Compositio Mathematica

Yü-Why Tschen

Über das Verhalten der Lösungen einer Folge von Differentialgleichungsproblemen, welche im Limes ausarten

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 378-401

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__378_0>

Über das Verhalten der Lösungen einer Folge von Differentialgleichungsproblemen, welche im Limes ausarten

von

Yü-Why Tschen

z. Z. København

EINLEITUNG.

Das Verhalten von Lösungen einer Folge von Differentialgleichungsproblemen, wenn die Probleme selbst von einem Parameter oder einem Index i abhängen und im Limes $i \to \infty$ in ein Problem niedrigerer Ordnung oder von anderem Typus ausarten, ist von prinzipieller Bedeutung. In der folgenden Untersuchung wird speziell folgende Frage behandelt: Wir haben eine Folge von linearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten gegen gewisse Grenzfunktionen konvergieren. Für alle Differentialgleichungen sollen dieselben Zusatzbedingungen (Anfangswerte oder Randwerte) bestehen. Wenn die Grenz-Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung ist, konvergiert dann die Folge der Lösungen gegen die Lösung der Grenz-Differentialgleichung? Wir werden sehen, daß das nur bei gewissen Klassen von Differentialgleichungen der Fall ist. Es handelt sich also darum, zunächst für solche Klassen von Differentialgleichungen die Konvergenz der Lösungen zu zeigen. Andererseits können die Anfangsbedingungen oder die Randbedingungen der Lösungen, falls diese konvergieren, nach dem Grenzübergang $i \to \infty$ nicht sämtlich erhalten bleiben, da die Manigfaltigkeit der Daten, die man einem Differentialgleichungsproblem vorschreiben darf, um so höher ist, je höher die Ordnung des Problems ist. Wir haben also in der folgenden Untersuchung unser Augenmerk auch darauf zu richten, wie sich die Zusatzbedingungen bei dem Grenzübergang verhalten.

Im Kapitel I behandeln wir die Anfangswertprobleme. Es wird der folgende Satz bewiesen. Vorgegeben sei eine Folge von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen n-ter Ordnung:

$$\alpha_i(x)u^{(n)} + \beta_1(x)u^{(n-1)} + \beta_2(x)u^{n-2} + \ldots + \beta_n(x)u = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots$$

mit Koeffizienten, die in dem Intervall $0 \leqq x \leqq l$ stetig differenzierbar sind. Es soll für $0 \leqq x \leqq l$ gelten

a) $\alpha_i(x) > 0$ für jedes i

b) $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i(x) \Longrightarrow 0$

c) $\beta_1(x) > 0$.

Die Lösungsfolge $u_i(x)$ mit $u_i(0) = A_0$, $u_i'(0) = A_1$, ..., $u_i^{(n-1)}(0) = A_{n-1}$ konvergiert im Intervall $0 \leqq x \leqq l$ gegen die Lösung $U(x)$ der Differentialgleichung

$$\beta_1 U^{(n-1)} + \beta_2 U^{(n-2)} + \ldots + \beta_n U = 0$$

mit $U(0) = A_0$, $U'(0) = A_1$, ..., $U^{(n-2)}(0) = A_{n-2}$.

Daß die Bedingung $\beta_1(x) > 0$ für die Konvergenz von $u_i(x)$ notwendig ist, sieht man an den einfachsten Beispielen leicht ein.

Im Kapitel II werden gewisse Randwertprobleme behandelt. Unter anderem beweisen wir den folgenden einfachen Satz: Es sei in dem Intervall $0 \leqq x \leqq l$ eine Folge von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\alpha_i u'' + \beta_1(x)u' + \beta_2(x)u = f(x)$$

vorgegeben, wo α_1, α_2, α_3, ... eine positive Zahlenfolge ist, die mit wachsendem i gegen Null strebt. Die Lösungsfolge $u_i(x)$ mit $u_i(0) = R_0$, $u_i(l) = R_l$ konvergiert gegen die Lösung $U(x)$ der Gleichung

$$\beta_1 U' + \beta_2 U = f(x).$$

Je nachdem $\beta_1(x) > 0$ oder $\beta_1(x) < 0$ im Intervall $0 \leqq x \leqq l$ gilt, nimmt $U(x)$ den Wert $U(l) = R_l$ oder den Wert $U(0) = R_0$ an.

KAP. I.

Die Anfangswertprobleme der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen.

§ 1.

Es sei eine Folge linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung vorgegeben:

$$(1) \quad \alpha_i(x)u^{(n)} + \beta_1(x)u^{(n-1)} + \beta_2(x)u^{(n-2)} + \ldots + \beta_n(x) = f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Über die Koeffizientenfunktionen wollen wir folgende Voraussetzungen machen.

1) Für jedes i ist $\alpha_i(x)$ eine positive stetige Funktion, also $\alpha_i(x) > 0$ im Intervall $0 \leqq x \leqq l$; ferner gilt $\lim\limits_{i \to \infty} \alpha_i(x) \to 0$ für alle x aus $0 \leqq x \leqq l$.

2) Die von i unabhängigen Koeffizienten $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$, $\beta_3(x)$, $\ldots$, $\beta_n(x)$ sind für $0 \leqq x \leqq l$ einmal stetig differenzierbar.

3) $f_i(x)$ ist stetig und gleichmäßig beschränkt für alle i im Intervall $0 \leqq x \leqq l$.

Beim Grenzübergang $i \to \infty$ wird die Folge der Differentialgleichungen unter diesen Voraussetzungen gegen eine Differentialgleichung niederer Ordnung als n streben. Wir wollen hier nur den Fall betrachten, daß die Grenzdifferentialgleichung genau von $(n-1)$ter Ordnung ist; wir fordern dementsprechend von dem Koeffizienten $\beta_1(x)$, daß er in $0 \leqq x \leqq l$ nicht verschwindet. Dann hat man zwei Fälle zu unterscheiden: $\beta_1(x) > 0$ und $\beta_1(x) < 0$. Wir setzen voraus

4) $\beta_1(x) > 0$ für $0 \leqq x \leqq l$.

Für jede Differentialgleichuhng der Folge stellen wir uns ein Anfangswertproblem. Die Anfangsdaten $u_i(0)$, $u_i'(0)$, $u_i''(0)$, $\ldots$, $u_i^{(n-1)}(0)$ bilden dann n Zahlenfolgen. Von ihnen verlangen wir, daß sie alle beschränkte Folgen sind. Wir betrachten nun die Folge der Lösungen $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, $\ldots$ zu den einzelnen Anfangswertproblemen.

Behauptung. Die Folge $u_i^{(n-1)}(x)$ ist in dem ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq l$ für alle i gleichmäßig beschränkt.

Aus dieser Behauptung folgt dann die gleichmäßige Beschränktheit der Folgen $u_i(x)$, $u_i'(x)$, $\ldots$, $u_i^{(n-2)}(x)$ für $0 \leqq x \leqq l$. Denn $u_i^{(n-2)}(x)$ läßt sich folgendermaßen durch $u_i^{(n-1)}(x)$ darstellen:

$$u_i^{(n-2)}(x) = u_i^{(n-2)}(0) + \int_0^x u_i^{(n-1)}(x)dx$$

mit dem Anfangswert $u_i^{n-2}(0)$, der für alle i gleichmäßig beschränkt ist. Analog schließt man aus der Beschränktheit von $u_i^{(n-2)}(x)$ auf die Beschränktheit von $u_i^{(n-3)}(x)$ u.s.f. Wir beweisen nun unsere Behauptung über die Folge $u_i^{(n-1)}(x)$.

Beweis. Mit der positiven monoton wachsenden Funktion

$$(2) \qquad K_i(x) = e^{\int_0^x \frac{\beta_1(x)}{\alpha_i(x)} dx}$$

bilden wir den Integralausdruck

(3)
$$I_i(x) = \frac{1}{K_i(x)} \int_0^x \frac{1}{\alpha_i(x)} K_i(x) dx$$

und zeigen zunächst, daß $I_i(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq l$ gleichmäßig beschränkt ist für alle i. Mit b_1 bezeichnen wir das Minimum von $\beta_1(x)$ in $0 \leqq x \leqq l$. Es ist also $b_1 > 0$. Dann ergibt sich folgende einfache Abschätzung [1])

(4)
$$\begin{aligned} b_1 I_i(x) &\leqq \frac{1}{K_i(x)} \int_0^x \frac{\beta_1(x)}{\alpha_i(x)} K_i(x) dx \\ &\leqq \frac{1}{K_i(x)} [K_i(x) - K_i(0)] < 1; \end{aligned}$$

daraus folgt

(5)
$$I_i(x) < \frac{1}{b_1}.$$

Die Gleichung (1) wird nun durch $\alpha_i(x)$ dividiert und mit $K_i(x)$ multipliziert. Durch eine kleine Umformung ergibt sich

(6)
$$\frac{d}{dx}\left(K_i u_i^{(n-1)}\right) = \frac{-\beta_2}{\alpha_i} K_i u_i^{(n-2)} - \ldots - \frac{\beta_n}{\alpha_i} K_i u_i + \frac{f_i(x)}{\alpha_i(x)} K_i(x).$$

Wir integrieren diese Gleichung von 0 bis x und bekommen

(7)
$$\begin{aligned} u_i^{(n-1)}(x) &= \frac{1}{K_i} \int_0^x \frac{-\beta_2}{\alpha_i} K_i u_i^{(n-2)} dx + \ldots + \\ &+ \frac{1}{K_i} \int_0^x \frac{-\beta_n}{\alpha_i} K_i u_i dx + \frac{1}{K_i} \int_0^x \frac{f_i(x)}{\alpha_i} K_i dx + \frac{u_i^{(n-1)}(0)}{K_i(x)}. \end{aligned}$$

Alle $u_i^{(m)}(x)$ für $m \leqq n-2$ werden nun nach Taylor bis zur $(n-1)$ten Ableitung von $u_i(x)$ entwickelt

(8)
$$\begin{aligned} u_i^{(m)}(x) &= u_i^{(m)}(0) + x u_i^{(m+1)}(0) + \ldots + \frac{x^{n-m-2}}{(n-m-2)!} u_i^{(n-2)}(0) + \\ &+ \frac{1}{(n-m-2)!} \int_0^x u_i^{(n-1)}(\xi)(x-\xi)^{n-m-1} d\xi. \end{aligned}$$

Wir setzen (8) in die rechte Seite von (7) ein. Diese zerfällt dann

---

[1]) Herrn F. Rellich verdanke ich diese einfache Abschätzung. Ich habe ursprünglich $I_i(x)$ durch die partielle Integration abgeschätzt, wobei ich schärfere Voraussetzungen über das Verhalten von $\alpha_i(x)$ bei $i \to \infty$ machen mußte.

in zwei Teile; der eine enthält nur die Integralausdrücke über $u_i^{(n-1)}(x)$, der andere dagegen — den wir mit $R_i(x)$ bezeichnen — hängt nur von den Anfangsdaten und den Koeffizienten der Differentialgleichung ab. Es ergibt sich nämlich

$$(9) \quad u_i^{(n-1)}(x) = \frac{1}{K_i}\int_0^x \frac{-\beta_2}{\alpha_i} K_i \int_0^x u_i^{(n-1)}(\xi)d\xi dx + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{K_i}\int_0^x \frac{-\beta_n}{\alpha_i} K_i \int_0^x u_i^{(n-1)}(\xi)\frac{(x-\xi)^{n-2}}{(n-2)!}d\xi dx + R_i(x),$$

wobei $R_i(x)$ folgenden Ausdruck darstellt

$$(10) \quad R_i(x) = \sum_{m=0}^{n-2} \frac{1}{K_i(x)}\int_0^x \frac{-\beta_{n-m}}{\alpha_i} K_i \left[u_i^{(m)}(0) + \ldots + \frac{x^{n-m-2}}{(n-m-2)!} u_i^{n-2}(0)\right] dx +$$

$$+ \frac{1}{K_i(x)}\int_0^x \frac{f_i}{\alpha_i} K_i dx + \frac{u_i^{n-1}(0)}{K_i(x)}.$$

Nach unserer Voraussetzung sind die Anfangsdaten für alle i gleichmäßig beschränkt. Folglich enthält $R_i(x)$ außer dem beschränkten Glied $\frac{u_i^{n-1}(0)}{K_i(x)}$ lauter Integralausdrücke, die folgende Form besitzen

$$(11) \qquad \frac{1}{K_i(x)}\int_0^x \frac{1}{\alpha_i(x)} K_i(x) g_i(x) dx$$

wobei $g_i(x)$ eine stetige Funktion ist, die in $0 \leqq x \leqq l$ für alle i gleichmäßig beschränkt bleibt. Es sei $|g_i(x)| \leqq g$ für alle i (g ist eine Konstante). Dann gilt nach (5) für alle x aus $0 \leqq x \leqq l$

$$(12) \qquad \left|\frac{1}{K_i(x)}\int_0^x \frac{1}{\alpha_i(x)} K_i g_i dx\right| \leqq g I_i(x) \leqq \frac{g}{b_1}.$$

Folglich besitzt $R_i(x)$, als Summe von solchen Gliedern, eine von i und x unabhängige obere Schranke R.

Betrachten wir nun die Gleichung (9), aus der wir nun alle weiteren Schlüsse ziehen werden, in einem weiter unten noch zu bestimmenden Intervall $0 \leqq x \leqq d$ mit $d \leqq l$ und nehmen an, daß $u_i^{(n-1)}(x)$ in diesem Inervall an der Stelle $x = y_i$ das Maximum annimmt. Dann läßt sich $u_i^{(n-1)}(y_i)$ nach (9) folgendermaßen abschätzen

$$(13)\qquad \left|u_i^{(n-1)}(y_i)\right| \leqq \left|u_i^{(n-1)}(y_i)\right| \left\{ \frac{1}{K_i(y_i)} \int_0^{y_i} \frac{|\beta_2|}{\alpha_i} K_i \int_0^x d\xi\, dx + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{K_i(y_i)} \int_0^{y_i} \frac{|\beta_n|}{\alpha_i} K_i \int_0^x \frac{|\xi - x|^{n-2}}{(n-2)!}\, d\xi\, dx \right\} + R.$$

Daraus folgt, da $0 \leqq y_i \leqq d$ gilt,

$$(14)\qquad \left|u_i^{(n-1)}(y_i)\right| \leqq \left|u_i^{(n-1)}(y_i)\right| \left\{ d \frac{1}{K_i(y_i)} \int_0^{y_i} \frac{|\beta_2|}{\alpha_i} K_i\, dx + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{d^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{K_i(y_i)} \int_0^{y_i} \frac{|\beta_n|}{\alpha_i} K_i\, dx \right\} + R.$$

Da die Koeffizienten $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ stetig sind, so liegen ihre absoluten Beträge für alle x aus $0 \leqq x \leqq l$ unter einer oberen Grenze B. Infolgedessen läßt sich jeder Integralausdruck auf der rechten Seite von (14) nach (5) so abschätzen — mit $L_i(x)$ sei irgend ein solcher Ausdruck bezeichnet:

$$(15)\qquad L_i(x) \leqq \left|u_i^{(n-1)}(y_i)\right| \left\{ B \cdot Q(d) \frac{1}{b_1} \right\}$$

dabei ist $Q(d) = \frac{d^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ und B die obere Schranke der von i unabhängigen Koeffizienten der Differentialgleichungen. Alle diese verschiedenen $Q(d)$ haben folgende Eigenschaften gemeinsam:

(16) $a)$ $Q(0) = 0$

$b)$ $Q(d)$ ist ein Polynom mit festem positiven Zahlkoeffizienten, die insbesondere von den Anfangsdaten $u_i(0)$, $u_i'(0)$, $\ldots$, $u_i^{n-1}(0)$ nicht abhängen. Aus (14) schließt man dann

$$(17)\qquad \left|u_i^{(n-1)}(y_i)\right| \leqq \left|u_i^{(n-1)}(y_i)\right| \frac{B}{b_1} P(d) + R$$

wobei $P(d)$ eine Summe von den verschiedenen Polynomen $Q(d)$ darstellt, und also auch die oben erwähnten Eigenschaften (16) $a)$ und $b)$ besitzt. Aus (17) ergibt sich:

$$(18)\qquad \left|u_i^{(n-1)}(y_i)\right| \left\{ 1 - \frac{B}{b_1} P(d) \right\} \leqq R.$$

Bestimmen wir nun die Intervallänge d so, daß

$$(19)\qquad 1 - \frac{B}{b_1} P(d) = \delta\,, \text{ wobei } 0 < \delta < 1$$

gilt (was möglich ist wegen (16)) so ist nach (18) zunächst bewiesen, daß im Intervall $0 \leqq x \leqq d$ die Folge $u_i^{(n-1)}(x)$ gleichmäßig beschränkt ist. Mit $u_i^{(n-1)}(x)$ sind dann auch die Folgen $u_i^{n-2}(x)$, $u_i^{n-3}(x), \ldots, u_i(x)$ für $0 \leqq x \leqq d$ gleichmäßig beschränkt.

Die obigen Überlegungen gelten gewiß auch, wenn wir statt des Nullpunktes irgend einen anderen Punkt im Intervall $0 \leqq x \leqq l$ als den Anfangspunkt mit den entsprechenden Anfangsbedingungen nehmen.

Wir sehen also folgendes: Wissen wir von den n Folgen $u_i(x)$, $u_i'(x), \ldots, u_i^{n-1}(x)$, daß sie an einer bestimmten Stelle $x = x_0$ n beschränkte Zahlenfolgen bilden, so sind wir sicher, daß in dem Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_0 + d$ mit $x = x_0$ als dem Anfangspunkt die n Folgen $u_i(x), u_i'(x), \ldots, u_i^{n-1}(x)$ selbst gleichmäßig beschränkt sind, wobei die Zahl d aus (19) zu bestimmen ist. Aus (19) und (16) ergibt sich aber, daß die Zahl d gar nicht von den Anfangsdaten abhängt, sondern nur von den Maxima und Minima von $\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)$ in Intervall $0 \leqq x \leqq l$. Wir können somit die Zahl d allein aus den Kentnissen über die Koeffizienten der Differentialgleichungen (1) nach (19) bestimmen.

Wir teilen nun unser Intervall $0 \leqq x \leqq l$ in m Teilintervalle $(0 l_1), (l_1 l_2), (l_2 l_3), \ldots, (l_{m-1} l_m = l)$, von denen jedes höchstens die Länge d besitzt. Aus der Beschränktheit der Daten an der Stelle $x = 0$ schließt man die Beschränktheit der Folgen $u_i(x), u_i'(x)$, $\ldots, u_i^{n-1}(x)$ in $(0 l_1)$. Insbesondere bilden dann $u_i(l_1), u_i'(l_1), \ldots$, $u_i^{n-1}(l_1)$ n beschränkte Zahlenfolgen. Daraus ergibt sich wegen $l_2 - l_1 \leqq d$ die Beschränktheit von $u_i(x), u_i'(x), \ldots, u_i^{(n-1)}(x)$ für $l_1 \leqq x \leqq l_2$. Schließlich nach m Schritten gelangen wir zu der Behauptung, daß die n Folgen $u_i(x), u_i'(x), \ldots, u_i^{n-1}(x)$ in dem ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq l$ gleichmäßig beschränkt bleiben.

§ 2.

Unter der Voraussetzung in § 1 wollen wir weiter untersuchen, wie sich die Folge $u_i^{(n)}(x)$ verhält. Dazu betrachten wir zunächst die Zahlenfolge $u_i^{(n)}(0)$. Da die Differentialgleichungen (1) im ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq l$ erfüllt sind, also insbesondere auch in dem Punkt $x = 0$, läßt sich $u_i^{(n)}(0)$ durch die übrigen Anfangsdaten $u_i(0), (u_i'(0), \ldots, u_i^{(n-1)}(0)$ darstellen. Da diese, außer der Bedingung, daß sie unterhalb einer Schranke liegen, sonst beliebig vorgegeben sind, wird $u_i^{(n)}(0)$ im allgemeinen mit $i \to \infty$ wie $\frac{1}{\alpha_i(0)}$ über alle Grenzen wachsen. Es ist also von vornherein nicht zu erwarten, daß die Folge $u_i^{(n)}(x)$ auch in dem ganzen

Intervall gleichmäßig beschränkt bleibt. Doch läßt sich folgende Behauptung beweisen:

Behauptung: Die Folge $u_i^{(n)}(x)$ ist in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ gleichmäßig beschränkt.

Beim Beweis sind folgende zwei weitere Voraussetzungen erforderlich:

1) Die Konvergenz $\lim\limits_{i \to \infty} \alpha_i(x) \to 0$ soll so gleichmäßig sein, daß im Intervall $0 \leqq x \leqq l$

$$(20) \qquad \left| \frac{\operatorname{Max} \alpha_i(x) = A_i}{\operatorname{Min} \alpha_i(x) = \alpha_i} \right| < M$$

gilt. M ist eine positive Konstante unabhängig von i.

2) f_i ist einmal stetig differenzierbar; die Folge $\frac{df_i}{dx}$ soll im Intervall $0 \leqq x \leqq l$ gleichmäßig beschränkt sein.

Beweis: Aus (20) schließt man zunächst, daß [2])

$$(21) \qquad \frac{1}{\alpha_i(x)} \frac{1}{K_i(x)} \underset{i \to \infty}{\Longrightarrow} 0 \text{ für } 0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$$

gilt, durch folgende Abschätzung im Intervall $\varepsilon \leqq x \leqq l$:

$$\frac{1}{\alpha_i(x)} \frac{1}{K_i(x)} = \frac{1}{\alpha_i(x)} e^{-\int\limits_0^x \frac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)} dx} \leqq \frac{A_i}{a_i} \left(\frac{1}{A_i} e^{-\frac{b_1}{A_i} \varepsilon} \right),$$

also

$$(22) \qquad \frac{1}{\alpha_i(x)} \frac{1}{K_i(x)} \leqq M \frac{1}{A_i} e^{-\frac{b_1}{A_i} \varepsilon}.$$

Da für $i \to \infty$ $\frac{1}{A_i} e^{-\frac{b_1}{A_i} \varepsilon}$ gegen Null strebt, ergibt sich aus (22) die gleichmäßige Konvergenz in (21).

Betrachten wir nun die Gleichung (7) und führen auf deren rechter Seite die partielle Intergration aus, indem wir $K_i(x) = \frac{\alpha_i}{\beta_1} \frac{dK_i}{dx}$ einsetzen, so ergibt sich:

$$(23) \quad u_i^{(n-1)} + \frac{\beta_2}{\beta_1} u_i^{(n-2)} + \ldots + \frac{\beta_n}{\beta_1} u_i - \frac{f_i}{\beta_1} =$$

$$= \frac{1}{K_i(x)} \int\limits_0^x K_i \frac{d}{dx} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} u_i^{n-2} + \ldots + \frac{\beta_n}{\beta_1} u_i - \frac{f_i}{\beta_1} \right) dx$$

$$+ \frac{1}{K_i(x)} \left[u_i^{(n-1)}(0) + \frac{\beta_2(0)}{\beta_1(0)} u_i^{(n-2)}(0) + \ldots + \frac{\beta_n(0)}{\beta_1(0)} u_i(0) - \frac{f_i(0)}{\beta_1(0)} \right].$$

---

[2]) Mit $\Longrightarrow$ bezeichnen wir die gleichmäßige Konvergenz.

Setzt man nun

$$(24)\qquad G_i(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1} u_i^{n-2} + \ldots + \frac{\beta_n}{\beta_1} u_i - \frac{f_i}{\beta_1}\right),$$

$$(25)\qquad H_i = u_i^{n-1}(0) + \frac{\beta_2(0)}{\beta_1(0)} u_i^{n-2}(0) + \ldots + \frac{\beta_n(0)}{\beta_1(0)} - \frac{f_i(0)}{\beta_1(0)},$$

so schließt man aus § 1 und aus der Voraussetzung über die Folge $\frac{df_i}{dx}$, daß die Folgen H_i und $G_i(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq l$ gleichmäßig beschränkt sind. Ihre obere Grenzen seien von i und x unabhängige Konstanten H und G. Aus der Identität

$$(26)\qquad \left|\frac{u_i^{(n)}(x)}{\beta_1(x)}\right| = \frac{1}{\alpha_1(x)}\left|u_i^{(n-1)} + \frac{\beta_2}{\beta_1} u_i^{(n-2)} + \ldots + \frac{\beta_n}{\beta_1} u_i - \frac{f_i}{\beta_1}\right|$$

und aus (23) ergibt sich für $u_i^{(n)}(x)$ folgende Abschätzung:

$$(27)\qquad \left|\frac{u_i^{(n)}(x)}{\beta_1(x)}\right| \leqq \frac{1}{\alpha_i(x)} \frac{1}{K_i(x)} \int_0^x |G_i| K_i dx + \frac{H_i}{\alpha_i(x) K_i(x)}.$$

Nun ist nach (20)

$$(28)\qquad \frac{1}{\alpha_i(x)} \frac{1}{K_i(x)} \int_0^x K_i(x) dx \leqq \frac{A_i}{\alpha_i} \frac{1}{K_i} \int_0^x \frac{1}{\alpha_i} K_i dx < \frac{M}{b_1}.$$

Es gilt also nach (27)

$$(29)\qquad \left|\frac{u_i^{(n)}(x)}{\beta_1(x)}\right| < M\frac{G}{b_1} + \frac{H_i}{\alpha_i(x) K_i(x)}.$$

Aus (21) schließt man dann die gleichmäßige Beschränktheit der Folge $u_i^{(n)}(x)$ in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$.

Zusammenfassend haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz I*a*: Über die Koeffizienten einer Folge von Differentialgleichungen

$$\alpha_i(x) u^{(n)} + \beta_1(x) u^{(n-1)} + \ldots + \beta_n(x) u = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

machen wir folgende Voraussetzungen:

1) $\alpha_i(x) > 0$, $\beta_1(x) > 0$ für $0 \leqq x \leqq l$,

2) $\lim\limits_{i \to \infty} \alpha_i(x) \to 0$ für jedes x aus $0 \leqq x \leqq l$,

3) die Funktionenfolge $f_i(x)$ ist in $0 \leqq x \leqq l$ gleichmäßig beschränkt.

Die Lösungsfolge $u_i(x)$, deren Anfangswerte $u_i(0)$, $u_i'(0)$, $u_i''(0)$, $\ldots$, $u_i^{n-1}(0)$ beschränkte Zahlenfolgen sind, besitzt die Eigenschaft, daß die n Folgen $u_i(x), u_i'(x), \ldots, u_i^{n-1}(x)$ in dem ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq l$ gleichmäßig beschränkt bleiben.

Satz I*b*: Setzt man noch voraus

4) $\left|\frac{\text{Max } \alpha_i(x)}{\text{Min } \alpha_i(x)}\right| < M$ für $0 \leqq x \leqq l$,

5) die Folge $\frac{df_i}{dx}$ ist in $0 \leqq x \leqq l$ gleichmäßig beschränkt,

wobei M eine von i und x unabhängige Konstante ist, so besitzt die Lösungsfolge $u_i(x)$ außerdem noch die Eigenschaft, daß die Folge $u_i^{(n)}(x)$ in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ gleichmäßig beschränkt bleibt.

§ 3.

Unter den Voraussetzungen in § 1, § 2 betrachten wir nun eine Folge von Differentialgleichungen

$$\alpha_i u^{(n)} + \beta_1 u^{(n-1)} + \beta_2 u^{(n-2)} + \ldots + \beta_n u = f, \tag{30}$$

deren inhomogener Teil $f(x)$, eine stetig differenzierbare Funktion, von i unabhängig ist. Die Anfangswerte $u_i(0)$, $u_i'(0)$, $u_i''(0), \ldots, u_i^{n-1}(0)$ mögen nun von i unabhängig und folgendermaßen gegeben seien: $u_i(0) = A_0$, $u_i'(0) = A_1$, $u_i''(0) = A_2, \ldots,$ $u_i^{n-1}(0) = A_{n-1}$. Sie sind also insbesondere für alle i gleichmäßig beschränkt. Wir wenden den Satz I auf die Lösungsfolge an. Danach lassen sich $n-1$ Teilfolgen aus den $n-1$ Folgen $u_i(x), u_i'(x), \ldots, u_i^{n-1}(x)$ auswählen, die in dem ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq l$ gleichmäßig konvergieren. Wir können dann weiter eine Teilfolge aus $u_i^{(n)}(x)$ wählen, die in dem Teilintervall gleichmäßig konvergiert. Insgesamt bekommen wir n Teilfolgen. Diese Teilfolgen konvergieren in dem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ gegen eine Funktion $U(x)$ und ihre $n-1$ Ableitungen $U'(x), U''(x), \ldots,$ $U^{n-1}(x)$. Machen wir nun den Grenzübergang $i \to \infty$ in (30) und beachten dabei, daß $u^n(x)$ in $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ gleichmäßig beschränkt bleibt, so sehen wir, daß die Gleichung

$$\beta_1 U^{n-1}(x) + \beta_2 U^{n-2}(x) + \ldots + \beta_n U(x) = f(x) \tag{31}$$

in $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ erfüllt ist. Da aber die $n-1$ Teilfolgen aus $u_i(x), u_i'(x), \ldots, u_i^{n-2}(x)$ sogar in dem ganzen Intervall konvergieren, müssen $U(0) = A_0$, $U'(0) = A_1, \ldots, U^{n-2}(0) = A_{n-2}$ sein. Der Wert $U^{n-1}(0)$, der zunächst nicht definiert ist, wird nun durch die Stetigkeitsforderung $U^{n-1}(0) = \lim\limits_{x \to 0} U^{n-1}(x)$ aus (31) eindeutig bestimmt.

Da aber eine Lösung von (31) durch die Daten $U(0) = A_0$, $U'(0) = A_1, \ldots, U^{n-2}(0) = A_{n-2}$ schon eindeutig bestimmt ist und andererseits die Grenzfunktion $U(x)$ von irgend einer Teilfolge aus $u_i(x)$ die Anfangswerte $A_0, A_1, \ldots, A_{n-2}$ annehmen muß, so sind die Grenzfunktionen von den verschiedenen Teilfolgen aus $u_i(x)$ nicht verschieden. Daraus folgt, daß die ganze Folge $u_i(x)$ gegen $U(x)$ konvergiert mit $U(0) = A_0$, $U'(0) = A_1, \ldots$, $U^{n-2}(0) = A_{n-2}$. Damit haben wir den

Satz II. Unter den Voraussetzungen in Satz I konvergiert die Lösungsfolge $u_i(x)$ der Differentialgleichungen

$$\alpha_i(x)u^{(n)} + \beta_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + \beta_n(x)u = f(x), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

mit den Anfangswerten $u_i(0) = A_0$, $u_i'(0) = A_1, \ldots, u_i^{n-1}(0) = A_{n-1}$ gegen die Lösung $U(x)$ der Gleichung

$$\beta_1(x)U^{n-1} + \beta_2(x)U^{n-2} + \ldots + \beta_n(x)U = f(x)$$

mit $U(0) = A_0$, $U'(0) = A_1, \ldots, U^{n-2}(0) = A_{n-2}$.

Wegen der Anwendung im Kap. II der vorliegenden Arbeit sei bemerkt, daß man mit der obigen Methode folgende Verallgemeinerung von Satz I und Satz II beweisen kann:

Satz III. Satz I gilt auch dann, wenn statt (1) eine Folge der Integro-Differentialgleichungen von folgender Art betrachtet wird:

$$\begin{aligned}(32)\quad & \alpha_i(x)u^{(n)} + \beta_1(x)u^{(n-1)} + \beta_2(x)u^{(n-2)} + \ldots + \beta_n(x)u + \\ & + \int_0^x \{\gamma_1(x)u^{(n-1)} + \gamma_2(x)u^{(n-2)} + \ldots + \gamma_n(x)u\}dx + \\ & + \int_0^x\int_0^\xi \{\lambda_1(\xi)u^{(n-1)} + \lambda_2(\xi)u^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n(\xi)u\}d\xi dx = f_i(x), \\ & \qquad i = 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

Sie unterscheiden sich von (1) dadurch, daß der linken Seite von (1) noch Integralausdrücke über $u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \ldots, u(x)$ hinzugefügt sind, wobei die $\gamma_j(x)$, $\lambda_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, stetige Funktionen in $0 \leqq x \leqq l$ sind.

Satz IV. Die Lösungsfolge der Integro-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}(33)\quad & \alpha_i(x)u^{(n)} + \beta_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + \beta_n(x)u + \\ & + \int_0^x (\gamma_1 u^{n-1} + \ldots + \gamma_n u)ax + \int_0^x\int_0^\xi (\lambda_1 u^{n-1} + \ldots + \lambda_n u)d\xi dx = f\end{aligned}$$

mit $u_i(0) = A_0$, $u_i'(0) = A_1, \ldots, u_i^{n-1}(0) = A_{n-1}$ konvergiert gegen die Lösung $U(x)$ der Integro-Differentialgleichung

$$(34) \quad \beta_1 U^{(n-1)} + \beta_2 U^{(n-2)} + \ldots + \beta_n U +$$
$$+ \int_0^x (\gamma_1 U^{(n-1)} + \ldots + \gamma_n U) dx + \int_0^x \int_0^\xi (\lambda_1 U^{(n-1)} + \ldots + \lambda_n U) d\xi dx = f$$

mit $U(0) = A_0$, $U'(0) = A_1, \ldots, U^{n-2}(0) = A_{n-2}$.

Kap. II.

Die Randwertprobleme der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Über die Koeffizienten einer Folge von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \alpha_i u^{(n)} + \beta_1(x) u^{(n-1)} + \beta_2(x) u^{(n-2)} + \ldots + \beta_n(x) u = f, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

machen wir in diesem Kapitel folgende Voraussetzungen:

1) α_i sei eine positive Konstante,
$$\lim_{i=\infty} \alpha_i \to 0,$$

2) $\beta_1(x)$ sei zweimal stetig differenzierbar und
$$\beta_1(x) > 0 \text{ für } 0 \leqq x \leqq l,$$

3) $\beta_2(x), \beta_3(x), \ldots, \beta_n(x); f(x)$ seien einmal stetig differenzierbar.

Danach sind dann insbesondere die Voraussetzungen in Satz I und Satz II (Kap. I) sämtlich erfüllt. Wir stellen nun für jede Differentialgleichung der Folge (1) ein Randwertproblem; die Werte an den beiden Randpunkten $x = 0$ und $x = l$ mögen von i unabhängig sein. Wir nehmen an, daß zu diesem Randwertproblem eine eindeutige Lösung $u_i(x)$ der i-ten Gleichung existiert. Das Verhalten der Lösungsfolge $u_i(x)$ soll untersucht werden.

Die n Fundamentallösungen der i-ten homogenen Gleichung von (1) wollen wir mit $f^0 u_i, f^1 u_i, \ldots, f^{n-1} u_i$ bezeichnen. $f^\lambda u_i$ besitzt also die Eigenschaft

$$\frac{d^\mu}{dx^\mu} (f^\lambda u_i)_{x=0} = \delta_\mu^\lambda \qquad \delta_\mu^\lambda = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda \neq \mu \\ 1 \text{ für } \lambda = \mu \end{cases}.$$

Mit $H_i(x)$ bezeichnen wir die spezielle Lösung von (1) mit $H_i(0) = 0$, $H_i'(0) = 0, \ldots, H_i^{(n-1)}(0) = 0$.

Durch die Vorgabe der Randwerte wird die Lösung u_i auf eine eindeutige Weise aus H_i und den n Fundamentallösungen zusammengesetzt. u_i ist also eine lineare Kombination von H_i, $f^0 u_i, f^1 u_i, \ldots, f^{n-2} u_i$ und $f^{n-1} u_i$ mit Koeffizienten, die ihrerseits wieder von i abhängen können:

$$u_i = H_i + c_i^0 f^0 u_i + c_i^1 f^1 u_i + \ldots + c_i^{n-1} f^{n-1} u_i.$$

Die Untersuchung über das Verhalten der Folge u_i bei dem Grenzübergang $i \rightarrow \infty$ wird dann zurückgeführt auf die Frage nach dem Verhalten der Folgen H_i und $c_i^\lambda f^\lambda u_i$, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Solange die Zahlenfolgen c_i^λ beschränkt sind, können wir unseren Satz I außer auf die Lösungsfolge H_i auch direkt auf die Folgen $c_i^\lambda f^\lambda u_i$ anwenden, da $f^\lambda u_i$ feste Anfangsdaten haben. Unsere spätere Überlegung zeigt jedoch, daß wir auch noch auf die Lösungsfolge folgender Art geführt werden (mit b_i wird später immer die Zahl $\frac{\beta_1(0)}{\alpha_i}$ bezeichnet)

a) $b_i f^{n-1} u_i$,

b) $b_i (f^{n-2} u_i - b_i f^{n-1} u_i)$.

Im Gegensatz zu den Lösungsfolgen, die wir im Kap. I behandelt haben, sind diese beiden Folgen a und b Lösungen von solchen Anfangswertproblemen, bei denen einige der vorgegebenen Daten $u_i(0), u_i'(0), \ldots, u_i^{n-1}(0)$ keine beschränkte Zahlenfolgen bilden. Betrachten wir zunächst die Folge a. Nach Satz II konvergiert $f^{n-1} u_i$ gegen Null. Indem wir $f^{n-1} u_i$ mit dem Faktor b_i multiplizieren, zeigen wir in Satz V, daß diese Folge a doch gegen eine von Null verschiedene Funktion konvergiert und zwar gegen $f^{n-2} U$, wenn mit $f^{n-2} U$ die $(n-2)$te Fundamentallösung der Differentialgleichung

$$\beta_1 U^{n-1} + \beta_2 U^{n-2} + \beta_3 U^{n-3} + \ldots + \beta_n U = 0 \tag{3}$$

bezeichnet wird. Andererseits ist aber nach Satz II $\lim\limits_{i \to \infty} f^{n-2} u_i = f^{n-2} U$. Daraus folgt, daß die Differenz der beiden Folgen $f^{n-2} u_i$ und $b_i f^{n-1} u_i$ mit wachsendem i gegen Null konvergiert. Indem wir diese Differenz mit b_i multiplizieren, bekommen wir die Folge b. Die Konvergenz dieser Folge b gegen eine von Null verschiedene Lösung von (3) wird dann in Satz VI bewiesen. Die Untersuchung in § 2, § 3 über die Randwertprobleme wird dann auf Satz V und Satz VI zurückgeführt.

§ 1. Zwei Hilfssätze.

a) Wegen der Anwendung in b behandeln wir gleich eine Folge der Integro-Differentialgleichungen von der Art:

$$(4)\qquad \alpha_i u^{(n)} + \beta_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + \beta_n(x)u + \\ + \int_0^x \{\gamma_2(x)u^{n-2} + \gamma_3(x)u^{n-3} + \ldots + \gamma_n(x)u\}dx = 0,$$

wobei die $\gamma_j(x)$, $j = 2, 3, \ldots, n$, stetige Funktionen im Intervall $0 \leqq x \leqq l$ sind. Wir bezeichnen mit $f^{n-1}u_i$ die $(n-1)$-te Fundamentallösung der i-ten Gleichung von ( ) und untersuchen das Verhalten der Folge $b_i f^{n-1}u_i$. Diese ist eine spezielle Lösungsfolge u_i von (4) mit $u_i(0) = 0$, $u_i'(0) = 0, \ldots, u_i^{n-2}(0) = 0$, $u_i^{n-1}(0) = b_i$. Während $u_i(0)$, $u_i'(0), \ldots, u_i^{n-2}(0)$ für alle i beschränkt sind, bilden $u_i^{(n-1)}(0)$ keine beschränkte Folge. Diesem Verhalten von $u_i^{(n-1)}(x)$ in dem Anfangspunkt entsprechend beweisen wir, daß die $(n-1)$ Folgen $u_i(x), \ldots, u_i^{n-2}(x)$ in dem ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq l$, die beiden anderen Folgen $u_i^{n-1}(x)$ und $u_i^n(x)$ nur in jedem Teilintervall gleichmäßig beschränkt bleiben.

Um die Beschränktheit der $(n-1)$ Folgen $u_i(x), \ldots, u_i^{n-2}(x)$ in $0 \leqq x \leqq l$ zu beweisen, genügt es, dies für die Folge $u_i^{n-2}(x)$ zu zeigen. Wir integrieren die Gleichung (4) von 0 bis x, es ergibt sich unter Berücksichtigung von $u_i^{n-1}(0) = b_i$, $u_i^{n-2}(0) = 0$ und der Voraussetzung, daß α_i eine Konstante ist, folgende Gleichung:

$$(5)\qquad \alpha_i u^{(n-1)} + \beta_1 u^{(n-2)} + \int_0^x \left(\beta_2 u^{n-2} - \frac{d\beta_1}{dx} u^{n-2} + \beta_3 u^{n-3} + \ldots + \beta_n u\right)dx + \\ + \int_0^x \int_0^\xi (\gamma_2 u^{n-2} + \gamma_3 u^{n-3} + \gamma_4 u^{n-4} + \ldots + \gamma_n u)\,d\xi\,dx = \beta_1(0).$$

Da u_i der Gleichung (4) genügt, ist u_i insbesondere auch eine Lösung von (5) mit den $(n-1)$ Anfangsdaten $u_i(0) = 0$, $u_i'(0) = 0$, $\ldots, u_i^{n-2}(0) = 0$. Wenden wir jetzt Satz III statt auf eine Differenzialgleichung n-ter auf diese Differentialgleichung (5) von $(n-1)$ter Ordnung an und beachten, daß die Anfangsdaten $u_i(0)$, $u_i'(0), \ldots, u_i^{n-2}(0)$ alle gleich Null sind, also insbesondere beschränkte Zahlenfolgen bilden, so schließen wir daraus auf die Beschränktheit der Folgen $u_i(u)$, $u_i'(x), \ldots, u_i^{n-2}(x)$ in dem ganzen Intervall und der Folge $u_i^{n-1}(x)$ in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$. (Insbesondere bilden also $u_i(\varepsilon)$, $u_i'(\varepsilon)$, $\ldots, u_i^{n-1}(\varepsilon)$ n beschränkte Zahlenfolgen für $\varepsilon > 0$.)

Wir schreiben nun (4) in der Form

$$(6)\qquad \alpha_i u^{(n)} + \beta_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + \beta_n u = f_i$$

mit $f_i = -\int_0^x (\gamma_2 u^{n-2} + \ldots + \gamma_n u)dx$ und betrachten (6) in einem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$. Da einerseits die Anfangsdaten $u_i(\varepsilon), u_i'(\varepsilon), \ldots, u_i^{n-1}(\varepsilon)$ beschränkt sind, andererseits sowohl f_i wie auch $\frac{df_i}{dx}$ wegen der Beschränktheit von $u_i^{n-2}(x)$, $u_i^{n-3}(x)$, $\ldots, u_i(x)$ gleichmäßig für alle i beschränkt bleiben, so schließen wir aus (6) nach Satz Ib die Beschränktheit von u_i^n in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon + \varepsilon' \leqq x \leqq l$. ε und ε' sind zwei beliebig kleine positive Zahlen. Folglich ist u_i^n in jedem Teilintervall $0 \leqq \varepsilon \leqq x \leqq l$ gleichmäßig beschränkt.

Wir können somit 1) $(n-2)$-Teilfolgen aus $u_i(x)$ $u_i'(x)$, $u_i''(x)$, $\ldots, u_i^{n-3}(x)$ auswählen, die in den ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq l$ gleichmäßig gegen eine Funktion U und ihre Ableitungen U', $\ldots, U^{n-3}$ konvergieren mit $U(0) = U'(0) = \ldots = U^{n-3}(0) = 0$, 2) zwei Teilfolgen u_i^{n-2} und u_i^{n-1} auswählen, die in jedem Teilintervall gegen U^{n-2} und U^{n-1} konvergieren, wobei die Werte $U^{n-2}(0)$ und $U^{n-1}(0)$ zunächst unbekannt sind. Wir zeigen nun, daß in jedem Teilintervall die Gleichung

$$(7) \qquad \beta_1 U^{n-1} + \beta_2 U^{n-2} + \ldots + \beta_n U + \int_0^x (\gamma_2 U^{n-2} + \ldots + \gamma_n U)dx = 0$$

besteht und $\lim\limits_{x \to 0} U^{n-1}(x)$ und $\lim\limits_{x \to 0} U^{n-2}(x)$ existieren.

Aus (5) folgt nach Satz IV, daß in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ die Integro-Differentialgleichung

$$(8) \qquad \beta_1 U^{n-2} + \int_0^x \left(\beta_2 U^{n-2} - \frac{\partial \beta_1}{\partial x} U^{n-1} + \beta_3 U^{n-3} + \ldots + \beta_n U\right) dx + \\ + \int_0^x \int_0^\xi (\gamma_2 U^{n-2} + \ldots + \gamma_n U)\, dx\, d\xi = \beta_1(0)$$

besteht. Indem man auf den beiden Seiten von (8) den Limesprozeß $x \to 0$ durchführt, schließt man daraus:

$$(9) \qquad \lim_{x \to 0} U^{n-2}(x) = 1.$$

Durch die Differentiation (8) ergibt sich (7). Die Gleichung (7) muß also in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ erfüllt sein, da die Gleichung (8) es tut und $U^{n-1}(x)$ in diesem Intervall existiert. Aus (7) folgt ferner

$$\lim_{x \to 0} U^{n-1}(x) = -\frac{\beta_2(0)}{\beta_1(0)}.$$

Damit haben wir den

SATZ V. Die Lösungsfolge u_i der Integro-Differentialgleichungen

$$\alpha_i u^{(n)} + \beta_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + \beta_n(x)u + \\ + \int_0^x (\gamma_2 u^{(n-2)} + \ldots + \gamma_n u)dx = 0.$$

mit $u_i(0) = 0, \ldots, u_i^{n-2}(0) = 0, u_i^{n-1}(0) = b_i$ konvergiert gegen die Lösung $U(x)$ der Gleichung

$$\beta_1 U^{n-1} + \beta_2 U^{n-2} + \ldots + \beta_n U + \int_0^x (\gamma_2 U^{n-2} + \ldots + \gamma_n U)dx = 0$$

mit

$$U(0)=0,\ U'(0)=0, \ldots, U^{n-3}(0)=0,\ U^{n-2}(0)=1,\ U^{n-1}(0)=-\frac{\beta_2(0)}{\beta_1(0)}.$$

Es gilt also $\lim\limits_{i \to \infty} b_i f^{n-1} u_i = f^{n-2} U$.

Dabei bleiben die Folgen $u_i, u_i', \ldots, u_i^{n-2}$ in dem ganzen Intervall, die Folge u_i^{n-1}, u_i^n in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ gleichmäßig beschränkt.

Bei der späteren Untersuchung in § 2 über die Randwertprobleme der Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden wir diesen Satz nur für den besonderen Fall $\gamma_1 \equiv \gamma_2 \equiv \ldots \equiv \gamma_n = 0$ anwenden.

b) Die Untersuchung der Lösungsfolge $b_i(f^{n-2}u_i - b_i f^{n-1} u_i)$ der homogenen Differentialgleichungen von (1)

$$(10) \qquad \alpha_i u^{(n)} + \beta_1 u^{(n-1)} + \ldots + \beta_n u = 0$$

läßt sich durchführen mit Hilfe von Satz V. Diese Lösungsfolge ist nämlich eine spezielle Lösungsfolge von (10) mit $u_i(0) = 0$, $u_i'(0) = 0, \ldots, u_i^{n-3}(0) = 0,\ u_i^{n-2}(0) = b_i,\ u_i^{n-1}(0) = -b_i^2$. Integriert man (10) von 0 bis x, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Anfangsdaten folgende Gleichung

$$(11) \qquad \alpha_i u^{(n-1)} + \beta_1 u^{(n-2)} + \gamma_2 u^{(n-3)} + \\ + \int_0^x (\gamma_3 u^{n-3} + \beta_4 u^{n-4} + \ldots + \beta_n u)\, dx = \\ = (\alpha_i u^{(n-1)} + \beta_1 u^{(n-2)} + \gamma_2 u^{(n-3)})_{x=0} = 0$$

mit $\gamma_2 = \beta_2 - \beta_1',\ \gamma_3 = \beta_3 - \beta_2' + \beta_1''$.

Wir gehen jetzt von (11) aus und betrachten u_i als deren Lösungsfolge mit $u_i(0)=0, u_i'(0)=0, \ldots, u_i^{n-3}(0)=0, u_i^{n-2}(0)=b_i$. Wir wenden auf sie Satz V an. Danach konvergiert u_i gegen die Lösung U der Gleichung

$$(12)\quad \beta_1 U^{n-2} + \gamma_2 U^{n-3} + \int_0^x (\gamma_3 U^{n-3} + \beta_4 U^{n-4} + \ldots + \beta_n U)\,dx = 0$$

mit $U(0) = 0, \ldots, U^{n-4}(0) = 0,\ U^{n-3}(0) = 1,\ U^{n-2}(0) = -\frac{\gamma_2(0)}{\beta_1(0)}$.
Dabei sind die Folgen $u_i, u_i', \ldots, u_i^{n-3}$ in dem ganzen Intervall, die Folgen u_i^{n-2}, u_i^{n-1} in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ gleichmäßig beschränkt.

Betrachtet man (10) in einem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ so schließt man nach Satz Ib daraus auf die Beschränktheit der der Folge $u_i^{(n)}$ in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon + \varepsilon' \leqq x \leqq l$, da die Daten $u_i(\varepsilon), u_i'(\varepsilon), \ldots, u_i^{n-1}(\varepsilon)$ beschränkte Zahlenfolgen bilden. Daraus folgt aber wieder die Beschränktheit von $u_i^{(n)}$ in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$. Wir können somit Teilfolgen aus u_i^{n-1} auswählen, die gegen U^{n-1} gleichmäßig in $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ konvergieren. Folglich muß die Gleichung, die sich durch Differentiation aus (12) ergibt,

$$(13)\qquad \beta_1 U^{n-1} + \beta_2 U^{n-2} + \ldots + \beta_n U = 0,$$

in jedem Teilintervall erfüllt sein; und es ist $U(0) = 0,\ U'(0) = 0, \ldots,\ U^{n-3}(0) = 1,\ U^{n-2}(0) = -\frac{\gamma_2(0)}{\beta_1(0)}$.
Daraus folgt

$$(14)\qquad \lim_{i \to \alpha} b_i (f^{n-2} u_i - b_i f^{n-1} u_i) = f^{n-3} U - \frac{\gamma(0)}{\beta_1(0)} f^{n-2} U.$$

Satz VI. Die Lösungsfolge u_i der Differentialgleichungen

$$\alpha_i u^{(n)} + \beta_1 u^{(n-1)} + \beta_2 u^{(n-2)} + \ldots + \beta_n u = 0$$

mit $u_i(0) = 0, u_i'(0) = 0, \ldots, u_i^{n-3}(0) = 0, u_i^{n-2}(0) = b_i, u_i^{n-1}(0) = -b_i^2$ konvergiert gegen die Lösung der Differentialgleichung

$$\beta_1 U^{n-1} + \beta_2 U^{n-2} + \ldots + \beta_n U = 0$$

mit
$U(0) = 0, U'(0) = 0, \ldots, U^{n-4}(0) = 0, U^{n-3}(0) = 1, U^{n-2}(0) = -\frac{\gamma_2(0)}{\beta_1(0)}$.
Hierbei bleiben die Folgen $u_i, u_i', \ldots, u_i^{n-3}$ in dem ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq l$ und die Folgen u_i^{n-2}, u_i^{n-1} und u_i^n in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ gleichmäßig beschränkt.

§ 2. Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wir stellen für jede Gleichung aus einer Folge von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(15) \qquad \alpha_i u'' + \beta_1(x)u' + \beta_2 u = f, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

im Intervall $0 \leqq x \leqq l$ das Randwertproblem

$$(16) \qquad u_i(0) = R_0, \qquad u_i(l) = R_l.$$

Die Zahlen R_0 und R_l mögen von i unabhängig sein. Die Lösung u_i setzt man nach der Bezeichnung in § 1 folgendermaßen zusammen:

$$(17) \qquad u_i(x) = H_i(x) + R_0 f^0 u_i + c_i f^1 u_i$$

dabei ergibt sich für die Konstante c_i aus der Randbedingung $u_i(l) = R_l$ der Wert

$$(18) \qquad c_i = [R_l - H_i(l) - R_0 f^0 u_i(l)] \frac{1}{f^1 u_i(l)} = \frac{d_i}{f^1 u_i(l)}.$$

Nach Satz I sind die beiden Folgen $H_i(x)$ und $f^0 u_i(x)$ für $0 \leqq x \leqq l$ beschränkt. Folglich bilden $H_i(l)$ und $f^0 u_i(l)$ zwei beschränkte Zahlenfolgen. Da d_i eine lineare Kombination aus $H_i(l)$, $R_0 f^0 u_i(l)$ und der festen Zahl R_l ist, muß die Folge d_i auch beschränkt sein [3]). Andererseits konvergiert nach Satz II $f^1 u_i(l)$ mit $i \to \infty$ gegen Null. Mit wachsendem i wird also c_i nach (18) beliebig groß.

Mit Hilfe von (18) und (17) wollen wir das Verhalten der Lösungsfolge u_i untersuchen. Wir behaupten: $u_i(x)$ besitzt die Eigenschaft [3]), daß $u_i(x)$ in dem ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq l$, die erste und zweite Ableitung von $u_i(x)$ in jedem Teilintervall gleichmäßig für alle i beschränkt bleiben. Um das zu zeigen, genügt es nach (17) nachzuweisen, daß diese Eigenschaft den Funktionen $H_i(x)$, $R_0 f^0 u_i(x)$ und $c_i f^1 u_i(x)$ zukommt. Daß $H_i(x)$ und $R^0 f^0 u_i(x)$ diese Eigenschaft besitzen, folgt ohne weiteres aus Satz I, da ihre Anfangsdaten feste Zahlen sind. Es bleibt also nur übrig, dieselbe Eigenschaft für die Folge $c_i f^1 u_i(x)$ zu zeigen.

Nach (18) läßt sich $c_i f^1 u_i$ folgendermaßen darstellen

$$(19) \qquad c_i f^1 u_i(x) = d_i \frac{1}{b_i f^1 u_i(l)} \cdot b_i f^1 u_i(x).$$

Nun gilt nach Satz V

$$(20) \qquad \lim_{i \to \infty} b_i f^1 u_i(x) = f^0 U(x),$$

[3]) Beim Beweis ist die Voraussetzung, daß R_0 und R_l feste Zahlen seien, unwesentlich, man braucht nur zu verlangen, daß $u_i(0)$ und $u_i(l)$ zwei beschränkte Zahlenfolgen bilden.

wobei $F^0U(x)$ die nullte Fundamentallösung der Differentialgleichung

$$\beta_1(x)U' + \beta_2(x)U = 0$$

darstellt. Diese Lösung verschwindet bekanntlich an keiner Stelle von x. Folglich ist $F^0U(l) \neq 0$. Die Zahlenfolge $\frac{1}{b_i}\frac{1}{f^1u_i(l)}$, die nach (20) gegen $\frac{1}{F^0U(l)}$ konvergiert, ist also beschränkt. Die Folge $c_i f^1 u_i(x)$ unterscheidet sich also nach (19) von der Lösungsfolge $b_1 f^1 u_i$ nur durch einen Faktor, der für alle i beschränkt bleibt. Daraus schließen wir, daß $c_i f^1 u_i$ nach Satz V in dem ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq l$, ihre erste und zweite Ableitungen in jedem Teilintervall $0 \leqq \varepsilon \leqq x \leqq l$ gleichmäßig für alle i beschränkt bleiben. Damit ist unsere Behauptung über $u_i(x)$ bewiesen.

Wegen der Beschränktheit von $u_i'(x)$ und $u_i''(x)$ in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ und der Beschränktheit von $u_i(x)$ in dem ganzen Intervall können wir zwei Teilfolgen u_i, u_i' auswählen, die in $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ gleichmäßig gegen eine Funktion $U(x)$ und ihre erste Ableitung $U'(x)$ konvergieren. Dabei genügt $U(x)$ für $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ der Differentialgleichung

$$\beta_1 U'(x) + \beta_2 U(x) = f(x) \tag{21}$$

mit $U(l) = R_l$. Da durch die Bedingung $U(l) = R_l$ eine Lösung von (21) schon eindeutig bestimmt ist, konvergiert die ganze Folge u_i gegen $U(x)$ von (21) mit $U(l) = R_l$.

Ein Randwertproblem besitzt nun folgende Symmetrie: Wenn man in den Differentialgleichungen (1) x durch $y = l - x$ ersetzt, so entsteht aus einem Randwertproblem wieder ein solches. Dabei ändern die Koeffizienten abwechselnd ihr Vorzeichen, und die Randwerte an der Stelle $x = 0$, bzw. $x = l$ gehen in die Randwerte an der Stelle $y = l$ bzw. $y = 0$ über. Liege die Folge von Differentialgleichungen zweiter Ordnung vor

$$\alpha_i u'' - \beta_1(x)u' + \beta_2(x)u = f \tag{22}$$

mit dem Minuszeichen vor $\beta_1(x)$ und sei $u_i(x)$ die Lösung der i-ten Gleichung von (22) mit $u_i(0) = R_0$, $u_i(l) = R_l$, dann genügt $u_i(l-y) = v_i(y)$ als Funktion von y betrachtet, der i-ten Gleichung von

$$\alpha_i \frac{d^2v_i}{dy^2} + \beta_1(l-y)\frac{dv_i}{dy} + \beta_2(l-y)v_i = f(l-y) \tag{23}$$

mit $v_i(0) = R_l$, $v_i(l) = R_0$. Die Koeffizienten von (23) besitzen aber dieselben Eigenschaften wie die Koeffizienten von (15). Aus unserer obigen Untersuchung kennen wir also das Verhalten der Lösungsfolge $v_i(y)$. Wegen $v_i(y) = u_i(l-y)$ kennt man schließlich auch das Verhalten der Lösungsfolge $u_i(x)$ von (22).

Zusammenfassend haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz VII. Die Lösungsfolge $u_i(x)$ der Differentialgleichungen

$$\alpha_i u'' \pm \beta_1 u' + \beta_2 u = f(x)$$

mit den fest vorgegebenen Randwerten

$$u_i(0) = R_0, \quad u_i(l) = R_l$$

konvergiert gegen eine Lösung $U(x)$ der Differentialgleichung

$$\pm \beta_1 U' + \beta_2 U = f(x).$$

Je nachdem das Vorzeichen vor $\beta_1(x)$ positiv oder negativ ist, erfüllt die Grenzfunktion $U(x)$ die Bedingung

$$U(l) = R_l \quad \text{oder} \quad U(0) = R_0.$$

§ 3. Die Differentialgleichung vierter Ordnung.

Je nach den verschiedenen Formen der Randbedingungen, die man einer Lösung der Differentialgleichung n-ter Ordnung vorschreibt, setzt sich die Lösung auf verschiedene Weise aus den n Fundamentallösungen zusammen. Infolgedessen kann man, um das Verhalten der Lösungsfolge zu untersuchen, jedes Randwertproblem der Differentialgleichungen n-ter Ordnung, je nach seiner Art für sich allein behandeln. Dabei bleibt die Methode dieselbe, das Problem zurückzuführen auf die Frage nach dem Verhalten der Fundamentallösungen. Im allgemeinen Fall (für eine Differentialgleichung höherer Ordnung) muß man weitergehende Sätze zu Hilfe nehmen als die, die wir bereits in § 1 entwickelt haben. Wir wollen uns aber im folgenden mit einem weiteren typischen Beispiel von solchen Problemen begnügen, einem Randwertproblem der Differentialgleichung vierter Ordnung.

Wir zeigen die Konvergenz der Lösungsfolge u_i der Differentialgleichungen

$$\alpha_i u^{(4)} + \beta_1 u^{(3)} + \beta_2 u'' + \beta_3 u' + \beta_4 u = f(x) \tag{24}$$

bei den Randwerten

$$\begin{aligned} u(0) &= R_0, & u(l) &= R_l, \\ u'(0) &= R_0', & u'(l) &= R_l' \end{aligned} \tag{25}$$

gegen die Lösung $U(x)$ der Differentialgleichung

(26) $$\beta_1 U''' + \beta_2 U'' + \beta_3 U' + \beta_4 U = f(x)$$

mit $U(0) = R_0$, $U(l) = R_l$ und $U'(l) = R_l$. Dabei ist vorauszusetzen, daß die homogene Differentialgleichung von (26) keine nicht triviale Lösung zuläßt für die homogenen Randbedingungen $U(0) = U(l) = U'(l) = 0$. Aus dieser Voraussetzung folgt dann, daß die Determinante D[4])

(27) $$D = \begin{vmatrix} f^2U(l) & f^1U(l) \\ f^2U'(l) & f^1U'(l) \end{vmatrix}$$

nicht verschwinden kann, denn sonst würde die Funktion

$$U(x) = f^2U(x) f^1U'(l) - f^1U(x) \cdot f^2U'(l)$$

eine solche nicht triviale Lösung darstellen.

Die Lösung u_i von (24) setzt man wiederum zusammen aus den Fundamentallösungen

(28) $$u_i(x) = H_i(x) + R_1 f^0 u_i + R_0' f^1 u_i + c_i f^2 u_i + d_i f^3 u_i;$$

dabei ergeben sich die Konstanten c_i und d_i aus der Randbedingung in $x = l$:

(29) $$\begin{cases} c_i f^2 u_i(l) + d_i f^3 u_i(l) = A_i \\ c_i f^2 u_i'(l) + d_i f^3 u_i'(l) = B_i \end{cases}$$

wobei nach (28) und (25)

(30) $$\begin{cases} A_i = R_l - H_i(l) - R_0 f^0 u_i(l) - R_0' f^1 u_i(l) \\ B_i = R_l' - H_i'(l) - R_0 f^0 u_i'(l) - R_0' f^1 u_i'(l) \end{cases}$$

sind. Nach Satz I, angewendet auf die Lösungsfolgen $H_i(x)$ $R_0 f^0 u_i(x)$ und $R_0' f^1 u_i(x)$, ist jedes Glied auf der rechten Seite von (30) für alle i gleichmäßig nach oben beschränkt. A_i und B_i bilden also zwei beschränkte Zahlenfolgen. Löst man nun (29) nach c_i und d_i auf und setzt ihre Werte in den Ausdruck $c_i f^2 u_i + d_i f^3 u_i$ ein, so ergibt sich:

(31) $$c_i f^2 u_i + d_i f^3 u_i = A_i \frac{E_i(x)}{D_i} + B_i \frac{F_i(x)}{D_i}$$

mit

(32) $$D_i = \begin{vmatrix} f^2 u_i(l) & f^3 u_i(l) \\ f^2 u_i'(l) & f^3 u_i'(l) \end{vmatrix},$$

---

[4]) $f^\lambda u_i', f^\lambda U_i'$ bedeutet $\frac{d}{dx} f^\lambda u_i(x)$, $\frac{d}{dx} f^\lambda U$.

$$E_i(x) = \begin{vmatrix} f^2u_i(x) & f^3u_i(x) \\ f^2u_i'(l) & f^3u_i'(l) \end{vmatrix}, \tag{33}$$

$$F_i(x) = \begin{vmatrix} f^2u_i(l) & f^3u_i(l) \\ f^2u_i(x) & f^3u_i(x) \end{vmatrix}. \tag{34}$$

Nach (28) und (31) ist $u_i(x)$ eine lineare Kombination von $H_i(x)$, $R_0f^0u_i$, $R_0'f^1u_i$, $\frac{F_i(x)}{D_i}$ und $\frac{E_i(x)}{D_i}$ mit Koeffizienten, die für alle i gleichmäßig beschränkt sind:

$$u_i = H_i + R_0f^0u_i + R_0'f^1u_i + A_i\frac{E_i(x)}{D_i} + B_i\frac{F_i(x)}{D_i}. \tag{35}$$

Wollen wir nun beweisen, daß u_i folgende Eigenschaft besitzt „$u_i(x)$ und ihre erste Ableitung sind in dem ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq l$, ihre zweite, dritte und vierte Ableitung ist in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ gleichmäßig beschränkt", so genügt es nach (25), diese Eigenschaft allein für die beiden Funktionen $\frac{E_i(x)}{D_i}$ und $\frac{F_i(x)}{D_i}$ zu zeigen, da nach Satz I $H_i(x)$, $R_0f^0u_i$ und $R_0'f^1u_i$ diese Eigenschaft bereits besitzen. Wir schreiben nun jene beiden Funktionen in der Form

$$\frac{E_i(x)}{D_i} = \frac{1}{b_i^2}\,\frac{1}{D_i}\cdot b_i^2E_i(x), \tag{36}$$

$$\frac{F_i(x)}{D_i} = \frac{1}{b_i^2}\,\frac{1}{D_i}\cdot b_i^2F_i(x) \tag{37}$$

und wenden Satz IV und Satz I an. Danach folgt aus (32)

$$\lim_{i\to\infty} b_i^2D_i = \lim_{i\to\infty}\begin{vmatrix} f^2u_i(l) & b_i^2f^3u_i(l) - b_if^2u_i(l) \\ f^2u_i'(l) & b_i^2f^3u_i'(l) - b_if^2u_i'(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f^2U(l) & f^1U(l) \\ f^2U'(l) & f^1U'(l) \end{vmatrix}, \tag{38}$$

also nach (27)

$$\lim_{i\to\infty} b_i^2D_i = -D. \tag{39}$$

Da $D \neq 0$ ist, gilt

$$\lim_{i\to\infty}\frac{1}{b_i^2}\,\frac{1}{D_i} = -\frac{1}{D}. \tag{40}$$

Die Zahlen $\frac{1}{b_i^2}\,\frac{1}{D_i}$ auf der rechten Seiten von (36) und (37) bilden also für $i = 1, 2, \ldots$ eine beschränkte Folge. Um die oben erwähnte Eigenschaft für $\frac{E_i(x)}{D_i}$ und $\frac{F_i(x)}{D_i}$ zu zeigen, genügt es also, dies für $b_i^2 E_i(x)$ und $b_i^2 F_i(x)$ zu tun, da diese sich nach (36) und (37) von jenen nur durch einen beschränkten Faktor $\frac{1}{b_i^2}\frac{1}{D_i}$ unterscheiden. Nun gilt z.B. nach (33)

$$(41) \qquad b_i^2 E_i(x) = \begin{vmatrix} f^2 u_i(x) & b_i^2 f^3 u_i(x) - b_i f^2 u_i(x) \\ f^2 u_i'(l) & b_i^2 f^3 u_i'(l) - b_i f^2 u_i'(l) \end{vmatrix},$$

$b_i^2 E_i(x)$ ist also eine lineare Kombination aus $f^2 u_i(x)$ und $b_i^2 f^3 u_i - b_i f^2 u_i$ mit Koeffizienten, die nach (14) und Satz I für alle i gleichmäßig beschränkt sind. Folglich bleibt (nach Satz VI) $b_i^2 E_i(x)$ mit ihrer ersten Ableitung in dem ganzen Intervall, ihre zweiten, dritten und vierten Ableitungen jedoch in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ gleichmäßig für alle i beschränkt.

Wir können somit Teilfolgen aus u_i auswählen, die in dem ganzen Intervall, Teilfolgen aus u_i', u_i'' und u_i''', die in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ gleichmäßig konvergieren. Die Grenzfunktion U und ihre Ableitungen U', U'' und U''' erfüllen in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq x \leqq l$ die Gleichung

$$\beta_1(x)U''' + \beta_2(x)U'' + \beta_3(x)U' + \beta_4(x)U = f(x)$$

mit $U(0) = R_0$, $U(l) = R_l$ und $U'(l) = R_l$.

Durch dieselbe Überlegung wie am Schluß von § 2 sieht man leicht ein, daß die Untersuchung der Lösungsfolge $u_i(x)$ der Differentialgleichungen

$$(42) \qquad \alpha_i u^{(4)} - \beta_1 u^{(3)} + \beta_2 u'' + \beta_3 u' + \beta_4 u = f(x)$$

mit dem Minuszeichen vor $\beta_1(x)$ bei den Randwertproblemen sich zurückführen läßt auf das Verhalten der Lösungsfolge $v_i(y) = u_i(l-y)$ der Differentialgleichungen

$$(43) \qquad \alpha_i \frac{d^4 v_i}{dy^4} + \beta_1 \frac{d^3 v_i}{dy^3} + \beta_2 \frac{d^2 v_i}{dy^2} - \beta_3 \frac{d v_i}{dy} + \beta_4 v_i = f.$$

Die Koeffizienten von (43) sehen nur insofern anders aus als die in (24), als das Vorzeichen vor $\beta_3(x)$ verändert ist. Aber wir haben bei unserer Untersuchung über das Vorzeichen von $\beta_3(x)$ garnichts vorausgesetzt. Wir können somit unser Ergebnis auf die Folge $v_i(y)$ übertragen, also indirekt auf die Lösungsfolge $u_i(x)$ der Differentialgleichungen (42).

Zusammenfassend haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz VIII. Die Lösungsfolge u_i der Differentialgleichungen

$$\alpha_i u^{(4)} \pm \beta_1 u^{(3)} + \beta_2 u'' + \beta_3 u' + \beta_4 u = f(x)$$

bei dem Randwertproblem

$$\begin{aligned} u(0) &= R_0 \qquad & u(l) &= R_l \\ u'(0) &= R_0' \qquad & u'(l) &= R_l' \end{aligned}$$

konvergiert gegen die Lösung $U(x)$ der Differentialgleichung

$$\pm \beta_1 U^{(3)} + \beta_2 U'' + \beta_3 U' + \beta_4 U = f(x)$$

mit $U(0) = R_0$ und $U(l) = R_l$. Je nachdem das Vorzeichen vor $\beta_1(x)$ positiv oder negativ ist, erfüllt $U(x)$ die Bedingung $U'(l) = R_l'$ oder $U'(0) = R_0'$. Beim Beweis ist vorausgesetzt, daß die Differentialgleichung von $U(x)$ keine nichttriviale Lösung für die homogenen Randbedingungen $U(0) = U'(l) = U(l) = 0$ oder $U(0) = U(l) = U'(0) = 0$ besitzt.

(Eingegangen den 12. Juli 1934.
Abgeändert eingegangen den 10. September 1934.)