COMPOSITIO MATHEMATICA

L. TCHAKALOFF

Über den Gültigkeitsbereich einer Ungleichung von Darboux und ihrer Erweiterung, angewandt auf Polynome

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 362-377

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__362_0>

Über den Gültigkeitsbereich einer Ungleichung von Darboux und ihrer Erweiterung, angewandt auf Polynome

von

L. Tchakaloff

Sofia

---

[1]) Bekanntlich läßt sich der Mittelwertsatz der Differentialrechnung nicht unmittelbar auf komplexe Funktionen einer reellen oder komplexen Veränderlichen übertragen. In seiner klassischen Form

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi) \qquad (a < \xi < b) \tag{1}$$

ist er im allgemeinen auf solche Funktionen nicht mehr anwendbar — auch dann nicht, wenn man die Forderung fallen läßt, daß ξ auf der Strecke $a \ldots b$ liegen soll. Ja, es gibt sogar ganze Funktionen $f(x)$, für welche die Gleichung (1) (bei passender Wahl der Konstanten a und b) überhaupt für keinen komplexen Wert von ξ befriedigt wird. Gehört aber $f(x)$ zur Klasse C_m der ganzen rationalen Funktionen vom Grade $\leqq m$ mit beliebigen komplexen Koeffizienten, so kann man einen nur von a, b und m abhängigen „minimalen" Bereich B_m der komplexen Zahlenebene derart abgrenzen, daß jedem $f(x)$ von C_m (mindestens) ein ξ aus B_m entspricht, welches (1) befriedigt. Es gilt nämlich der bekannte Satz von Grace-Heawood [2]): Ist $f(x)$ ein Polynom m-ten Grades $(m > 1)$, so gibt es ein ξ des Kreisbereiches

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leqq \tfrac{1}{2} \left| b - a \right| \operatorname{cotg} \frac{\pi}{m},$$

das der Gleichung (1) genügt.

Vor mehr als einem halben Jahrhundert hat G. Darboux eine

---

[1]) Die Ergebnisse dieser Arbeit, soweit sie den Mittelwertsatz von Darboux betreffen, habe ich ohne Beweise in den Verhandlungen des Internationalen Mathematikerkongresses in Zürich 1932, Bd. II, 66 veröffentlicht.

[2]) J. H. Grace. The zeros of a polynomial [Proceedings Cambridge Philos. Soc. **11** (1900—1902), 352—356]. — P. J. Heawood. Geometrical relations between the roots of $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ [Quarterly Journal **38** (1907), 84—107].

wesentlich verschiedene Erweiterung des Mittelwertsatzes ins Komplexe gegeben [3]).

Es bedeute $f(x)$ eine komplexe Funktion der reellen Veränderlichen x, welche im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig differenzierbar ist; dann besagt der erwähnte Mittelwertsatz von Darboux, daß für mindestens ein ξ zwischen a und b die Ungleichung

$$|f(b) - f(a)| \leqq (b-a)\,|f'(\xi)| \tag{2}$$

besteht. Dieser Satz gibt aber keine genauere Auskunft über die Lage von ξ auf der Strecke $a \ldots b$. Was läßt sich nun über das Variabilitätsfeld von ξ aussagen, wenn etwa $f(x)$ ein Polynom von gegebenem Grade bedeutet? Die Beantwortung dieser Frage, die ich gleich näher präzisieren werde, bildet den Gegenstand der vorliegenden Mitteilung.

Führt man die Ableitung $\varphi(x) = f'(x)$ ein, so nimmt die Ungliechung (2) die Gestalt an

$$\left|\int_a^b \varphi(x)dx\right| \leqq (b-a)\,|\varphi(\xi)|\,. \tag{3}$$

Da es dieselbe Mühe macht, wollen wir uns im folgenden mit der allgemeineren Ungleichung beschäftigen

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,d\psi(x)\right| \leqq |\varphi(\xi)| \int_{-\infty}^{\infty} d\psi(x), \tag{4}$$

wobei wir unter $\psi(x)$ eine nicht abnehmende monotone Funktion der reellen Veränderlichen x verstehen, welche so beschaffen ist, daß die $k+1$ Stieltjesschen Integrale

$$I_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu\, d\psi(x), \qquad \nu = 0, 1, \ldots, k$$

konvergieren. Wir machen außerdem die Annahme, daß $\psi(x)$ mindestens $n = \left[\frac{k}{2}\right] + 1$ Wachstumsstellen hat.

Es bedeute C_k die Klasse der Polynome mit beliebigen komplexen Koeffizienten und vom Grade $\leqq k$. Offenbar haben die beiden Seiten von (4) einen Sinn, wenn $\varphi(x)$ zu dieser Klasse gehört. Wir stellen uns die Aufgabe, der Polynomklasse C_k eine Menge M_k von reellen oder komplexen Zahlen mit folgenden Eigenschaften zuzuordnen: 1) Einem jeden Polynom $\varphi(x)$ von

---

[3]) G. Darboux. Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable. [Journ. de math. (3) 2 (1876), 291—312].

C_k entspricht mindestens ein ξ aus M_k, so daß Ungleichung (4) erfüllt ist. 2) Keiner echten Teilmenge von M_k kommt die Eigenschaft 1 zu; anders ausgedrückt, wenn ξ_0 eine beliebige Zahl von M_k bedeutet, so gibt es ein Polynom $\varphi(x)$ der Klasse C_k von der Beschaffenheit, daß die Ungleichung (4) für keinen von ξ_0 verschiedenen und der Menge M_k angehörigen Wert von ξ befriedigt wird. Eine solche Menge M_k nennen wir kurz eine *Minimalmenge in bezug auf die Klasse* C_k [4]). Es ist natürlich von vornherein nicht evident, ob eine solche Menge überhaupt existiert, da bekanntlich nicht jede Minimumsaufgabe eine Lösung besitzt.

§ 1.

Wir wollen untersuchen, ob es eine endliche (d.h. aus endlich vielen Zahlen bestehende) Minimalmenge M_k gibt. In dieser Richtung beweisen wir an erster Stelle folgendes negative Ergebnis:

SATZ I. *Eine aus p Zahlen bestehende Menge* $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p\}$ *kann nicht eine Minimalmenge in bezug auf* C_k *darstellen, wenn* $p \leqq \frac{k}{2}$ *ist.*

Zum Beweise nehmen wir an, daß die Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ eine Minimalmenge bilden, und daß $p \leqq \frac{k}{2}$ ist. Man bilde die Polynome

$$P(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_p), \qquad \varphi(x) = P(x)\overline{P}(x),$$

wobei $\overline{P}(x)$, wie üblich, das konjugierte Polynom zu $P(x)$ bedeutet. Da der Grad von $\varphi(x)$ höchstens gleich k ist, so müßte Ungleichung (4) erfüllt sein, wenn man ξ durch ein passend gewähltes ξ_r ersetzt. Das ist aber nicht der Fall, da die linke Seite von (4) positiv ist, während die rechte für $\xi = \xi_r$ verschwindet.

Unseren weiteren Betrachtungen liegen die Eigenschaften einer Kette von $n+1$ Tschebyscheffschen Polynomen

$$P_0 = c_0,\ P_1(x), \ldots, P_n(x) \tag{5}$$

zugrunde, welche der monotonen Funktion $\psi(x)$ zugeordnet sind und folgenden Bedingungen genügen:

---

[4]) Diese Definition einer Minimalmenge M_k bezieht sich auf die Ungleichung (4), ist daher wesentlich verschieden von derjenigen, welche wir in einer anderen Arbeit (Sur la structure des ensembles linéaires définis par une certaine propriété minimale [Acta Math. **63** (1934),77—97]) eingeführt haben.

1. Der Grad von $P_\nu(x)$ stimmt mit seinem Index ν überein.

2. Der Koeffizient des höchsten Gliedes von $P_\nu(x)$ ist eine vorgegebene positive Zahl C_ν.

3. $\int_{-\infty}^{\infty} P_\mu(x)\,P_\nu(x)\,d\psi(x) = 0$ für $\mu \neq \nu$ und $\mu + \nu \leqq k$.

Durch diese drei Bedingungen sind die Polynome (5) vollständig bestimmt mit Ausnahme von $P_n(x)$, wenn k gerade ist; in diesem Ausnahmefall kann nämlich $P_n(x)$ durch $P_n(x) + cP_{n-1}(x)$ ersetzt werden, unter c eine ganz beliebige komplexe Konstante verstanden. — Wir fügen hier ohne Beweise einige Eigenschaften der Polynome (5) hinzu, die sich leicht aus ihrer Definition ableiten lassen.

a) Alle Polynome (5) sind reell mit etwaiger Ausnahme von $P_n(x)$, und zwar wenn k gerade ist ($k = 2n - 2$); aber auch in diesem Ausnahmefall läßt sich $P_n(x)$ derart bestimmen, daß alle seine Koeffizienten reell sind, was wir im folgenden stets voraussetzen wollen.

b) $\int_{-\infty}^{\infty} P_\nu(x)\,R(x)\,d\psi = 0$ für jedes Polynom $R(x)$ von niederem Grade als ν.

c) Für jeden reellen Wert der Konstante c hat das Polynom

$$P_\nu(x) + c\,P_{\nu-1}(x), \qquad \nu = 2, \ldots, n,$$

lauter reelle und einfache Nullstellen; zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen dieses Polynoms liegt stets eine (und nur eine) Nullstelle von $P_{\nu-1}(x)$.

d) Bedeuten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Nullstellen von $P_n(x)$, so besitzt die rationale Funktion $\dfrac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)}$ die Partialbruchzerlegung

$$\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \sum_{r=1}^{n} \frac{A_r}{x - x_r}$$

mit positiven Residuen A_r.

Dies vorausgeschickt, unterscheiden wir weiter zwei Fälle, je nachdem k ungerade oder gerade ausfällt.

Erster Fall: *k ist ungerade* ($k = 2n - 1$).

Da $n = \dfrac{k+1}{2}$ die kleinste ganze Zahl ist, welche $\dfrac{k}{2}$ übersteigt, wollen wir hier untersuchen, ob es eine aus n Zahlen bestehende Minimalmenge gibt. Bilden die Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ eine solche Menge, so ist leicht einzusehen, daß das Polynom

$$P(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_n)$$

der Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,R(x)\,d\psi = 0 \tag{6}$$

genügt, wie man auch das Polynom $R(x)$ vom Grade $\leqq n-1$ wählen mag. Wäre nämlich $R(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten oder niederen Grades, für welches

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,R(x)\,d\psi = \lambda$$

von Null verschieden ist, so dürfte man in (4)

$$\varphi(x) = \bar{\lambda}\,P(x)\,R(x) + 1$$

setzen, da der Grad dieses Polynoms höchstens gleich $2n-1$ ist. Bei dieser Wahl von $\varphi(x)$ müßte also Ungleichung (4) befriedigt werden, wenn man ξ durch ein passend gewähltes ξ_r unserer n Zahlen ersetzt. Dadurch geht aber Ungleichung (4) in

$$\lambda\bar{\lambda} + \int_{-\infty}^{\infty} d\psi \leqq \int_{-\infty}^{\infty} d\psi$$

über, welche offenbar unmöglich ist.

Die Orthogonalitätsbedingung (6) ist ebenfalls für ein beliebiges Polynom $R(x)$ vom Grade $\leqq n-1$ erfüllt, wenn man $P(x)$ durch das Tschebyscheffsche Polynom $P_n(x)$ ersetzt. Daraus schließt man in bekannter Weise, daß $P(x)$ und $P_n(x)$ sich höchstens um einen konstanten Faktor unterscheiden können, d.h.

$$P(x) = \frac{1}{c_n}\,P_n(x).$$

Wir gelangen auf diese Weise zu dem Ergebnis, daß eine aus n Zahlen bestehende Minimalmenge (falls eine solche überhaupt existiert) notwendig mit der Menge der Nullstellen von $P_n(x)$ übereinstimmt.

Daß diese Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tatsächlich eine Minimalmenge bilden, läßt sich folgendermaßen beweisen. Es sei $\varphi(x)$ ein beliebiges Polynom vom Grade $\leqq 2n-1$. Da die Differenz

$$\varphi(x) - \sum_{r=1}^{n} \varphi(\xi_r)\left(\frac{P_n(x)}{(x-\xi_r)\,P_n'(\xi_r)}\right)^2$$

für $x = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ verschwindet, so können wir schreiben

$$\varphi(x) = \sum_{r=1}^{n} \varphi(\xi_r)\left(\frac{P_n(x)}{(x-\xi_r)\,P_n'(\xi_r)}\right)^2 + P_n(x)\,R(x), \tag{7}$$

wobei der Grad des Polynoms $R(x)$ höchstens gleich $n-1$ ist. Aus (7) folgt durch Integration

$$(8) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,d\psi = \sum_{r=1}^{n} B_r \varphi(\xi_r), \quad B_r = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{P_n(x)}{(x-\xi_r)P_n'(\xi_r)}\right)^2 d\psi.$$

Bezeichnet man also mit $|\varphi(\xi_s)|$ den größten der Beträge

$$|\varphi(\xi_1)|, \quad |\varphi(\xi_2)|, \ldots, |\varphi(\xi_n)|$$

und beachtet, daß die Koeffizienten B_r positiv sind, so folgt aus (8)

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,d\psi\right| \leqq |\varphi(\xi_s)| \sum_{r=1}^{n} B_r.$$

Formel (8) ist aber gültig für jedes Polynom $\varphi(x)$ vom Grade $\leqq 2n-1$. Sie liefert für $\varphi(x)=1$

$$\sum_{r=1}^{n} B_r = \int_{-\infty}^{\infty} d\psi,$$

so daß die letzte Ungleichung in

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,d\psi\right| \leqq |\varphi(\xi_s)| \int_{-\infty}^{\infty} d\psi$$

übergeht. Somit haben wir den Satz bewiesen:

Satz II. *Es gibt nur eine aus n Zahlen bestehende Minimalmenge in bezug auf die Polynomklasse C_{2n-1}; ihre Elemente stimmen mit den Nullstellen des Tschebyscheffschen Polynoms $P_n(x)$ überein.*

Zweiter Fall: *k ist gerade* $(k=2n-2\geqq 2)$.

Auch in diesem Falle stellt $n=\frac{k+2}{2}$ die kleinste ganze Zahl dar, welche größer als $\frac{k}{2}$ ist. Wir nehmen an, daß die n Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ eine Minimalmenge in bezug auf C_{2n-2} bilden und setzen wieder

$$P(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n).$$

Man beweist genau so wie im ersten Falle, daß die Gleichung

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} P(x)R(x)\,d\psi = 0$$

für jedes Polynom $R(x)$ vom Grade $\leqq n-2$ erfüllt sein muß. Gäbe es nämlich ein solches Polynom $R(x)$, für welches

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,R(x)\,d\psi = \lambda$$

von Null verschieden ist, so könnte Ungleichung (4) nicht bestehen, wenn man $\varphi(x)$ durch $1+\bar{\lambda}\,P(x)\,R(x)$ und ξ durch irgend eine der n Zahlen ξ_r ersetzt.

Man bestimme nun die komplexen Konstanten a und b derart, daß der Grad des Polynoms

$$P(x) - a\,P_n(x) - b\,P_{n-1}(x)$$ [5])

kleiner als $n-1$ sei, und setze

$$R(x) = P(x) - a\,P_n(x) - b\,P_{n-1}(x),$$

$$\bar{R}(x) = \bar{P}(x) - \bar{a}\,P_n(x) - \bar{b}\,P_{n-1}(x).$$

Aus

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\bar{R}(x)\,d\psi = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)\bar{R}(x)\,d\psi = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} P_{n-1}(x)\bar{R}(x)\,d\psi = 0$$

leitet man leicht die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\bar{R}(x)\,d\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\,R(x)\,|^2\,d\psi = 0$$

ab, welche erfordert, daß $R(x)$ identisch verschwindet, d.h.

$$P(x) = aP_n(x) + bP_{n-1}(x) \qquad (a \neq 0).$$

Die n Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ stimmen also mit den Nullstellen eines Polynoms der Form

$$Q(x) = P_n(x) + c\,P_{n-1}(x) \tag{10}$$

überein, wo c eine komplexe Konstante bedeutet. Ich behaupte nun, daß die Gesamtheit dieser n Nullstellen keine Minimalmenge bilden kann, wenn c nicht reell ist. Der Beweis dafür stützt sich auf die Bemerkung, daß dann der imaginäre Teil von c entgegengesetztes Vorzeichen mit dem imaginären Teil einer beliebigen Nullstelle von (10) hat. Man kann nämlich der Gleichung

$$P_n(x) + cP_{n-1}(x) = 0$$

die Form

$$\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = -\frac{1}{c}$$

geben oder, wenn man mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die (reellen und ein-

---

[5]) $P_n(x)$ und $P_{\nu-1}(x)$ sind die letzten zwei Polynome der Tschebyscheffschen Kette (5); ich erinnere ausdrücklich daran, daß sie beide reell sind.

fachen) Nullstellen von $P_n(x)$ bezeichnet und die linke Seite durch ihre Partialbruchzerlegung ersetzt,

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{A_r}{x - x_r} = -\frac{1}{c} \qquad (A_r > 0). \tag{11}$$

Es sei $x = \lambda + i\mu$ eine beliebige Nullstelle von (10) und man setze $c = \alpha + i\beta$. Der Vergleich der imaginären Teilen der beiden Seiten von (11) liefert

$$-\mu \sum_{r=1}^{n} \frac{A_r}{(\lambda - x_r)^2 + \mu^2} = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

woraus erhellt, daß μ und β entgegengesetzte Vorzeichen haben. Ist also der imaginäre Teil von c negativ bzw. positiv, so liegen alle Nullstellen von (10) oberhalb bzw. unterhalb der reellen Achse. Nehmen wir z.B. an, daß $\mathfrak{J}(c) < 0$ ist, dann hat jede der Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ von (10) einen positiven imaginären Teil:

$$\xi_r = a_r + i b_r, \qquad b_r > 0.$$

Es sei ε eine positive Zahl, die den Ungleichungen

$$\varepsilon < \frac{2b_r}{(a_r - x_0)^2 + b_r^2}, \qquad r = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

genügt, unter x_0 die Nullstelle des Tschebyscheffschen Polynoms $P_1(x)$ verstanden. Wir betrachten die lineare Funktion

$$\varphi(x) = 1 + \frac{i\varepsilon}{c_1} P_1(x) = 1 + i\varepsilon(x - x_0),$$

welche gewiß ein Polynom der Klasse C_{2n-2} darstellt. Bei dieser Wahl des Polynoms $\varphi(x)$ ist die Ungleichung

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d\psi \right| \leqq |\, \varphi(\xi_s) \,| \int_{-\infty}^{\infty} d\psi$$

nie (d.h. für kein ξ_s) erfüllt, da sie äquivalent mit

$$1 \leqq |\, 1 + i\varepsilon(a_s - x_0 + i b_s) \,|^2 = (1 - \varepsilon b_s)^2 + \varepsilon^2 (a_s - x_0)^2$$

ist und folglich einer der Ungleichungen (12) widerspricht. Damit ist bewiesen, daß die Nullstellen des Polynoms (10) keine Minimalmenge in bezug auf C_{2n-2} bilden können, falls c nicht reell ist.

Es sei nun c eine reelle Konstante, und bezeichnen wir wieder mit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ die n (reellen und einfachen) Nullstellen von

(10). Ist $\varphi(x)$ ein beliebiges Polynom der Klasse C_{2n-2}, so stellt die Differenz

$$\varphi(x) - \sum_{r=1}^{n} \varphi(\xi_r) \left(\frac{Q(x)}{(x-\xi_r)Q'(\xi_r)}\right)^2$$

ebenfalls ein Polynom von C_{2n-2} dar und zwar ein solches, das an den Stellen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ verschwindet. Man kann daher schreiben

$$\varphi(x) = \sum_{r=1}^{n} \varphi(\xi_r) \left(\frac{Q(x)}{(x-\xi_r)(Q'(\xi_r)}\right)^2 + Q(x)S(x),$$

wo $S(x)$ ein Polynom $(n-2)$-ten oder niederen Grades bedeutet. Mit Rücksicht auf die Orthogonalitätseigenschaften von $Q(x)$ erhält man daraus durch Integration

$$(13) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)d\psi = \sum_{r=1}^{n} A'_r\varphi(\xi_r), \text{ wo } A'_r = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{Q(x)}{(x-\xi_r)Q'(\xi_r)}\right)^2 d\psi.$$

Es sei gleich bemerkt, daß bei $\varphi(x) = 1$ diese Gleichung liefert

$$\Sigma A'_r = \int_{-\infty}^{\infty} d\psi.$$

Nach (13) hat man für jedes Polynom $\varphi(x)$ der Klasse C_{2n-2}

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)d\psi \right| \leqq \sum_{r=1}^{n} A'_r \mid \varphi(\xi_r) \mid$$

oder, wenn $| \varphi(\xi_s) |$ den größten der Beträge $| \varphi(\xi_1) |$, $| \varphi(\xi_2) |$, $\ldots$, $| \varphi(\xi_n) |$ bedeutet,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)d\psi \right| \leqq | \varphi(\xi_s) | \, \Sigma A'_r = | \varphi(\xi_s) | \int_{-\infty}^{\infty} d\psi.$$

Das Ergebnis der obigen Betrachtungen läßt sich wie folgt zusammenfassen:

Satz III. *Es gibt unendlich viele aus n Zahlen bestehende Minimalmengen in bezug auf die Klasse C_{2n-2}. Dann und nur dann bilden n Zahlen eine solche Minimalmenge, wenn sie mit den Nullstellen eines Polynoms der Gestalt*

$$P_n(x) + cP_{n-1}(x)$$

übereinstimmen; dabei bedeuten $P_n(x)$ und $P_{n-1}(x)$ die letzten zwei Glieder der Tschebyscheffschen Kette (5) *und c ist eine reelle, sonst beliebige Konstante.*

§ 2.

In diesem Paragraphen wollen wir unter den speziellen Fällen, die den verschiedenen Formen der monoton wachsenden Funktion $\psi(x)$ entsprechen, die wichtigsten vom Standpunkte der Anwendungen aus betrachten.

1. *Die Darbouxsche Formel.*

Man definiere $\psi(x)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= a \text{ für } x < a,\\ \psi(x) &= x \text{ für } a \leqq x \leqq b,\\ \psi(x) &= b \text{ für } x > b.\end{aligned}$$

Die Ungleichung (4) geht in (3) über, oder, wenn wir mit $f(x)$ eine primitive Funktion von $\varphi(x)$ bezeichnen,

$$|f(b)-f(a)| \leqq (b-a)\,|f'(\xi)|. \tag{2}$$

In diesem Falle hat das Tschebyscheffsche Polynom $P_n(x)$ die Gestalt

$$P_n(x) = \lambda_n \frac{d^n}{dx^n}\{(x-a)^n(x-b)^n\} \tag{14}$$

und stimmt im wesentlichen mit dem n-ten Legendreschen Polynom überein. Berücksichtigen wir ferner, daß $f(x) = \int \varphi(x)\,dx$ dann und nur dann zur Klasse C_{k+1} gehört, wenn $\varphi(x)$ ein Polynom der Klasse C_k ist, so geben uns die Sätze II und III genauere Auskunft über die mögliche Wahl von ξ in der Darbouxschen Formel (2), wenn es sich um ihre Anwendung auf komplexe Polynome der Klasse C_{k+1} handelt. Wir können nämlich den Satz aussprechen:

Satz IV. *Bei ungeradem k $(k = 2n-1)$ entspricht jedem Polynom $f(x)$ der Klasse C_{k+1} mindestens eine Nullstelle ξ des durch (14) definierten Polynoms $P_n(x)$, für welche die Ungleichung (2) gültig ist. Ist dagegen k gerade $(k = 2n-2)$, so besitzt dieselbe Eigenschaft mindestens eine der n Nullstellen des Polynoms*

$$Q(x) = P_n(x) + cP_{n-1}(x),$$

wie man auch die reelle Konstante c wählen mag.

2. *Verallgemeinerte Taylorsche Formel, angewandt auf Polynome mit komplexen Koeffizienten.*

Es seien a und $b > a$ zwei reelle Konstanten und m eine natürliche Zahl. Wird die Funktion $\psi(x)$ durch die Gleichungen

$$\psi(x) = -\frac{(b-a)^m}{m!} \text{ für } x < a,$$

$$\psi(x) = -\frac{(b-x)^m}{m!} \text{ für } a \leqq x \leqq b,$$

$$\psi(x) = 0 \text{ für } x > b$$

definiert, so nimmt Formel (4) die Gestalt an

$$\left| \int_a^b \frac{(b-x)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi(x)\, dx \right| \leqq \frac{(b-a)^m}{m!} \,|\,\varphi(\xi)\,|. \tag{15}$$

Ein beliebiges Polynom $\varphi(x)$ von C_k kann als die m-te Ableitung eines entsprechenden Polynoms $f(x)$ der Klasse C_{k+m} betrachtet werden und umgekehrt: die m-te Ableitung eines beliebigen Polynoms von C_{k+m} gehört zu C_k. Ersetzt man daher in (15) $\varphi(x)$ durch $f^{(m)}(x)$, so erhält man leicht nach partieller Integration die Formel

$$\left| f(b) - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(b-a)^r}{r!} f^{(r)}(a) \right| \leqq \frac{(b-a)^m}{m!} \,|\,f^{(m)}(\xi)\,|. \tag{16}$$

Sie ist äquivalent mit (15), bezieht sich aber auf Polynome $f(x)$ der Klasse C_{k+m}.

Das Tschebyscheffsche Polynom $P_n(x)$ ist in diesem Falle durch die Formel

$$P_n(x) = \lambda_n (x-b)^{-m+1} \frac{d^n}{dx^n} \{(x-a)^n (x-b)^{n+m-1}\} \tag{17}$$

gegeben. Es gilt somit der

Satz V. *Ist k ungerade ($k = 2n-1$), so entspricht einem beliebigen Polynom $f(x)$ der Klasse C_{k+m} mindestens eine Nullstelle ξ von* (17), *welche die Ungleichung* (16) *befriedigt; ist dagegen k gerade ($k = 2n-2$), so gilt dieselbe Ungleichung, wie man auch das Polynom $f(x)$ der Klasse C_{k+m} wählen mag, mindestens für eine Nullstelle ξ des Polynoms*

$$P_n(x) + c\,P_{n-1}(x) \qquad (c \text{ reell, sonst beliebig}).$$

3. *Trigonometrische Polynome.*

Es sei

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{(t^2+1)^n},$$

wobei $n > 1$ eine natürliche Zahl bedeutet. Dann nimmt Formel (4) die Gestalt an

$$(18)\quad \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{(x^2+1)^n}\right| \leqq |\varphi(\xi)| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = |\varphi(\xi)| \frac{\pi}{2^{2n-2}} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Der so gewählten monoton wachsenden Funktion $\psi(x)$ entspricht eine $(n+1)$-gliedrige Tschebyscheffsche Kette (5), deren letzte zwei Glieder mit

$$P_{n-1}(x) = \frac{1}{2i}\{(x+i)^n - (x-i)^n\} \text{ und } P_n(x) = \tfrac{1}{2}\{(x+i)^n + (x-i)^n\}$$

übereinstimmen. Die n Nullstellen des Polynoms

$$Q(x) = P_n(x) + c\,P_{n-1}(x)$$

sind durch

$$(19)\qquad \xi_r = \operatorname{cotg}\frac{r\pi - \gamma}{n}, \qquad r = 1, 2, \ldots, n,$$

gegeben, wenn man $c = \operatorname{cotg}\gamma$, $0 < \pi < \gamma$ setzt.

Nach den Sätzen I und III des § 1 können wir folgendes behaupten von der Klasse C_{2n-2} der algebraischen Polynome $\varphi(x)$ vom Grade $\leqq 2n-2$: 1. p komplexe Zahlen können nicht eine Minimalmenge in bezug auf C_{2n-2} bilden, falls p kleiner als n ist; 2. dann und nur dann stellen die n Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ eine Minimalmenge in bezug auf C_{2n-2} dar, wenn sie mit den n Zahlen (19) übereinstimmen; γ kann dabei eine ganz beliebige reelle Zahl zwischen 0 und π bedeuten.

Wir wollen anderseits die Klasse D_{n-1} der trigonometrischen Polynome

$$(20)\quad T(\theta) = a_0 + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + \ldots + \\ + a_{n-1}\cos(n-1)\theta + b_{n-1}\sin(n-1)\theta$$

von der $(n-1)$-ten oder niederen Ordnung mit beliebigen komplexen Koeffizienten betrachten. Jedes Polynom dieser Klasse geht durch die Substitution

$$(21)\qquad x = -\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$$

in eine rationale Funktion der Form $\dfrac{\varphi(x)}{(x^2+1)^{n-1}}$ über, wobei $\varphi(x)$ ein algebraisches Polynom von x vom Grade $\leqq 2n-2$ darstellt; ist umgekehrt $\varphi(x)$ ein beliebiges algebraisches Polynom, dessen Grad $2n-2$ nicht übersteigt, so verwandelt sich die rationale Funktion $\dfrac{\varphi(x)}{(x^2+1)^{n-1}}$ mittels der Substitution (21) in ein trigonometrisches Polynom der Gestalt (20). Wir wollen die komplexe Veränderliche θ der Einschränkung unterwerfen, daß sie dem Streifen

$$0 \leqq \Re(\theta) < 2\pi, \qquad \theta \neq 0, \tag{22}$$

angehören soll. Nimmt man der Gaußschen x-Ebene die beiden Punkte $x = \pm i$ weg, so stellt Gleichung (21) eine eindeutig umkehrbare Beziehung zwischen der „punktierten" x-Ebene und dem obigen Streifen (22) der θ-Ebene fest.

Es sei nun $\varphi(x)$ ein algebraisches Polynom der Klasse C_{2n-2} und $T(\theta)$ das entsprechende trigonometrische Polynom. Dann geht die Ungleichung (18) in

$$\tfrac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} T(\theta)\,d\theta\right| \leqq \frac{|T(\alpha)|}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|^{2n-2}} \cdot \frac{\pi}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1} \tag{23}$$

über, wobei α diejenige Zahl des Streifens (22) bedeutet, welche durch die Gleichung $\xi = -\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ bestimmt ist. Den Nullstellen (19) entsprechen durch die Substitution (21) die n Zahlen

$$\alpha_r = 2\pi - \frac{2r\pi - 2\gamma}{n}, \quad r = 1, 2, \ldots, n \qquad (0 < \gamma < \pi),$$

des Streifens (22); sie sind offenbar alle reell und bilden eine arithmetische Progression mit der Differenz $\frac{2\pi}{n}$.

Die Ergebnisse, die wir oben für die Klasse C_{2n-2} formuliert haben, lassen sich unmittelbar auf die Klasse D_{n-1} der trigonometrischen Polynome von der $(n-1)$-ten oder niederen Ordnung übertragen. Demnach können wir den Satz aussprechen:

Satz VI. *Bedeuten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ Zahlen des Streifens* (22), *deren Anzahl kleiner als n ist, so gibt es stets ein trigonometrisches Polynom $T(\theta)$ der Klsase D_{n-1}, so daß Ungleichung* (23) *nicht befriedigt ist, wenn man α durch irgend welche dieser Zahlen ersetzt. Es lassen sich dagegen n Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ desselben Streifens derart bestimmen, daß für ein beliebiges Polynom $T(\theta)$ der Klasse D_{n-1} die Ungleichung* (23) *befriedigt wird, wenn man darin α durch ein passend gewähltes α_r dieser n Zahlen ersetzt; damit n komplexe Zahlen diese Eigenschaft besitzen, ist es notwendig und hinreichend, daß sie dem reellen Intervall $0 < \theta < 2\pi$ angehören und eine arithmetische Progression mit der Differenz $\frac{2\pi}{n}$ bilden.*

Man gelangt zu wesentlich verschiedenen Ergebnissen, wenn man die Ungleichung (23) durch

$$\left|\int_0^{2\pi} T(\theta)\,d\theta\right| \leqq 2\pi\,|\,T(\alpha)\,| \tag{24}$$

ersetzt. Wir verstehen wiederum unter einer Minimalmenge in bezug auf die oben betrachtete Klasse D_{n-1} trigonometrischer Polynome eine Zahlenmenge E_{n-1} mit folgenden Eigenschaften: 1. einem beliebigen Polynom $T(\theta)$ der Klasse D_{n-1} entspricht mindestens eine Zahl α der Menge E_{n-1}, für welche Ungleichung (24) befriedigt ist; 2. keiner echten Teilmenge von E_{n-1} kommt die Eigenschaft 1 zu.

Man erkennt zunächst leicht, daß es keine aus p Zahlen bestehende Minimalmenge E_{n-1} gibt, falls p kleiner als n ist. Bilden nämlich die p Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ eine solche Menge und setzt man

$$P(z) = \left(z - e^{i\alpha_1}\right) \ldots \left(z - e^{i\alpha_p}\right), \quad T^*(\theta) = P\left(e^{i\theta}\right)\overline{P}\left(e^{-i\theta}\right),$$

so kann offenbar die Ungleichung (24) nicht bestehen, wenn man $T(\theta)$ durch das Polynom p-ter Ordnung $T^*(\theta)$ und α durch irgend eine der Zahlen α_r ersetzt.

Wir wollen ferner untersuchen, ob es eine aus n Zahlen bestehende Minimalmenge in bezug auf D_{n-1} gibt. Nehmen wir an, daß die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eine solche Menge bilden. Man sieht leicht ein, daß das Produkt

$$P\left(e^{i\theta}\right) = \left(e^{i\theta} - e^{i\alpha_1}\right)\left(e^{i\theta} - e^{i\alpha_2}\right) \ldots \left(e^{i\theta} - e^{i\alpha_n}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu e^{i\nu\theta}$$

ein trigonometrisches Polynom darstellt, das zwar nicht zur Klasse D_{n-1} gehört, verwandelt sich aber in ein Polynom dieser Klasse, wenn man es mit $e^{-ir\theta}$ multipliziert, unter r eine ganze Zahl der Folge $1, 2, \ldots, n-1$ verstanden. Folglich muß (24) befriedigt werden, wenn man $T(\theta) = P\left(e^{i\theta}\right)e^{-ir\theta}$ setzt und α durch eine passend gewählte der n Zahlen α_ν ersetzt. Dann verschwindet aber die rechte Seite und für das Bestehen dieser Ungleichung ist erforderlich, daß

$$\int_0^{2\pi} P\left(e^{i\theta}\right)e^{-ir\theta}\,d\theta = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots, n-1,$$

d.h. $c_r = 0$ für $r = 1, 2, \ldots, n-1$ und

$$P\left(e^{i\theta}\right) = e^{in\theta} + c_0.$$

Die Zahlen $e^{i\alpha_r}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ sind also die n Wurzeln der binomischen Gleichung

$$z^n + c_0 = 0 \qquad (c_0 \neq 0). \tag{25}$$

Ist umgekehrt c_0 eine von Null verschiedene komplexe Konstante, und sind $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die n Wurzeln der binomischen Gleichung (25), so bilden die durch

$$e^{i\alpha_r} = z_r, \qquad r = 1, 2, \ldots, n,$$

bestimmten Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Minimalmenge in bezug auf die Klasse D_{n-1}. Der Beweis dafür beruht auf der leicht verifizierbaren Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(\theta)\,d\theta = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} T(\alpha_r), \tag{26}$$

welche für jedes Polynom $T(\theta)$ der Klasse D_{n-1} gültig ist. Aus (26) folgt, wenn wir mit $|T(\alpha_s)|$ den größten (oder einen der größten) der Beträge $|T(\alpha_1)|, |T(\alpha_2)|, \ldots, |T(\alpha_n)|$ bezeichnen,

$$\left|\int_0^{2\pi} T(\theta)\,d\theta\right| \leqq 2\pi\,|T(\alpha_s)|.$$

Es gilt somit der

Satz VII. *Es gibt keine aus $n-1$ oder weniger Zahlen bestehende Minimalmenge in bezug auf die Klasse D_{n-1}. Dann und nur dann bilden die n Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eine Minimalmenge E_{n-1} in bezug auf D_{n-1}, wenn $e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, \ldots, e^{i\alpha_n}$ die n Wurzeln einer binomischen Gleichung* (25) *darstellen.*

4. *Die Cavalieri-Simpsonsche Formel, angewandt auf Polynome mit komplexen Koeffizienten.*

Besitzt die komplexe Funktion $f(x)$ stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$, so hat man identisch [6])

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\{f(-1) + 4f(0) + f(1)\} - \frac{1}{72}\int_{-1}^{1} u(x) f^{\mathrm{IV}}(x)\,dx, \tag{27}$$

wobei $u(x) = (1-|x|)^3(1+3|x|)$ für $-1 \leqq x \leqq 1$.

Da die reelle Funktion $u(x)$ stets $\geqq 0$ ist, so kann man dem letzten Gliede der Formel (27) die Form

$$\frac{\lambda}{72} f^{\mathrm{IV}}(\xi)\int_{-1}^{1} u(x)\,dx = \frac{\lambda}{90} f^{\mathrm{IV}}(\xi)$$

---

[6]) Vgl. z.B. G. Peano, Residuo in Formula de quadratura Cavalieri-Simpson. [Enseignement mathématique 18 (1916), 124—127].

geben, wo $|\lambda| \leqq 1$ und ξ eine reelle Zahl des Intervalls $-1 < x < 1$ bedeutet.

Die allgemeinen Sätze des ersten Paragraphen gestatten, die Lage der Zahl ξ zu präzisieren, falls $f(x)$ der Polynomklasse C_{k+4} angehört. Zu dem Zwecke genügt es, die Funktion $u(x)$ außerhalb des Intervalls $-1 \leqq x \leqq 1$ durch $u(x) = 0$ zu erklären und

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} u(t)\,dt$$

zu setzen. Die entsprechende Tschebyscheffsche Folge wird dann unendlich und beginnt mit

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2 - \frac{2}{21}, \quad P_3(x) = x^3 - \frac{1}{4}x, \quad \ldots .$$

Es sei $f(x)$ ein beliebiges Polynom der Klasse C_{k+4}; dann gehört $f^{\mathrm{IV}}(x)$ der Klasse C_k an und für $\varphi(x) = f^{\mathrm{IV}}(x)$ geht Ungleichung (4) in

$$\left| \int_{-1}^{1} f^{\mathrm{IV}}(x) u(x)\,dx \right| \leqq |f^{\mathrm{IV}}(\xi)| \int_{-1}^{1} u(x)\,dx = \frac{4}{5} |f^{\mathrm{IV}}(\xi)|$$

über; mit Rücksicht auf (27) läßt sie sich noch in der Form

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \frac{1}{3}\{f(-1) + 4f(0) + f(1)\} \right| \leqq \frac{1}{90} |f^{\mathrm{IV}}(\xi)| \tag{28}$$

schreiben.

Den früheren Festsetzungen gemäß verstehen wir in diesem Falle unter einer Minimalmenge M_k eine Zahlenmenge mit folgenden Eigenschaften: 1. einem beliebigen Polynom $f(x)$ der Klasse C_{k+4} entspricht mindestens eine Zahl ξ von M_k, welche (28) befriedigt; 2. keine echte Teilmenge von M_k besitzt die Eigenschaft 1. Indem wir diese Definition vor Augen haben, lassen sich die allgemeinen Sätze I, II und III unmittelbar auf den betrachteten speziellen Fall anwenden.

(Eingegangen den 12. Mai 1934.)