REINHOLD BAER

Gruppen mit hamiltonschem Kern

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 241-246

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__241_0>

Gruppen mit hamiltonschem Kern

von

Reinhold Baer

Manchester

Das Ziel der folgenden Zeilen ist, das Strukturproblem für Gruppen mit hamiltonschem Kern auf das entsprechende Problem für Gruppen mit abelschem Kern zurückzuführen.

Wir benutzen hierbei durchgehend die Ergebnisse einer früheren Arbeit [1]) und die folgenden

BEZEICHNUNGEN:

$\mathfrak{C}(\mathfrak{G})$ = Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$.
$\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ = Kern von $\mathfrak{G}$ = Gesamtheit der Elemente aus $\mathfrak{G}$, die mit jeder Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vertauschbar sind.
$\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ = Zentrum von $\mathfrak{G}$.
$\mathfrak{G}_p$ = zur Primzahl p gehörige Primärkomponente von $\mathfrak{G}$,
= Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung eine Potenz von p ist.
$\mathfrak{A} \times \ldots \times \mathfrak{B} \times \ldots$ = direktes Produkt der Gruppen $\mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{B}, \ldots$.
$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ = Durchschnitt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.
$\{\ldots\}$ = von den eingeschlossenen Elementen oder Elementmengen erzeugte Untergruppe.

DEFINITION: *Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, so ist $\mathfrak{V}(\mathfrak{G})$ die Gesamtheit der mit jedem Element von $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2$ vertauschbaren Elemente.*

Offenbar ist $\mathfrak{V}(\mathfrak{G})$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$; da $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, so ist auch $\mathfrak{V}(\mathfrak{G})$ eine charakteristische Untergruppe, also ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

$\mathfrak{G}$ sei im folgenden stets eine *Gruppe mit hamiltonschem Kern.* Dann gilt:

(1) a) *alle Elemente aus $\mathfrak{G}$ haben endliche, nicht durch* 8 *teilbare Ordnung;*

b) *ist die Ordnung eines Elementes durch* 4 *teilbar, so hat es die Form $\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{v}$, wo $\mathfrak{k}$ ein Element der Ordnung* 4 *aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2$, $\mathfrak{v}$ ein Element aus $\mathfrak{V}(\mathfrak{G})$ ist;*

---

[1]) R. BAER, Der Kern, eine charakteristische Untergruppe [Compositio Math. **1** (1934), 254—283], zitiert mit K.

c) *die Ordnung eines Elementes aus* $\mathfrak{G}$ *ist dann und nur dann nicht durch* 4 *teilbar, wenn es zu* $\mathfrak{V}(\mathfrak{G})$ *gehört. — Insbesondere ist also* $\mathfrak{K}[\mathfrak{V}(\mathfrak{G})]$ *abelsch.*

Beweis: Da $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ hamiltonsch ist, so folgt aus K., § 2, Satz 1, daß $\mathfrak{G}$ nur Elemente endlicher Ordnung enthält. — Ist $\mathfrak{g} \neq 1$ irgend ein Element aus $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2 \leqq \mathfrak{K}[\{\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2, \mathfrak{g}\}]$ wegen K., § 1 (4), d.h. $\mathfrak{K}[\{\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2, \mathfrak{g}\}]$ ist hamiltonsch und $\{\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2, \mathfrak{g}\}/\mathfrak{K}[\{\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2, \mathfrak{g}\}]$ ist zyklisch; also ist K., § 4, Satz 5 anwendbar, woraus sofort (a) folgt. Ebenso folgt hieraus sofort, daß jedes Element, dessen Ordnung nicht durch 4 teilbar ist, zu $\mathfrak{V}(\mathfrak{G})$ gehört, woraus sich (b) ergibt. Ist schließlich $\mathfrak{g}$ ein Element aus $\mathfrak{G}$, dessen Ordnung durch 4 teilbar ist, so ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}\mathfrak{v}$, wo $\mathfrak{a}$ ein Element der Ordnung 4 aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2$, $\mathfrak{v}$ eines aus $\mathfrak{V}(\mathfrak{G})$ ist. Es gibt dann wegen K., Fußnote [1]) ein Element $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2$, das mit $\mathfrak{a}$ zusammen eine Quaternionenuntergruppe von $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2$ erzeugt und insbesondere die Relationen $\mathfrak{a}^2=\mathfrak{b}^2$, $\mathfrak{a}^4=\mathfrak{b}^4=1$, $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}=\mathfrak{b}^{-1}$, $\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{-1}$ erfüllt, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{b} &= \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{v}, \quad \text{da } \mathfrak{v} \text{ in } \mathfrak{V}(\mathfrak{G}), \quad \mathfrak{b} \text{ in } \mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2,\\ &\neq \mathfrak{a}\mathfrak{v},\end{aligned}$$

d.h. $\mathfrak{a}\mathfrak{v}$ ist nicht mit $\mathfrak{b}$ vertauschbar, gehört also nicht zu $\mathfrak{V}(\mathfrak{G})$, womit auch (c) bewiesen ist.

(2) $\mathfrak{C}[\mathfrak{K}(\mathfrak{G})] \leqq \mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2 \cap \mathfrak{V}(\mathfrak{G}) =$ *Gesamtheit der Elemente der Ordnung* 2 *aus* $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$
$= \mathfrak{Z}[\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2]$
$\leqq \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Z}[\mathfrak{V}(\mathfrak{G})]$.

Beweis: Wegen (1c) ist $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2 \cap \mathfrak{V}(\mathfrak{G})$ die Gesamtheit der Elemente der Ordnung 2 aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$; also ist $\mathfrak{C}[\mathfrak{K}(\mathfrak{G})] \leqq \mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2 \cap \mathfrak{V}(\mathfrak{G})$ wegen K., § 4 (14) und $\mathfrak{Z}[\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2] = \mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2 \cap \mathfrak{V}(\mathfrak{G})$ wegen K., Fußnote [1]). Weiter folgt $\mathfrak{Z}[\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2] \leqq \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ aus (1b). — Ist schließlich $\mathfrak{z}$ ein Element aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, so ist seine Ordnung wegen (1b) zusammen mit der Tatsache, daß $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2$ eine Quaternionenuntergruppe enthält, nicht durch 4 teilbar, also $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{V}(\mathfrak{G})$ wegen (1c), also $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{Z}[\mathfrak{V}(\mathfrak{G})]$. Ist umgekehrt $\mathfrak{z}$ ein Element aus $\mathfrak{Z}[\mathfrak{V}(\mathfrak{G})]$, $\mathfrak{g}$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{g}$ vertauschbar, wenn $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{V}(\mathfrak{G})$ enthalten ist. Ist $\mathfrak{g}$ nicht in $\mathfrak{V}(\mathfrak{G})$ enthalten, so hat $\mathfrak{g}$ wegen (1b) und (c) die Form $\mathfrak{k}\mathfrak{v}$, wo $\mathfrak{k}$ ein Element der Ordnung 4 aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2$, $\mathfrak{v}$ eines aus $\mathfrak{V}(\mathfrak{G})$ ist. Dann ist $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{k}$ nach Definition von $\mathfrak{V}(\mathfrak{G})$, mit $\mathfrak{v}$ als Element aus $\mathfrak{Z}[\mathfrak{V}(\mathfrak{G})]$ vertauschbar, gehört also zu $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, d.h. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Z}[\mathfrak{V}(\mathfrak{G})]$.

(3) $$\mathfrak{K}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{K}[\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})].$$

Beweis: Nach K., § 1 (4) ist $\mathfrak{K}[\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})] \geqq \mathfrak{K}(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$. Ist $\mathfrak{k}$ irgendein Element aus $\mathfrak{K}[\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})]$, so haben wir also nur zu zeigen, daß $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ enthalten ist, und hierfür ist, wegen K., § 1 (8) hinreichend zu zeigen, daß $\mathfrak{k}$ jedes nicht in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ enthaltene Element $\mathfrak{g}$ aus $\mathfrak{G}$ in eine Potenz transformiert. Jedes derartige Element $\mathfrak{g}$ hat aber wegen (1b) und (c) die Form $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, wo $\mathfrak{a}$ ein Element der Ordnung 4 aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2$, $\mathfrak{b}$ eines aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ist. Die Ordnung n von $\mathfrak{b}$ ist dann wegen (1c) nicht durch 4 teilbar.

Dann wird

$\mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{g}\mathfrak{k} = \mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{k} = \mathfrak{a}\mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{k}$, da jedes Element aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2$ mit jedem aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ vertauschbar ist,

$= \mathfrak{a}\mathfrak{b}^l$, wo l zu n teilerfremd ist, da $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ist.

Fall 1: n ist ungerade; dann sind 4 und n teilerfremd, und es gibt Zahlen r, s, so daß $l - 1 = 4r - sn$ wird. Dann wird:

$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{1+4r} = \mathfrak{a}^{1+4r}\mathfrak{b}^{1+4r}$, da $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})_2$, $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ist,

$= \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{l+sn} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^l$, da 4 die Ordnung von $\mathfrak{a}$, n die von $\mathfrak{b}$ ist,

$= \mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{k}$.

Fall 2: n ist gerade; dann ist $n = 2m$, wo m ungerade ist, und da l und n teilerfremd sind, so ist auch l ungerade, d.h. $l - 1 = 2q$. Da m und 2 teilerfremd sind, so gibt es Zahlen r und s, so daß $q = 2r - ms$ und also $l - 1 = 4r - ns$ wird. Dann wird

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{1+4r} &= \mathfrak{a}^{1+4r}\mathfrak{b}^{1+4r} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{l+ns}\\ &= \mathfrak{a}\mathfrak{b}^l = \mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{k},\end{aligned}$$

womit alles bewiesen ist.

(4) a. $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ *ist direktes Produkt zweier Zyklen der Ordnung 2.*

b. $\mathfrak{G}$ *entsteht aus* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ *durch Adjunktion zweier Elemente* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$, *die folgende Relationen erfüllen*:

$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2$ *ist ein Element der Ordnung* 2 *aus* $\mathfrak{C}[\mathfrak{K}(\mathfrak{G})]$,

$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2$,

$\mathfrak{a}\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{b}\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\mathfrak{b}$ *für jedes* $\mathfrak{v}$ *aus* $\mathfrak{Z}$.

Dies folgt aus (1)—(3) unter Berücksichtigung von K., Fußnote [1]), wenn man als Elemente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ irgend zwei Erzeugende einer in $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})^2$ enthaltenen Quaternionengruppe wählt.

Satz 1: *Dann und nur dann existiert zu einer gegebenen Gruppe* $\mathfrak{H}$ *eine Gruppe* $\mathfrak{G}$ *derart, daß* $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ *hamiltonsch und* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{H}$ *ist, wenn*

1) *die Elemente aus $\mathfrak{H}$ sämtlich endliche, nicht durch 4 teilbare Ordnung haben,*

2) $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H})$ *Elemente der Ordnung 2 enthält.*

BEWEIS: Die Notwendigkeit der Bedingung 1 folgt aus (1c), die der Bedingung 2 aus (2) und aus (4b).

Seien also die Bedingungen 1 und 2 erfüllt und $\mathfrak{z}$ ein Element der Ordnung 2 aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H})$. Dann sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, die aus $\mathfrak{H}$ durch Adjunktion zweier Elemente $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ entsteht, die mit $\mathfrak{H}$ durch die folgenden Relationen verknüpft sind:

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{z}$$
$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{a}\,\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\,\mathfrak{a}\\ \mathfrak{b}\,\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\,\mathfrak{b}\end{array}\right\}\quad \text{für jedes } \mathfrak{h} \text{ aus } \mathfrak{H}.$$

Die Verträglichkeit dieser Relationen folgt daraus, daß $\mathfrak{z}$ Element aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H})$ ist.

Da $\mathfrak{z}$ ein Element der Ordnung 2 ist, so erzeugen die Elemente $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vom Quaternionentyp.

Wir zeigen:

$\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind in $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ enthalten.

Aus Symmetriegründen genügt es, dies für $\mathfrak{a}$ zu beweisen. — Ist $\mathfrak{g}$ irgend ein Element aus $\mathfrak{G}$, so läßt es sich stets auf eine der folgenden Formen bringen:

$\mathfrak{h}$, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}\,\mathfrak{h}$, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{h}$ mit $\mathfrak{h}$ aus $\mathfrak{H}$.

Wegen K., § 1 (8) genügt es zu zeigen [da ja offenbar alle Elemente aus $\mathfrak{G}$ endliche Ordnung haben], daß $\mathfrak{a}$ jedes Element aus $\mathfrak{G}$ in eine Potenz transformiert. Dies ist klar für Elemente der Form $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{h}$, da $\mathfrak{a}$ mit diesen vertauschbar ist. Weiter ist

$$\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{h} = \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{h} = \mathfrak{b}^3\mathfrak{h}.$$

Fall 1: Die Ordnung h von $\mathfrak{h}$ ist ungerade.

Dann wird

$$(\mathfrak{b}\,\mathfrak{h})^{1+2h} = \mathfrak{b}^{1+2h}\mathfrak{h}^{1+2h} = \mathfrak{b}^3\mathfrak{h}, \text{ da } \mathfrak{b} \text{ die Ordnung 4 hat und } 2h \equiv 2 \bmod 4 \text{ ist,}$$
$$= \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{a}.$$

Fall 2: Die Ordnung h von $\mathfrak{h}$ ist gerade.

Wegen Bedingung 1 wird dann $h = 2(1+2n)$, und wir erhalten:

$$(\mathfrak{b}\,\mathfrak{h})^{1+h} = \mathfrak{b}^{1+h}\mathfrak{h}^{1+h} = \mathfrak{b}^3\mathfrak{h}$$
$$= \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{a}.$$

Analog zeigt man, daß

$$\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{a} = \begin{cases}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{h})^{1+2h}, & \text{falls } h \text{ ungerade ist,}\\ (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{h})^{1+h}, & \text{falls } h \text{ gerade ist.}\end{cases}$$

Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{a}$ und also auch $\mathfrak{b}$ zu $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ gehören, d.h. $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ist hamiltonsch.

Wegen (1c) und Bedingung 1 ist $\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{B}(\mathfrak{G})$; ist $\mathfrak{g}$ nicht in $\mathfrak{H}$ enthalten, so hat es die Form $\mathfrak{a}\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{h}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{h}$ mit $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{H}$ und also eine durch 4 teilbare Ordnung, gehört also wegen (1c) nicht zu $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$, d.h. es ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{H}$.

Gezeigt ist auch der

Zusatz: *Es sei $\mathfrak{P}$ eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{H}$. Dann und nur dann existiert eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit hamiltonschem Kern derart, dass $\mathfrak{B}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{C}[\mathfrak{K}(\mathfrak{G})] = \mathfrak{P}$ ist, wenn*

1) *die Elemente aus $\mathfrak{H}$ sämtlich endliche, nicht durch 4 teilbare Ordnung haben,*

2) *$\mathfrak{P}$ ein Zyklus der Ordnung 2 aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H})$ ist.*

Satz 2: *Zwei Gruppen $\mathfrak{G}^{(1)}$ und $\mathfrak{G}^{(2)}$ mit hamiltonschem Kern sind dann und nur dann [einstufig] isomorph, wenn es eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{B}(\mathfrak{G}^{(1)})$ auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{G}^{(2)})$ gibt, die $\mathfrak{C}[\mathfrak{K}(\mathfrak{G}^{(1)})]$ in $\mathfrak{C}[\mathfrak{K}(\mathfrak{G}^{(2)})]$ überführt.*

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung folgt daraus, daß $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{C}[\mathfrak{K}(\mathfrak{G})]$ gruppeninvariant definierte Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind.

Sei also α eine $\mathfrak{C}[\mathfrak{K}(\mathfrak{G}^{(1)})]$ in $\mathfrak{C}[\mathfrak{K}(\mathfrak{G}^{(2)})]$ überführende isomorphe Abbildung von $\mathfrak{B}(\mathfrak{G}^{(1)})$ auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{G}^{(2)})$. Weiter seien $\mathfrak{a}^{(i)}$, $\mathfrak{b}^{(i)}$ zwei eine Quaternionenuntergruppe von $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}^{(i)})$ erzeugende Elemente. Dann läßt sich jedes Element aus $\mathfrak{G}^{(i)}$ auf eine und nur eine Weise auf die Form:

$$\mathfrak{a}^{(i)r}\mathfrak{b}^{(i)s}\mathfrak{v} \text{ mit } r, s = 0, 1 \text{ und } \mathfrak{v} \text{ aus } \mathfrak{B}(\mathfrak{G}^{(i)})$$

bringen, und wir definieren:

$$\beta(\mathfrak{a}^{(1)r}\mathfrak{b}^{(1)s}\mathfrak{v}) = \mathfrak{a}^{(2)r}\mathfrak{b}^{(2)s}\alpha(\mathfrak{v}).$$

Da α eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathfrak{B}(\mathfrak{G}^{(1)})$ auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{G}^{(2)})$ ist, so ist auch β eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathfrak{G}^{(1)}$ auf $\mathfrak{G}^{(2)}$; da α ein Isomorphismus ist, der wegen K., § 4 (14) und wegen unserer Bedingung

$$\alpha(\mathfrak{a}^{(1)2}) = \alpha(\mathfrak{b}^{(1)2}) = \alpha[(\mathfrak{a}^{(1)}\mathfrak{b}^{(1)2}] = \mathfrak{a}^{(2)2} = \mathfrak{b}^{(2)2} = (\mathfrak{a}^{(2)}\mathfrak{b}^{(2)})^2$$

erfüllt, so ist β ein gesuchter Isomorphismus von $\mathfrak{G}^{(1)}$ auf $\mathfrak{G}^{(2)}$.

Gezeigt ist auch der

Zusatz 1: *Jede $\mathfrak{C}[\mathfrak{K}(\mathfrak{G}^{(1)})]$ in $\mathfrak{C}[\mathfrak{K}(\mathfrak{G}^{(2)})]$ überführende isomorphe Abbildung von $\mathfrak{B}(\mathfrak{G}^{(1)})$ auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{G}^{(2)})$ läßt sich [auf mannigfache Weise] zu einer isomorphen Abbildung von $\mathfrak{G}^{(1)}$ auf $\mathfrak{G}^{(2)}$ erweitern.*

Nennt man zwei Elemente der Gruppe $\mathfrak{A}$ *isotyp in* $\mathfrak{A}$, wenn sie durch einen Automorphismus von $\mathfrak{A}$ ineinander überführbar sind, so folgt aus dem Zusatz zu Satz 1 und Satz 2 der

ZUSATZ 2: *Ist $\mathfrak{H}$ eine Gruppe, deren Elemente endliche, nicht durch 4 teilbare Ordnung haben, so gibt es zu jeder Klasse in $\mathfrak{H}$ isotyper Elemente der Ordnung 2 aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H})$ eine und im wesentlichen nur eine Gruppe $\mathfrak{G}$ derart, daß $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ hamiltonsch und $\mathfrak{V}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{H}$ ist, während zu verschiedenen Klassen wesentlich verschiedene Gruppen $\mathfrak{G}$ dieser Art gehören.*

Bedenkt man, daß eine Gruppe, deren sämtliche Elemente die Ordnung 2 haben, direktes Produkt von Zyklen der Ordnung 2 ist — denn wegen $1 = (\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2 = \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{x}^{-1}\mathfrak{y}^{-1}$ ist eine solche Gruppe abelsch —, daß jede Untergruppe einer solchen Gruppe direkter Faktor ist, daß also alle Elemente $\neq 1$ in einer solchen Gruppe isotyp sind, so folgt der

ZUSATZ 3: *Ist $\mathfrak{G}$ eine Primärgruppe mit hamiltonschem Kern, so ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}(\mathfrak{G})$* [2]) *und man erhält also genau alle Primärgruppen mit hamiltonschem Kern als direktes Produkt einer Quaternionengruppe mit einer beliebigen Anzahl von Zyklen der Ordnung 2.*

Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit hamiltonschem Kern, so ist im Allgemeinen die Struktur von $\mathfrak{G}$ nicht allein durch die Struktur von $\mathfrak{V}(\mathfrak{G})$ bestimmt. Um dies zu zeigen, genügt es wegen Zusatz 2 eine Gruppe $\mathfrak{H}$ zu konstruieren, deren Elemente endliche, nicht durch 4 teilbare Ordnung haben, und deren Zentrum verschiedene Klassen von in $\mathfrak{H}$ isotypen Elementen der Ordnung 2 enthält. Ein Beispiel einer solchen Gruppe ist die Gruppe $\mathfrak{H}$ mit den

Erzeugenden: $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ und den
Relationen: $\mathfrak{u}^2 = \mathfrak{v}^2 = \mathfrak{w}^2 = 1, \ (\mathfrak{v}\mathfrak{w})^{2(1+2n)} = 1$ mit $n > 0$,
$\mathfrak{u}\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{u}\mathfrak{w} = \mathfrak{w}\mathfrak{u}$.

Dann ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{H}) = \{\mathfrak{u}, (\mathfrak{v}\mathfrak{w})^{1+2n}\}$, und $\mathfrak{u}$ und $(\mathfrak{v}\mathfrak{w})^{1+2n}$ sind nicht isotyp in $\mathfrak{H}$.

---

[2]) Hieraus folgt insbesondere, daß die Behauptung von K, § 4, Satz 5 für alle Gruppen mit hamiltonschem Kern richtig bleibt, die als direktes Produkt ihrer Primärkomponenten darstellbar sind.

(Eingegangen den 24. Mai 1934.)