ALEXANDER KUROSCH

Kombinatorischer Aufbau der bikompakten topologischen Räume

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 471-476

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__471_0>

Kombinatorischer Aufbau der bikompakten topologischen Räume

von

Alexander Kurosch
Moskau

---

1. Herr Alexandroff hat gezeigt [1]), daß man jeden kompakten metrisierbaren Raum mit Hilfe sogenannter Projektionsspektra approximieren und somit mittels eines Limesprozesses aus den elementaren Gebilden — den simplizialen Komplexen — erzeugen kann. Diese Erkenntnis gab die Möglichkeit, kombinatorische Problemstellungen und Methoden auf metrische Räume zu übertragen, und wurde zum Ausgangspunkt zahlreicher topologischer Untersuchungen. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die Voraussetzung des II. Abzählbarkeitsaxiom (d.h. der Metrisierbarkeit des Raumes) eine unnötige Beschränkung ist, und daß auch jeder *bikompakte topologische Raum* [2]) auf demselben Wege geometrisch konstruiert werden kann.

Die erste Redaktion dieser Arbeit stammt aus dem Jahre 1929—30. Ihre jetzige vereinfachte Form konnte ich ihr dank mehrerer Ratschläge meines Lehrers Prof. Alexandroff geben.

2. Eine unendliche Menge $\mathfrak{K}$ von Komplexen K_α [3]) soll ein *Projektionsspektrum* heißen, wenn für einige Paare K_α, K_β dieser Komplexe simpliziale Abbildungen (etwa von K_β auf K_α) gegeben sind, die *Projektionen* heißen sollen und mit $\pi(K_\beta, K_\alpha)$ oder kurz π_α^β bezeichnet werden. Wir werden den Komplex K_α als *Vorgänger*, den Komplex K_β als *Nachfolger* bezeichnen, $K_\alpha \prec K_\beta$. Für jedes Simplex von K_β gibt es ein einziges *Bild* in K_α; jedes Simplex von K_α besitzt mindestens ein *Urbild* in K_β.

Die Projektionen sollen dabei folgenden Bedingungen I—IV genügen:

---

[1]) P. Alexandroff, Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension [Ann. of Math. (2) **30** (1928), 101—187].

[2]) Siehe die Definition und die Eigenschaften der bikompakten Räume in P. Alexandroff und P. Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume [Math. Ann. **92** (1924), 258—266].

[3]) α durchläuft eine beliebige Indexmenge.

I. Für je zwei Komplexe K_α, K_β gibt es entweder keine, oder nur *eine* Projektion $\pi(K_\beta, K_\alpha)$ und dann keine Projektion $\pi(K_\alpha, K_\beta)$.

II. Falls die Projektionen π_β^γ und π_α^β (von K_γ auf K_β bzw. K_β auf K_α) vorliegen, so liegt auch die Projektion $\pi_\alpha^\gamma = \pi_\alpha^\beta(\pi_\beta^\gamma)$ von K_γ auf K_α vor.

III. Zu je zwei Komplexen K_α, K_β gibt es einen gemeinsamen Nachfolger.

IV. Jeder Komplex K besitzt nur eine endliche Anzahl von Vorgängern. [4])

3. Eine Menge S von Simplexen T_α (mit T_α aus K_α) soll eine *Projektionsmenge* heißen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Zu je zwei Simplexen von S gibt es in S ein gemeinsames Urbild.

(2) Für jedes zu S gehörende Simplex T_α von K_α gibt es einen solchen Index β, daß $K_\alpha \prec K_\beta$ ist, und daß eins von den Urbildern von T_α in K_β zu S gehört.

Aus (1) folgt, daß S höchstens ein Simplex aus jedem Komplex enthält, und daß, wenn Komplexe K_α, K_β die zu S gehörenden Simplexe T_α, bzw. T_β enthalten und $K_\alpha \prec K_\beta$ ist, T_α das Bild von T_β sein muß.

Man kann jedes Simplex T in eine Projektionsmenge einschließen. Dazu genügt es, Simplexe $T_0 = T, T_1, \ldots, T_n, \ldots$ zu wählen, wo jedes T_n ein Urbild von T_{n-1} sein soll.

Wir werden sagen, daß die Projektionsmenge S von einer anderen Projektionsmenge S^* *umfaßt* wird, wenn jeder Komplex, der ein Simplex T von S enthält, auch ein Simplex T^* von S^* enthält und dabei T eine (echte oder unechte) Seite von T^* ist. Wenn dabei keine *echten* Seiten auftreten, soll S ein *Teil* von S^* heißen [5]).

4. Hilfssatz. *Es sei eine Menge A von Simplexen mit folgenden Eigenschaften gegeben:*

(a) *Mit jedem Simplex T enthält A auch alle Projektionen von T.*

(b) *Gehört ein Simplex T von A zu einem Komplex K, so gehört mindestens ein Urbild von T in jedem Nachfolger von K auch zu A.*

Dann gibt es eine Teilmenge A' von A, die eine Projektionsmenge ist und durch alle Komplexe geht.

---

[4]) Die Menge $\mathfrak{K}$ wird also durch unsere Projektionsvorschrift teilweise geordnet.

[5]) Man vergleiche diese Definition mit der entsprechenden Definition im metrisierbaren Falle. P. Alexandroff, a. a. O. [1]).

Beweis. Jeder Komplex enthält, nach (a) und (b), Simplexe von Λ. Wir nehmen an, daß die Menge aller Komplexe willkürlich wohlgeordnet ist, und bezeichnen mit T_1 eins von den zu Λ gehörenden Simplexen des Komplexes K_1. Es seien die Simplexe T_α in den Komplexen K_α für jede Ordnungszahl α, die kleiner als eine gewisse Ordnungszahl β ist, schon gewählt, und zwar so, daß *jede endliche Anzahl von diesen Simplexen ein gemeinsames Urbild in Λ besitzt.* Dann kann man T_β unter den zu Λ gehörenden Simplexen von K_β wählen.

Es sei in der Tat für jedes zu Λ gehörende Simplex T^i_β von K_β ein solches endliches System von früher gewählten Simplexen

$$(i) \qquad T_{\alpha^i_1},\ T_{\alpha^i_2},\ \ldots,\ T_{\alpha^i_{s(i)}}$$

gegeben, daß es in Λ für (i) und T^i_β kein gemeinsames Urbild gibt. Die Vereinigungsmenge aller Systeme (i) besitzt, nach unserer Voraussetzung, ein gemeinsames zu Λ gehörendes Urbild T' von K'. In einem Komplex K'' — Nachfolger für K' und K_β — gibt es ein ebenfalls zu Λ gehörendes Urbild T'' für T'. Das Bild von T'' in K_β ist ein Simplex T^j_β, welches also mit dem System (j) ein gemeinsames Urbild in Λ hat.

Man kann damit in *jedem* Komplex K_β ein Simplex T_β von Λ so wählen ,daß es für jede endliche Anzahl von diesen Simplexen ein gemeinsames Urbild in Λ gibt. Die Menge $\{T_\beta\}$ ist, wie leicht ersichtlich, eine Projektionsmenge.

5. Satz. *Jede Projektionsmenge S ist ein Teil einer durch alle Komplexe gehenden Projektionsmenge.*

In jedem Komplex K gibt es mindestens ein solches Simplex, das *mit jedem Simplex von S ein gemeinsames Urbild hat.* Kann man in der Tat zu jedem Simplex T_i von K ein solches Simplex T'_i in S finden, daß T_i und T'_i kein gemeinsames Urbild besitzen, so müssen, nach Definition der Projektionsmenge, alle Simplexe T'_i ein gemeinsames Urbild T' im Komplex K', und dieses letztere ein Urbild T'' in einem Nachfolger K'' von K' und K haben. Das Bild von T'' in K ist ein Simplex T_j, das also ein gemeinsames Urbild mit entsprechendem T'_j hat.

Wir werden Simplexe mit obenbezeichneter Eigenschaft *ausgezeichnet* nennen. In jedem Komplex, der ein Simplex von S enthält, ist dieses und nur dieses Simplex ausgezeichnet. Jedes Bild eines ausgezeichneten Simplexes ist selbst ausgezeichnet.

Jedes ausgezeichnete Simplex T von K besitzt in jedem Nachfolger K' von K ausgezeichnete Urbilder. Gäbe es in der Tat zu jedem Urbild T_i' von T (T_i' aus K') ein solches Simplex T_i'' von S, daß T_i' und T_i'' kein gemeinsames Urbild haben, so muß ein gemeinsames Urbild T^* für alle T_i'' und T in einem Nachfolger K^* von K' existieren. Das Bild von T^* in K' ist eines der T_i'; Widerspruch!

Die Menge Λ aller ausgezeichneten Simplexe erfüllt also die Bedingungen des Hilfssatzes. Somit gibt es eine Projektionsmenge Λ', die eine Teilmenge von Λ ist und durch alle Komplexe geht. Die Projektionsmenge S ist ein Teil von Λ'.

6. Die Projektionsmenge S soll eine *Kette* heißen, wenn es keine andere Projektionsmenge S^* gibt, von der S umfaßt wird.

Jede Kette geht durch alle Komplexe des Spektrums. Jede Projektionsmenge wird mindestens von einer Kette umfaßt [6]).

Ein Projektionsspektrum soll ein *Hausdorffsches Spektrum* heißen, wenn es zu je zwei verschiedenen Ketten B', B'' mindestens einen solchen Komplex K gibt, daß die Simplexe von B' und B'' in K keine gemeinsame Seite haben.

7. Der Zweck dieser Betrachtungen ist folgender

HAUPTSATZ. *Jedes Hausdorffsche Spektrum definiert einen bikompakten Hausdorffschen Raum. Umgekehrt kann man jeden Hausdorffschen bikompakten Raum durch ein Hausdorffsches Spektrum definieren.*

Ein Spektrum $\mathfrak{K}$ definiert folgendermaßen einen topologischen Raum R^*. Die Ketten des Spektrums sind *Punkte* des Raumes. Die durch einen gegebenen Komplex K definierte *Umgebung* eines Punktes ξ ($=$ einer Kette B_ξ) ist die Menge aller jener Ketten, deren Simplexe in K echte oder unechte Seiten vom Simplex von B_ξ sind.

Man überzeugt sich ohne Mühe, daß die Umgebungsaxiome A—D erfüllt sind. Ist das Spektrum ein Hausdorffsches, so ist auch das Hausdorffsche Trennungsaxiom D′ erfüllt.

Der Raum R^* ist bikompakt. Es sei in der Tat in R^* eine unendliche Punktmenge M von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ gegeben. Jeder

[6]) Diese Behauptung kann man so beweisen. Ist die durch alle Komplexe gehende Projektionsmenge $S = S_1$ keine Kette, so gibt es eine Projektionsmenge S_2, die S umfaßt. Es seien die Projektionsmengen S_α für alle Ordnungszahlen α, die kleiner als eine gewisse Ordnungszahl β sind, schon gewählt, und zwar so, daß S_α von $S_{\alpha'}$ bei $\alpha < \alpha'$ umfaßt wird. Ist β keine Limeszahl, so ist S_β eine $S_{\beta-1}$ umfassende Projektionsmenge. Ist aber β eine Limeszahl, so kann man zu jedem Komplex K des Spektrums eine solche Ordnungszahl α, $\alpha < \beta$, wählen, daß alle Projektionsmengen $S_{\alpha'}$ bei $\alpha' > \alpha$ dasselbe Simplex T in K enthalten. Diese Simplexe T bilden eine Projektionsmenge, die wir als S_β wählen können.

Komplex des Spektrums hat, infolge der Endlichkeit der Anzahl seiner Simplexe, mindestens ein solches Simplex, welches in den Ketten von Punkten einer Teilmenge von M derselben Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ aufgeht. Diese Simplexe sollen *ausgezeichnet* heißen. Jedes Bild eines ausgezeichneten Simplexes ist selbst ausgezeichnet; mindestens eins von den Urbildern eines ausgezeichneten Simplexes in jedem Komplexe ist ausgezeichnet.

Die Menge aller ausgezeichneten Simplexe befriedigt die Bedingungen des Hilfssatzes. Es gibt daher eine durch alle Komplexe gehende Projektionsmenge, deren Simplexe ausgezeichnet sind. Jede diese Projektionsmenge umfassende Kette definiert einen Punkt von R^*, dessen alle Umgebungen Teilmengen von M von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ enthalten.

8. Es sei ein bikompakter Hausdorffscher Raum R gegeben. Wir betrachten alle endlichen Überdeckungen des Raumes R, deren Elemente abgeschlossene Mengen sind. Diese Elemente sollen dabei die abgeschlossenen Hüllen paarweise fremder offener Mengen sein; wir werden diese offenen Menge die *Kerne* der Elemente der Überdeckungen nennen.

Die Überdeckung P_2 soll eine *Unterteilung* der Überdeckung P_1 heißen, wenn jedes Element von P_2 eine Teilmenge von einem, und dabei, nach Definition der Überdeckung, nur einem Element von P_1 ist.

Zu jeder Überdeckung P bilden wir ihren *Nerv* $N(P)$: das ist ein simplizialer Komplex, dessen Eckpunkte den Elementen der Überdeckung eineindeutig entsprechen; wenn k gegebene Elemente einen nichtleeren Durchschnitt haben, so werden die ihnen entsprechenden Eckpunkte zum Eckpunktgerüst eines $(k-1)$-dimensionalen Simplexes gemacht. Ist P_2 eine Unterteilung von P_1, so kann man auf eine ganz bestimmte Weise eine simpliziale Abbildung — die Projektion — des Nervs $N(P_2)$ auf den Nerv $N(P_1)$ festlegen: wenn ein Element E_2 von P_2 eine Teilmenge des Elementes E_1 von P_1 ist, und wenn diesen Elementen die Eckpunkte a_2 bzw. a_1 zugeordnet sind, so soll a_1 das Bild von a_2 sein.

Es ist leicht zu sehen, daß die Menge $\mathfrak{N}$ der Nerven unserer Überdeckungen mit den soeben definierten Projektionen ein Projektionsspektrum bildet. Dabei kann man einen gemeinsamen Nachfolger P_3 für zwei gegebene Überdeckungen P_1, P_2 so konstruieren: die Kerne der Elemente von P_3 sind nichtleere Durchschnitte der Kerne von P_1 und P_2. Es bleibt also nur übrig, zu zeigen, daß dieses Spektrum ein Hausdorffsches ist, und daß es einen Raum R^* definiert, der dem gegebenen Raum R homöomorph ist.

9. Es sei P eine beliebige Überdeckung von R und T ein Simplex von $N(P)$. Den dem Simplex T entsprechenden Durchschnitt der Elemente von P werden wir den *Träger* von T nennen und $F(T)$ bezeichnen. Ist T' ein Urbild von T, so muß $F(T') < F(T)$ sein. Daher ist der Durchschnitt jeder endlichen Anzahl von Simplexträgern einer Projektionsmenge gewiß nichtleer, so daß, wegen der Bikompaktheit, der Durchschnitt der Träger *aller* Simplexe jeder Projektionsmenge von Null verschieden ist.

Es sei x ein beliebiger Punkt des Raumes R und P eine Überdeckung von R. Mit T_x bezeichnen wir jenes Simplex von $N(P)$, das dem Durchschnitt *aller* den Punkt x enthaltenden Elemente von P zugeordnet war. *Die Menge* $B_x = \{T_x\}$ *aller dieser Simplexe bildet eine Kette.*

Ist, in der Tat, die Überdeckung P''' eine gemeinsame Unterteilung der Überdeckungen P' und P'', so müssen die Bilder des Simplexes T_x''' bei den Projektionen $\pi(N(P'''), N(P'))$ und $\pi(N(P'''), N(P''))$ gewiß T_x' und T_x'' sein. Die Menge B_x ist also, da die durch alle Komplexe geht, eine Projektionsmenge.

Ist S eine Projektionsmenge unseres Spektrums, und gehört der Punkt x zum Durchschnitt der Träger aller Simplexe von S, so wird S von B_x umfaßt. Daraus folgt, daß alle Ketten des Spektrums sich unter den Projektionsmengen $B_x, B_y, \ldots$ befinden.

Wäre B_x keine Kette, so gäbe es eine Kette B_y, die B_x umfaßt. Zu den Punkten x, y gibt es aber Umgebungen $U(x)$, $U(y)$ mit disjunkten abgeschlossenen Hüllen $\overline{U(x)}$, $\overline{U(y)}$ [7]). Wählen wir eine Überdeckung P, zu der $\overline{U(x)}$ und $\overline{U(y)}$ als Elemente gehören, so haben die Simplexe von B_x und B_y in $N(P)$ keine gemeinsame Seite. B_x ist also eine Kette. Gleichzeitig sehen wir, daß unser Spektrum ein Hausdorffsches ist.

Zwischen den Punkten der Räume R und R^* gibt es also eine eineindeutige Zuordnung. Um den Hauptsatz zu beweisen, bleibt nur übrig die Äquivalenz der Umgebungssysteme dieser Räume zu zeigen, was ohne Schwierigkeiten erreicht wird.

(Eingegangen den 20 Mai 1934.)

---

[7]) Da jeder bikompakte Hausdorffsche Raum normal ist.