COMPOSITIO MATHEMATICA

J. F. KOKSMA

Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 250-258
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__250_0>

Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins

von

J. F. Koksma

Amsterdam.

§ 1. Obwohl man für viele reelle Funktionen $f(x)$ die asymptotische Verteilung modulo Eins der Zahlen

$$f(1),\ f(2),\ \ldots$$

hat untersuchen können, gibt es viele andere, sogar elementare Funktionen, bei denen die zur Verfügung stehenden Methoden bis jetzt völlig versagen.

So ist es meines Wissens eine ungelöste Frage, ob die Exponentialfunktion e^x gleichverteilt (mod. 1) ist oder nicht [1]).

In dieser Hinsicht dürfte der folgende Satz 1 von Interesse sein, der in dieser Note bewiesen wird.

SATZ 1. *Für fast alle $\theta > 1$ ist θ^x gleichverteilt modulo Eins.*

BEMERKUNG. „*Fast alle*" ist gemeint im Sinne von Borel-Lebesgue: fast alle θ eines Intervalles $A <$ oder $\leqq \theta \leqq$ oder $< B$ $(-\infty \leqq A < B \leqq \infty)$ besitzen eine Eigenschaft E, wenn die θ aus dem Intervall, welche die Eigenschaft E nicht haben, eine Menge vom Lebesgueschen Maß Null bilden.

Es folgen jetzt die Sätze 2, 3, 4. Satz 1 ist eine direkte Folge von Satz 2; Satz 2 ist enthalten in Satz 3, der selber in Satz 4 enthalten ist. Die Beweise der Sätze 2 und 3 findet man in § 2 und den Beweis von Satz 4 in § 3.

---

[1]) Nach der bekannten Weylschen Definition heißt die reelle Funktion $f(x)$ gleichverteilt (mod 1), falls für jedes feste γ $(0 \leqq \gamma \leqq 1)$ die Anzahl N_γ der ganzen x mit $1 \leqq x \leqq N$ (N ganz) und

$$0 \leqq f(x) - [f(x)] < \gamma$$

der Beziehung $\dfrac{N_\gamma}{N} \to \gamma$ für $N \to \infty$ genügt.

H. WEYL, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins. Math. Ann. 77 (1916), 313—352.

Satz 2. *Für* $x = 1, 2, \ldots$ *sei* $M(x) \geqq 1$ *und es sei für jedes Paar natürlicher Zahlen* X *und* x $(X \neq x)$

$$|M(X) - M(x)| \geqq K,$$

wo K *eine von* X *und* x *unabhängige positive Zahl ist. Dann ist die Funktion* $\theta^{M(x)}$ $(x = 1, 2, \ldots)$ *für fast alle* $\theta > 1$ *gleichverteilt modulo Eins.*

Satz 3. *Es seien* α *und* β *feste reelle Zahlen mit* $\alpha < \beta$. *Ist* $f(x, \theta)$ *für jede natürliche Zahl* x *eine reelle stetig-differenzierbare Funktion von* θ *in* $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ *und bezeichnet*

$$f'_\theta(X, \theta) - f'_\theta(x, \theta)$$

für jedes Paar ungleicher natürlichen Zahlen X *und* x *eine monotone Funktion von* θ *in* $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$, *die in diesem Intervall beständig einen Absolutwert* $\geqq K$ *besitzt, wo* K *eine geeignet gewählte, von* θ, X *und* x *unabhängige positive Zahl bedeutet, dann ist* $f(x, \theta)$ $(x = 1, 2, \ldots)$ *für fast alle festen* θ *aus* $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ *gleichverteilt (mod. 1).*

Satz 4. 1. *Es seien* α *und* β *gegebene reelle Zahlen* $(-\infty < \alpha < \beta < \infty)$.

Es sei $f(x, \theta)$ *für jede natürliche Zahl* x *eine reelle stetige Funktion von* θ *im Intervall* $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$, *und es sei für jedes Paar ungleicher natürlichen Zahlen* x_1 *und* x_2

$$\Phi(x_1, x_2, \theta) = f(x_1, \theta) - f(x_2, \theta) \qquad (\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$$

eine stetig-differenzierbare Funktion von θ, *deren Ableitung* Φ'_θ *im Intervall* $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ *monoton und beständig* $\neq 0$ *ist.*

2. *Wird für ganzes* $N \geqq 2$

$$(1) \quad A_N = \frac{1}{N^2} \sum_{x_1=2}^{N} \sum_{x_2=1}^{x_1-1} \operatorname{Max}\left(\frac{1}{|\Phi'_\theta(x_1, x_2, \alpha)|}, \frac{1}{|\Phi'_\theta(x_1, x_2, \beta)|}\right)$$

gesetzt, so gebe es eine monoton steigende Folge (N_ν) *natürlicher Zahlen* $N_1, N_2, \ldots$ *mit*

$$\frac{N_{\nu+1}}{N_\nu} \to 1 \text{ für } \nu \to \infty,$$

derart, daß die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_{N_\nu}$ *konvergiert.*

Behauptung. *Für fast alle festen* θ *aus* $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ *ist* $f(x, \theta)$ $(x = 1, 2, \ldots)$ *gleichverteilt (mod. 1).*

Bemerkung. In Satz 3 ist u. a. enthalten der Weylsche

Satz 5. *Ist $M(x)$ reell und ganz für $x = 1, 2, \ldots$ und ist $M(x_1) \neq M(x_2)$ für $x_1 \neq x_2$, so ist $\theta M(x)$ für fast alle θ gleichverteilt (mod. 1).*

Der Leser leitet selber leicht weitere Anwendungen aus den Sätzen 4 und 3 her.

Der Beweis von Satz 4 geschieht mit dem Weylschen Kriterium: *Die reelle Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann gleichverteilt (mod. 1), wenn für jedes feste ganze $h \neq 0$ gilt*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i h f(x)} = 0.$$

Den Ansatz zur Anwendung des Kriteriums verdanke ich dem Weylschen Beweise des Satzes 5. [2])

Es sei noch bemerkt, daß mein Beweis des Satzes 4 durch Heranziehung anderer Methoden derart verschärft werden kann, daß man im Stande ist, die Schärfe der Annäherung der Reste (mod. 1) der Zahlen $f(1, \theta), f(2, \theta), \ldots$ an beliebige Zahlen des Einheitsintervalles abzuschätzen. Diese Approximationen sind dann gültig für fast alle θ in $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$. Ich hoffe, das an andrer Stelle durchzuführen. [3])

§ 2. Wir beweisen zuerst Satz 3 aus Satz 4 und dann Satz 2 aus Satz 3.

Beweis von Satz 3.

Bedingung 1 von Satz 4 wird durch die Funktion $f(x, \theta)$ von Satz 3 erfüllt. Wir wollen zeigen, daß auch Bedingung 2 von Satz 4 gilt und zwar mit $N_\nu = \nu^2$ $(\nu \geqq 2)$. Dazu brauchen wir nur zu zeigen, daß $\sum_{\nu=2}^{\infty} A_{\nu^2}$ konvergiert, wenn A_N definiert ist durch (1).

Seien x_1 und N ganz mit $2 \leqq x_1 \leqq N$. Für beliebiges θ in $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ kann man die Zahlen

$$f'_\theta(1, \theta),\ f'_\theta(2, \theta),\ \ldots,\ f'_\theta(x_1, \theta)$$

der Größe nach ordnen; dann sind die Differenzen von je zwei aufeinander folgenden Zahlen der neuen Folge alle $\geqq K$.

---

[2]) H. Weyl, l.c. [1]).

[3]) Im Spezialfall $f(x, \theta) = \theta\, M(x)$ (vergl. Satz 5) sind solche Abschätzungen durchgeführt in: J. F. Koksma, Ein mengentheoretischer Satz aus dem Gebiete der diophantischen Approximationen [Proc. Acad. Amsterdam **35** (1932), 959—969].

Deshalb ist

$$\sum_{x_2=1}^{x_1-1} \frac{1}{|f'_\theta(x_1, \theta) - f'_\theta(x_2, \theta)|} < 2 \sum_{\mu=1}^{N} \frac{1}{\mu K}$$

$$= \frac{2}{K}\left(1 + \sum_{\mu=2}^{N} \frac{1}{\mu}\right) \leqq \frac{2}{K}\left(1 + \int_1^N \frac{dt}{t}\right) = \frac{2}{K}(1 + \log N) < \frac{2}{K} \log (3N).$$

Also ist nach der Definition von Φ in Satz 4

$$\sum_{x_2=1}^{x_1-1} \operatorname{Max}\left(\frac{1}{|\Phi'_\theta(x_1, x_2, \alpha)|}, \frac{1}{|\Phi'_\theta(x_1, x_2, \beta)|}\right) < \frac{4}{K} \log (3N),$$

also ist nach (1)

$$A_N < \frac{1}{N^2} \cdot \frac{4N}{K} \log (3N) = \frac{4}{K} \cdot \frac{\log (3N)}{N},$$

woraus ohne Weiteres folgt, daß $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} A_{\nu^2}$ konvergiert. Weil alle Bedingungen von Satz 4 erfüllt sind, liefert Satz 4 sofort die Behauptung von Satz 3.

Beweis von Satz 2. Ist $m \geqq 1$ eine beliebige feste natürliche Zahl, so brauche ich offenbar nur zu zeigen, daß $\theta^{M(x)}$ $(x = 1, 2, \ldots)$ gleichverteilt (mod. 1) ist für fast alle θ aus $m \leqq \theta \leqq m + 1$.

Dazu setze ich in Satz 3

$$f(x, \theta) = \theta^{M(x)}, \quad \alpha = m, \quad \beta = m + 1.$$

Dann ist $f(x, \theta)$ für jedes ganze $x \geqq 1$ reell und stetig differenzierbar in Bezug auf θ. Für $X \neq x$ ist

$$f'_\theta(X, \theta) - f'_\theta(x, \theta) = M(X)\theta^{M(X)-1} - M(x)\theta^{M(x)-1}.$$

Ist $\overline{M}$ die größte, $\underline{M}$ die kleinste der Zahlen $M(X)$ und $M(x)$, so ist

$$\pm\left(f'_\theta(X, \theta) - f'_\theta(x, \theta)\right) = \overline{M}\theta^{\overline{M}-1} - \underline{M}\theta^{\underline{M}-1}.$$

Die Funktion im rechten Glied ist wegen $\overline{M} > \underline{M} \geqq 1$, $\theta \geqq 1$ offenbar monoton steigend in Bezug auf θ; überdies ist offenbar

$$|f'_\theta(X, \theta) - f'_\theta(x, \theta)| \geqq \overline{M}\theta^{\overline{M}-1} - \underline{M}\theta^{\overline{M}-1} \geqq \overline{M} - \underline{M} \geqq K,$$

so daß alle Bedingungen von Satz 3 erfüllt sind. Die Behauptung von Satz 3 liefert dann alles.

§ 3. *Beweis von Satz* 4.

Ich schicke dem Beweis zwei Hilfssätze voran.

HILFSSATZ 1. *Unter der Bedingung* 1 *von Satz* 4 *ist für ganzes* $N \geqq 2$

$$\int_a^\beta \left| \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x,\theta)} \right|^2 d\theta < \frac{\beta-\alpha}{N} + A_N,$$

wo A_N *durch* (1) *definiert wird.*

Beweis. Es sei

$$F(N, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x,\theta)} \qquad (N \geqq 1,\ \alpha \leqq \theta \leqq \beta) \tag{2}$$

gesetzt. Dann ist

$$\begin{aligned} | F(N, \theta) |^2 &= \frac{1}{N^2} \left(\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x,\theta)} \right) \left(\sum_{x=1}^{N} e^{-2\pi i f(x,\theta)} \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{x_1=1}^{N} \sum_{x_2=1}^{N} e^{2\pi i (f(x_1,\theta) - f(x_2,\theta))} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{x_1=1}^{N} 1 + \frac{1}{N^2} \sum_{x_1=2}^{N} \sum_{x_2=1}^{x_1-1} \left\{ e^{2\pi i \{f(x_1,\theta) - f(x_2,\theta)\}} + e^{-2\pi i \{f(x_1,\theta) - f(x_2,\theta)\}} \right\} \\ &= \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{x_1=2}^{N} \sum_{x_2=1}^{x_1-1} \cos 2\pi \{ f(x_1, \theta) - f(x_2, \theta) \}. \end{aligned}$$

Aus der Definition von $\Phi(x_1, x_2, \theta)$ in Satz 4 folgt also

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_\alpha^\beta | F(N, \theta) |^2 \, d\theta = \\ &\frac{\beta-\alpha}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{x_1=2}^{N} \sum_{x_2=1}^{x_1-1} \int_\alpha^\beta \cos 2\pi \Phi(x_1, x_2, \theta) d\theta = \\ &\qquad\qquad \frac{\beta-\alpha}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{x_1=2}^{N} \sum_{x_2=1}^{x_1-1} I(x_1, x_2), \end{aligned} \right. \tag{3}$$

wo also

$$I(x_1, x_2) = \int_\alpha^\beta \cos 2\pi \Phi(x_1, x_2, \theta) d\theta$$

gesetzt ist. Ich führe in $I(x_1, x_2)$ die Größe

$$u = 2\pi \Phi(x_1, x_2, \theta)$$

als neue Integrationsvariable ein (das ist erlaubt, weil Φ' in

$\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ ständig dasselbe Vorzeichen besitzt, so daß $\Phi(x_1, x_2, \theta)$ im strengen Sinne monoton ist). Setzt man

$$a = 2\pi\Phi(x_1, x_2, \alpha), \quad b = 2\pi\Phi(x_1, x_2, \beta),$$

so bekommt man

$$I(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\cos u}{\Phi'_\theta(x_1, x_2, \theta)}\, du = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\cos u}{\varphi(u)}\, du,$$

wo $\varphi(u)$ wegen der Monotonie von Φ und Φ'_θ eine im Intervall $a \leqq u \leqq b$ monotone Funktion bedeutet, die stets $\neq 0$ ist und in den Endpunkten die Werte

$$\varphi(a) = \Phi'_\theta(x_1, x_2, \alpha), \quad \varphi(b) = \Phi'_\theta(x_1, x_2, \beta)$$

annimmt.

Der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung lehrt also

$$|I(x_1, x_2)| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \operatorname{Max}\left(\frac{1}{|\varphi(a)|}, \frac{1}{|\varphi(b)|}\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Max}\left(\frac{1}{|\Phi'_\theta(x_1, x_2, \alpha)|}, \frac{1}{|\Phi'_\theta(x_1, x_2, \beta)|}\right).$$

Nach (3) ist also

$$\int_\alpha^\beta |F(N, \theta)|^2 d\theta \leqq \frac{\beta - \alpha}{N} +$$
$$+ \frac{2}{\pi N^2} \sum_{x_1=2}^{N} \sum_{x_2=1}^{x_1-1} \operatorname{Max}\left(\frac{1}{|\Phi'_\theta(x_1, x_2, \alpha)|}, \frac{1}{|\Phi'_\theta(x_1, x_2, \beta)|}\right),$$

so daß der Hilfssatz wegen (1) und (2) bewiesen ist.

HILFSSATZ 2. *In jeder Folge* (N_ν) *aufsteigender natürlichen Zahlen* $N_1, N_2, \ldots$ *mit*

$$\frac{N_{\nu+1}}{N_\nu} \to 1 \text{ für } \nu \to \infty,$$

gibt es wenigstens eine Teilfolge (n_ν) *mit*

$$\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} \to 1 \text{ für } \nu \to \infty,$$

derart, daß die unendliche Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{n_\nu}$ *konvergiert.*

Beweis. Wir betrachten diejenigen der Intervalle

$$i_m: \qquad m^2 \leqq x < (m+1)^2 \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

worin wenigstens ein Glied von (N_ν) liegt. Fallen *höchstens* zwei Glieder in solches i_m, so behalten wir diese Glieder bei. Fallen *mehr als zwei* Glieder in ein und dasselbe i_m, so behalten wir von dieser endlichen Anzahl von Gliedern *nur* das erste und das letzte bei; die zwischenliegenden werden gestrichen. Die so ausgewählte Folge stellt die Folge (n_ν) dar. Zeigen wir, daß die behaupteten Eigenschaften gelten.

a. Die Behauptung $\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} \to 1$ ist klar, denn wenn zwei konsekutive Glieder der Folge (n_ν) *nicht* konsekutive Glieder der Folge (N_ν) sind, so liegen sie in einem und demselben i_m. Und es gilt

$$\frac{N_{\nu+1}}{N_\nu} \to 1 \quad (\nu \to \infty) \text{ und } \frac{(m+1)^2}{m^2} \to 1 \quad (m \to \infty).$$

b. In jedem i_m liegen höchstens zwei Glieder der Folge (n_ν). D.h. es ist $n_\nu \geqq (\frac{1}{2}\nu)^2$, so daß $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{n_\nu}$ konvergiert.

Zeigen wir jetzt Satz 4.

I. Es sei h eine feste ganze Zahl $\neq 0$. Dann bleibt Bedingung 1 von Satz 4 gültig, wenn $f(x, \theta)$ durch hf und also auch Φ und Φ'_θ durch $h\Phi$ b.z.w. $h\Phi'_\theta$ ersetzt werden.

Hilfssatz 1 lehrt dann $\left(A_N \text{ ersetzt durch } \frac{A_N}{|h|}\right)$ für $N \geqq 2$

$$\text{(4)} \quad \int\limits_\alpha^\beta \left| \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i\, hf(x,\theta)} \right|^2 d\theta < \frac{\beta-\alpha}{N} + \frac{A_N}{|h|} \leqq \frac{\beta-\alpha}{N} + A_N;$$

hierin ist A_N durch (1) definiert.

II. Ist (N_ν) die Folge aus Bedingung 2 von Satz 4, so sei (n_ν) die gemäß Hilfssatz 2 gebildete Teilfolge. Also gilt

$$\text{(5)} \qquad \frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} \to 1 \text{ für } \nu \to \infty,$$

und es konvergiert die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{n_\nu}$. Weil (n_ν) eine Teilfolge von (N_ν) ist, und weil nach Bedingung 2 von Satz 4 die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_{N_\nu}$$

konvergiert, konvergiert also wegen $A_{N_\nu} \geqq 0$ auch die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\beta-\alpha}{n_\nu} + A_{n_\nu}\right).$$

Weil die Glieder dieser Reihe positiv sind, gibt es bekanntlich eine monoton steigende Folge (ψ_ν) von Zahlen $\psi_\nu \geqq 1 \quad (\nu \geqq 1)$ mit

$$\psi_\nu \to \infty \text{ für } \nu \to \infty, \tag{6}$$

derart, daß auch die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\beta-\alpha}{n_\nu} + A_{n_\nu}\right) \psi_\nu \tag{7}$$

konvergiert [4]).

III. Sind (n_ν) und (ψ_ν) die Folgen aus II, so bedeute $\mathfrak{M}_\nu^{(h)}$ für jedes Paar ganzer Zahlen $h \neq 0$ und $\nu \geqq 1$ die Menge aller θ aus $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ mit

$$\left| \frac{1}{n_\nu} \sum_{x=1}^{n_\nu} e^{2\pi i h f(x,\theta)} \right| > \frac{1}{\sqrt{\psi_\nu}}. \tag{8}$$

Links steht eine stetige Funktion von θ in $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$; die Menge $\mathfrak{M}_\nu^{(h)}$ ist also meßbar; ihr Maß sei $\mathfrak{m}(\mathfrak{M}_\nu^{(h)})$. Dann folgt aus (8) sofort

$$\int_\alpha^\beta \left| \frac{1}{n_\nu} \sum_{x=1}^{n_\nu} e^{2\pi i h f(x,\theta)} \right|^2 d\theta > \frac{\mathfrak{m}(\mathfrak{M}_\nu^{(h)})}{\psi_\nu}.$$

Aus (4) mit $N = n_\nu$ läßt sich also schließen

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{M}_\nu^{(h)}) < \left(\frac{\beta-\alpha}{n_\nu} + A_{n_\nu}\right)\psi_\nu. \tag{9}$$

Es sei bemerkt, daß $\mathfrak{M}_\nu^{(h)}$ abhängig ist

a) von der Wahl von $f(x, \theta)$, (N_ν), α und β in Satz 4,

b) von der Wahl der Zahlen h und ν.

IV. Bei gegebenen $h \neq 0$, $\nu \geqq 1$ bedeute $\mathfrak{N}_\nu^{(h)}$ die Vereinigungsmenge der Mengen

$$\mathfrak{M}_\nu^{(h)}, \ \mathfrak{M}_{\nu+1}^{(h)}, \ \ldots;$$

dann ist

$$\mathfrak{N}_1^{(h)} \supset \mathfrak{N}_2^{(h)} \supset \mathfrak{N}_3^{(h)} \supset \ldots, \tag{10}$$

und dann gilt wegen (9) für das äußere Maß $\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{N}_\nu^{(h)})$ von $\mathfrak{N}_\nu^{(h)}$

$$\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{N}_\nu^{(h)}) < \sum_{\sigma=\nu}^{\infty} \left(\frac{\beta-\alpha}{n_\sigma} + A_{n_\sigma}\right)\psi_\sigma.$$

---

[4]) Vergl. z.B. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen [Berlin 1931, 3. Auflage], 308.

Weil die Reihe (7) konvergiert, ist also bei jedem $\varepsilon > 0$:

$$\overline{\mathfrak{m}}(\mathfrak{N}_\nu^{(h)}) < \varepsilon \text{ für } \nu \geqq \nu_0(\varepsilon),$$

so daß die Durchschnittmenge $\mathfrak{N}^{(h)}$ der in (10) genannten Mengen das Maß Null hat. Läßt man h die Werte $\pm 1, \pm 2, \ldots$ durchlaufen, so hat die Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}$ der Mengen $\mathfrak{N}^{(h)}$ auch das Maß Null. $\mathfrak{M}$ ist abhängig von der Wahl der Funktion $f(x, \theta)$, der Folge (N_ν) und der Zahlen α und β in Satz 4.

V. Gehört θ nicht zur Menge $\mathfrak{M}$, aber wohl zum Intervall $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$, so will ich zeigen, daß für beliebiges feste $h \neq 0$ gilt

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ N \text{ ganz}}} \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i\, h f(x, \theta)} = 0. \tag{11}$$

Damit wäre Satz 4 bewiesen!

Sei dann $h \neq 0$ eine feste ganze Zahl. Weil θ nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört, gehört θ nicht zu $\mathfrak{N}^{(h)}$, also für gewisses $\nu_1 \geqq 1$ nicht zu $\mathfrak{N}_{\nu_1}^{(h)}$, also für $\nu \geqq \nu_1$ zu keiner der Mengen $\mathfrak{M}_\nu^{(h)}$. Das heißt wegen III, daß (8) für kein $\nu \geqq \nu_1$ gilt. Also gilt

$$\left| \frac{1}{n_\nu} \sum_{x=1}^{n_\nu} e^{2\pi i\, h f(x, \theta)} \right| \leqq \frac{1}{\sqrt{\psi_\nu}} \qquad (\nu \geqq \nu_1). \tag{12}$$

Ist jetzt N eine natürliche Zahl $\geqq n_{\nu_1}$, so gibt es ein $\nu \geqq \nu_1$ mit

$$n_\nu \leqq N < n_{\nu+1}. \tag{13}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i\, h f(x, \theta)} \right| &\leqq \left| \frac{1}{n_\nu} \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i\, h f(x, \theta)} \right| \\ &\leqq \left| \frac{1}{n_\nu} \sum_{x=1}^{n_\nu} e^{2\pi i\, h f(x, \theta)} \right| + \left| \frac{1}{n_\nu} \sum_{x=n_\nu+1}^{N} e^{2\pi i\, h f(x, \theta)} \right| \\ &\leqq \frac{1}{\sqrt{\psi_\nu}} + \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n_\nu} = \frac{1}{\sqrt{\psi_\nu}} + \left(\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} - 1 \right) \end{aligned}$$

wegen (12) und (13).

Aus (13) folgt $\nu \to \infty$ wenn $N \to \infty$, so daß aus (5) und (6) hervorgeht

$$\frac{1}{\sqrt{\psi_\nu}} + \left(\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu} - 1 \right) \to 0 \text{ für } N \to \infty.$$

Damit ist aber (11) gezeigt worden, q. e. d.

(Eingegangen den 23. Juni 1934.)