn wir eine Größe k (ohne Index) folgendermaßen definieren. Es ist

(26) $$\frac{1}{k^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{k_i^2} & \text{, wenn } P \text{ in } T_i \text{ liegt} \\ \dfrac{1}{k_a^2} & \text{, „ } P \text{ in } T_a \text{ „} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k_i^2}+\dfrac{1}{k_a^2}\right), & \text{ „ } P \text{ auf } C \text{ „} \end{cases}$$

Dann ergibt sich

(27) $$\frac{H_z(P)}{k^2} = \frac{k_i^2-k_a^2}{k_i^2}\iint\limits_{T_i} G H_z d\sigma + \left(\frac{1}{k_i^2}-\frac{1}{k_a^2}\right)\int\limits_C \frac{\partial G}{\partial n} H_z ds + \frac{B_z(P)}{k_a^2}.$$

Das ist die gesuchte Integralgleichung für H_z.

Sie gehört nicht zum Fredholmschen Typus. Sie ist das zweidimensionale Analogon zu demjenigen Typus, den ich im eindimensionalen Fall als „erweiterte" Integralgleichung bezeichnet habe [10]). Die Theorie dieser Gleichungen kann nun aber in ähnlicher Weise wie die Fredholmsche Theorie entwickelt werden. Insbesondere gilt auch hier der Satz, daß die unhomogene Gleichung eine und nur eine Lösung hat, wenn die zugehörige homogene Gleichung keine Lösungen besitzt. Die homogene Gleichung

(28) $$\frac{\varphi(P)}{k^2} = \frac{k_i^2-k_a^2}{k_i^2}\iint\limits_{T_i} G(P, Q)\varphi(Q) d\sigma + \\ + \left(\frac{1}{k_i^2}-\frac{1}{k_a^2}\right)\int\limits_C \frac{\partial G(P, s)}{\partial n}\varphi(s) ds$$

(bei der Differentiation $\dfrac{\partial G(P, s)}{\partial n}$ ist natürlich s der variable Punkt) ist nun, wie sich aus Teil II ergeben wird, die Integralgleichung für die Z-Komponente des magnetischen Vektors einer

[10]) Eine hierauf bezügliche Note wird demnächst in den C. R. erscheinen.

Eigenschwingung. Daher hat (28) für reelles n keine Lösungen (vgl. § 3). Mithin hat (27) eine eindeutig bestimmte Lösung.

Diese Lösung ist zunächst in $T_i + C$, d.h. in den Punkten des Innengebietes T_i und der Begrenzung C definiert. Sie kann aber ohne weiteres ins Gebiet T_a fortgesetzt werden.

Die nun in der ganzen Ebene definierte Lösung H_z von (27) erfüllt alle Bedingungen unseres Problems. Dies wird genau so wie in § 3 für E_z gezeigt. Bloß in dem Beweis der Stetigkeit von H_z und $\frac{1}{k^2}\frac{\partial H_z}{\partial n}$ beim Durchgange durch C muß auf die Eigenschaften des über C erstreckten Randintegrals und auf die Definition von $\frac{1}{k^2}$ durch (26) Rücksicht genommen werden.

Das Resultat des § 4 kann in folgender Aussage zusammen gefasst werden: *Das Beugungsproblem besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung H_z, welche mit der Lösung der Integralgleichung* (27) *identisch ist.*

Teil II. Eigenschwingungen.

§ 1. *Die Integralgleichungen für die Eigenschwingungen. Transzendente Gleichung für n.*

Wir untersuchen jetzt die Eigenschwingungen, die in der Umgebung eines unendlich langen Zylinders mit der Achse parallel zur z-Achse möglich sind. Sie sind von der z-Koordinate unabhängig, d.h. in jeder auf der z-Achse senkrechten Ebene spielt sich derselbe Schwingungsvorgang ab. Es handelt sich also wieder um ein ebenes Problem.

Wir behalten die Bezeichnungen von Teil I bei und setzen wieder

$$(1) \qquad \mathfrak{E} = \Re\mathfrak{e}(e^{int} \cdot E), \quad \mathfrak{H} = \Re\mathfrak{e}(e^{int} \cdot H),$$

wo E und H nur noch von x und y abhängen. Jetzt sind nun die Konstante n, sowie die zu einem bestimmten n gehörigen Vektoren E und H, insbesondere die Komponenten E_z und H_z zu bestimmen.

Setzt man

$$(2) \qquad n = \mu + \nu i,$$

so gibt μ die Frequenz und ν die Dämpfung der Eigenschwingung. Es wird

$$e^{int} = e^{i\mu t} \cdot e^{-\nu t}, \tag{3}$$

so daß $\nu > 0$ sein muß.

Wir werden zeigen, daß die Zahlen n die Wurzeln einer transzendenten Gleichung sind, die man mit Hilfe der Integralgleichungstheorie wirklich aufstellen kann. Die Eigenschwingungen sind dadurch charakterisiert, daß $\mathfrak{A} \equiv 0$ und $\mathfrak{B} \equiv 0$ ist. Die Bedingungen für E_z und H_z sind also dieselben wie die in Teil I mit denselben Buchstaben bezeichneten Funktionen, nur daß man $A_z \equiv 0$ bzw. $B_z \equiv 0$ setzen muß.

Demnach ergibt sich für E_z die homogene Integralgleichung

$$E_z(P) = (k_i^2 - k_a^2) \iint_{T_i} G(P, Q) E_z(Q) d\sigma. \tag{4}$$

Umgekehrt beweist man leicht, ganz wie in Teil I, daß eine Lösung von (4) alle Bedingungen des Problems erfüllt. Die gesuchten Schwingungszahlen n sind also diejenigen Zahlen, für welche die homogene Gleichung (4) Lösungen besitzt. Bei der Aufstellung der transzendenten Gleichung für die n ist zu beachten, daß

$$G(P, Q) = \frac{H_0^{(2)}(k_a \cdot r_{PQ})}{2\pi}$$

wegen $k_a = \frac{n}{c}$ selbst von n abhängig ist. Wir schreiben (4) daher in der Form

$$E_z(P) = \iint_{T_i} K(P, Q) E_z(Q) d\sigma, \tag{4*}$$

indem wir

$$K(P, Q) = (k_i^2 - k_a^2) G(P, Q) \tag{5}$$

setzen, und müssen n so bestimmen, daß der (von n abhängige) Kern K von (4*) den Eigenwert 1 hat.

Die Fredholmsche Determinante von $K(P, Q)$ ist

$$D(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-\lambda)^m C_m, \tag{6}$$

wenn

$$C_0 = 1 \text{ und}$$

$$(7) \quad C_m = \frac{1}{m!}\int \dots \int \begin{vmatrix} 0, & K(Q_1, Q_2), & \dots K(Q_1, Q_m) \\ K(Q_2, Q_1), & 0, & \dots K(Q_2, Q_m) \\ K(Q_m, Q_1), K(Q_m, Q_2), & \dots & 0 \end{vmatrix} d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_m$$

für $m = 1, 2, \dots$ gesetzt wird[11]). Dabei sind $d\sigma_1, \dots, d\sigma_m$ die Flächenelemente, die zu den Integrationspunkten $Q_1, \dots, Q_m$ gehören.

Die Zahlen n genügen also der Gleichung

$$(8) \qquad D(1) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m C_m = 0.$$

Man kann auch schreiben

$$(9) \qquad D(1) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (k_i^2 - k_a^2)^m A_m.$$

Dabei ist

$$A_0 = 1 \quad \text{und}$$

$$(10) \quad A_m = \frac{1}{m!}\int \dots \int \begin{vmatrix} 0, & G(Q_1, Q_2), & \dots G(Q_1, Q_m) \\ G(Q_2, Q_1), & 0, & \dots G(Q_2, Q_m) \\ G(Q_m, Q_1), G(Q_m, Q_2), & \dots & 0 \end{vmatrix} d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_m.$$

Die Gleichung für n lautet nun

$$(11) \qquad D(1) = F(n) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(n)(k_i^2 - k_a^2)^m = 0.$$

Um die Abhängigkeit von n zum Ausdruck zu bringen, haben wir noch das Funktionszeichen $F(n)$ eingeführt und $A_m(n)$ geschrieben.

Die Funktion $F(n)$ ist keine ganze Funktion von n; denn die Koeffizienten $A_m(n)$ der Potenzen $(k_i^2 - k_a^2)^m$ enthalten ebenso wie die Funktionen $G(Q_1, Q_2)$, $G(Q_1, Q_3), \dots$ den Ausdruck $\log n$. Die in (11) auftretende Reihe, durch welche $F(n)$ definiert wird, ist jedoch für jedes endliche und von 0 verschiedene n konvergent.

Die Wurzeln $n = \mu + \nu i$ von (11) sind sämtlich komplex mit positivem ν; denn die Eigenschwingungen sind gedämpft und zwar aus zwei Gründen. Erstens verwandelt sich ein Teil der Schwingungsenergie in Joulesche Wärme, weil der Zylinder eine gewisse Leitfähigkeit besitzt, und zweitens breitet sich die Schwingung vom Zylinder her in den Raum aus.

Die Komponente H_z genügt der homogenen Integralgleichung

---

[11]) Vgl. D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen [Teubner, 1912], 31.

$$(12)\quad \frac{H_z(P)}{k^2} = \frac{k_i^2 - k_a^2}{k_i^2} \iint\limits_{T_i} G(P, Q) H_z(Q) d\sigma + \\ + \left(\frac{1}{k_i^2} - \frac{1}{k_a^2}\right) \int\limits_C \frac{\partial G(P, s)}{\partial n} H_z(s) ds$$

(vgl. Teil I, § 4, Gleich. (27)). Diejenigen Zahlen n, für welche die Gleichung (12) Lösungen besitzt, sind Eigenschwingungszahlen. Sie sind ebenfalls alle komplex mit positivem rein imaginärem Bestandteil. Die zu einem solchen n gehörige Lösung H_z von (12) erfüllt alle Bedingungen des Problems.

§ 2. *Spezieller Fall. Der Kreiszylinder.*

Der Querschnitt des Zylinders sei ein Kreis vom Radius R [12]). Dieser einfachste Spezialfall kann direkt ohne Benutzung der allgemeinen Untersuchungen von § 1 behandelt werden, da sich die Funktionen E_z und H_z mittels Besselscher und Hankelscher Funktionen direkt darstellen lassen.

Wir machen den Kreismittelpunkt zum Ursprung und führen für den Aufpunkt P Polarkoordinaten r, φ ein.

Dann kann man für E_z den Ansatz

$$(13)\qquad E_z(P) = \begin{cases} H_m^{(2)}(k_a r)\,\{a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi\} & \text{in } T_a \\ J_m(k_i r)\,\{c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi\} & \text{in } T_i \end{cases}$$

$[m = 0, 1, 2, \ldots]$ machen. Dabei sind $a_m, \ldots, d_m$ Konstante. J_m ist die gewöhnliche Besselsche Funktion m-ter Ordnung, $H_m^{(2)}$ die Hankelsche Funktion m-ter Ordnung zweiter Art [13]). Die durch (13) definierte Funktion E_z genügt in der Tat der Schwingungsgleichung mit dem Wert k_a^2 in T_a und k_i^2 in T_i. Ferner kommt bei dem Ansatz für E_z in T_i von allen Zylinderfunktionen nur J_m in Betracht, weil nur diese für $r = 0$ stetig bleibt, in T_a aber nur $H_m^{(2)}$, weil sie als einzige divergente Wellen liefert. Aus der Stetigkeit von E_z und $\frac{\partial E_z}{\partial r}$ für $r = R$ ergibt sich, wenn man die Ableitungen durch Striche bezeichnet,

$$(14)\qquad \begin{aligned} H_m^{(2)}(k_a R)\{a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi\} &= \\ &= J_m(k_i R)\{c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi\} \\ k_a H_m'^{(2)}(k_a R)\{\ldots\} &= \\ &= k_i J_m'(k_i R)\{\ldots\}. \end{aligned}$$

[12]) Die Eigenschwingungen beim Kreiszylinder sind wohl zuerst von J. J. Thomson untersucht worden. Rec. researches [London, 1893], 428.

[13]) Watson, l. c., 73, Gleich. (1).

Diese Gleichungen gelten identisch in φ. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} a_m H_m^{(2)}(k_a R) &= c_m J_m(k_i R) \\ b_m H_m^{(2)}(k_a R) &= d_m J_m(k_i R) \\ a_m k_a H_m'^{(2)}(k_a R) &= c_m k_i J_m'(k_i R) \\ b_m k_a H_m'^{(2)}(k_a R) &= d_m k_i J_m'(k_i R). \end{aligned} \tag{15}$$

Demnach muß für $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$D_m = \begin{vmatrix} H_m^{(2)}(k_a R) & J_m(k_i R) \\ k_a H_m'^{(2)}(k_a R) & k_i J_m'(k_i R) \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

sein. Die Gleichungen (16) dienen zur Bestimmung der Zahlen n. Die Gleichung (11) des § 1 zerfällt also hier in unendlich viele Gleichungen (ähnlich wie bei den elastischen Schwingungen einer kreisförmigen Membran).

Nimmt man für n irgendeine Lösung einer der Gleichungen (16), so sieht man unmittelbar, daß genau zwei linear unabhängige zugehörige Eigenfunktionen existieren, die natürlich nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind. Man kann setzen

$$\begin{aligned} a_m &= J_m(k_i R), \quad & c_m &= H_m^{(2)}(k_a R) \\ b_m &= 0 \quad &, \quad d_m &= 0 \end{aligned} \tag{17_1}$$

und

$$\begin{aligned} a_m &= 0 \quad &, \quad c_m &= 0 \\ b_m &= J_m(k_i R), \quad & d_m &= H_m^{(2)}(k_a R). \end{aligned} \tag{17_2}$$

In beiden Fällen ist (15) befriedigt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} E_z(P) &= J_m(k_i R) H_m^{(2)}(k_a r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \text{ in } T_a \\ E_z(P) &= H_m^{(2)}(k_a R) J_m(k_i r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \text{ in } T_i. \end{aligned} \tag{18}$$

In den Gleichungen (18) ist beide Male entweder $\cos m\varphi$ oder $\sin m\varphi$ zu nehmen. Man kann leicht verifizieren, daß die durch (18) definierten Funktionen E_z alle Bedingungen des Problems erfüllen, also die gesuchten Eigenschwingungsfunktionen sind. Sie sind natürlich auch Lösungen oder Eigenfunktionen der homogenen Integralgleichung (4) oder (4*). Jede zu einem bestimmten n gehörige Eigenfunktion ist ein lineares homogenes Aggregat der beiden obigen.

In allen bisherigen Untersuchungen war stets vorausgesetzt, daß die Leitfähigkeit σ des Zylinders endlich ist. Ist der Zylinder insbesondere ein vollkommener Isolator, so ist $\sigma = 0$, $k_i = \dfrac{n\sqrt{\varepsilon}}{c}$. Alle unsere Resultate bleiben richtig.

Nehmen wir jetzt im Gegenteil an, daß der Zylinder ein vollkommener Leiter, also $\sigma = \infty$ ist. Dann ist die in Teil I) und II) entwickelte Methode nicht anwendbar. Die Methode der Integralgleichungen führt aber in veränderter Form auch jetzt zum Ziele. Der Grenzfall $\sigma = \infty$ ist sogar leichter zu behandeln als der eines endlichen σ. Wir wollen aber von der Anwendung der Integralgleichungen auf diesen Fall hier absehen und nur speziell ganz kurz die Eigenschwingungen beim Kreiszylinder für $\sigma = \infty$ besprechen. Jetzt finden in T_i überhaupt keine Schwingungen statt. Es kommt also nur das Gebiet T_a in Betracht. Die Maxwellsche Grenzbedingung lautet jetzt einfach [14])

$$E_z = 0 \text{ auf } C. \tag{19}$$

Beim Kreiszylinder wird daher identisch in φ

$$E_z \Big|^{r=R} = 0. \tag{20}$$

Wir machen also den Ansatz

$$E_z(P) = H_m^{(2)}(k_a r) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \text{in } T_a \qquad [m = 0, 1, 2, \ldots]. \tag{21}$$

Aus (20) und (21) folgt

$$H_m^{(2)}(k_a R) = 0 \qquad [m = 0, 1, 2, \ldots]. \tag{22}$$

Die Gleichung (22) tritt an Stelle von (16).

In ähnlicher Weise wie E_z kann auch H_z bestimmt werden, sowohl bei endlichem wie bei unendlichem σ. Für endliches σ findet man

$$\begin{aligned} H_z(P) &= J_m(k_i R) H_m^{(2)}(k_a r) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \text{in } T_a \\ H_z(P) &= H_m^{(2)}(k_a R) J_m(k_i r) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \text{in } T_i. \end{aligned} \tag{23}$$

Die Gleichungen (23) stimmen formal mit (18) überein. Die Zahlen n sind aber jetzt die Wurzeln der Gleichungen

$$\begin{vmatrix} H_m^{(2)}(k_a R) \;, & J_m(k_i R) \\ k_i H_m'^{(2)}(k_a R), & k_a J'_m(k_i R) \end{vmatrix} = 0 \qquad [m = 0, 1, 2, \ldots]. \tag{24}$$

Sie ergeben sich aus den Maxwellschen Grenzbedingungen für H_z.

---

[14]) Enc., l. c., 505.

Im Falle $\sigma = \infty$, zu dem wir jetzt wieder übergehen, lautet die Grenzbedingung [15])

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \text{ auf } C, \tag{25}$$

für einen Kreiszylinder daher

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial r}\right|^{r=R} = 0. \tag{26}$$

Es ergibt sich leicht für $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$H_z(P) = H_m^{(2)}(k_a r)\begin{cases}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{cases} \text{ in } T_a. \tag{27}$$

Die Gleichungen für die Zahlen n sind

$$H_m'^{(2)}(k_a R) = 0. \tag{28}$$

(Eingegangen den 4. Februar 1935.)

---

[15]) Enc., l. c. 505.