COMPOSITIO MATHEMATICA

REINHOLD BAER

Zentrum und Kern von Gruppen mit Elementen unendlicher Ordnung

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 247-249
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__247_0>

Zentrum und Kern von Gruppen mit Elementen unendlicher Ordnung

von

Reinhold Baer

Manchester

In den folgenden Zeilen soll die Frage geklärt werden, unter welchen Bedingungen aus der Existenz von Elementen unendlicher Ordnung auf die Identität von Zentrum und Kern [1]) geschlossen werden kann.

SATZ: *Kern und Zentrum der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *sind identisch, wenn*

1. $\mathfrak{G}$ *Elemente unendlicher Ordnung enthält, und*
2. *die Elemente endlicher Ordnung von* $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ *eine Untergruppe von* $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ *bilden.*

Die Voraussetzung 2 ist z.B. erfüllt, wenn $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ abelsch ist.

BEWEIS: Aus Bedingung 1 folgt nach K., § 2, Satz 1, daß $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ abelsch ist. — Enthielte $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ Elemente unendlicher Ordnung, so wären Zentrum und Kern nach K., § 2, Satz 3 identisch; wir können also im folgenden annehmen, daß $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ keine Elemente unendlicher Ordnung enthält.

Sei $\mathfrak{g}$ irgendein Element aus $\mathfrak{G}$; hat $\mathfrak{g}$ unendliche Ordnung, so hat auch die $\mathfrak{g}$ enthaltende Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ unendliche Ordnung und nach K., § 2 (9) ist $\mathfrak{g}$ mit jedem Element von $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ vertauschbar.

Sei also im folgenden $\mathfrak{g}$ ein Element endlicher Ordnung aus $\mathfrak{G}$. Nach Bedingung 1 gibt es in $\mathfrak{G}$ ein Element $\mathfrak{u}$ unendlicher Ordnung. $\mathfrak{u}$ ist nach dem oben bewiesenen mit jedem Element von $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ vertauschbar; infolgedessen induzieren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ denselben Automorphismus. Wegen Bedingung 2 und der Endlichkeit der Ordnung von $\mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{g}\mathfrak{u}$ in einer Restklasse unendlicher Ordnung von $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ enthalten, und mithin folgt aus K., § 2 (9), daß $\mathfrak{g}\mathfrak{u}$ mit jedem Element aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ vertauschbar ist.

---

[1]) Der Kern $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ besteht aus der Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{G}$, die jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$ in sich transformieren, vgl. R. BAER [Comp. Math. 1 (1934), 254—283], im folgenden mit K. zitiert.

Also ist auch $\mathfrak{g}$ mit jedem Element von $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ vertauschbar und mithin sind Zentrum und Kern von $\mathfrak{G}$ identisch.

Daß ohne die Bedingung 2 der Satz nicht mehr richtig ist, zeigt das folgende

Beispiel einer Gruppe, deren Kern vom Zentrum verschieden ist, und die doch Elemente unendlicher Ordnung enthält.

Es sei $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}\} \times \{\mathfrak{b}\} \times \{\mathfrak{c}\}$ direktes Produkt der drei durch $\mathfrak{a}$ bezw. $\mathfrak{b}$ bezw. $\mathfrak{c}$ erzeugten Zyklen, und es habe $\mathfrak{a}$ die Ordnung 2, $\mathfrak{b}$ die Ordnung 4, $\mathfrak{c}$ unendliche Ordnung.

Wir adjungieren zu $\mathfrak{A}$ zwei Elemente $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ mit den Relationen:

$$\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{s}^2 = \mathfrak{c},$$
$$\mathfrak{a}\mathfrak{s} = \mathfrak{s}\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{b}\mathfrak{s} = \mathfrak{s}\mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{c}\mathfrak{s} = \mathfrak{s}\mathfrak{c},$$
$$\mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{r} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2, \qquad \mathfrak{r}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{r}, \qquad \mathfrak{r}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{r},$$
$$\mathfrak{r}\mathfrak{s}\mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{s}^{-1} = \mathfrak{c}^{-1}.$$

Hierdurch wird eine Erweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ durch ein direktes Produkt zweier Zyklen der Ordnung 2 definiert. Denn $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ induzieren beide in $\mathfrak{A}$ einen Automorphismus, und zwar $\mathfrak{r}$ einen der Ordnung 2, $\mathfrak{s}$ den identischen. Weiter ist einerseits

$$\mathfrak{r}^2\mathfrak{s}\mathfrak{r}^{-2}\mathfrak{s}^{-1} = \mathfrak{b}\mathfrak{s}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{s}^{-1} = 1$$

und, falls wir $[\mathfrak{r}, \mathfrak{s}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]^{-1} = \mathfrak{r}\mathfrak{s}\mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{s}^{-1}$ setzen,

$$[\mathfrak{r}, \mathfrak{s}] \cdot \mathfrak{r}[\mathfrak{r}, \mathfrak{s}]\mathfrak{r}^{-1} = \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{r}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{r}^{-1} = 1,$$

andererseits

$$\mathfrak{s}^2\mathfrak{r}\mathfrak{s}^{-2}\mathfrak{r}^{-1} = \mathfrak{c}\mathfrak{r}\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{r}^{-1} = \mathfrak{c}^2$$

und

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \cdot \mathfrak{s}[\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]\mathfrak{s}^{-1} = \mathfrak{c}\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathfrak{s}^{-1} = \mathfrak{c}^2,$$

womit gezeigt ist, daß wirklich eine Erweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ durch ein direktes Produkt zweier Zyklen der Ordnung 2 definiert ist [2]). Insbesondere läßt sich also jedes Element aus $\mathfrak{G}$ eindeutig auf die Form

$$\mathfrak{a}^a\mathfrak{b}^b\mathfrak{c}^c\mathfrak{r}^r\mathfrak{s}^s \text{ mit } a, r, s = 0 \text{ oder } 1, \quad 0 \leqq b < 4$$

bringen.

Weiter ist

$$\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}^a\mathfrak{b}^b\mathfrak{c}^c\mathfrak{r}^r\mathfrak{s}^s\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^a\mathfrak{b}^b\mathfrak{c}^c\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{r}^r\mathfrak{s}^s\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^a\mathfrak{b}^b\mathfrak{c}^c\mathfrak{r}^r\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{2r}\mathfrak{s}^s\mathfrak{a}$$
$$= \mathfrak{a}^a\mathfrak{b}^{b+2r}\mathfrak{c}^c\mathfrak{r}^r\mathfrak{s}^s.$$

---

[2]) z.B. nach R. BAER [Math. Zeitschr. 38 (1934), 407, Zusatz].

Ist $r = 0$, so ist $\mathfrak{a}$ also mit dem Element vertauschbar; ist aber $r = 1$, so erhalten wir

$$\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}^{a}\mathfrak{b}^{b}\mathfrak{c}^{c}\mathfrak{r}^{r}\mathfrak{s}^{s}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{a}\mathfrak{b}^{b+2}\mathfrak{c}^{c}\mathfrak{r}^{r}\mathfrak{s}^{s}$$

und, da $\mathfrak{r}\mathfrak{s}^{-1} = \mathfrak{s}\mathfrak{r}$ ist, so wird auch

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{a}^{a}\mathfrak{b}^{b}\mathfrak{c}^{c}\mathfrak{r}\mathfrak{s}^{s})^{5} &= \prod_{i=0}^{4} (\mathfrak{s}^{is}\mathfrak{a}^{a}\mathfrak{b}^{b}\mathfrak{c}^{c}\mathfrak{r}\mathfrak{s}^{-is}) \cdot \mathfrak{s}^{5s} \\
&= \prod_{i=0}^{4} (\mathfrak{a}^{a}\mathfrak{b}^{b}\mathfrak{c}^{c+is}\mathfrak{r}) \cdot \mathfrak{s}^{5s} \\
&= \prod_{i=0}^{4} \left(\mathfrak{a}^{a}\mathfrak{b}^{b}\mathfrak{c}^{(c+is)(-1)^{i}}\right) \cdot \mathfrak{b}^{a2(4+3+2+1)}\mathfrak{r}^{5}\mathfrak{s}^{5s} \\
&= \mathfrak{a}^{5a}\mathfrak{b}^{5b}\mathfrak{c}^{c+2s}\mathfrak{r}^{5}\mathfrak{s}^{5s} \\
&= \mathfrak{a}^{a}\mathfrak{b}^{b+2}\mathfrak{c}^{c+2s}\mathfrak{r}\mathfrak{c}^{2s}\mathfrak{s}^{s} \\
&= \mathfrak{a}^{a}\mathfrak{b}^{b+2}\mathfrak{c}^{c}\mathfrak{r}\mathfrak{s}^{s},
\end{aligned}$$

d.h. $\mathfrak{a}$ gehört zu $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ [3]).

Da aber $\mathfrak{a}$ nicht mit allen Elementen aus $\mathfrak{G}$ vertauschbar ist, z.B. nicht mit $\mathfrak{r}$, so ist der Kern von $\mathfrak{G}$ sicher vom Zentrum verschieden. Andererseits hat das Element $\mathfrak{c}$ unendliche Ordnung, d.h. $\mathfrak{G}$ ist eine gesuchte Gruppe.

---

[3]) Dies ist eine Folge aus folgender Verallgemeinerung von K., § 1 (8):

a. ein Element, dessen Ordnung mod Zentrum endlich ist, gehört dann und nur dann zum Kern, wenn es jedes Element in eine Potenz transformiert;

b. ein Element unendlicher Ordnung gehört dann und nur dann zum Kern, wenn es mit allen Elementen vertauschbar ist.

Die Notwendigkeit von a und das Hinreichen von b sind trivial. — Ist $\mathfrak{g}$ ein a erfüllendes Element, $\mathfrak{A}$ eine Untergruppe, so ist

$$\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{g}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{g} \geqq \mathfrak{g}^{-2}\mathfrak{A}\mathfrak{g}^{2} \geqq \ldots \geqq \mathfrak{g}^{-n+1}\mathfrak{A}\mathfrak{g}^{n-1} \geqq \mathfrak{A},$$

wenn n die Ordnung von $\mathfrak{g}$ mod Zentrum ist, d.h. a ist auch hinreichend, während die Notwendigkeit von b aus K. § 2, Satz 3 folgt.

(Eingegangen den 23. Juli 1934.)