COMPOSITIO MATHEMATICA

HEINZ HOPF

Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 50-62
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__50_0>

Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven

von

Heinz Hopf

Zürich

Im Folgenden stelle ich für zwei bereits bekannte Sätze neue Beweise dar. Angeregt zu den Überlegungen, deren Ergebnis diese Darstellung ist, wurde ich durch Herrn Ostrowski, als er mir die — unten in Nr. 3 formulierte — Verschärfung des Rolleschen Theorems mitteilte, die er vor Kurzem ausgesprochen und bewiesen hat [1]). Herr Ostrowski approximiert bei seinem Beweis die stetig differenzierbare Kurve, um die es sich handelt, durch Polygone und stellt Hilfssätze über diese Approximationen auf, die an und für sich wichtig sind. Trotzdem dürfte auch ein Beweis, der Approximationen gerade vermeidet, Interesse verdienen; ein solcher wird in Nr. 3 geliefert.

Der Rolle-Ostrowskische Satz handelt von der Drehung der Sehnen und Tangenten einer ebenen Kurve. Die bekannteste und wichtigste Tatsache in diesem Zusammenhang, die übrigens von Herrn Ostrowski neu bewiesen und benutzt wird, ist der — wohl auf Riemann zurückgehende [2]) — „*Umlaufsatz*": die Tangentenrichtung einer einfach geschlossenen ebenen Kurve C führt bei einmaliger Umlaufung von C die Drehung $\pm 2\pi$ aus. Von seinen bisherigen, mir bekannten, Beweisen [3]) erscheint mir keiner so kurz und einfach, daß es sich nicht mehr lohnte, noch kürzere

[1]) A. Ostrowski, Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente I: Über eine topologische Verallgemeinerung des Rolleschen Satzes [Compositio Math. **2** (1935), 26].

[2]) Man vergl. Riemann, Theorie der Abelschen Funktionen (1857), Nr. 7 [Ges. Math. Werke, 106—107]. Die erste ausdrückliche Formulierung des Satzes mit angemessenen Voraussetzungen und Beweis stammt wohl von G. N. Watson: A problem of analysis situs [Proc. London Math. Soc. (2) **15** (1916), 227 ff].

[3]) Watson, a.a.O. [2]); J. Radon, Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential [Sitz.-Ber. Akad. Wien (IIa) **128** (1919), 1123 ff]; von Kerékjártó [Proc. Lond. Math. Soc. (2) **23** (1924), XXXIX]; Bieberbach, Differentialgeometrie (Leipzig 1932), 94—95; Ostrowski, a.a.O. [1]).

und einfachere Beweise zu suchen [4]); in Nr. 2 teile ich einen Beweis mit, den ich für einfacher halte als die früheren [5]).

Beide Sätze behalten, geeignet formuliert, ihre Gültigkeit, wenn man das Auftreten endlich vieler Ecken oder Spitzen auf den Kurven zuläßt [6]), und besonders für Anwendungen des Umlaufsatzes ist diese Erweiterung wichtig [7]). In Nr. 4 wird gezeigt, wie man diese Verallgemeinerung vorzunehmen hat.

Nr. 1 enthält lediglich die Zusammenstellung einiger Begriffe und Hilfsmittel, bei denen es sich, wie der sachkundige Leser bemerken wird, nur um Spezialfälle viel allgemeinerer und bekannter Dinge handelt [8]).

1. *Vorbemerkungen.*

a) f sei eine eindeutige und stetige Abbildung einer Strecke S in eine Kreislinie K [9]). Auf K sei in der üblichen Weise eine Winkelkoordinate t eingeführt: t läuft von $-\infty$ bis $+\infty$, und zu t' und t'' gehört dann und nur dann derselbe Punkt, wenn $t' \equiv t''$ mod. 2π ist. *Dann kann man bekanntlich auf S eine eindeutige und stetige Funktion $t(p)$ so definieren, daß $t(p)$ für jeden Punkt $p \subset S$ eine Winkelkoordinate des Bildpunktes $f(p)$ ist.* Man teilt zum Zweck dieser Definition S in aneinander schließende, so kleine Teilstrecken $S_1, S_2, \ldots, S_n$, daß jedes Bild $f(S_i)$ nur ein echter Teil von K ist; für den Anfangspunkt p_1 von S_1, also den Anfangspunkt von S, setzt man einen der möglichen Werte $t(p_1)$ willkürlich fest; durch die Forderung der Stetigkeit ist dann t für jeden Punkt $f(p)$ des Bogens $f(S_1)$ eindeutig erklärt, also insbesondere $t(p_2)$ im Anfangspunkt p_2 von S_2; usw. Ebenso leicht sieht man: $t(p)$ ist bis auf Addition eines willkürlichen ganzen

---

[4]) Erwünscht ist ein Beweis, der kurz ist, dessen Kürze aber nicht durch Berufung auf tieferliegende topologische Eigenschaften einer Jordankurve — wie etwa die Abbildbarkeit ihres Inneren auf eine Kreisscheibe oder ihre topologische Deformierbarkeit in eine Kreislinie — erkauft wird.

[5]) Mein Beweis hat Berührungspunkte mit dem in Anm. 3 zitierten Beweis von Radon.

[6]) Ostrowski beweist a.a.O. beide Sätze unter der weit schwächeren Voraussetzung, daß die Tangentenrichtungen nur „Unstetigkeiten erster Art" besitzen. Man vgl. auch Radon, a.a.O. [3]).

[7]) Z.B. in der Arbeit von Ostrowski [1]) oder als Formel von Gauß-Bonnet in der Differentialgeometrie.

[8]) Insbesondere behandelt Nr. 1, *b*, einen Spezialfall des „Monodromie-Prinzips".

[9]) Bei einer Abbildung von A „auf" B ist jeder Punkt von B Bildpunkt; eine Abbildung von A „in" B ist eine Abbildung auf einen (echten oder unechten) Teil von B.

Vielfachen von 2π eindeutig bestimmt; sowie: Verlegung des Nullpunktes auf K bedeutet nur Addition einer Konstanten zu t.

Alles dies bleibt gültig, wenn S nicht eine Strecke, sondern die ganze offene Gerade ist; man teilt dann S in abzählbar viele aneinander schließende Strecken $\ldots, S_{-1}, S_0, S_1, \ldots$ und behandelt der Reihe nach $S_0, S_1, S_{-1}, S_2, S_{-2}, \ldots$ wie oben.

b) T sei eine Punktmenge eines euklidischen Raumes, die in Bezug auf einen ihrer Punkte o sternförmig ist; d.h. ist $p \subset T$, so ist die ganze Strecke $\overline{op} \subset T$. Bei unseren Anwendungen wird T übrigens entweder ein abgeschlossenes Dreieck sein oder aus dem Inneren eines Dreiecks und einer Teilmenge des Randes bestehen.

f sei eine Abbildung von T in K. Wir behaupten auch jetzt: *es gibt eine in T eindeutige und stetige Funktion $t(p)$, die für jeden Punkt $p \subset T$ eine Winkelkoordinate von $f(p)$ angibt.* Um f zu konstruieren, legen wir $t(o)$ auf eine der möglichen Weisen fest und definieren dann f wie oben auf jeder Strecke $\overline{op}$ für jeden Punkt $p \subset T$. Es entsteht eine in T eindeutige und auf jeder Strecke $\overline{op}$ stetige Funktion, die für jedes p die Winkelkoordinate von $f(p)$ angibt. Zu beweisen ist: $t(p)$ ist in der Umgebung jeder Stelle $p_0 \subset T$ eine stetige Funktion von p.

$a = a(p_0)$ sei eine positive Zahl mit folgender Eigenschaft: für $q_0 \subset \overline{op_0}$ und $\varrho(qq_0) < a$ (ϱ bezeichnet die Entfernung) sind die Bildpunkte $f(q)$ und $f(q_0)$ niemals Diametralpunkte auf K; die Existenz von a ergibt sich leicht aus der Stetigkeit von f sowie der Kompaktheit und Abgeschlossenheit von $\overline{op_0}$. Die sogleich zu wählende Umgebung U von p_0 soll jedenfalls in dem Kreis mit a um p_0 enthalten sein. Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir U so klein, daß für $p \subset U$

$$t(p) = t(p_0) + \varepsilon' + k \cdot 2\pi, \quad k \text{ ganz}, \quad |\varepsilon'| < \varepsilon,$$

ist; das ist infolge der Stetigkeit von f gewiß möglich. Zu zeigen ist: $k = 0$.

Ist q ein Punkt der Strecke $\overline{op}$, so sei q_0 derjenige Punkt der Strecke $\overline{op_0}$, für den $\overline{qq_0}$ parallel zu $\overline{pp_0}$ ist; dann ist $\varrho(qq_0) < a$, folglich nach Definition von a:

$$t(q) - t(q_0) \not\equiv \pi \mod 2\pi.$$

$t(q) - t(q_0)$ ist eine stetige Funktion von q und hat für $q = o$ den Wert 0; aus der soeben bewiesenen Inkongruenz folgt daher

$$|t(q) - t(q_0)| < \pi.$$

Dies gilt für alle $q \subset \overline{op}$, also insbesondere für $q = p$; darin ist $k = 0$ enthalten.

Auch hier ist (wie unter a) klar: die Funktion t ist bis auf Addition eines beliebigen ganzen Vielfachen von 2π eindeutig bestimmt und erleidet die Addition einer Konstanten, wenn man den Nullpunkt der Winkelkoordinaten auf K verschiebt.

c) C sei eine einfach geschlossene Linie; sie sei auf einen Parameter s, $-\infty < s < +\infty$, so bezogen, daß zu s' und s'' dann und nur dann derselbe Punkt gehört, wenn $s' \equiv s''$ mod. 1 ist. f sei eine Abbildung von C in K. Durch f wird eine Abbildung F der unendlichen s-Geraden S in K bewirkt. Auf S ist dann die zu F gehörige Funktion $t(s)$ wie unter a erklärt. Dabei ist

$$t(s+1) - t(s) = k \cdot 2\pi, \qquad k \text{ ganz,}$$

für jeden Wert von s; da die ganze Zahl k stetig von s abhängt, ist sie konstant. Sie heißt der „*Grad*" von f.

2. *Der Umlaufsatz.*

Die einfach geschlossene Kurve C sei in der eben besprochenen Weise auf den Parameter s bezogen und stetig differenzierbar; dann besitzt sie überall Tangenten, deren Richtungen stetig von den Berührungspunkten abhängen [10]; wir fragen nach der Gesamtänderung, die diese Richtungen bei einmaliger Umlaufung von C erleiden. Um diese Frage und überhaupt den Sinn der „stetigen Abhängigkeit der Tangentenrichtungen von den Berührungspunkten" zu präzisieren, zeichnen wir in der Ebene einen festen Kreis K als „Richtungskreis" aus, jedem Punkt $p = p(s) \subset C$ ordnen wir denjenigen Punkt $f(p) \subset K$ zu, dessen zugehöriger Radius parallel zu der positiven, d.h. das Wachsen von s anzeigenden, Tangentenrichtung von C in p ist. Daß die Tangentenrichtungen stetig von p abhängen, bedeutet: die Abbildung f von C in K ist stetig; und unter der Gesamtänderung der Tangentenrichtung bei Umlaufung von C verstehen wir den mit 2π multiplizierten Grad dieser Abbildung (Nr. 1, c) oder, was dasselbe ist, die Änderung, die die Winkelkoordinate t von $f(p)$ erleidet, während p die Kurve C durchläuft. Es ist klar, daß dieser Grad sein Vorzeichen mit Umkehrung der Durchlaufungsrichtung von C umkehrt. Der zu beweisende Satz lautet nun:

Die Gesamtänderung der Tangentenrichtung bei einmaliger Umlaufung der einfach geschlossenen Kurve C ist $\pm 2\pi$.

---

[10]) Die stetige Differenzierbarkeit ließe sich auch in dem nachstehenden Beweis durch schwächere Voraussetzungen ersetzen.

Beweis: $p(s)$ bezeichne immer den zum Parameterwert s gehörigen Punkt von C. Jedem Paar s_1, s_2 mit

$$0 \leqq s_1 \leqq s_2 \leqq 1 \tag{1}$$

ordnen wir denjenigen Punkt $f(s_1, s_2)$ von K zu, dessen zugehöriger, vom Mittelpunkt von K ausgehender Radius der Richtung $\overrightarrow{p(s_1)p(s_2)}$ parallel ist; dabei ist unter $\overrightarrow{p(s)p(s)}$ die positive Tangentenrichtung in $p(s)$ und außerdem unter $\overrightarrow{p(0)p(1)}$ die negative Tangentenrichtung in $p(0)=p(1)$ zu verstehen. Infolge der stetigen Abhängigkeit der Punkte $p(s)$ und ihrer Tangentenrichtungen von s ist $f=f(s_1, s_2)$ eine eindeutige und stetige Abbildung des durch (1) in einer cartesischen s_1-s_2-Ebene bestimmten Dreiecks T. Nach Nr. 1, b, gibt es daher eine in T stetige Funktion $t(s_1, s_2)$, die für jede Stelle (s_1, s_2) gleich einer der zu $f(s_1, s_2)$ gehörigen Winkelkoordinaten ist. Die zu dieser „Sehnenrichtungsfunktion" $t(s_1, s_2)$ gehörige „Tangentenrichtungsfunktion" $t(s, s)=t(s)$ dient gemäß Nr. 1, c, zur Bestimmung des zu untersuchenden Grades k: er ist durch

$$t(1, 1)=t(0, 0)+k \cdot 2\pi \tag{2}$$

gegeben.

In der Ebene von C sei ein rechtwinkliges x-y-Koordinatensystem eingeführt. Wir wählen die Parameterdarstellung von C so, daß die Koordinate y in $p(0)=p(1)$ ihr Minimum erreicht; die Tangente in diesem Punkt ist der x-Achse parallel, und wir können den positiven Durchlaufungssinn von C — also die Richtung des wachsenden s — so festsetzen, daß er in $p(0)$ der positiven x-Richtung entspricht; das bei der Definition von t willkürliche ganze Vielfache von 2π wählen wir derart, daß

$$t(0, 0)=0 \tag{3}$$

wird.

Jetzt verfolgen wir erstens die Änderung des Punktes $f(0, s)$ und der Funktion $t(0, s)$ für $0 \leqq s \leqq 1$: da die zu $f(0, 0)$ und $f(0, 1)$ gehörigen beiden Tangentenrichtungen in $p(0)$ einander entgegengesetzt sind, wandert $f(0, s)$ von dem durch (3) angegebenen Punkt $f(0, 0)$ in dessen Diametralpunkt; da die Richtung $\overrightarrow{p(0)p(s)}$ niemals in die untere Halbebene weist, vermeidet $f(0, s)$ dabei den unteren Halbkreis von K; folglich muß der mit (3) beginnende Wert der Winkelkoordinate t von $f(0, s)$ einen Zuwachs von $+\pi$ erfahren, es muß also

$$t(0, 1)=\pi \tag{4}$$

sein.

Zweitens betrachten wir $f(s, 1)$ und $t(s, 1)$ für $0 \leqq s \leqq 1$: $f(s, 1)$ wandert von dem durch (4) angegebenen Punkt $f(0, 1)$ wieder in seinen Ausgangspunkt $f(1, 1) = f(0, 0)$ zurück, vermeidet jetzt aber den oberen Halbkreis, da die Richtung $\overrightarrow{p(s)p(1)}$ niemals in die obere Halbebene zeigt; folglich muß t wieder einen Zuwachs von $+\pi$ erfahren; die mit (4) beginnende Funktion $t(s, 1)$ muß also den Endwert

$$t(1, 1) = 2\pi \tag{5}$$

besitzen. In (2), (3), (5) ist $k = 1$ enthalten.

Damit ist der Satz bewiesen. Die Bestimmtheit des positiven Vorzeichens von k rührt von der oben vorgenommenen Festsetzung der Durchlaufungsrichtung von C her.

3. *Der Rolle-Ostrowskische Satz.*

C sei ein einfacher Kurvenbogen in der Ebene, also eine für $0 \leqq s \leqq 1$ stetig von s abhängende Schar von Punkten $p(s)$, so daß $p(s_1) \neq p(s_2)$ für $s_1 \neq s_2$ ist; das durch

$$0 \leqq s_1 < s_2 \leqq 1 \tag{1'}$$

gegebene (nicht abgeschlossene) Dreieck T' in der s_1-s_2-Ebene wird wieder in den Richtungskreis K durch die Bestimmung abgebildet, daß $f(s_1, s_2)$ der Punkt von K ist, dessen zugehöriger Radius die Richtung $\overrightarrow{p(s_1)p(s_2)}$ besitzt; die gemäß Nr. 1, b, zu dieser Abbildung f von T' gehörige Funktion $t(s_1, s_2)$ nennen wir wieder die „Sehnenrichtungsfunktion" von C. Wir setzen weiter voraus, daß C stetig differenzierbar ist; dann sind die Abbildung f und die Funktion t nicht nur in dem durch (1') gegebenen Dreieck T', sondern in dem ganzen, durch (1) gegebenen abgeschlossenen Dreieck T erklärt und stetig [10]). Dabei entsprechen $f(s, s)$ und $t(s, s)$ den positiven Tangentenrichtungen und ihren Winkelkoordinaten; $t(s) = t(s, s)$ ist die zu $t(s_1, s_2)$ gehörige „Tangentenrichtungsfunktion". Es ist klar, daß eine Änderung des bei der Definition von $t(s_1, s_2)$ zur freien Verfügung stehenden ganzen Vielfachen von 2π sowie eine Drehung des Koordinatensystems in der Ebene für die Sehnen- und für die Tangentenrichtungsfunktion die Addition derselben Konstanten bedeutet, und daß daher der Sinn des folgenden Satzes unabhängig von der Normierung der Funktion $t(s_1, s_2)$ und vom Koordinatensystem ist. Der Satz lautet:

Der Wertevorrat der Sehnenrichtungsfunktion $t(s_1, s_2)$ des einfachen Bogens C ist in dem Wertevorrat der Tangentenrichtungsfunktion $t(s) = t(s, s)$ enthalten.

Beweis: Zu beliebigen a, b $(0 \leqq a < b \leqq 1)$ haben wir die Existenz eines s mit

$$t(s, s) = t(a, b) \tag{A}$$

nachzuweisen. Dabei dürfen wir Sehnenrichtungsfunktion und Koordinatensystem so annehmen, daß

$$t(a, a) = 0 \tag{6}$$

ist. Wird (A) von $s = a$ erfüllt, so sind wir fertig; es sei also $t(a, b) \neq t(a, a) = 0$, und zwar etwa

$$t^* = t(a, b) > 0\,, \tag{7}$$

(was wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen dürfen, da der Fall eines negativen $t(a, b)$ ganz analog zu erledigen ist).

Wir dürfen weiter voraussetzen, b sei der *kleinste* s-Wert oberhalb a mit $t(a, s) = t^*$; das bedeutet mit Rücksicht auf (6) und die Stetigkeit von t:

$$t(a, s) < t^* \quad \text{für } a \leqq s < b. \tag{8}$$

Wir behaupten:

$$t(b, b) \geqq t^*; \tag{B}$$

hierin ist die Existenz eines (A) erfüllenden s enthalten: sie folgt aus (6), (7), (B) und der Stetigkeit von $t(s, s)$.

Setzen wir

$$\tau(s) = t(s, s) - t(a, s) \quad \text{für } a \leqq s \leqq b, \tag{9}$$

so daß also insbesondere

$$\tau(a) = 0 \tag{9'}$$

ist, so können wir mit Rücksicht auf (7) die Behauptung (B) auch so aussprechen:

$$\tau(b) \geqq 0. \tag{C}$$

Wir machen den Punkt $p(a)$ zum Nullpunkt der x-y-Koordinaten, die Tangentenrichtung von C in $p(a)$ zur positiven x-Richtung; dies verträgt sich mit der bereits vorgenommenen Normierung (6). Sodann bilden wir die x-y-Ebene durch

$$u + iv = \log(x + iy)$$

auf eine Ebene mit rechtwinkligen u-v-Koordinaten ab. Unter den unendlich vielen Bildern des zu

$$a < s \leqq b \tag{10}$$

gehörigen, einseitig offenen Bogens von C greifen wir dasjenige heraus, daß für $s \to a$ die negative u-Achse als Asymptote hat; diese Kurve heiße Γ; ihre Existenz folgt aus den einfachsten Eigenschaften des Logarithmus. Aus ihnen folgt ferner, wenn wir die Punkte von Γ mit $q(s)$, die Koordinaten von $q(s)$ mit $u(s)$, $v(s)$ bezeichnen,

$$v(s) = t(a, s),$$

also nach (7) und (8)

$$v(s) < v(b) = t^* > 0 \quad \text{für } a < s < b. \tag{11}$$

Dem auf dem Strahl $\overrightarrow{p(a)p(s)}$ gelegenen Linienelement in dem Punkt $p(s)$ entspricht bei der Abbildung das der positiven u-Richtung parallele Element in $q(s)$; der Tangentenrichtung von C in $p(s)$ entspricht die Tangentenrichtung von Γ in $q(s)$. Daher folgt aus (9) und der Winkeltreue der Abbildung: $\tau(s)$ *ist Tangentenrichtungsfunktion von* Γ; sie ist durch (9′) normiert, wofür wir jetzt besser sagen:

$$\lim_{s \to a} \tau(s) = 0. \tag{9''}$$

Die Behauptung (C) läßt sich jetzt so ausdrücken: *die Änderung von* τ, *also die Gesamtdrehung der Tangentenrichtung bei Durchlaufung von* Γ, ist $\geqq 0$.

Zum Zweck des Beweises der so formulierten — und nunmehr im Hinblick auf den Verlauf von Γ für $s \to a$ und $s \to b$ der Anschauung wohl recht plausiblen — Behauptung (C) betrachten wir auch in der u-v-Ebene einen „Richtungskreis" K und für jedes Wertepaar s_1, s_2 mit

$$a < s_1 \leqq s_2 \leqq b \tag{10'}$$

den Punkt $\varphi(s_1, s_2)$ von K, der der Richtung $\overrightarrow{q(s_1)q(s_2)}$ entspricht, unter $\overrightarrow{q(s)q(s)}$ die Tangentenrichtung von Γ in $q(s)$ verstanden. Nach Nr. 1, b, ist dann in dem (nicht abgeschlossenen) Dreieck (10′) der s_1-s_2-Ebene die stetige Sehnenrichtungsfunktion $\tau(s_1, s_2)$ erklärt; wir normieren sie durch

$$\tau(s, s) = \tau(s). \tag{12}$$

Infolge des asymptotischen Verlaufes von Γ für $s \to a$ gibt es eine solche Zahl σ, $(a < \sigma < b)$, daß für $a < s_1 \leqq s_2 \leqq \sigma$ der Punkt $\varphi(s_1, s_2)$ immer auf der *rechten* Hälfte von K liegt, was mit Rücksicht auf (12) und (9″) bedeutet:

$$-\frac{\pi}{2} < \tau(s_1, s_2) < +\frac{\pi}{2} \quad \text{für } a < s_1 \leqq s_2 \leqq \sigma. \tag{13}$$

Die Abszisse $u(s)$ hat für $\sigma \leqq s \leqq b$ ein Minimum u_0; es gibt eine solche Zahl σ', $(a < \sigma' < \sigma)$, daß

$$u(s') < u_0 \leqq u(s) \quad \text{für } a < s' \leqq \sigma',\ \sigma \leqq s \leqq b$$

ist; das bedeutet, daß der Punkt $\varphi(s', s)$ nicht nur für $s \leqq \sigma$, sondern für beliebiges $s \geqq s'$ auf der rechten Hälfte von K bleibt; folglich gilt

$$(13') \qquad -\frac{\pi}{2} < \tau(s_1, s_2) < +\frac{\pi}{2} \quad \text{für } a < s_1 \leqq \sigma',\ s_1 \leqq s_2 \leqq b.$$

Infolge von (11) liegen alle Punkte $\varphi(s, b)$ mit *beliebigem* $s < b$ auf der *oberen* Hälfte von K; hieraus ergibt sich erstens, daß in (13')

$$(14) \qquad 0 < \tau(\sigma', b)$$

enthalten ist, und zweitens mit Rücksicht auf (14)

$$(14') \qquad 0 < \tau(s, b) \quad \text{für alle } s < b,$$

und daher

$$0 \leqq \tau(b, b),$$

w.z.b.w.

4. *Kurven mit Ecken und Spitzen.*

Wir lassen jetzt zu, daß die Kurven C in Nr. 2 und Nr. 3 endlich viele „Ecken" haben, d.h. daß sie aus endlich vielen Bögen bestehen, von denen jeder mit Einschluß seiner Endpunkte stetig differenzierbar ist. Unter den „Ecken" verstehen wir die Stellen, an denen zwei Bögen zusammenstoßen; in jeder Ecke gibt es zwei verschiedene (positive) Tangentenrichtungen; sind diese Richtungen einander entgegengesetzt, so nennt man die Ecke eine „Spitze". Die Parameterwerte der Ecken und Spitzen seien s_i^* $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Für jedes Paar s_1, s_2 mit

$$(1^*) \qquad 0 \leqq s_1 \leqq s_2 \leqq 1, \quad (s_1, s_2) \neq (s_i^*, s_i^*), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ist eine Richtung $\overrightarrow{p(s_1)p(s_2)}$ wie früher erklärt; durch (1*) ist in der s_1-s_2-Ebene ein Dreieck bestimmt, aus dessen Rand endlich viele Punkte entfernt sind; gemäß Nr. 1, b, gibt es daher für (1*) eine stetige Sehnenrichtungsfunktion $t(s_1, s_2)$. Da jeder einzelne Bogen auch noch in seinen Endpunkten stetig differenzierbar ist, existieren die Grenzwerte

$$t(s_i^* + 0, s_i^* + 0), \quad t(s_i^* - 0, s_i^* - 0);$$

wir setzen

$$(15) \qquad W_i = t(s_i^* + 0, s_i^* + 0) - t(s_i^* - 0, s_i^* - 0).$$

Diese W_i sind damit vollkommen eindeutig festgelegt; an dem Aussehen von C kann man ihre Größe aber zunächst nur mod. 2π erkennen: sind $r(s_i^* - 0)$, $r(s_i^* + 0)$ die beiden positiven Tangentenrichtungen in $p(s_i^*)$, so ist W_i gleich einem der Winkel, um die man $r(s_i^* - 0)$ drehen muß, um sie in $r(s_i^* + 0)$ überzuführen. *Wir behaupten, daß*

$$(16) \qquad -\pi \leqq W_i \leqq +\pi,$$

daß also W_i in jeder Ecke der „Hauptwert" des in Frage kommenden Winkels ist; zugleich werden wir angeben, wie man im Fall einer Spitze entscheidet, ob $W_i = +\pi$ oder $W_i = -\pi$ ist.

$\varepsilon > 0$ sei gegeben; wir werden zeigen: ist $a < s_i < b$ und liegen a und b hinreichend nahe bei s_i^*, so ist

$$(16') \qquad |t(b, b) - t(a, a)| < \pi + \varepsilon;$$

darin ist (16) enthalten. Wir wählen a und b so nahe an s_i^*, daß

$$(17) \qquad |t(a, s_i^*) - t(a, a)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |t(b, b) - t(s_i^*, b)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist (im Falle der geschlossenen Kurve C (Nr. 2) haben wir, um $a < s_i^*$, $b > s_i^*$ wählen zu können, eine solche Parameterdarstellung zugrundezulegen, daß nicht gerade $s_i = 0$ oder $s_i^* = 1$ wird). Bezeichnen wir die zu s_i^*, a, b gehörigen Kurvenpunkte mit E, A, B, so dürfen wir infolge der Freiheit bei der Wahl von a und b annehmen, daß die Ecke E nicht auf der durch A und B gehenden Geraden g liegt; ferner dürfen wir voraussetzen, daß a der letzte s-Wert vor s_i^*, b der erste s-Wert nach s_i^* ist, für den der Kurvenpunkt $p(s)$ auf g liegt; denn andernfalls ersetzen wir a und b durch die hierdurch charakterisierten s-Werte.

Neben unserer Kurve fassen wir das geradlinige Dreieck AEB ins Auge; seine Winkel bei A und B seien α und β, und zwar zwischen 0 und π gemessen, so daß also

$$(18) \qquad 0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi, \quad \alpha + \beta < \pi$$

ist. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1) die Reihenfolge AEB bestimmt einen positiven Umlauf um das Dreieck, 2) sie bestimmt einen negativen Umlauf.

Im Fall 1 ist, wie ein Blick auf eine Figur lehrt,

$$(19a) \qquad t(a, b) - t(a, s_i^*) \equiv \alpha \mod. 2\pi,$$

$$(19b) \qquad t(s_i^*, b) - t(a, b) \equiv \beta \mod. 2\pi.$$

Da aber für $s_i^* \leqq s < b$ die Richtung $\overrightarrow{p(a)p(s)}$ immer in dieselbe

Halbebene bezüglich g zeigt, nämlich in diejenige, die E und damit den ganzen Kurvenbogen mit $a < s < b$ enthält, ist der Betrag der Schwankung von $t(a, s)$ kleiner als π; hieraus, aus (19a) und aus (18) folgt

$$t(a, b) - t(a, s_i^*) = \alpha; \tag{20a}$$

ebenso ergibt sich durch Betrachtung der Funktion $t(s, b)$ und der Richtungen $\overrightarrow{p(s)p(b)}$ für $a < s \leqq s_i^*$ zusammen mit (19b) und (18):

$$t(s_i^*, b) - t(a, b) = \beta. \tag{20b}$$

Aus (20a), (20b), (17) folgt

$$t(b, b) - t(a, a) = \alpha + \beta + \delta, \quad |\delta| < \varepsilon, \tag{21}$$

also mit Rücksicht auf (18) die Behauptung (16′).

Im Falle 2, in dem AEB einen negativen Umlauf darstellt, sind auf den rechten Seiten von (19a) und (19b) α und β offenbar durch $-\alpha$ und $-\beta$ zu ersetzen; infolgedessen sind auch auf den rechten Seiten von (20a) und (20b) die Vorzeichen umzukehren; an die Stelle von (21) tritt daher

$$t(b, b) - t(a, a) = -\alpha - \beta + \delta, \quad |\delta| < \varepsilon, \tag{21'}$$

womit auch für diesen Fall (16′) bewiesen ist.

Über die Behauptung (16) hinaus geben (21) und (21′) Auskunft über das Vorzeichen von W_i: da $\alpha + \beta > 0$ ist, ist im Fall 1 $W_i > -\varepsilon$, im Fall 2 $W_i < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, d. h. $W_i \geqq 0$ bzw. $W_i \leqq 0$. *Also ist insbesondere im Fall einer Spitze E der Winkel $W_i = +\pi$ oder $W_i = -\pi$ zu setzen, je nachdem die Reihenfolge AEB einen positiven oder einen negativen Umlauf um das geradlinige Dreieck AEB bedeutet.* Dabei sind, um es zu wiederholen, A und B derart hinreichend nahe vor und hinter E gelegene Kurvenpunkte, daß der Kurvenbogen AEB außer A und B keinen Punkt mit der Geraden AB gemeinsam hat.

Die damit geleistete Bestimmung der W_i ist wichtig für den geometrischen Inhalt der Verallgemeinerungen der Sätze aus Nr. 2 und Nr. 3, zu denen wir jetzt übergehen; für deren Formulierung und ihren Beweis ist sie aber unwesentlich, da hierbei durchaus die Definition (15) zugrundegelegt wird.

Für die geschlossene Kurve C, auf die wir den Satz aus Nr. 2 ausdehnen wollen, wählen wir eine solche Parameterdarstellung mit $0 \leqq s \leqq 1$, daß der Punkt $p(0) = p(1)$ regulär, d.h. keine Ecke oder Spitze ist, daß also $t(s_1, s_2)$ für $s_1 = s_2 = 0$ und für

$s_1 = s_2 = 1$ erklärt und stetig bleibt; das Koordinatensystem werden wir wieder so drehen, daß die Tangente in $p(0)$ mit der positiven x-Richtung zusammenfällt und die Funktion t so normieren, daß (3) gilt. Wir behaupten: auch jetzt gilt (5), bei geeigneter Durchlaufungsrichtung von C.

In der Tat behält der alte Beweis ohne die geringste Änderung seine Gültigkeit, falls man das Koordinatensystem so wählen kann, daß der Punkt von C, in dem die Ordinate y ihr Minimium erreicht, regulär ist, also zum Punkt $p(0) = p(1)$ gemacht werden kann (dies ist immer möglich, wenn C eine „Stütztangente" in einem regulären Punkt besitzt). Kann man das Koordinatensystem nicht so wählen, dann muß man eine kleine Modifikation des Beweises vornehmen: man wählt den Parameter s so, daß es vom Punkt $p(0) = p(1)$ aus einen Halbstrahl H gibt, welcher C in keinem weiteren Punkt trifft, und welcher nicht tangential an C ist; die Möglichkeit einer solchen Wahl liegt auf der Hand, da C nur endlich viele Ecken hat. Auf dem Richtungskreis K sei h der Punkt, der H entspricht, $\bar{h}$ sein Diametralpunkt; nehmen wir etwa an, daß h auf der unteren, $\bar{h}$ also auf der oberen Hälfte von K liegt. Dann ergibt sich (4) aus (3) analog wie früher: denn $f(0, s)$ vermeidet für $0 \leqq s \leqq 1$ den Punkt h; und aus (4) folgt (5): denn $f(s, 1)$ vermeidet für $0 \leqq s \leqq 1$ den Punkt $\bar{h}$.

Es gilt also in jedem Fall

$$t(1, 1) - t(0, 0) = 2\pi, \tag{22}$$

wenn nur $p(0) = p(1)$ ein regulärer Punkt von C ist.

Wir können (22) noch anders ausdrücken. $s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n$ seien die zu den Ecken und Spitzen gehörigen Parameterwerte in ihrer natürlichen Anordnung, und es sei noch $s_{n+1}^* = s_1^*$ gesetzt; C_i sei der Bogen mit $s_i^* \leqq s \leqq s_{i+1}^*$. Die Änderung der Tangentenrichtung längs C_i ist, wenn wir wieder $t(s, s) = t(s)$ setzen, durch

$$\Delta_i t = t(s_{i+1}^* - 0) - t(s_i^* + 0)$$

gegeben. Dann ist (22) gleichbedeutend mit

$$\sum_i \Delta_i t + \sum_i W_i = \pm 2\pi; \tag{22'}$$

in Worten: *die Gesamtdrehung der Tangentenrichtung bei Durchlaufung aller Bögen C_i — also $\sum \Delta_i t$ —, vermehrt um die Summe der „Außenwinkel" an den Ecken — also $\sum W_i$ —, ist gleich $\pm 2\pi$.*

Die Übertragung des Rolle-Ostrowskischen Satzes auf Kurven mit Ecken oder Spitzen erfordert ebenfalls fast keine Änderung des früheren Beweises. Die Sehnenrichtungsfunktion ist wie früher für

$$(1') \qquad 0 \leqq s_1 < s_2 \leqq 1$$

ausnahmslos stetig, während die Tangentenrichtungsfunktion $t(s) = t(s, s)$ an den Stellen s_i^* Sprünge W_i macht. Unter dem zu dem Kurvenbogen $a \leqq s \leqq b$ gehörigen „Tangentenrichtungsbüschel" [11]) verstehen wir den Wertevorrat von $t(s)$ für dieses Intervall — (genauer: für $a+0 \leqq s \leqq b-0$), einschließlich aller Zwischenwerte zwischen $t(s_i^*-0)$ und $t(s_i^*+0)$ für die dem Intervall angehörigen s_i^*. Der Satz lautet jetzt: *der Wertevorrat der Sehnenrichtungsfunktion ist in dem Tangentenrichtungsbüschel von C* $(0 \leqq s \leqq 1)$ *enthalten* [11]).

Nur die ersten Zeilen des früheren Beweises hat man abzuändern; man beginne: „Zu beliebigen a, b $(0 \leqq a < b \leqq 1)$ werden wir nachweisen, daß im Tangentenrichtungsbüschel des Bogens $a \leqq s \leqq b$ der Wert $t(a, b)$ enthalten ist. Dieser Nachweis wird — nach den normierenden Festsetzungen (6), (7), (8) — geleistet sein, sobald (B) bewiesen ist; denn aus (6), (7), (B) folgt die Behauptung, da ja das zu $a \leqq s \leqq b$ gehörige Tangentenrichtungsbüschel alle Zwischenwerte zwischen $t(a, a)$ und $t(b, b)$ enthält." Der Beweis von (B) wird genau so wie früher geführt.

(Eingegangen den 16. Dezember 1933.)

---

11) Ostrowski, a.a.O. [1]).